Andrea Dall'Aglio.

Sito web del corso:
elearning2.uniroma1.it

Iscriversi al corso su elearning!

Orario di ricevimento:

Lunedì 11:00 → 12:30
Giovedì 15:30 → 17:00

Dip. di Matematica (Città Universitaria) Stanza 4, Pianterreno

email: dallaglio@mat.uniroma1.it
tel. 06.49913248.

La mail è solo per informazioni pratiche, o per prendere appuntamento, non per "discutere" di matematica.

Approfittare del ricevimento studenti.

Usare il forum della pagina web.

Tutoraggio: martedì dalle 12:00 alle 13:30 (in Aula 8)

Solo questa settimana ci sarà uno scambio tra tutoraggio e lezione.
PUNTUALI.

Domani lezione 8:30 → 10:00
e 12:00 → 13:30

Tutoraggio giovedì 12:00 → 13:30

Libro di testo: Bertsch - Dal Passo - Giacomelli.

Altri testi (in alternativa o a complemento)

Fusco - Marcellini - Sbordone - Analisi Mat. 2 - Ed. Liguori

Barutello - Conti + 3 - Analisi Mat. 2.

Giusti - A.M. 2.

Esercizi: Marcellini - Sbordone - Esercitazione di Matematica Vol II - Parti 1-4 - Ed Liguori.

- \+ altri testi (va quasi tutto bene)
- \+ esercizi sulla pagina web
- \+ vecchi esercizi di esame
- \+ esercizi del libro

MODALITÀ D'ESAME

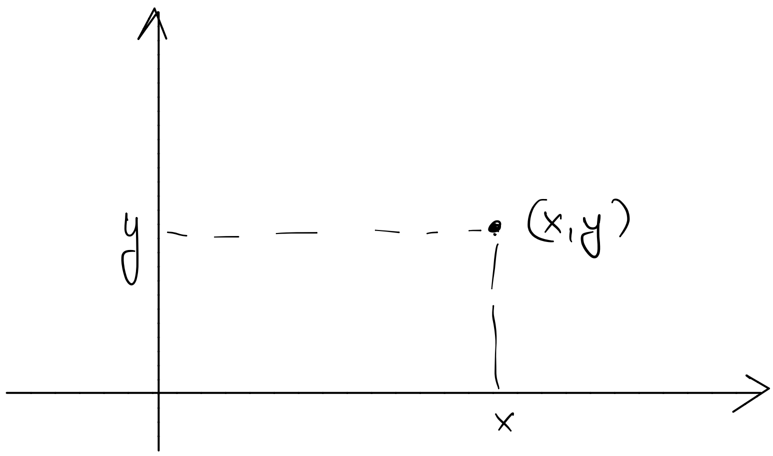
- Prova pratica (scritto da 2,5 h), nella data dell'appello.
  \+ qualche giorno per la correzione
- Prova di teoria (scritto a piccoli gruppi da 45') (solo per gli ammessi)
  Correzione immediata
  e subito prova orale

Si può evitare la prova orale ma in tal caso il voto sarà troncato a 26.

$$\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{ \underline{x} = (x_1, x_2, \dots x_N) : x_1, x_2, \dots x_N \in \mathbb{R} \}$$

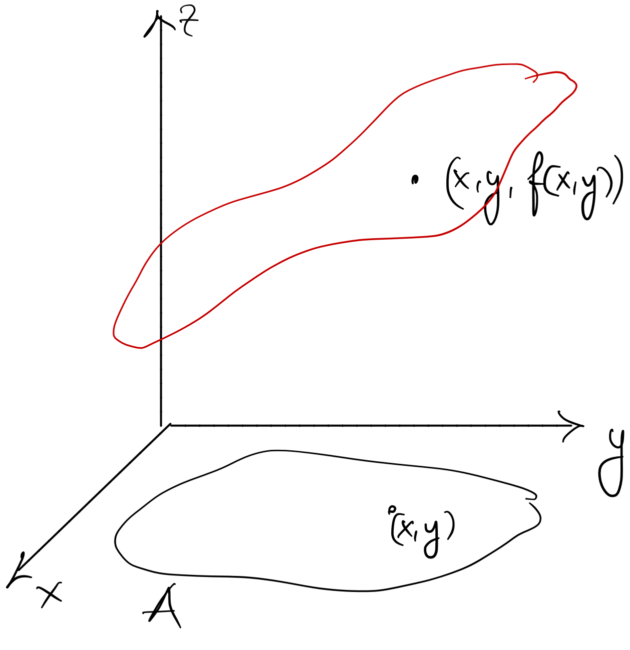
è l'insieme delle N-ple ordinate di numeri reali.

