

Nuovi quaderni di Applicazioni della Geometria
Descrittiva



Collana diretta da Riccardo Migliari

Comitato Scientifico

Andrea Casale, Stefano Cinti Luciani, Marco Fasolo,
Graziano Valenti, Camillo Trevisan

Riccardo Migliari

Geometria dei Modelli

Rappresentazione grafica e informatica
per l'architettura e per il design

Appendice di Massimiliano Ciammaichella

EDIZIONI KAPPA

Riccardo Migliari

Geometria dei Modelli

Rappresentazione grafica e
informatica per l'architettura e per il
design

HANNO COLLABORATO

Marco Gaiani

per i paragrafi dedicati
alle superfici mesh

Anna De Santis

per la bibliografia

Clelia Ialongo

per i disegni della Parte Terza

Rodolfo Migliari

per i modelli di figura 4 e 136.

PROGETTO GRAFICO

Blu omelette

REDAZIONE

Tiziana Fiorucci

STAMPA

Tipolitografia Chiovini srl

Via Fosso della Magliana 34
00152 Roma

CD ROM

Il CD allegato contiene i programmi
di modellazione think3 (*thinkDesign*,
thinkReal e *thinkShape*) in versione
demo. I docenti e gli allievi delle
scuole di ogni ordine e grado
possono ottenere le licenze che
abilitano la piena funzionalità di
questi programmi.

Per ulteriori informazioni:

info.it@think3.com.

COPYRIGHT 2001

Edizioni Kappa

Via Silvio Benco 2

00177 Roma

Tel 0039 06 273903

Fax 06 2147053

Prefazione	7
Parte Prima. Concetti introduttivi	13
Introduzione	14
I modelli dell'architetto e del designer	14
Fasi della costruzione di un modello	15
Caratteristiche del modello	17
Le viste	18
Gli enti geometrici	20
Enti geometrici fondamentali	20
Enti geometrici dello spazio proiettivo o ampliato	20
Enti geometrici generati dal movimento di un punto	22
Enti geometrici generati dal movimento di una linea	23
Simbologia	24
Il piano di lavoro	25
Operazioni per la visualizzazione del modello	26
Proiezione da un centro di un punto	26
Proiezione da un centro di una retta	27
Proiezione da una direzione di un punto e di una retta	30
Proprietà delle figure che non variano nella proiezione	31
Prospettività	32
Omologia piana	34
Omologia speciale	35
Omologia affine	36
Omotetia	36
Traslazione	37
Proiezione nei modelli informatici	37
Operazioni per la costruzione del modello	38
Traslazione di un piano nello spazio	38
Rotazione di un piano o ribaltamento	38
Omologia di ribaltamento	39
Intersezione	40
Intersezione di due superfici	41
Intersezione di due piani	41
Intersezione di una linea e una superficie	41
Intersezione di una retta e di un piano	41
Operazioni di ricostruzione nello spazio dell'oggetto rappresentato	43

Parte Seconda. La costruzione dei modelli	45
Due passi nella storia	46
Modelli ottenuti per proiezione parallela: la doppia proiezione ortogonale	50
Costruzione degli enti geometrici fondamentali	52
Punti	52
Rette	53
Piani	54
Rappresentazione di piani, rette e punti in posizioni particolari	55
Piani proiettanti in prima proiezione	55
Piani proiettanti in seconda proiezione	55
Piani di profilo	56
Rette frontali	56
Rette orizzontali	56
Punti appartenenti al primo e secondo piano di proiezione e alla linea di terra	56
Principali operazioni di sezione	57
Retta intersezione di un piano generico con piano proiettante	57
Sezioni principali del piano: frontale, orizzontale e retta	57
Punto intersezione di una retta con un piano	60
Retta intersezione di due piani	61
Principali operazioni di misura	64
Misura dell'angolo di pendenza di una retta	64
Misura dell'angolo di pendio di un piano	69
Misura di una figura piana	70
Costruzione di una figura piana	73
Costruzione di enti geometrici tra loro perpendicolari	73
Rappresentazione di una linea grafica	76
Descrizione delle linee curve nei modelli grafici	76
Descrizione delle linee curve nei modelli informatici	81
Rappresentazione del cerchio come sezione conica	87
Il teorema di Dandelin	88
Relazione fra cerchio ed ellisse	90
Modelli ottenuti per proiezione parallela: l'assonometria	94
L'assonometria ortogonale	96
Impostazione diretta della assonometria ortogonale	98

Costruzione delle scale assonometriche	102
L'assonometria obliqua	103
Estensione del teorema di Pohlke	105
Assonometria militare	106
Assonometria cavaliera	109
Assonometria speciale	113
Modelli ottenuti per proiezione da un centro: la prospettiva	114
Costruzione del modello prospettico frontale	114
Rappresentazione di una retta del geometrico obliqua rispetto al quadro	118
Introduzione alla misura: segmenti di rette perpendicolari al quadro	121
Costruzione del modello prospettico d'angolo	125
Misura dell'asse x	128
Costruzione e significato del cerchio di misura	130
Soluzione dei problemi di inaccessibilità	133
Tracce inaccessibili	133
Fughe inaccessibili	134
Costruzione e misura degli angoli	134
Costruzione dell'angolo di pendenza di una retta	134
Costruzione dell'angolo di pendio di un piano	137
Misura dell'angolo di pendenza di una retta	138
Ribaltamento di un piano proiettante	138
Misura dell'angolo di pendio di un piano	139
Costruzione di rette e piani inclinati	140
Costruzione di una retta di data pendenza	140
Costruzione di un piano di dato angolo di pendio	140
Costruzione di enti geometrici perpendicolari	141
Costruzione della prospettiva del cerchio	142
Costruzione dell'omologia tra prospettiva del cerchio e suo ribaltamento	144
Proiezione del cerchio in un'ellisse	146
Proiezione del cerchio in una parabola	147
Proiezione del cerchio in un'iperbole	147
Rette limite dell'omologia	147
Conclusioni	149

Parte Terza. I modelli di linee e superfici	151
Linee speciali: spirali, volute, eliche	152
Spirali	152
Volute	153
Eliche	156
Superfici e loro sezioni piane	158
Classificazione delle superfici	159
Rappresentazione delle superfici	160
Contorno apparente	160
Superfici primitive	162
Sfera	162
Costruzione della sfera in doppia proiezione ortogonale	163
Costruzione della sfera in assonometria ortogonale	164
Costruzione della sfera in assonometria obliqua	165
Costruzione della sfera in assonometria militare	166
Costruzione della sfera in prospettiva	166
Sezioni piane della sfera	168
Sezione della sfera in doppia proiezione ortogonale	168
Sezione della sfera in assonometria obliqua	172
Cilindro	174
Costruzione del cilindro in doppia proiezione ortogonale	175
Costruzione del cilindro in assonometria ortogonale	176
Costruzione del cilindro in assonometria obliqua	177
Sezioni piane del cilindro	179
Sezione del cilindro in doppia proiezione ortogonale	180
Sezione del cilindro in assonometria obliqua	182
Cono	184
Costruzione del cono in doppia proiezione ortogonale	185
Costruzione del cono in assonometria ortogonale	186
Costruzione del cono in assonometria obliqua	188
Sezioni piane del cono	188
L'ellisse sezione del cono	189
La parabola sezione del cono	192
L'iperbole sezione del cono	194

Superfici di rivoluzione	196
Costruzione di una superficie di rivoluzione	197
Sezioni piane delle superfici di rivoluzione	198
Sezione del toro	200
Modanature o superfici di traslazione	202
Costruzione dell'ugnatura	204
Superfici rigate	205
Costruzione di una superficie rigata	205
Casi particolari	206
Iperboloide rotondo	208
Paraboloide iperbolico	210
Elicoide rigato	212
Superfici a pendenza uniforme	215
Superfici di rototraslazione	216
Superfici NURBS	218
Superfici NURBS complesse	220
Superfici skinned o $S(u)$	220
Superfici swept	220
Superfici spined	222
Superfici di interpolazione bidirezionale o $S(u, v)$	222
Superfici di Coons	222
Superfici proporzionali	222
Superfici organiche	224
Superfici poliedriche	226
Superfici poliedriche regolari	226
Proprietà geometriche elementari dei solidi platonici	230
Superfici poliedriche tronche e stellate	233
Strutture geodetiche	234
Superfici mesh	235
Caratteristiche e costruzione delle superfici mesh	237
Superfici mesh e superfici NURBS a confronto	239
Proprietà delle superfici mesh	240
Modellazione delle superfici mesh	241
Intersezioni delle superfici	244
Intersezione di una sfera con un cilindro rotondo	246
Intersezione di due cilindri	248
Intersezione di due coni	252
Intersezione di cono e cilindro	252
Intersezione di due superfici di rivoluzione	254

Parte Quarta. I modelli della luce	257
La propagazione della luce e i suoi modelli geometrici	258
Modelli di sorgente luminosa	258
Effetti della luce sui corpi	260
Ombra propria, portata e autoportata	260
Chiaroscuro e grado di intensità luminosa	261
Intensità luminosa e chiarezza apparente	263
Punti brillanti e riflessi	263
Prospettiva aerea	264
La costruzione delle ombre nei modelli grafici	268
Le spezzate separatrici d'ombra	268
Costruzione dell'ombra di una retta	269
Costruzione dell'ombra portata in proiezione parallela	270
Casi particolari dell'ombra portata in proiezione parallela	270
Costruzione dell'ombra di un solido in proiezione parallela	271
Costruzione dell'ombra portata in prospettiva	273
Casi particolari dell'ombra di una retta in prospettiva	276
Costruzione accurata dell'immagine del Sole	278
La costruzione del chiaroscuro nei modelli grafici	280
La costruzione delle isofote di una superficie	284
La resa delle ombre e del chiaroscuro nei modelli informatici	287
Appendice di Massimiliano Ciammaichella	289
A come @rchitettura	289
Lo spazio digitale dell'architettura: modelli di riferimento	291
Alfabeto geometrico	294
Bibliografia	303

prefazione

I *Quaderni di Applicazioni della Geometria descrittiva* nacquero nel 1982, per iniziativa di Orseolo Fasolo e mia, con una affettuosa dedica al Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza", che allora ci accoglieva entrambi. Vent'anni dopo, con il nome di *Nuovi Quaderni di Applicazioni della Geometria descrittiva*, la vecchia collana rinasce in un ambito accademico più vasto, per volontà di docenti di Geometria descrittiva e Disegno appartenenti a vari Atenei italiani.

