- Venerdì esercitazione facoltativa (Prof. Montefusco) ore 14:30 aula Amaldi

- Venerdì 20 novembre ore 16:00 Aule 3, 4, 5 di Matematica.

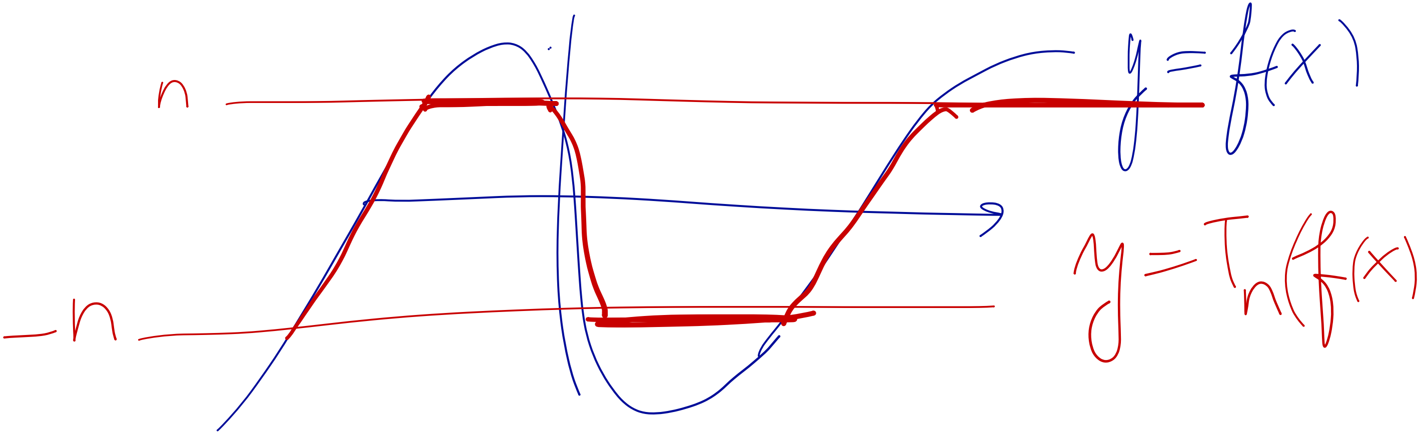
  Prenotarsi da stasera sulla web-page.

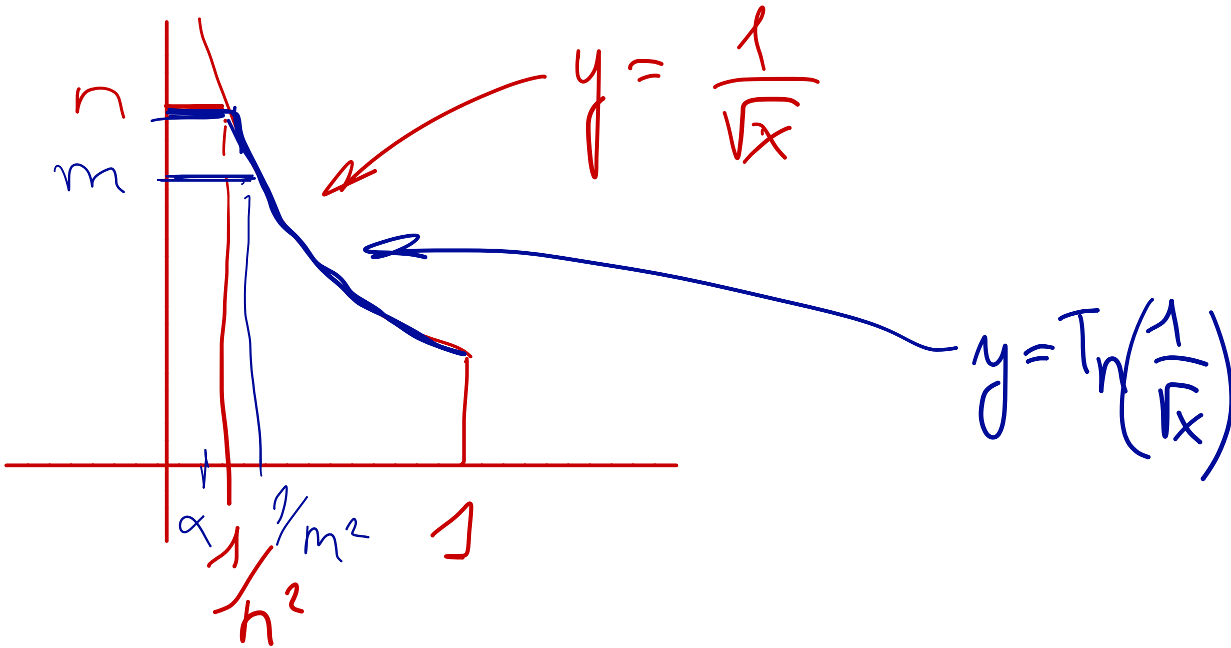
$C([a,b])$ con la distanza $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

non è completo.

