Compito di Meccanica Quantistica del 28/01/2014

Una particella di massa m e spin 1/2 si muove in tre dimensioni governata dalla seguente Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \alpha \left[\frac{(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S})}{\hbar^2} + \frac{J_z}{\hbar} \right] ,$$

con $0 < \alpha < \hbar\omega$, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

1. Si considerino le seguenti funzioni d'onda non normalizzate:

   $$|\Psi_1\rangle = N_1 r e^{-\beta^2 r^2/2} Y_1^{-1} \chi_{1/2}^{1/2}; \quad |\Psi_2\rangle = N_2 r e^{-\beta^2 r^2/2} Y_1^{+1} \chi_{1/2}^{1/2} \ ; |\Psi_3\rangle = N_3 e^{-\beta^2 r^2/2} \chi_{1/2}^{1/2};$$

   dove $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$ e gli spinori χ soddisfano a $S_z \chi_{\pm 1/2}^{1/2} = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_{\pm 1/2}^{1/2}$.

   a) Si indichi se tra queste ci sono delle autofunzioni dell'Hamiltoniana, motivando le risposte.

   Si supponga ora che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema sia dato da una delle tre funzioni d'onda.

   b) Per ogni funzione d'onda data si dica se lo stato del sistema cambia per $t > 0$.

   c) Per le funzioni d'onda per le quali il sistema cambia al variare di t, si calcoli l'intervallo di tempo T impiegato dal sistema per tornare per la prima volta nello stato iniziale.

   d) Per ogni funzione d'onda data, si determini in funzione del tempo la probabilità che una misura di S_x dia $\hbar/2$.

2. a) Si determini lo stato fondamentale $|\phi_f\rangle$ dell'Hamiltoniana $\mathcal{H}$. Si esprima la funzione d'onda in termini delle $\phi_{k,l,m}$ riportate sotto e degli spinori χ.

   b) Si determini l'autostato $|\phi\rangle$ dell'Hamiltoniana $\mathcal{H}$ di minima energia che soddisfa $L^2|\phi\rangle = 2\hbar^2|\phi\rangle$. Si esprima la funzione d'onda in termini delle $\phi_{k,l,m}$ riportate sotto e degli spinori χ.

   c) Al tempo $t = 0$ viene accesa una perturbazione

   $$\mathcal{H}_I = \gamma z S_x \theta(t),$$

   (γ è una costante), per cui l'Hamiltoniana del sistema diventa $\mathcal{H} + \mathcal{H}_I$. Se il sistema si trova nello stato $|\phi\rangle$ al tempo $t = 0$, si calcoli al prim'ordine in teoria delle perturbazioni la probabilità che il sistema transisca allo stato fondamentale $|\phi_f\rangle$.

Autofunzioni normalizzate $\phi_{k,l,m}$ dell'oscillatore isotropo tridimensionale. Gli indici l, m si riferiscono al momento angolare, $k = n - l$, n è il numero quantico principale $[E_n = (n + 3/2)\hbar\omega]$ e Y_l^m sono le armoniche sferiche:

$$\phi_{0,0,0} = \frac{2\beta^{3/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\beta^2 r^2/2} Y_0^0; \qquad \phi_{0,1,m} = \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{\beta^{3/2}}{\pi^{1/4}} \beta r e^{-\beta^2 r^2/2} Y_1^m;$$

$$\phi_{0,2,m} = \sqrt{\frac{16}{15}} \frac{\beta^{3/2}}{\pi^{1/4}} \beta^2 r^2 e^{-\beta^2 r^2/2} Y_2^m; \qquad \phi_{2,0,m} = \frac{\sqrt{6}\beta^{3/2}}{\pi^{1/4}} (1 - \tfrac{2}{3}\beta^2 r^2) e^{-\beta^2 r^2/2} Y_0^0.$$

Compito di Meccanica Quantistica del 16/02/2015

Due particelle identiche di spin 1/2 indicate con A e B sono vincolate a muoversi su una superficie sferica di raggio $r = 1$ soggette alla seguente hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon}{\hbar^2}(L_A^2 + L_B^2 + \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B)\ ;$$

con ϵ costante positiva. Si risponda alle seguenti domande in modo sintetico e chiaro.