Il disegno è qui inteso come insieme di quei modelli, grafici informatici e fisici, che, trasformandosi l'uno nell'altro, convergono verso l'idea progettuale.

Il fondatore della collana amava ricordare che l'insegnamento universitario non si basa su programmi ministeriali, come avviene per la scuola secondaria, ma su un sapere che è compito della ricerca scientifica tenere continuamente aggiornato.

Mai come ora ciò ci appare vero. L'avvento dell'informatica, infatti, ha prodotto una vera rivoluzione: ha spostato l'accento dalla visualizzazione alla modellazione (studio delle superfici e dei volumi); ha ampliato la "tavolozza" delle forme disponibili per la progettazione (NURBS); ha messo a disposizione di tutti tecniche che richiedevano, prima, tempo e abilità, oltre che buon gusto, come il chiaroscuro (*rendering*).

Sono convinto, perciò, che la vecchia Geometria descrittiva di mongiana memoria debba essere riscritta e questo ho cercato di fare negli ultimi anni, prima con il volume *Scienza della rappresentazione* (Roma, Nuova Italia Scientifica, 1992), poi con i *Fondamenti della Rappresentazione Geometrica e Informatica dell'Architettura*, edito da Kappa nel 2000, e, infine, con quest'ultimo lavoro che, nelle intenzioni, doveva essere null'altro che una seconda edizione dei *Fondamenti* ... La quantità e la qualità delle modifiche e delle integrazioni ne hanno fatto un libro affatto diverso. Era però da prevedersi, considerando le sollecitazioni cui è sottoposta attualmente la Scienza della rappresentazione a causa della rapida evoluzione degli strumenti informatici. Questa mia fatica è soprattutto volta all'insegnamento, perché non voglio che gli studenti sentano estranea questa disciplina, che insegna a pensare lo spazio, come l'ho sentita estranea io quando fu insegnata a me nelle vesti che indossava allora, quelle del tardo Settecento.

Voglio ora dare qualche spiegazione sui modelli che illustrano questo libro.

Nella precedente edizione i medesimi modelli erano stati realizzati con il programma MicroStation della Bentley, principalmente in ragione delle buone

condizioni di acquisto che la casa produttrice praticava agli studenti. È estremamente utile, infatti, che il docente e gli studenti possano disporre del medesimo ambiente di lavoro nel primo approccio alla modellazione. Un anno fa, Marco Gaiani mi ha segnalato la possibilità di ottenere l'uso gratuito di un modellatore, per la durata degli studi. Questa possibilità era ed è offerta agli studenti e ai loro docenti da *think3*. Perciò, dopo aver sottoscritto l'accordo proposto, ho pensato di riscrivere il mio libro, ampliandolo e accludendo il software necessario per visualizzare i modelli, che viene gentilmente concesso dalla casa produttrice.

Un'iniziativa lungimirante come questa era attesa da tempo e voglio perciò ringraziare, tra i primi, Stefano Cinti Lucani, Stefano Ruscelloni, Massimo Signani e Tiziana Moriggi, per aver permesso l'avvio di una didattica della rappresentazione affatto nuova, oltre che per la cortese e sollecita collaborazione che hanno sempre prestato all'autore e ai suoi collaboratori.

Ma vorrei anche aggiungere qualche brevissima considerazione su *thinkDesign*, che spero possa tornare utile a chi voglia usarlo, come l'ho usato io, per studiare, per rinnovare e per insegnare la Geometria descrittiva. Le figure che illustrano questo libro sono semplici riproduzioni dello schermo del computer; anche se appaiono come *renderings* sofisticati, corredati di luci, trasparenze e riflessioni, si tratta semplicemente delle schermate che il programma presenta all'operatore.

A me sembra che, in ciò, *thinkDesign* sia il migliore prodotto attualmente disponibile, e non è poca cosa, per un progettista di architettura, di macchine o di design.

L'architettura oggi è sensibile al profondo cambiamento cui ho fatto cenno.

Lo dimostrano le molte opere di illustri architetti e designer. Tra questi spiccano gli architetti del gruppo dECOi, che desidero qui ringraziare, e particolarmente Gabriele Evangelisti, per aver consentito la pubblicazione del suo lavoro, quale importante testimone della evoluzione nella quale questo contributo vive.

Un altro ringraziamento debbo a Marco Gaiani, per le idee e le conoscenze che mi ha offerto con una generosità assai rara nell'ambiente universitario. E, ancora, ringrazio Camillo Trevisan, per aver pazientemente discusso con me le problematiche relative al rinnovamento della Scienza della rappresentazione. Infine un sentito ringraziamento va ai colleghi romani tutti e, particolarmente, a Mario Docci, Laura De Carlo e Andrea Casale, per il forte sostegno che hanno dato alla trasformazione della nostra scienza e al conseguente aggiornamento dei contenuti e delle tecniche del suo insegnamento.

Parte Prima
Concetti introduttivi



Introduzione

“... Io un’idea ce l’ho, è originale – è I MODELLI.

Modelli materiali, in senso proprio e corrente.

Copiando un modello si impara a tenere il lapis in mano, a far le righe diritte, a farci l’occhio alle proporzioni.

E se il modello è una forma geometrica, s’impara la geometria, osservandolo e ragionandoci su.

E se uno, a parte, ha imparato l’ABC della Geometria descrittiva (ciò che poi vuol dire ha imparato la Geometria descrittiva come diceva Monge) può ricostruire quel che ha sotto il naso in modo esatto.

E se il modello ha certe dimensioni e una sua posizione nello spazio, resta trasferito sulla carta anche con queste e s’impara il Rilievo.

E se uno ha studiato la Teoria delle Ombre e del Chiaroscuro ... ci fa sopra le ombre e gli dà il rilievo. E viene fuori anche un ‘bel disegno’.

E se uno illumina il modello come nel disegno, ha la bella soddisfazione che sì, è proprio vero, le cose stanno proprio come ci aveva detto la geometria.

E se poi il modello piccolo non ci basta perché ci sono le dimensioni dell’ARCHITETTURA che sono diverse, allora basta cambiare modello e prendere quello VERO, un edificio e ripetere l’operazione in grande”.

Così il professor Orseolo Fasolo, che è stato ed è il mio Maestro, rispose il 14 agosto del 1987 a una lettera nella quale gli chiedevo qualche suggerimento per un corso di Disegno dell’Architettura. In quell’epoca, ormai ben più lontana dei quindici anni effettivamente trascorsi, le applicazioni dell’informatica al progetto e al rilievo erano ancora in una fase sperimentale: pochi e assai poveri i programmi che i personal computer del tempo potevano supportare, costosissime e appannaggio esclusivo dell’industria le macchine capaci di prestazioni appena confrontabili con quelle attuali. L’idea di studiare la geometria e modellare lo spazio e le sue for-

me servendosi di un elaboratore, oltre che della matita, era di là da venire. Perciò Fasolo alludeva a modelli plastici, come quelli di gesso di accademica memoria. Tuttavia io penso che se egli potesse oggi osservare i modelli informatici, riconoscerebbe immediatamente una potente realizzazione della sua idea. La via dei modelli è ancora tutta da percorrere: questo libro vuole segnare un primo tracciato e sicuramente non segue il percorso più agevole e diretto, ma tenta, per lo meno, di raccogliere, in una veduta d’insieme, le varie rappresentazioni dell’idea progettuale e gli strumenti che la tradizione e la tecnologia porgono oggi all’architetto e al designer.

I modelli dell’architetto e del designer

La costruzione di un edificio non è cosa che si possa improvvisare: troppo complessa è la sua struttura statica, funzionale, estetica, troppo articolati i rapporti che l’edificio intrattiene con il paesaggio circostante. Per progettare, architetti e designer si servono dunque di *modelli*, che consentono loro di simulare la costruzione e prevederne il comportamento e gli effetti sull’intorno. Nei tempi più antichi questi modelli sono stati realizzati con l’argilla, con il legno o, più semplicemente, con il disegno, ma negli ultimi anni del secolo scorso è apparso un nuovo e potente strumento di modellazione: il *computer*.

Il computer permette di costruire con grande facilità modelli tridimensionali e di osservarli da ogni possibile punto di vista, come se si trovassero realmente tra le nostre mani. Il computer, infatti, adeguatamente programmato, è in grado di generare in tempo reale quante immagini si vogliono del modello e di simularne così la presenza. Lo schermo del computer è, dunque, una finestra aperta sullo spazio virtuale del modello, che ci permette di osservarlo e di interagire con esso, muovendolo e modificandolo. Tuttavia, la costruzione di questi modelli, che chiamiamo “informatici”, non è affatto automatica, essa ha origine nel pensiero del progettista ed è controllata dalla sua abilità di plasmare le forme tridimensionali dell’architettura e di comporle insieme.

Per queste ragioni, è necessario che la disciplina che insegna a costruire questi modelli, cioè la *Scienza della rappresentazione*, integri nel proprio *corpus* di teorie e di metodi operativi le nuove tecniche informatiche. Questa integrazione è lo scopo di questo libro, che si rivolge, dunque, non a chi vuole “imparare la Geometria descrittiva”, né a chi vuole “imparare il CAD”, ma, semplicemente agli architetti, agli ingegneri, ai designer e agli studenti che vogliono imparare a costruire e controllare i modelli dei loro progetti.

Nelle pagine che seguono, esamineremo i modelli nei loro aspetti più generali.

Per prima cosa, descriveremo in breve le fasi della costruzione di un modello; poi le sue caratteristiche essenziali, che sono le sue immagini (o *viste*), il “materiale” usato per costruirlo (*enti geometrici* o *primitive grafiche*), infine il luogo sul quale prevalentemente si opera durante il lavoro di costruzione (il *piano di lavoro* o di *costruzione*).