<u>Esempio 1</u> $f_n(x) = T_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \begin{cases} n & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] \\ 1/\sqrt{x} & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$

$$T_n(s) = \begin{cases} s & \text{se } |s| < n \\ n & \text{se } s \geq n \\ -n & \text{se } s \leq -n \end{cases}$$





1) $f_n(x) \in C([0,1])$

2) $\{f_n\}$ è di Cauchy

supp. $n>m$

$$d_1(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = \int_0^{1/m^2} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\leq 1/\sqrt{x}}\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^{1/m^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^{1/m^2} = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

se scelgo $n > m > \frac{2}{\varepsilon}$

3) $\{f_n\}$ non converge a una funzione continua in $[0,1]$

Se fosse $f_n \longrightarrow f \in C([0,1])$

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$}}$$

$$\int_\alpha^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \qquad \forall \alpha > 0.$$

$$\int_\alpha^1 \overset{\text{per } n \text{ abbastanza grande}}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - f(x)\right|dx \Longrightarrow \int_\alpha^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - f(x)\right| = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ in } [\alpha, 1]$$

$$\Downarrow \quad \alpha \text{ arbitrario}$$

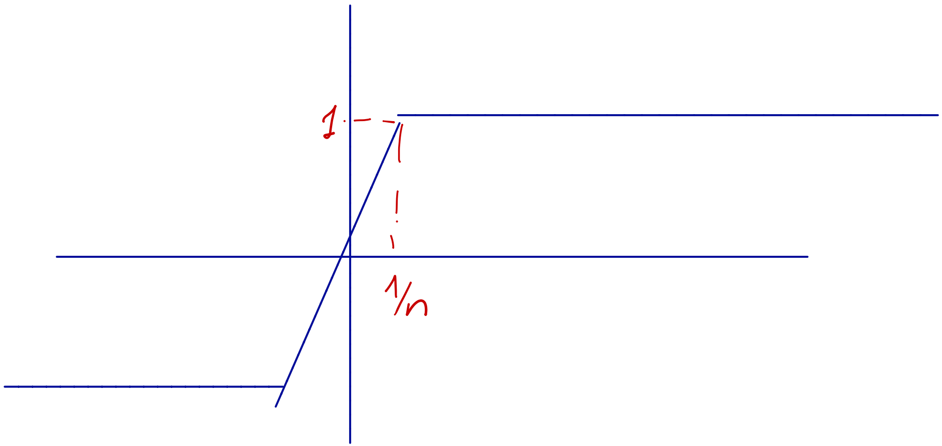
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$$

$$\Downarrow$$

f non continua in $[0,1]$

Altri esempi (esercizio per casa!)

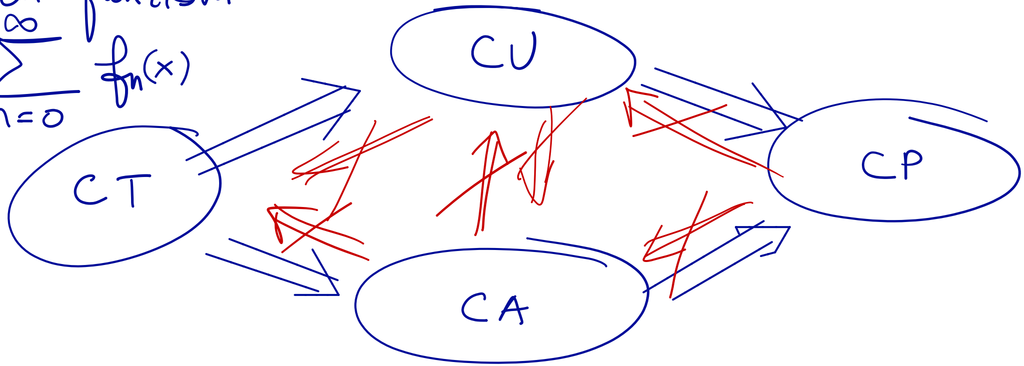
2) $$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ nx & \text{se } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ -1 & \text{se } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \end{cases} = n\, T_{\frac{1}{n}}(x) \quad \text{in } C([-1,1])$$



3) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ in $(-1, 1)$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$



$(C.A) \not\Rightarrow (C.U)$ $\qquad \sum x^n$ in $(-1,1)$

$(C.U) \not\Rightarrow (C.A)$ $\qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (Leibniz) $\qquad S_n(x) \longrightarrow S(x)$ ma queste non dipendono da x

$\Rightarrow$ la convergenza è uniforme

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = |S_n - S| \longrightarrow 0$$

$(CP) \not\Rightarrow (CA)$ $\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$

$(CP) \not\Rightarrow (C.U)$ $\quad \sum x^n \quad$ in $(-1,1)$

$(C.U.) + (f_n \text{ a segno costante}) \overset{?}{\Longrightarrow} C.T.$? Pensarci fino a venerdì.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4+3n^4} \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

La C.P. è ovvia perché, per x fissato

(C.A.) $|f_n(x)| \sim \dfrac{c}{n^4}$

(C.T.) <u>Def.</u> $\sum f_n(x)$ converge totalmente in I

se, posto $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

In questo caso $I = \mathbb{R}$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{x^4+3n^4} = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{x}{x^4+3n^4}$$