1. Si determini l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e degli stati eccitati del sistema, fino a energie $E < \frac{5}{2}\epsilon$. Si scrivano i ket corrispondenti, specificando in modo sintetico e chiaro la base scelta.

2. Si considerino le seguenti funzione d'onda:

$$\Psi_1 = M\ \left(Y_{A,1}^{0} Y_{B,1}^{1} + Y_{A,1}^{-1} Y_{B,1}^{1} - Y_{A,1}^{1} Y_{B,1}^{0} - Y_{A,1}^{1} Y_{B,1}^{-1}\right)\chi_1^0\,; \quad \Psi_2 = N\,(Y_{A,1}^{-1} Y_{B,1}^{-1} + 1\,)\chi_0^0\ ,$$

   dove $\chi_s^{s_z}$ e' lo spinore riferito all'asse z corrispondente allo spin totale $\mathbf{S_T} = (\mathbf{S_A} + \mathbf{S_B})$, $Y_{A,l}^m$ e $Y_{B,l}^m$ sono le armoniche sferiche riferite all'asse z per le due particelle ed M, N sono costanti di normalizzazione da determinare.
   a) Si specifichi se Ψ_1 e Ψ_2 sono autofunzioni dell'Hamiltoniana.
   b) Si scrivano Ψ_1 e Ψ_2 in termini degli spinori $\chi_s^{s_z}$ e delle autofunzioni normalizzate $|\ell_A, \ell_B; \ell, m\rangle$, dove $L_T^2|\ell_A, \ell_B; \ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell_A, \ell_B; \ell, m\rangle$, $L_{T,z}|\ell_A, \ell_B; \ell, m\rangle = \hbar m|\ell_A, \ell_B; \ell, m\rangle$, e $\mathbf{L}_T = \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B$.
   c) Si determinino quali valori di $J^2 = (\mathbf{L}_T + \mathbf{S}_T)^2$ risulterebbero da una misura sugli stati corrispondenti alle due funzioni d'onda e con quali probabilità.

3. Si consideri lo stato $|\Phi\rangle = \mathcal{O}|\Psi_1\rangle$, dove $\mathcal{O} = \exp\{\frac{\pi}{2\hbar^2}(L_{T,x}^2 + L_{T,y}^2)\}$.
   a) Si specifichi se $\mathcal{O}$ è unitario.
   b) Si calcolino i possibili risultati di una misura di $L_{T,z}^2$ sullo stato $|\Phi\rangle$ e con quali probabilità.

4. Al tempo $t = 0$ il sistema è specificato dalla funzione d'onda Ψ_2.
   a) Si determini la funzione d'onda $\Psi_2(t)$ del sistema al tempo t.
   b) Si calcoli in funzione del tempo il valore di aspettazione $\langle\Psi_2(t)|\frac{x_A x_B}{r^2}|\Psi_2(t)\rangle$.

Compito di Meccanica Quantistica del 14/07/2015

1) Una particella si muove in una dimensione governata dalla Hamiltoniana di oscillatore armonico di pulsazione ω e massa m. Al tempo $t = 0$ lo stato della particella è:

$$|\alpha, t = 0\rangle = \mathcal{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}^n}{\sqrt{n}} |n\rangle \ ,$$

dove $\mathcal{C}$ è un numero complesso di modulo $|\mathcal{C}| = 1/3$ e $|n\rangle$ è l'autoket n-esimo dell'energia dell'oscillatore armonico.

a) Normalizzare lo stato.

b) Determinare lo stato $|\alpha, t\rangle$ evoluto per $t > 0$.

c) Calcolare la probabilità di ritrovare per $t = \pi/\omega$ lo stato $|\alpha, t = 0\rangle$.

d) Calcolare il valore di aspettazione della Hamiltoniana nello stato $|\alpha, t\rangle$.