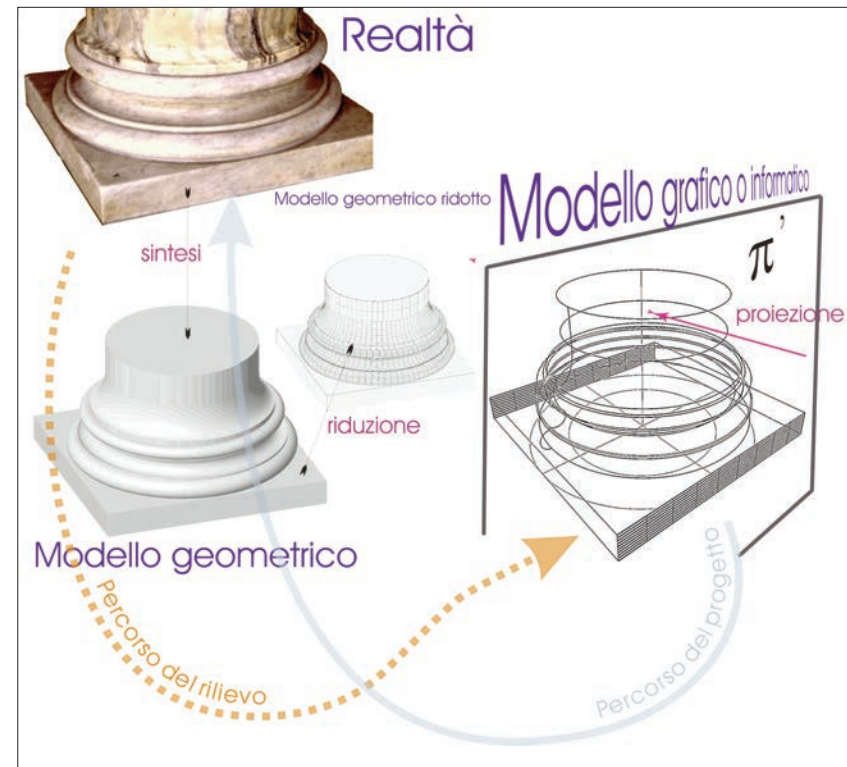
Da ultimo, prenderemo in esame le operazioni che consentono di realizzare un modello, dividendole in tre gruppi: quelle utili alla generazione delle viste del modello; quelle utili alla modifica dell’oggetto rappresentato e, infine, quelle che ne consentono la ricostruzione nello spazio.

Fasi della costruzione di un modello

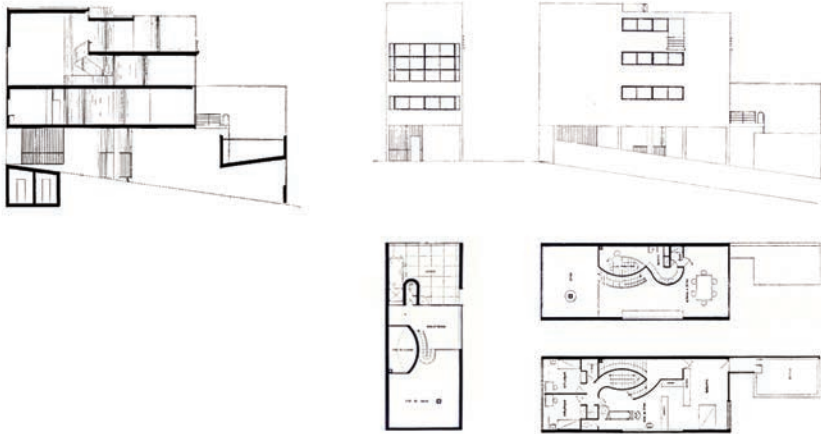
La costruzione di un modello (fig. 1) si articola in tre fasi distinte e successive: la *sintesi*, la *riduzione*, la *proiezione*.

Nella prima fase, la *sintesi*, l’oggetto del quale si vuole costruire il modello viene estratto dalla realtà cui appartiene e a esso viene sostituita una sua copia ideale, detta *modello geometrico*, grande quanto il vero. Questa copia è fatta di forme geometriche pure, opportunamente composte, le quali approssimano la forma, più complessa e irregolare, dell’oggetto reale.

Nella seconda fase, la *riduzione*, il modello geometrico, grande quanto il vero, viene semplificato e ridotto in modo che le sue dimensioni siano confrontabili con quelle del foglio di carta che dovrà ospitare il disegno o con le capacità di memoria del computer.



1. Dalla realtà si deduce un modello geometrico astratto, che fornisce, per proiezione, una o più viste. Il processo è reversibile: dall’architettura al modello (rilievo) o dal modello all’architettura (progetto).



2. Le Corbusier, 1929. Il più semplice modello di architettura è un disegno; è diverso, però, da quello di un artista, perché non si limita a evocare la forma di un oggetto, ma permette di misurarla e ricostruirla

Questa riduzione si effettua dividendo le dimensioni del modello geometrico al vero per un fattore costante, k . Il rapporto $1/k$ si dice *scala del modello* e il modello stesso si dice *ridotto in scala*. L'operazione di riduzione rende impossibile rappresentare i dettagli più minuti dell'oggetto, perciò, quando si costruisce il modello geometrico al vero, si tiene conto del rapporto di riduzione: quanto più questo è forte (cioè quanto più k è grande), tanto minore è il numero delle forme geometriche pure che compongono il modello, tanto minore è l'approssimazione del modello alla realtà. In breve: il modello geometrico è una sintesi della forma reale, tanto più forte quanto più grande è k ; le misure del modello geometrico sono tanto più approssimative, quanto più grande è k .

Nella terza fase, la *proiezione*, il modello geometrico in scala viene sottoposto alle operazioni di proiezione e sezione, che producono, sulla carta o sullo schermo del computer, una *vista* del modello stesso, permettendo così al progettista di valutarne le qualità formali e di operare su di esso. La proiezione e la sezione sono operazioni di natura squisitamente geometrica, che saranno discusse nel seguito, esse, tuttavia, simulano fenomeni fisici comuni come la visione e le ombre, nonché tecniche a tutti note, come la fotografia.

Caratteristica essenziale del modello grafico, informatico o plastico è quella di consentire la *ricostruzione*, nello spazio, del modello geometrico dell'oggetto rappresentato. Di conseguenza, l'intero processo qui descritto può essere percorso in due versi: quello che va dalla realtà al disegno e quello che va dal disegno alla realtà. Nel primo caso il processo è asservito al *rilievo*, nel secondo caso al *progetto*.

Il processo che abbiamo descritto ha validità generale, è il medesimo, cioè, quale che sia il supporto del modello. Se questo supporto è la carta, il modello, disegnato con la matita o con la penna, è un *modello grafico*. Se il supporto è invece la memoria di un elaboratore, cioè di un computer, allora il processo restituisce un *modello informatico*. Se, infine, il supporto è lo spazio e il modello è stato costruito con il cartone, il legno o altro materiale, allora il processo restituisce un *modello plastico*.

Caratteristiche del modello

Una pianta e un prospetto (fig. 2), un plastico (fig. 3), una simulazione informatica (fig. 4): sono tutti modelli di architettura. Ma cosa hanno in comune? In primo luogo hanno in comune ciò che suscitano nell'osservatore: sono immagini capaci di evocare la forma e le qualità, non solo formali, dell'oggetto che rappresentano; in secondo luogo hanno in comune gli elementi che li compongono: linee, superfici, solidi; in terzo luogo consentono di intervenire sull'oggetto rappresentato con operazioni quali: la misura di grandezze lineari, di superficie o di volume; la generazione delle superfici e la loro composizione; il taglio, la compenetrazione, la deformazione dei solidi.

Quest'ultimo aspetto è il più prezioso tra tutti, per il progettista: grazie, infatti, alle immagini che materializzano la sua invenzione egli può affinare il progetto, verificarne la correttezza statica, funzionale ed estetica, apportare le modifiche che ritiene opportune fino al compimento dell'opera; in una parola, può *modellare* gli oggetti ideati. Perciò, anche se l'esito più evidente di un modello sono le immagini che è capace di evocare, la sua capacità più significativa è quella di generare la forma e consentirne il pieno controllo.

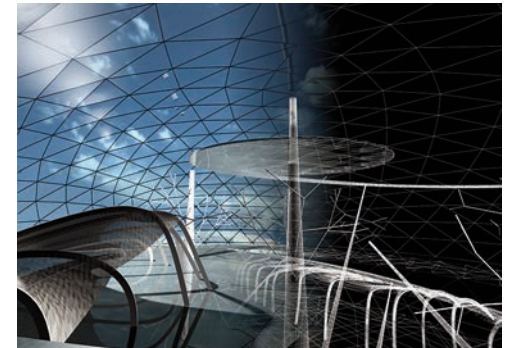
Sarebbe perciò errato, perché gravemente riduttivo, dire che la Scienza della rappresentazione insegna a costruire piante, prospetti, prospettive o simulazioni informatiche, poiché essa assolve, prima, un compito assai più importante, insegnando a costruire, modificare e controllare le forme tridimensionali.

Ci si potrebbe chiedere, allora, se sia più opportuno studiare prima il modo di costruire un oggetto o prima il modo di rappresentarlo, ma si tratta di una domanda senza risposta, proprio come chiedersi se sia nato prima l'uovo o la gallina. Ecco perché si dice che *la Scienza della rappresentazione insegna l'arte di modellare le forme dello spazio mentre le rappresenta*. Ma poiché una scelta è comunque necessaria, noi studieremo, per prima cosa, il modo di generare una vista dell'oggetto, poi il modo di costruirlo, servendoci della finestra che abbiamo aperta sul suo spazio.

3. Modello di Filippo Brunelleschi per la lanterna della cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze, 1432. I modelli plastici sono usati da tempo immemorabile.



4. Il computer permette di simulare l'architettura con il realismo di un modello plastico o l'astrazione e l'espressività di un modello grafico.



Le viste

Per agire su un modello già costruito, modificandolo, e, a maggior ragione, per costruirlo, è indispensabile osservarlo da più punti di vista. Se abbiamo un plastico tra le mani, è il nostro cervello, tramite l'occhio, che si occupa di fornire le immagini del modello, mentre lo osserviamo. Se invece dobbiamo disegnare il modello, oppure costruirlo servendoci di un computer, allora le immagini del modello si ottengono con una operazione geometrica detta *proiezione*.

L'operazione di proiezione consiste nell'investire idealmente l'oggetto con una stella di raggi proiettanti e nel sezionare questa stella con un piano (il foglio da disegno o lo schermo del computer). È facile comprendere il senso di questa operazione pensando al fenomeno delle ombre: i raggi di luce, in questo caso, investono un oggetto e ne proiettano la forma sulla prima superficie che incontrano. Nell'operazione di proiezione la sorgente dei raggi si dice *centro di proiezione*, il piano che riceve l'immagine dell'oggetto, si dice *piano di proiezione* o *piano di quadro*, il risultato dell'operazione si dice *proiezione*, *immagine* o anche *vista* dell'oggetto (*view*).