Studiare la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4+3n^4}$$

La C.P. è ovvia perché, per x fissato

(C.A.) $|f_n(x)| \sim \dfrac{c}{n^4}$

(C.T.) <u>Def.</u> $\sum f_n(x)$ converge totalmente in I

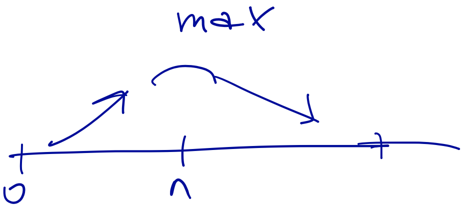
se, posto $M_n = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$, si ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

In questo caso $I=\mathbb{R}$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{x^4+3n^4} = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{x}{x^4+3n^4}$$

Idea:

Differenziamo:



$$f_n'(x) = \frac{x^4+3n^4-x\cdot 4x^3}{(x^4+3n^4)^2} = \frac{3(n^4-x^4)}{(\quad)^2}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n}{n^4+3n^4} = \frac{1}{4n^3} = M_n$$

$\sum M_n < \infty$? Sì! $\Rightarrow$ la serie conv. totalm $\Rightarrow$ la serie conv. unif^{te}.

Pregi della C.U. delle serie:

Thm. 1 $f_n(x) \in C(I)$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente.
Allora la somma $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ continua.

Dim $f_n(x)$ continue $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} S_n(x) \text{ continue} \\ S_n(x) \to S(x) \text{ unif}^{\text{te}} \text{ in } I \end{array}\right\} \Rightarrow S(x)$ continua in I

$\square$

Thm. 2 (Integrazione per serie)

$f_n \in C([a,b])$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga unif^{te} in $[a,b]$

Allora la somma $s(x)$ verifica

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(e ovviamente quest'ultima serie converge)

OOPS! A LEZIONE AVEVO SCORDATO DI SCRIVERE QUESTO n.

cioè $$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Esempio Voglio calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ per $x \in (0,1)$

Sappiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in (0,1)$

Fisso $\bar{x} \in (0,1) \Rightarrow$ la convergenza è uniforme in $[0,\bar{x}]$

$\Rightarrow$ Applico il teorema precedente nell'int. $[0,\bar{x}]$

$$\int_0^{\bar{x}} s(x)\,dx = \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{1-x} \overset{\text{THM}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\bar{x}} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^{\,n+1}}{n+1} \overset{n+1=m}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{x}^{\,m}}{m}$$

$$\frac{dx}{1-x}\text{ integral } = -\ln(1-\bar{x}) \qquad \forall \bar{x} \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad \forall x \in (0,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2.$$

Dim THM INTEGRAZ.

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

$$\Big\downarrow \; s_n \to s \text{ unif}^{te}$$

$$\int_a^b s(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx. \qquad \square$$

Thm. di derivazione per serie.

$f_n \in C^1(I)$,

1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converga unif^{te} in I, e sia $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$

2) $\exists\, x_0 \in I$ t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converga.

Allora: a) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ conv. unif^{te} a una $s(x)$ in I

b) $s(x)$ è C^1, $s'(x) = g(x)$

Cioè:

La derivata della somma è la somma delle derivate

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'$$

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad , \quad \text{dove } x_0 \in \mathbb{R} \text{ assegnato}$$

e $\{a_n\}$ è una succ^{ne} data.

Esempio: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serie geometrica

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n} (x-3)^n$

1) C.P. in $(-1,1)$, C.A in $(-1,1)$, C.T. in $[-\alpha, \alpha]$ $\forall \alpha \in (0,1)$

2) C.A. $\sum \underbrace{\frac{|x|^n}{n}}_{b_n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{|x|^n}} = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$

Se $|x| < 1 \Rightarrow$ la serie C.A. Se $|x| > 1 \Rightarrow \frac{|x|^n}{n} \to +\infty \Rightarrow$ la Σ non converge

Se $|x|<1 \Rightarrow$ La serie converge (assolutam.)

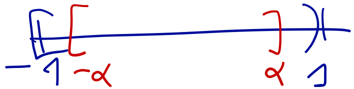
Se $|x|>1 \Rightarrow$ La serie non converge

se $x=1$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ diverge

se $x=-1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (ma non ass.)

C.P. in $[-1,1)$

C.U. in $[-\alpha,\alpha]$ con $0<\alpha<1$.



in $[-\alpha,\alpha]$ si ha conv. totale

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{\alpha^n}{n} = M_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

non si ha C.U. in $[-1,1)$, ma

si ha C.U. (non totale) in $[-1,\alpha)$ $\quad \forall \alpha \in (0,1)$ (da dim.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n}(x-3)^n$

Esercizio per casa: Provare che:

i) converge assolutamente per $x \in (2,4)$

non converge puntualmente in $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

ii) converge ~~unif^{te}~~ totalm. in $[2+\varepsilon, 4-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon \in (0,1)$

iii) non converge unif^{te} in $(2,4)$.