Si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n = -\ln(1 - x)$ per $|x| < 1$.

2) Una particella di massa m, carica q e spin 1/2 è vincolata a muoversi in tre dimensioni soggetta alla hamiltoniana seguente:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \alpha \frac{J^2}{\hbar^2} \ ,$$

con $0 < \alpha \ll E_I$, dove $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$, $E_I = me^4/2\hbar^2$ è l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ è il momento angolare totale del sistema.

1. Si considerino le seguenti funzioni d'onda spinoriali:

   $$\Psi_1 = \frac{N_1}{r} R_{n=2,l=1}(r) \begin{pmatrix} x + iy \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Psi_2 = \frac{N_2}{r} R_{n=2,l=1}(r) \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \ \Psi_3 = \frac{N_3}{r} R_{n=2,l=1}(r) \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \ ,$$

   dove N_i sono costanti di normalizzazione, i simboli n, l e $R_{n,l}(r)$ si riferiscono alla usuale teoria dell'atomo di idrogeno, e gli spinori si riferiscono all'asse z. Le si riscriva come combinazione lineare dei prodotti tensore $|n, l, l_z\rangle \otimes |s, s_z\rangle$.

2. Si dica quali tra queste funzioni d'onda sono autofunzioni dell'hamiltoniana del sistema e con quale autovalore.

3. Si calcolino le normalizzazioni N_1, N_2, N_3 e si determinino le funzioni d'onda $\Psi_i(t)$, ottenute per evoluzione temporale dalle Ψ_i per $t > 0$ (è comodo utilizzare una base in cui J^2 e J_z sono diagonali).

4. Si calcolino le dispersioni $\langle\Psi_1|(\Delta\mathbf{J}^2)^2|\Psi_1\rangle$ e $\langle\Psi_2|(\Delta\mathbf{J}^2)^2|\Psi_2\rangle$, con $\Delta\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}^2 - \langle\mathbf{J}^2\rangle$.

Compito di Meccanica Quantistica del giorno 9/09/2015

Si consideri un sistema costituito da due particelle identiche A e B di spin 1 e massa m la cui Hamiltoniana nel sistema del centro di massa è data da

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 r^2}{2} + \frac{\alpha}{\hbar} S_{Tz} \,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ sono rispettivamente l'impulso relativo e la coordinata relativa e $\mu = m/2$. Si supponga inoltre $\alpha < \hbar\omega/100$. Si risolva l'esercizio nel sistema di riferimento del centro di massa.

1. Calcolare il commutatore $C = [\mathcal{H} \, , \, \mathbf{J}^2]$, dove $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_T$, $\mathbf{L}$ è il momento angolare totale del sistema e $\mathbf{S}_T$ lo spin totale.

2. Si determinino gli autoket, le energie associate e le degenerazioni dello spettro del sistema fino ad energie $E < 3\hbar\omega$.

3. Si consideri lo stato normalizzato $|\psi\rangle = \delta|n = 0, \ell = 0, \ell_z = 0\rangle\chi_0^0 + \gamma|n = 1, \ell = 1, \ell_z = 0\rangle\chi_1^0$, dove δ e γ sono delle costanti reali, n è il numero quantico che caratterizza gli stati dell'oscillatore armonico, i numeri quantici ℓ ed ℓ_z si riferiscono al momento angolare totale $\mathbf{L}$, e gli spinori $\chi_s^{s_z}$ sono autofunzioni di S_T^2 e S_{Tz}. Si determinino δ e γ sapendo che la probabilità di misurare il valore $6\hbar^2$ per J^2 è $P(6\hbar^2) = 1/3$.

4. Si calcoli $\langle\psi|z^2|\psi\rangle$.