Variando la posizione del centro di proiezione e del quadro, rispetto all'oggetto, si ottengono infinite variazioni della vista, che possono simulare la percezione visiva dello spazio (come nel caso della *prospettiva*), oppure possono descrivere con chiarezza e fedeltà alcune caratteristiche speciali dell'oggetto, come la sua impronta sul suolo (*pianta*).

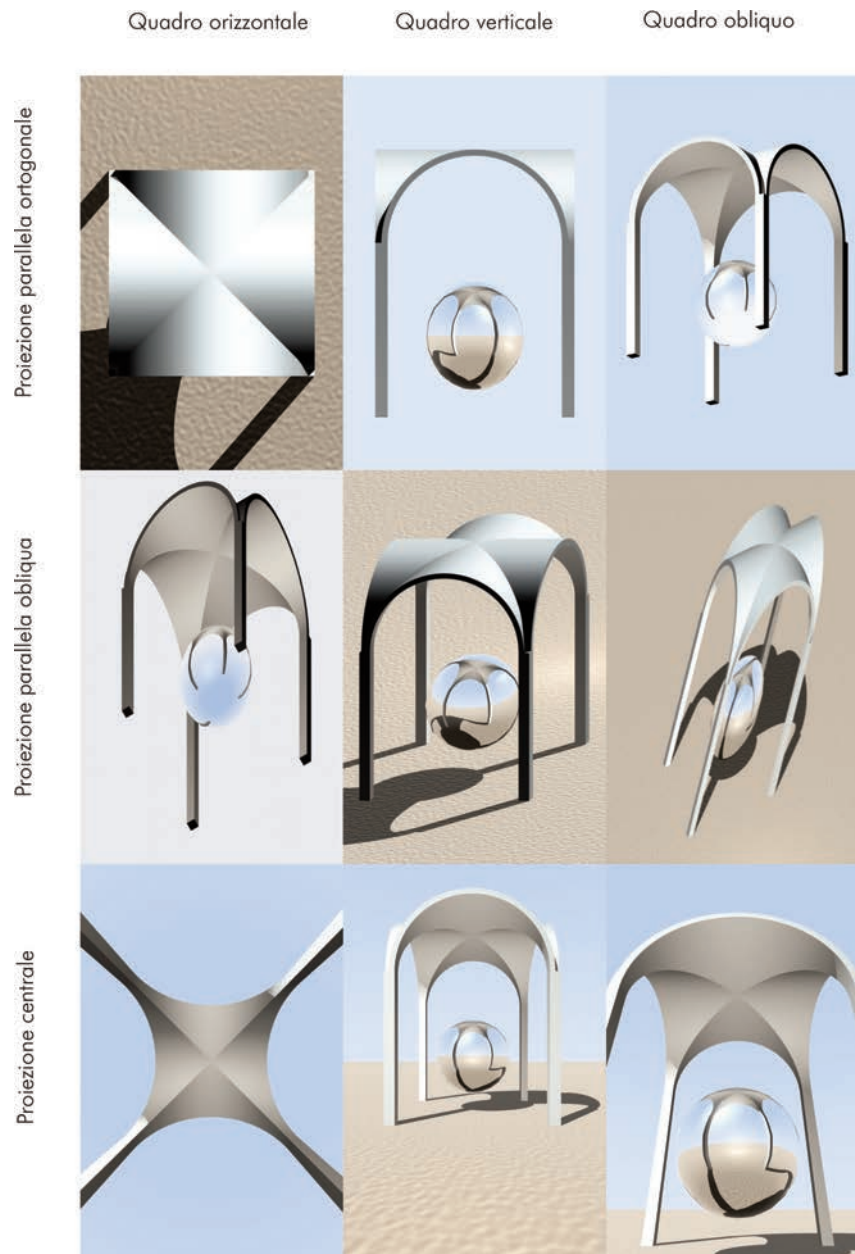
Per studiare le viste che è possibile ottenere, variando il centro di proiezione e la posizione del quadro rispetto all'oggetto, conviene riferire lo spazio a un sistema cartesiano di assi mutuamente ortogonali, **x**, **y** e **z**. Questi assi sono orientati in modo che, se **y** è diretto in avanti, come lo sguardo dell'osservatore, **x** è diretto da sinistra a destra e **z** è diretto verso l'alto. Questa convenzione è detta "della mano sinistra" perché è facile ricordarla puntando in avanti l'indice della mano sinistra (**y**), piegando il medio verso destra (**x**) e alzando il pollice in alto (**z**).

I raggi proiettanti possono essere convergenti in un punto (come l'occhio di un osservatore), oppure paralleli (come nella luce solare). Nel primo caso si ottiene una *prospettiva centrale* o *conica* (detta anche, semplicemente, *prospettiva*), nel secondo una *prospettiva parallela* o *cilindrica* (detta, anche, *proiezione parallela*). Quando sono paralleli, i raggi possono essere tutti perpendicolari al piano di quadro o tutti obliqui. Nel primo caso la proiezione parallela si dice *ortogonale*, nel secondo *obliqua*. Il piano di proiezione può essere orizzontale, nel qual caso incontra l'asse **z** ed è parallelo a **x** e **y**; oppure verticale, nel qual caso è parallelo a **z** e incontra **x** o **y** o entrambi; infine può essere obliquo, nel qual caso incontra **x**, **y** e **z**.

Combinando queste diverse situazioni si ottengono nove possibili *viste principali*, che si distinguono con il nome che viene attribuito al corrispondente disegno.

Nella modellazione grafica si possono costruire tutte le viste che abbiamo elencato (fig. 5). Nella modellazione informatica la vista viene generata automaticamente e, perciò, le possibilità di ottenere quella desiderata dipendono dal programma adottato. In generale, tutti i software producono le proiezioni parallele e, perciò, le prime tre viste, cioè la pianta, l'alzato e l'assonometria ortogonale, che sono sufficienti per controllare il modello. Molti programmi offrono anche la possibilità di generare le ultime tre viste, quelle prospettiche. Pochi, invece, consentono di generare le proiezioni parallele oblique. Bisogna anche dire, però, che queste viste particolari sono più utili nel disegno, per la loro facilità di esecuzione, di quanto non siano nella modellazione informatica, per la loro efficacia.

Alcuni software, infine, consentono di generare i modelli grafici, in modo automatico o semiautomatico. Ciò significa che il progettista, dopo aver costruito il modello lavorando nello spazio virtuale, può chiedere e ottenere la generazione di modelli grafici, ad esempio una pianta e un prospetto, associati, e può ancora intervenire su questi disegni, aggiungendo misure, commenti, intestazioni e quant'altro desidera, per produrre infine una o più copie su carta del disegno di progetto, adatte all'uso tecnico.



5. I raggi proiettanti possono avere in comune un punto, come l'occhio di un osservatore, o una direzione, nel qual caso sono tutti paralleli. Il piano di quadro può incontrare uno, due o tutti e tre gli assi di riferimento. Le diverse combinazioni di questi elementi forniscono nove viste principali.

Gli enti geometrici

Gli enti geometrici sono i “materiali” che si adoperano nella costruzione del modello. Scriviamo *materiali* tra virgolette perché, naturalmente, si tratta di concetti o idee primitive, come ideale è l'intera operazione di costruzione del modello.

Gli enti geometrici si possono raggruppare in tre famiglie:

- i *punti*, che hanno dimensioni nulle;
- le *linee* che hanno una sola dimensione, la lunghezza, e sono insiemi di infiniti punti;
- le *superfici*, che hanno due dimensioni, la lunghezza e la larghezza, e sono insiemi di infinite linee.

Questi enti sono tutti immersi nello spazio tridimensionale dell'architettura.

Gli enti geometrici si possono ancora classificare, in base a loro caratteristiche speciali, nei gruppi seguenti:

- enti geometrici fondamentali;
- enti geometrici dello spazio proiettivo o ampliato;
- enti geometrici generati dal movimento di un punto;
- enti geometrici generati dal movimento di una linea.

Dati due o più enti geometrici, costituiti da altrettanti insiemi, si dice *intersezione*, se esiste, l'ente geometrico che appartiene tanto all'uno quanto all'altro o agli altri insiemi.

Perciò:

- due rette distinte e appartenenti al medesimo piano, si tagliano in un solo punto che è detto punto intersezione delle due rette;
- una retta e un piano, distinti e incidenti, si tagliano in un punto che si dice punto intersezione della retta con il piano;
- due piani distinti e incidenti si tagliano in una retta, che è detta retta intersezione dei due piani;
- tre piani, distinti e incidenti, si incontrano in un punto che si dice punto intersezione dei tre piani.

Si dice che un ente geometrico appartiene a un altro quando fa parte dell'insieme degli elementi che costituiscono quest'ultimo. Ad esempio, un punto appartiene a una retta quando fa parte

dell'insieme di infiniti punti che costituiscono la retta. Nel linguaggio della geometria, tuttavia, è anche frequente l'uso della proposizione inversa. Si può dire, cioè, che una retta appartiene a un punto quando passa per quel punto, che un piano appartiene a una retta, quando passa per quella retta.

Enti geometrici fondamentali

Gli enti geometrici fondamentali sono il *punto*, la *retta* e il *piano*. Punto, retta e piano sono idee primitive, che non possono essere definite in alcun modo e che, perciò, vengono anche considerate come postulati esistenziali della geometria (SEVERI 1921. Notazioni come questa rimandano alla bibliografia che corredata il volume).

A questi enti si attribuiscono le proprietà descritte nei seguenti postulati:

- il punto ha dimensioni nulle.
- le rette sono insiemi di infiniti punti e hanno una sola dimensione, la lunghezza;
- i piani sono insiemi di infinite rette e hanno due dimensioni, la lunghezza e la larghezza;
- esistono infiniti piani.

Enti geometrici dello spazio proiettivo o ampliato

Nella Scienza della rappresentazione, oltre ai punti e alle rette della geometria euclidea, si considerano le *direzioni* e le *giaciture* dello spazio.

Le *direzioni* sono qualità distintive delle rette.

Le *giaciture* sono qualità distintive dei piani.

Ad esempio, in un intorno limitato dello spazio, una retta può avere la direzione verticale, quella che assume il filo a piombo; mentre un piano può avere la giacitura orizzontale, quella che assume la superficie dell'acqua.

Le rette parallele hanno tutte la medesima direzione.

I piani paralleli hanno tutti la medesima giacitura.