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) : x, y \in \mathbb{R} \}.$$



$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico è l'insieme delle terne (x,y,z) dove $z = f(x,y)$



$\underline{x} \in \mathbb{R}^N$

Def. norma (o modulo) di $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$

$$\|\underline{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right]^{1/2}$$

$N = 2 \qquad \underline{x} = (3, -4) \Rightarrow \|\underline{x}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$

se $N = 1$, $\quad x = \sqrt{x^2} = |x|$

$\|\underline{x}\|$ è la distanza dall'origine

Def distanza euclidea tra $\underline{x}$ "$(x_1 \dots x_N)$" e $\underline{y} = (y_1 \dots y_N) \in \mathbb{R}^N$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}.$$

Proprietà della distanza

1) $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$

2) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$

3) $d(\underline{x}, \underline{y}) \le d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}) \qquad \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^N$

disuguaglianza triangolare.

Vale anche per il modulo, nella forma

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \le \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$

Su $\mathbb{R}^N$ è dato un prodotto scalare

$$(\underline{x},\underline{y}) = \underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|\cos\theta$$

$$(\underline{x},\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2$$

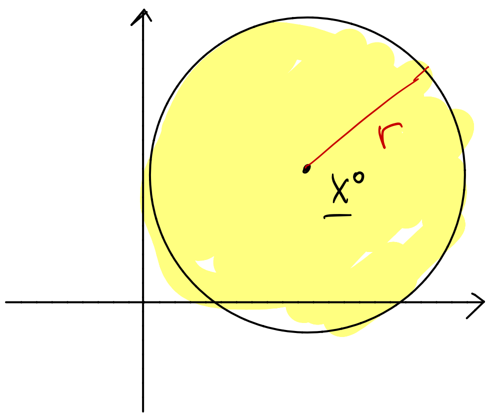
Dis. di Cauchy-Schwarz: $|(\underline{x},\underline{y})| \leq \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|$

<u>Def</u>

Intorno sferico di centro $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^N$ e raggio $r>0$

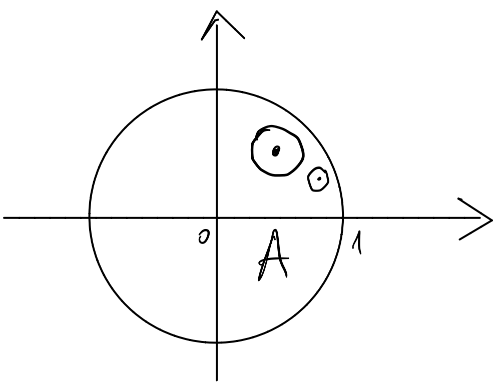
$$B(\underline{x}^0, r) = \{\underline{x}\in\mathbb{R}^N : \|\underline{x}-\underline{x}^0\| < r\}.$$

palla di centro $\underline{x}^0$ e raggio r.

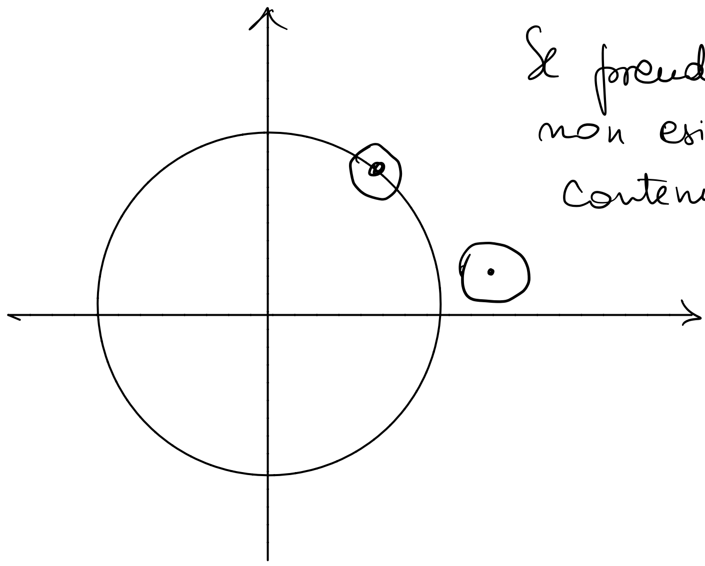


Un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice <u>aperto</u> se $\forall\, \underline{x} \in A$ $\exists$ un intorno sferico di centro $\underline{x}$ tutto contenuto in A.

<u>Esempio:</u> In $\mathbb{R}^2$, il cerchio $\overset{A}{\overline{\overline{\ }}}\,B(0,1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ è aperto.



ESEMPIO L'insieme $E = \{(x,y): \ x^2+y^2 \leq 1\}$ non è aperto



Se prendo (x,y) t.c. $x^2+y^2=1$, non esiste nessun suo intorno tutto contenuto in E.

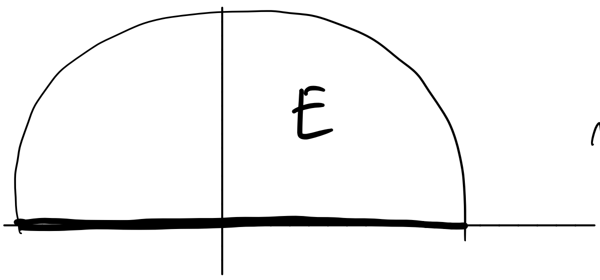
Def Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto

L'insieme $E = \{(x,y): \ x^2+y^2 \leq 1\}$ è chiuso.

Infatti il suo complementare $E^c = \{(x,y): \ x^2+y^2 > 1\}$ è aperto

OSS Esistono insiemi che non sono né chiusi né aperti

Esempio: $E = \{(x,y): \ x^2+y^2<1 \ , \ y \geq 0\}$



né aperto né chiuso

Invece si dimostra che gli unici insiemi di $\mathbb{R}^N$ che siano sia aperti che chiusi sono:

$\mathbb{R}^N$ e $\emptyset$

Def. Dato un qualunque insieme $E \subset \mathbb{R}^N$, un pto $\underline{x}^0$ di E si dice interno ad E se esiste un intorno di $\underline{x}^0$ tutto contenuto in E

OSS. Un insieme è aperto se e solo se tutti i suoi punti sono interni.

Def. Dato $E \subset \mathbb{R}^N$, un pto $\underline{x}^0 \in E^c$ si dice esterno ad E se $\exists$ intorno di $\underline{x}^0$ tutto contenuto in E^c
cioè se è interno a E^c.

OSS E è chiuso se tutti i pti non appartenenti ad E sono esterni ad E.

Dato E, viene definito $\mathring{E}$ = interno di E = $\{\underline{x}$ interni ad $E\}$

Dato E, ci sono pti che non sono né interni né esterni.
Questi costituiscono la frontiera ∂E di E

$\partial E = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N :$ ogni intorno di $\underline{x}$ contiene sia punti di E che punti di $E^c \}$.

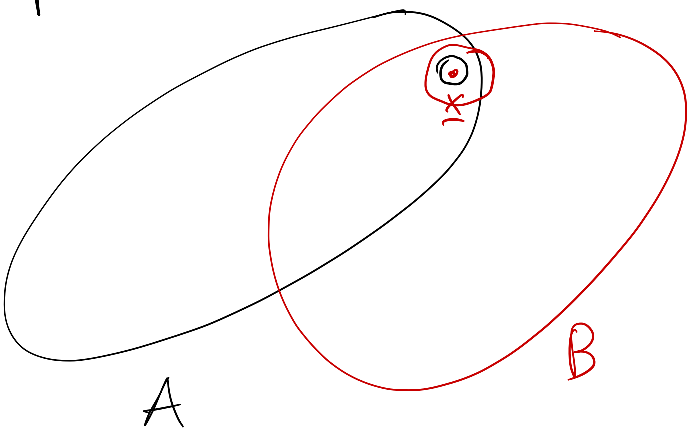
$E = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\} \Rightarrow \partial E = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$
$\{ \quad\quad \leq \} \Rightarrow \partial E =$ idem.

Dato $E \subset \mathbb{R}^N$, si definisce chiusura di E il più piccolo chiuso contenente E. $\overline{E}$

Si può dimostrare che $\overline{E} = E \cup \partial E$.

Prop. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una qualsiasi famiglia di aperti di $\mathbb{R}^N$ (finita o infinita), la loro unione è un aperto. **Dim. immediata.**

Prop. Se A, B sono due aperti, la loro intersezione è un aperto. $\Rightarrow$ vero per un numero finito di aperti



falso per un numero infinito di aperti!

$$A_n = \{ \underline{x} : \|\underline{x}\| < 1/n \} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\underline{0}\} \text{ non aperto}$$

Prop. Se $\{C_i\}_{i \in I}$ è una qualsiasi famiglia di chiusi di $\mathbb{R}^N$ (finita o infinita), la loro intersezione è un chiuso. Dim. immediata.