Una retta *r* (fig. 6) può essere costruita per mezzo di due punti di-

stinti P e Q che le appartengono (come uno spago teso tra due chiodi). Ma, dopo aver introdotto il concetto di direzione, una retta può anche essere costruita assegnando un solo punto N e la direzione D^∞ che le appartiene (il filo a piombo, sospeso a un solo chiodo, descrive una retta, quella che passa per quel chiodo e ha direzione verticale).

Ancora, un piano α (fig. 7) può essere individuato per mezzo di un punto P e di una retta r distinti (i fili tesi tra un chiodo e un'asta di legno), oppure per mezzo di un punto Q e di una giacitura dello spazio g^∞ (ad esempio, i fili legati a un chiodo e tirati "in bolla", cioè tutti orizzontali).

Per questa ragione, e per altre di carattere storico che qui non è possibile approfondire (MIGLIARI 1995), la parola *direzione* e la parola *giacitura* si sostituiscono, rispettivamente, alle parole *punto* e *retta*, negli enunciati della geometria, ottenendo proposizioni ancora vere, il che legittima l'introduzione di questi nuovi enti da un punto di vista squisitamente logico.

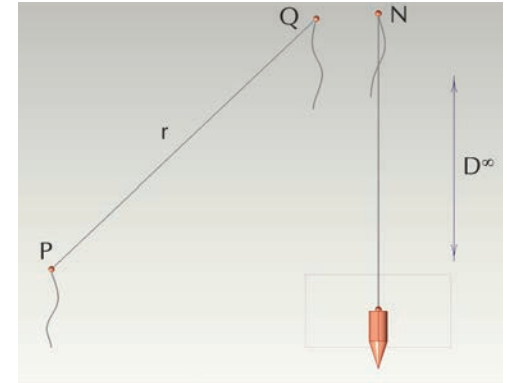
Nel piano vi sono infinite rette. A ogni retta, o gruppo di rette parallele, è associata una direzione. Perciò nel piano vi sono infinite direzioni: l'insieme di queste direzioni è la giacitura del piano. In altre parole, la giacitura è il luogo geometrico delle direzioni di un piano.

L'introduzione dei concetti di direzione e giacitura ha una conseguenza rivoluzionaria sulla definizione tradizionale di parallelismo, che è bene mettere subito in luce.

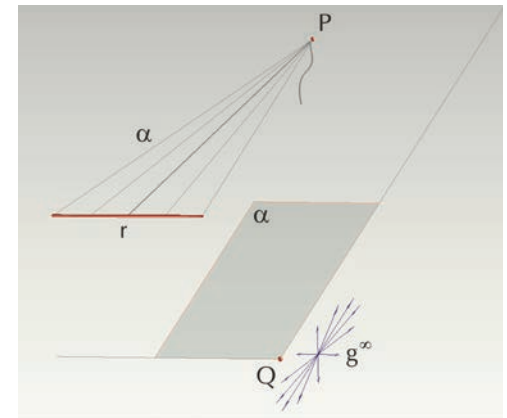
Nella geometria elementare due rette distinte possono essere incidenti (quando hanno un punto in comune), parallele (quando, pur essendo complanari, non hanno alcun punto in comune) o sghembe (quando non sono complanari e, perciò, non hanno alcun punto in comune). Nella geometria della rappresentazione due rette sono incidenti o sghembe e non si danno altri casi, poiché se sono parallele, hanno in comune la direzione e sono perciò incidenti nella medesima direzione.

E, ancora, nella geometria elementare due piani possono essere incidenti (quando hanno una retta in comune) o paralleli (quando non hanno alcuna retta in comune). In Geometria descrittiva due

6. Una retta può essere individuata per mezzo di due punti distinti o per mezzo di un punto e di una direzione.



7. Un piano può essere individuato per mezzo di un punto e di una retta, distinti, o per mezzo di un punto e di una giacitura.



Enunciati della geometria euclidea	Nuovi enunciati
Due punti distinti individuano una retta, alla quale appartengono	Un punto e una direzione individuano una retta, alla quale appartengono
Due piani distinti individuano una retta, alla quale appartengono	
Tre punti, che non appartengano alla medesima retta, individuano un piano, al quale appartengono	Due punti e una direzione, che non appartengano alla medesima retta, individuano un piano, al quale appartengono Due direzioni e un punto, distinti, individuano un piano, al quale appartengono
Tre piani, che non appartengano alla medesima retta, individuano un punto, al quale appartengono	
Un piano e una retta, distinti, individuano un punto, al quale appartengono	Un piano e una giacitura, distinti, individuano una direzione, alla quale appartengono (è la direzione comune alla giacitura assegnata e alla giacitura del piano)
Un punto e una retta, distinti, individuano un piano, al quale appartengono	Un punto e una giacitura individuano un piano, al quale appartengono Una direzione e una retta, distinti, individuano un piano, al quale appartengono

piani sono sempre incidenti (in una retta comune o nella comune giacitura).

Dopo avere introdotto i concetti di direzione e di giacitura, possiamo verificare che, come abbiamo detto, sostituendo negli enunciati della geometria euclidea, assunti da Francesco Severi (SEVERI 1921), la parola *punto* con la parola *direzione* e la parola *retta* con la parola *giacitura* si ottengono proposizioni ancora valide (vedi tabella).

Enti geometrici generati dal movimento di un punto

Le *linee* (fig. 8) sono generate dal moto di un punto. Questo movimento può avvenire sopra un piano, oppure nello spazio: nel primo caso la linea generata è una *curva piana*, nel secondo è una *curva sghemba*. Inoltre, il movimento può essere regolato da un'unica legge, cioè da un algoritmo o da un dispositivo meccanico, e in questo caso la linea si dice *luogo geometrico*, oppure il movimento può essere arbitrario o affidato soltanto alla mano libera che sostiene la matita, e in questo caso, la linea si dice *grafica*. Il *cerchio* è un ottimo esempio di linea piana luogo geometrico: i suoi punti hanno tutti eguale distanza dal centro, che è un qualsiasi punto del piano nel quale il cerchio giace. Il compasso è un dispositivo meccanico che realizza, nel mondo fisico, questo luogo geometrico.

Anche l'*ellisse* si può descrivere come luogo geometrico: quello dei punti che mantengono costante la somma delle loro distanze dai fuochi, che sono due punti distinti del piano sul quale l'ellisse giace. Il dispositivo meccanico che realizza questo luogo geometrico è semplicissimo: due chiodi, piantati nei fuochi **F** e **G**, una corda, di lunghezza maggiore di **FG**, fissata ai due chiodi; una punta, che traccia l'ellisse, mentre tende la corda **FG**.

L'*elica*, invece, è un buon esempio di linea luogo geometrico sghemba: è generata da un punto che si muove lungo una retta mentre questa ruota intorno a una altra retta (detta asse di rivoluzione).

Nell'ambiente informatico, il trattamento delle linee luogo geo-

metrico non pone alcun problema, perché l'algoritmo che genera la curva la descrive punto per punto.

Le linee grafiche, invece, dovrebbero essere rappresentate come spezzate, perché non è possibile descrivere numericamente gli infiniti punti che le compongono. Si preferisce, allora, trattarle con tecniche di interpolazione. Ciò significa che si assegnano solo alcuni punti della linea, mentre gli altri vengono desunti dai primi, con vari metodi di calcolo. Queste linee curve particolari si chiamano *spline*.

Gli algoritmi che generano le *spline* si prestano molto bene al trattamento di una linea grafica, ma non sono adatti a rappresentare linee luogo geometrico, perché le approssimano, ma non le costruiscono in modo sempre fedele. Recentemente, tuttavia, è stata introdotta una nuova famiglia di curve, le NURBS (*Non Uniform Rational B-spline*), che sono in grado di descrivere esattamente tanto una linea grafica, quanto una linea luogo geometrico. Si è trattato di un progresso notevole, perché è ora possibile generare e modellare qualsiasi curva con un unico algoritmo.

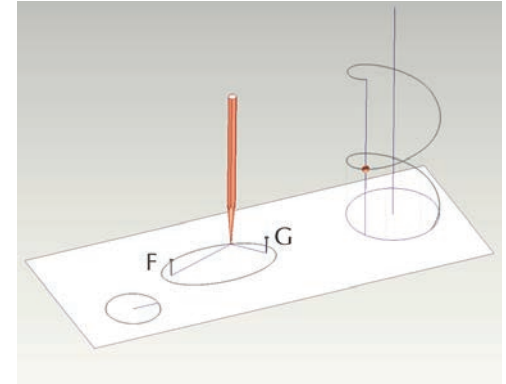
Enti geometrici generati dal movimento di una linea

Le *superfici curve* sono generate dal moto di una linea. Se questo movimento è guidato da una legge, da un algoritmo o da un dispositivo meccanico, la superficie si dice *luogo geometrico*, in caso contrario si dice *superficie topografica*, per analogia all'andamento della superficie del suolo.

Nell'ambiente informatico, è facile rappresentare una superficie luogo geometrico, perché la legge che la genera la descrive anche punto per punto.

Per rappresentare una superficie topografica o, più in generale, una superficie che non risponde ad alcuna legge, come quella di una statua, si ricorre a un artificio, rappresentando solo alcuni punti della superficie e raccordando questi punti con le facce triangolari di un poliedro. Grazie alla potenza di calcolo e di memoria dell'elaboratore è possibile costruire poliedri talmente complessi da descrivere la superficie in modo soddisfacente. Una

8. Un punto che si muove sul piano o nello spazio genera una linea, piana o sghemba, linea luogo geometrico o linea grafica.



superficie siffatta si dice *mesh*. La superficie del suolo, in particolare, viene di solito descritta con un modello *mesh* detto *DTM* (*Digital Terrain Model*).

Le superfici, tuttavia, si possono anche descrivere punto a punto, con tecniche di interpolazione e, in particolare, l'algoritmo NURBS può generare sia superfici di interpolazione che superfici luogo geometrico.

Come abbiamo visto, una forma geometrica, come una retta, o una linea curva o una superficie, può essere descritta per mezzo di tutti i suoi punti o per mezzo di un numero finito di punti, che le appartengono. La prima descrizione si dice *continua*, la seconda *discreta*.

Per ottenere una descrizione continua è necessario conoscere la legge matematica che genera la forma considerata, mentre per ottenere una descrizione discreta, basta conoscere le coordinate dei punti prescelti.

Si comprende bene, perciò, come la prima descrizione, quella continua, sia più ricca della seconda, non solo perché permette di controllare tutti i punti della forma considerata, ma perché implica la conoscenza della genesi della forma stessa.