Prop. Se A, B sono due chiusi, la loro unione è un chiuso $\Rightarrow$ vero per un numero finito di chiusi

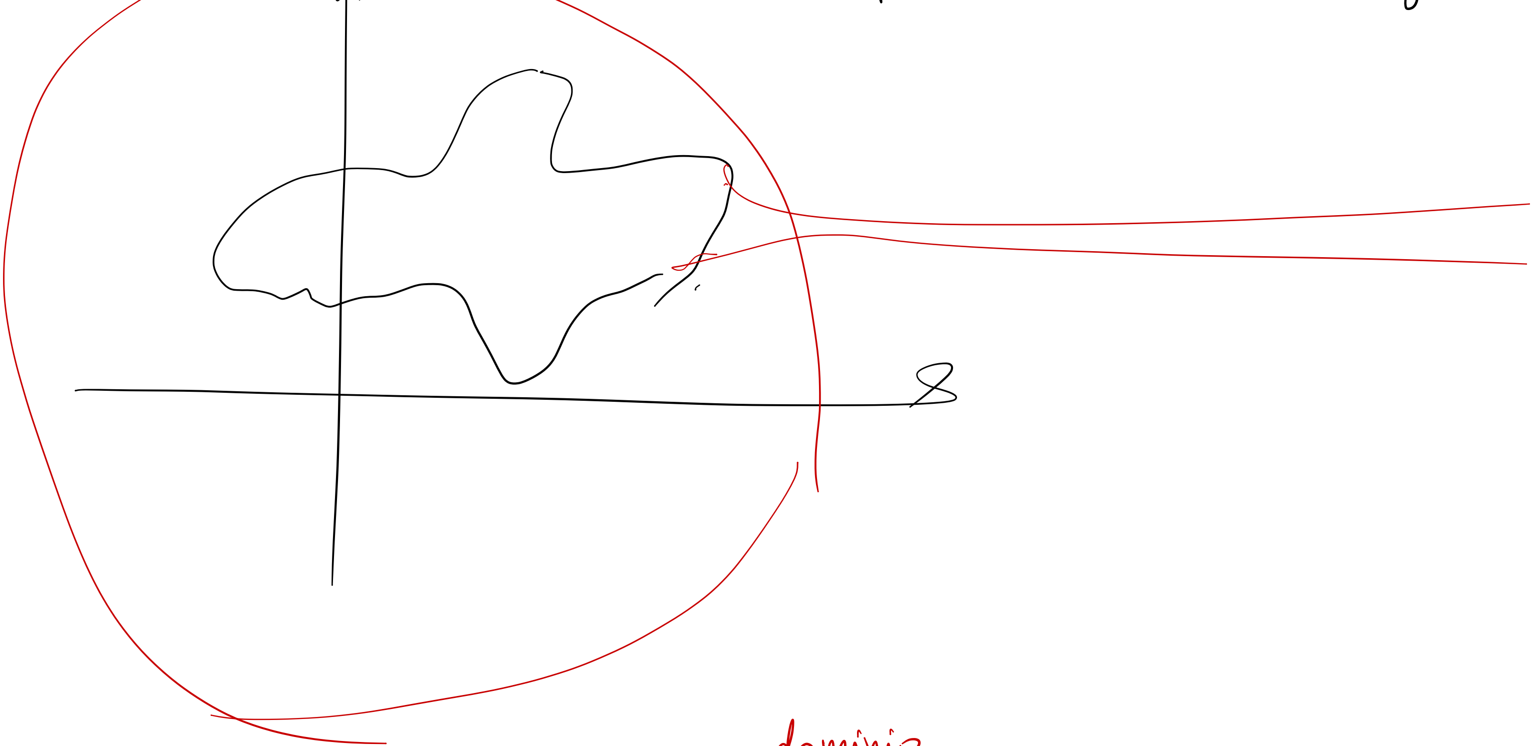
falso per un numero infinito di chiusi.

Trovare il controesempio

DEF Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice <u>limitato</u> se

$$\exists M>0 \quad \text{t.c.} \quad \|\underline{x}\| \le M \quad \forall \underline{x} \in E.$$

Ossia se E è contenuto in una palla centrata nell'origine.



Sia $E\subset\mathbb{R}^N$ sia

$$f: \overset{\text{dominio}}{E} \to \mathbb{R}, \qquad \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$$

<u>Esempio:</u> $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

in questo caso il dominio non è scritto esplicitamente ma si può trovare un "dominio naturale", che è l'insieme degli (x,y) per cui l'espressione ha senso.

In questo caso

dom f = cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2.