I modelli basati su descrizioni continue si dicono anche *modelli matematici*, quelli basati su descrizioni discrete, si dicono, invece, *modelli numerici*.

Simbologia

Gli enti geometrici fondamentali, cioè i punti, le linee e le superfici si distinguono, abitualmente, per mezzo di simboli. I simboli permettono anche di esprimere alcune qualità, come l'appartenenza a un insieme, o l'effetto di un'operazione. I simboli costituiscono dunque una sorta di stenografia che registra in sintesi tutti i processi compiuti.

I *punti* si contrassegnano per mezzo delle lettere maiuscole dell'alfabeto latino, scritte in carattere tondo: **A, B ... N**.

Le *rette* si contrassegnano per mezzo delle lettere minuscole dell'alfabeto latino, scritte in carattere tondo: **a, b ... n**.

Le *linee* curve si contrassegnano per mezzo delle lettere minuscole dell'alfabeto latino, scritte in carattere corsivo: *a, b ... n*.

I *piani* si contrassegnano per mezzo delle lettere minuscole dell'alfabeto greco: $\alpha, \beta \dots \nu$.

Le *superfici* si contrassegnano per mezzo delle lettere minuscole dell'alfabeto greco, scritte in carattere corsivo: $\alpha, \beta \dots \nu$

Gli *angoli* si contrassegnano per mezzo delle lettere maiuscole dell'alfabeto greco: $\Gamma, \Delta \dots \Sigma$.

Se un ente geometrico appartiene a un insieme di altri elementi, si indica con il simbolo che lo contraddistingue seguito dal simbolo di appartenenza \in e dal simbolo dell'insieme cui appartiene. Ad esempio $P \in r$ significa che il punto **P** appartiene alla retta **r**; in altre parole, il punto **P** giace sulla retta **r**.

Se un ente geometrico appartiene a due o più insiemi, si dice che è la loro *intersezione*. Un *elemento intersezione* si indica con il simbolo che lo contraddistingue seguito da una parentesi che racchiude i simboli degli insiemi ai quali appartiene separati dal segno \cap di intersezione. Ad esempio, $P(r \cap \alpha)$ significa che il punto **P** è l'intersezione della retta **r** e del piano α .

L'operazione di proiezione e sezione, alla quale si è fatto cenno, è rappresentata da un apice. Ad esempio, P^I è un punto risultato dalla proiezione del punto **P**. Spesso è necessario eseguire più di una operazione di proiezione sul medesimo ente geometrico, si usa allora distinguere i risultati con apici semplici, doppi e tripli o, anche, con un numero romano posto all'apice. Ad esempio P^I e P^{II} sono la prima e la seconda proiezione del punto **P**. $Q^I, Q^{II}, Q^{III}, Q^{IV}$ sono la prima, la seconda, la terza e la quarta proiezione del punto **Q**.

Uno o più asterischi posti all'apice di una lettera indicano invece l'operazione di ribaltamento, cioè, in genere, la rotazione di un piano e delle figure in esso contenute, che dallo spazio si portano sul foglio del disegno.

Il piano di lavoro

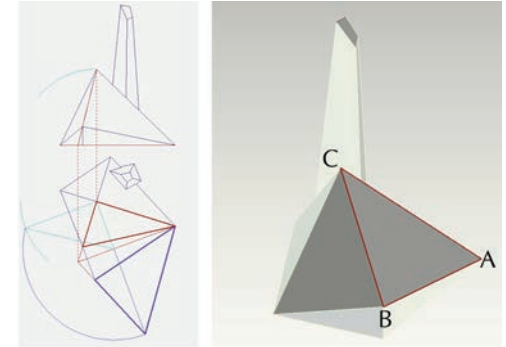
Quando si costruisce qualcosa, non importa se con la matita dell'architetto o con la cazzuola del muratore, si ha la necessità di appoggiare il proprio lavoro su un piano: solo dopo aver costruito una prima forma piana la si può sollevare nello spazio. L'architetto, ad esempio, lavora su un foglio di carta da disegno, ma anche il maestro che costruisce un arco, lo disegna prima a terra, o sul *piano di imposta* del lavoro; così può sagomare quella *centina* che guiderà la disposizione dei mattoni nello spazio, sostenendone il peso durante la costruzione. La realizzazione di qualsiasi forma tridimensionale passa attraverso la sua riduzione a forme semplici, piane, che possono avere con la forma originale relazioni anche complesse, ad esempio di natura proiettiva, ma che sono comunque facili da controllare. Noi chiameremo *piano di lavoro* o *piano di costruzione* il piano su cui si svolgono queste operazioni preliminari.

Nei modelli grafici, il piano di costruzione coincide sempre con i piani di proiezione. Infatti l'unico supporto del disegno è il foglio di carta e non vi è altro possibile sostegno alle operazioni del progettista. Se, ad esempio, vogliamo misurare la faccia obliqua d'un solido (fig. 9), dobbiamo farla coincidere col piano di proiezione.

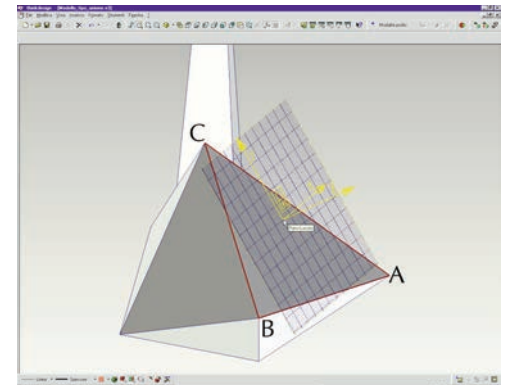
Nella modellazione informatica, invece, il piano di costruzione può coincidere con il piano di proiezione, cioè con la vista, ma può anche essere disposto nello spazio ed è perciò possibile costruire una figura osservandola da un punto di vista qualsiasi. Perciò, per misurare la medesima faccia dell'esempio precedente, si può appoggiare su di essa il piano di costruzione (fig. 10) senza muovere il piano di proiezione, cioè la vista.

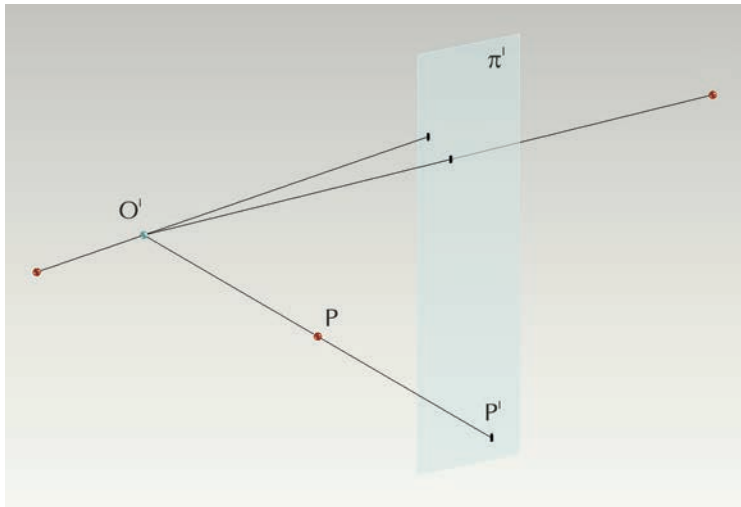
Quando si costruisce un modello grafico, si ha l'impressione di disegnare sulla carta (e chi non l'avrebbe), mentre si sta disegnando nello spazio (benché sia difficile crederci). Quando si lavora con un programma di modellazione tridimensionale, è invece facile rendersi conto della natura tridimensionale degli oggetti modellati e delle operazioni che li modificano, perché si ha la possibilità di seguire, contemporaneamente su più viste, l'evolversi del lavoro.

9. La falda inclinata del tetto **ABC** è stata ruotata intorno alla linea **AB** per misurarne l'estensione.



10. Nel modello informatico del medesimo tetto, è possibile disporre il piano di costruzione, nello spazio, sulla faccia **ABC**.





11. Per proiettare un punto P da un centro O' su un piano di quadro π^1 , si costruisce la retta $O'P$ e si trova il punto, P^1 , che essa ha in comune con il quadro π^1 .

Operazioni per la visualizzazione del modello

Abbiamo articolato il processo di costruzione di un modello in tre fasi: la *sintesi*, come costruzione del modello geometrico dell'oggetto reale, la *riduzione*, come contrazione e semplificazione del modello geometrico per adattarlo alla capacità del supporto che deve contenerlo, e la *proiezione* come riduzione dalle tre dimensioni dello spazio alle due della visualizzazione grafica o informatica, sul foglio da disegno o sullo schermo del computer. Vogliamo ora esaminare in dettaglio l'operazione di proiezione, che consente il terzo passaggio.

Questa operazione è articolata in due fasi: la proiezione vera e propria, fondata sui postulati di appartenenza, e la sezione, che si avvale delle proposizioni relative all'intersezione degli enti geometrici.

Queste due fasi, però, sono quasi sempre associate, sicché conviene, per brevità, raccoglierle sotto il medesimo termine: *proiezione*.

La proiezione è la più importante di tutte le operazioni che danno vita al modello, poiché consente al modello geometrico dell'oggetto considerato di uscire dallo spazio puramente concettuale nel quale si trova (la mente del progettista) per prendere corpo nei segni della matita di un modello grafico, o nelle immagini in movimento di un modello informatico.

Proiezione da un centro di un punto

Sono dati: un punto P dello spazio, un altro punto O' , detto *centro di proiezione*, e un piano di proiezione π^1 , detto *quadro*. L'operazione di proiezione consiste (fig. 11):

- nel costruire la retta $O'P$, individuata dal centro O' e dal punto P (appartenenza);
- nel costruire il punto P^1 intersezione della retta $O'P$ con il piano di quadro π^1 (intersezione).

Il punto P^l è detto semplicemente *immagine* o *proiezione* di P su π^l .

La retta O^lP è detta *retta proiettante*, come anche tutte le rette che appartengono al centro di proiezione O^l .

Esaminiamo ora le posizioni che il punto proiettato P può assumere lungo la retta proiettante: dobbiamo escludere che il punto proiettato coincida con il centro di proiezione O^l , in questo caso, infatti, la retta proiettante non è individuata; tutte le altre posizioni sono legittime; in particolare, il punto P può trovarsi avanti o dietro il quadro, avanti o dietro il centro di proiezione; il punto P può anche appartenere al quadro: in tal caso l'immagine P^l coincide con P .

Si deve infine escludere che il centro di proiezione O^l appartenga al quadro, perché, in tal caso, l'operazione di proiezione, pur essendo possibile, è priva di senso.

Proiezione da un centro di una retta

Sono dati: una retta r dello spazio, un punto O^l , detto *centro di proiezione*, distinti, e un piano di proiezione π^l , detto *quadro*. L'operazione di proiezione consiste (fig. 12):

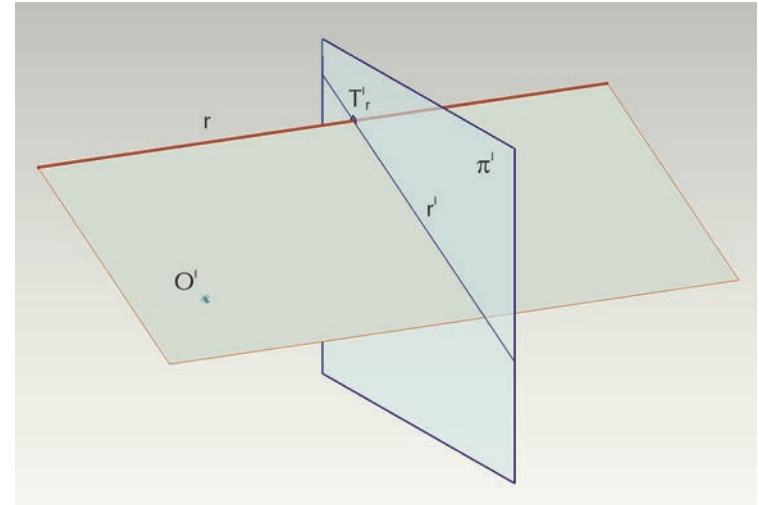
- nel costruire il piano O^lr , individuato dal centro O^l e dalla retta r (appartenenza);
- nel costruire la retta intersezione r^l del piano O^lr con il piano di quadro π^l (intersezione).

La retta r^l è detta semplicemente *immagine* o *proiezione* di r su π^l .

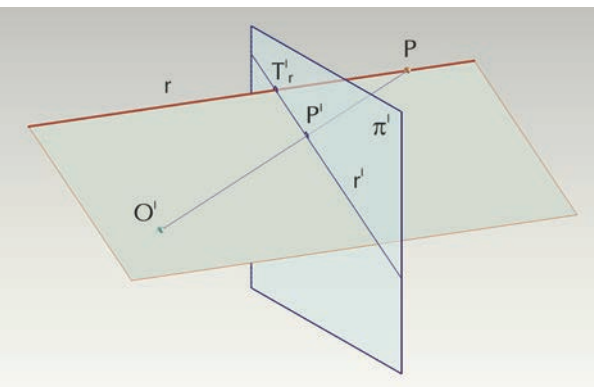
Il piano O^lr è detto *piano proiettante*, come anche tutti i piani che appartengono al centro di proiezione O^l .

Dobbiamo escludere che O^l ed r si appartengano e che O^l appartenga al quadro, per le stesse ragioni già dette. Ogni altra posizione di r è legittima, in particolare la retta proiettata r può appartenere al quadro, nel qual caso l'immagine r^l coincide con la retta oggettiva.

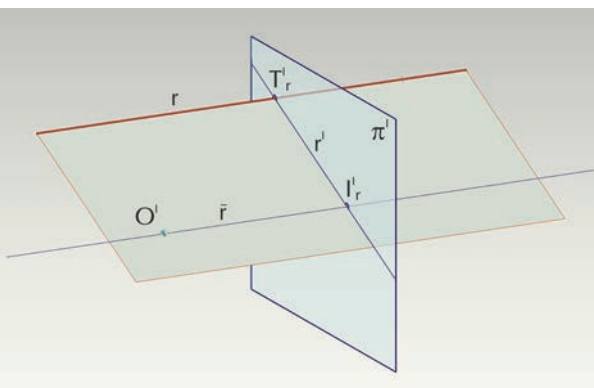
Se la retta r non appartiene al quadro, è incidente. Chiamiamo il punto in cui la retta r incontra il quadro *traccia della retta* e lo distinguiamo con il simbolo T_r^l . Nel caso in cui la retta r è parallela al quadro la traccia è la direzione della retta.



12. Per proiettare una retta r da un centro O^l su un piano di quadro π^l , si costruisce il piano O^lr e si trova la retta, r^l , che esso ha in comune con il quadro π^l .



13. Un primo modo per costruire il piano proiettante consiste nel proiettare un punto qualsiasi della retta data. La retta data e la retta proiettante il punto prescelto individuano il piano proiettante.



14. Un secondo modo per costruire il piano proiettante consiste nel condurre per il centro di proiezione una retta parallela alla retta data: due rette parallele individuano un piano, poiché una di esse è proiettante, il piano così costruito è proiettante.

Il piano proiettante $O'r$ si può costruire in due modi, che ci apprestiamo a esaminare.

Primo procedimento: si sceglie un qualsiasi punto P della retta r e si proietta dal centro O' sul quadro π' (fig. 13): risultato di questa operazione è il punto P' .

Il piano proiettante è individuato dalle due rette r e $O'P$, incidenti per costruzione.

La retta r' , intersezione del piano proiettante con il quadro è individuata dai punti T'_r , traccia della retta, e P' . Infatti: i punti T'_r e P' appartengono entrambi al piano proiettante e al quadro, per costruzione, individuano perciò la retta r' che è formata dall'insieme dei punti comuni al piano proiettante e al quadro.

Secondo procedimento: si costruisce una retta \bar{r} (leggi *erre so-prassegnato*), proiettante e parallela alla retta r (fig. 14) e si individua il punto I'_r nel quale la \bar{r} incontra il quadro: questo punto è detto *fuga* della retta r .

Il piano proiettante è individuato dalle due rette r e \bar{r} , parallele per costruzione.

La retta r' , intersezione del piano proiettante con il quadro, è individuata dai punti T'_r , traccia della retta, e I'_r . Infatti: i punti T'_r e I'_r appartengono entrambi al piano proiettante e al quadro, per costruzione, individuano perciò la retta r' che è formata dall'insieme dei punti comuni al piano proiettante e al quadro.

Consideriamo ora, tutte insieme, le operazioni sin qui effettuate e il relativo risultato (fig. 15).

Tra i punti della retta r e i punti della retta r' , individuata dalla traccia e dalla fuga di r , sussiste una relazione biunivoca. Ciò significa che, assegnato su r un qualsiasi punto Q , esiste sempre un punto Q' di r' , immagine o proiezione di Q . E, viceversa, assegnato un qualsiasi punto R' di r' , esiste sempre su r un punto oggettivo R che ha per immagine R' .

È dunque legittimo chiedersi: qual è il punto della retta oggettiva r che ha per immagine la fuga I'_r ?

Secondo la geometria euclidea questo punto non esiste, perché la retta proiettante \bar{r} è, per costruzione, parallela alla retta r e due rette parallele non hanno alcun punto in comune. Tuttavia, noi ab-

biamo convenuto che due rette parallele hanno in comune la direzione e affermiamo, perciò, che *la fuga della retta r è l'immagine della sua direzione*.

La nostra affermazione è avvalorata da una semplice esperienza. Se proiettiamo altre rette $a, b, c \dots n$ tutte parallele a r , verifichiamo immediatamente che tutte hanno in comune il medesimo punto di fuga I'_r e che le relative immagini, o proiezioni, convergono in I'_r ($I'_r \equiv I'_a \equiv I'_b \equiv I'_c \equiv \dots \equiv I'_n$). Il punto di fuga, dunque, si manifesta allo spettatore come il luogo nel quale rette parallele trovano un'entità comune, la direzione, appunto.

Consideriamo ora due rette oggettive r e s , incidenti nel punto P (fig. 16). Queste due rette individuano un piano, il piano α . Le tracce delle due rette, T'_r e T'_s , individuano la retta t'_α , intersezione del piano α con il quadro π^l : questa retta è detta *traccia del piano*. Ogni retta del piano α incontra il quadro in un punto della retta t'_α , che dunque può definirsi come il luogo geometrico delle tracce delle rette del piano α .

Costruiamo ora le fughe delle rette r e s . Per far ciò dovremo condurre per il centro di proiezione O^l due rette \bar{r} e \bar{s} rispettivamente parallele alla r e alla s . Queste due rette intersecano il quadro nei punti di fuga richiesti, I'_r e I'_s . Le rette r e s , essendo incidenti in O^l , individuano un piano α , che risulta parallelo ad $\bar{\alpha}$ (EUCLIDE, XI, proposizione 15):

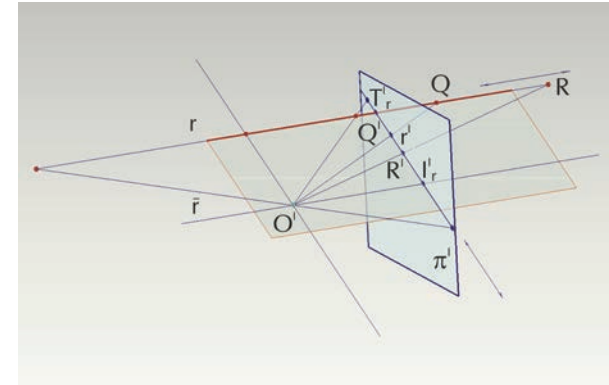
I punti I'_r e I'_s individuano la retta i'_α , intersezione di α e π^l , che è detta *fuga del piano α* .

I piani α e $\bar{\alpha}$, come abbiamo osservato, sono paralleli; ne consegue che anche la retta t'_α e la retta i'_α , rispettivamente traccia e fuga del piano α , sono parallele (EUCLIDE, XI, proposizione 16).

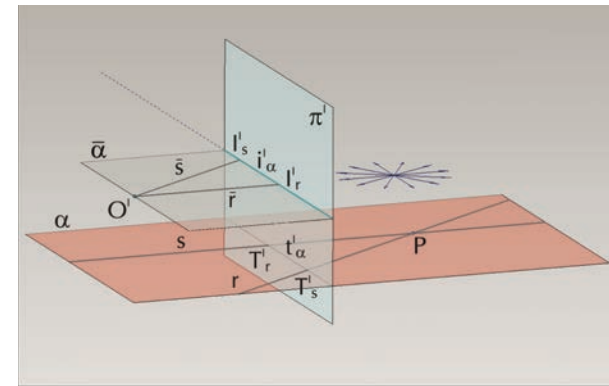
Qualsiasi retta di α incontra il quadro in un punto della retta i'_α , che dunque può definirsi come luogo geometrico delle fughe delle rette del piano α . Poiché abbiamo precedentemente convenuto che la giacitura di un piano è il luogo geometrico delle direzioni delle rette che appartengono al piano, la fuga i'_α può anche essere vista come *l'immagine della giacitura del piano*.

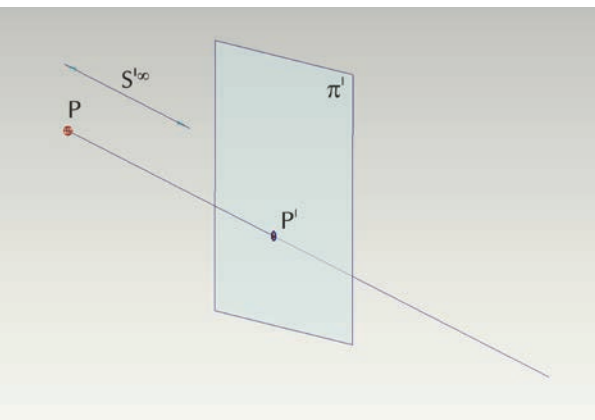
L'orizzonte, linea comune a tutte le superfici orizzontali, è un buon esempio fisico di questo concetto.

15. Una retta proiettante, parallela a una retta data, non ha in comune con quest'ultima un punto, bensì la direzione. La proiezione della direzione di una retta si dice *fuga della retta*.



16. Un piano proiettante, parallelo a un piano dato, non ha in comune con quest'ultimo una retta, bensì la giacitura. La proiezione della giacitura di un piano si dice *fuga del piano*.





17. Per proiettare un punto P da una direzione $S^{1\infty}$ su un piano di quadro π^1 , si costruisce la retta che passa per P ed è parallela alla direzione $S^{1\infty}$ e si trova il punto, P^1 , che essa ha in comune con il quadro π^1 .

Esperienze simili a quella precedentemente effettuata per le rette, su piani paralleli al piano dato, mostrano come tutti abbiano in comune la medesima fuga, ciò che prova, ancora una volta, come la fuga di un piano possa essere vista come immagine della giacitura, in questo caso, della giacitura di più piani paralleli.

Riassumiamo, per concludere, le notevoli proprietà che abbiamo osservato:

- traccia e fuga di un piano sono rette parallele;
- se una retta appartiene a un piano, la traccia della retta appartiene alla traccia del piano, la fuga della retta appartiene alla fuga del piano;
- se una retta è parallela a un piano e distinta da esso, la traccia della retta non appartiene alla traccia del piano, mentre la fuga della retta appartiene alla fuga del piano;
- le tracce di due rette incidenti individuano la traccia del piano cui appartengono;
- le fughe di due rette incidenti individuano la fuga del piano cui appartengono.

Proiezione da una direzione di un punto e di una retta

Possiamo ora estendere l'operazione di proiezione al caso in cui il centro di proiezione non sia un punto, bensì una direzione $S^{1\infty}$.

Sono dati: un punto P dello spazio, una direzione $S^{1\infty}$, detta *direzione di proiezione* e un piano di proiezione π^1 , detto *quadro* (fig. 17). L'operazione di proiezione del punto consiste:

- nel costruire la retta $S^{1\infty}P$, individuata dal centro $S^{1\infty}$ e dal punto P , come retta che passa per P e ha la direzione assegnata (appartenenza);
- nel costruire il punto intersezione P^1 della retta $S^{1\infty}P$ con il piano di quadro π^1 (intersezione).

È bene osservare, che, in questo caso, tutte le rette proiettanti un qualsiasi numero di punti distinti dello spazio, sono parallele tra loro perché tutte parallele alla direzione assegnata come centro di proiezione.

Sono dati: una retta r dello spazio, una direzione $S^{1\infty}$, detta *direzio-*

ne di proiezione, distinti, e un piano di proiezione π^l , detto *quadro* (fig. 18). L'operazione di proiezione della retta consiste:

- nel costruire il piano $S^{l\infty}r$, individuato dal centro $S^{l\infty}$ e dalla retta r (appartenenza);
- nel costruire la retta intersezione r^l del piano $S^{l\infty}r$ con il piano di quadro π^l (intersezione).

Per costruire il piano proiettante $S^{l\infty}r$, si sceglie un qualsiasi punto P della retta r e si proietta dal centro $S^{l\infty}$ sul quadro π^l : risultato di questa operazione è il punto P^l .

Il piano proiettante è individuato dalle due rette r e $S^{l\infty}P$, incidenti per costruzione.

La retta r^l , intersezione del piano proiettante con il quadro è individuata dai punti T_r^l , traccia della retta, e P^l .

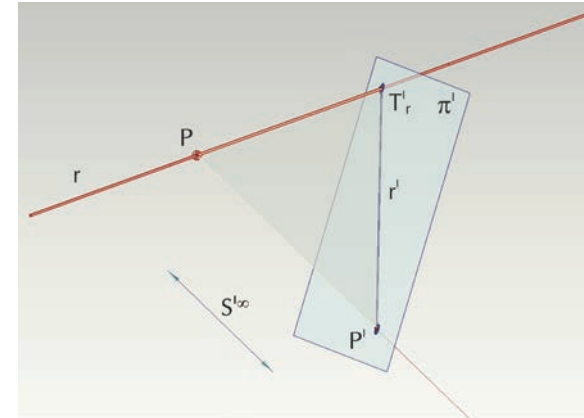
Proprietà delle figure che non variano nella proiezione

A Jean Victor Poncelet (1788-1867) va il merito d'aver per primo studiato gli effetti dell'operazione di proiezione e sezione sulle forme geometriche fondamentali. Egli osservò che alcune proprietà di una figura F , che sia sottoposta all'operazione di proiezione e sezione, si trasmettono inalterate alla figura F^l , risultato dell'operazione (PONCELET 1865, sezione I): queste proprietà sono note come *invarianti proiettive*.

Cercheremo ora di chiarire l'idea di Poncelet avvalendoci di un esempio semplice e concreto: sostituirò perciò alla figura F un oggetto o un insieme di oggetti che si possano facilmente assimilare a forme geometriche pure, mentre all'operazione di proiezione e sezione sostituirò una ripresa fotografica.

Osserviamo la fotografia di un tavolo rettangolare (fig. 19): il piano del tavolo è rappresentato da un quadrilatero irregolare. Ciò significa che la proprietà della figura originale, che consiste nell'aver quattro angoli retti e i lati opposti eguali, è andata perduta, viceversa le intersezioni reciproche dei lati in quattro punti, i vertici della figura, si sono conservate nell'operazione di proiezione. La seconda proprietà, dunque, è invariante proiettiva, mentre la prima non lo è.

18. Per proiettare una retta r da una direzione $S^{l\infty}$ su un piano di quadro π^l , si costruisce il piano che passa per r ed è parallelo alla direzione $S^{l\infty}$ e si trova la retta, r^l , che esso ha in comune con il quadro π^l .



19. Il piano del tavolo è rettangolare, ma nella fotografia, a causa dell'operazione di proiezione, ha assunto l'aspetto di un quadrilatero irregolare. La congruenza dei lati opposti si è perduta, l'incidenza dei lati nei quattro vertici si è conservata. Quest'ultima è una *proprietà invariante proiettiva*.





20. L'incidenza, la tangenza, l'allineamento, cioè le proprietà grafiche delle figure, sono invarianti proiettive; le proprietà metriche, no.

Osserviamo ora alcuni oggetti di forma regolare appoggiati sul tavolo (fig. 20): vi sono due fili tesi che si intersecano in un punto e sono tangenti al bordo di un curvilineo e di un goniometro. Osserviamo ancora i medesimi oggetti, ma da un altro punto di vista: quali sono le proprietà geometriche comuni alle due figure proiettate, cioè alle due fotografie? Le due rette sono incidenti, sia nella prima che nella seconda immagine: dunque l'incidenza è una proprietà invariante proiettiva. Non solo: le due rette si incontrano nel medesimo punto, quello che a entrambe appartiene, perciò l'appartenenza è invariante, e così la tangenza e l'allineamento e, in breve, tutte quelle proprietà che Poncelet chiama *di posizione* o *grafiche* (PONCELET 1865, sezione I, I, 6):

Quali sono, al contrario, le proprietà che non sono comuni alle due immagini? Nella prima e nella seconda fotografia risultano diversi l'angolo formato dai due fili, la distanza di due punti corrispondenti ai medesimi punti reali, l'area racchiusa dal goniometro e così via: in altre parole, non sono invarianti le proprietà *metriche* della figura.

Poncelet osservò ancora che, se si studia una figura geometrica, per quanto attiene alle sue proprietà invarianti o per quanto ne consegue, è possibile sostituire alla figura studiata una sua proiezione e i risultati che possono essere raggiunti su quella valgono, evidentemente, per la prima. Questo metodo di studio, che porta il nome del suo artefice, semplifica di molto i problemi della geometria, giacché consente di sostituire all'analisi di figure irregolari, quella di figure regolari, le cui proprietà si stabiliscono per vie elementari.

Prospettività

Se due figure piane possono essere dedotte l'una dall'altra per mezzo di una sola operazione di proiezione e sezione, esse si dicono *prospettive* e *prospettività* si chiama la relazione che tra loro intercede.

Ad esempio (fig. 21), il triangolo $A'B'C'$, che appartiene al piano α^I , e il triangolo $A''B''C''$, che appartiene al piano α^{II} , si possono deri-

vare l'uno dall'altro per proiezione dal centro U . Infatti, proiettando $A'B'C'$ su α'' si ottiene $A''B''C''$ e viceversa.

Nella prospettiva che intercede tra i due piani α' e α'' , si dicono corrispondenti gli elementi dei due piani che sono l'uno proiezione dell'altro.

I punti corrispondenti sono allineati con il centro di proiezione U . Le rette corrispondenti si incontrano sulla retta u , intersezione dei due piani cui appartengono le figure considerate, nei punti **1**, **2** e **3**. Infatti: la retta $A'B'$ appartiene, per costruzione, al piano π' ; la retta $A''B''$ appartiene, per costruzione, al piano π'' ; il punto comune alle due rette deve perciò appartenere alla retta intersezione dei due piani, che è luogo geometrico dei punti comuni ai due piani.

Il centro U si dice *centro della prospettiva*, la retta u *asse della prospettiva*.

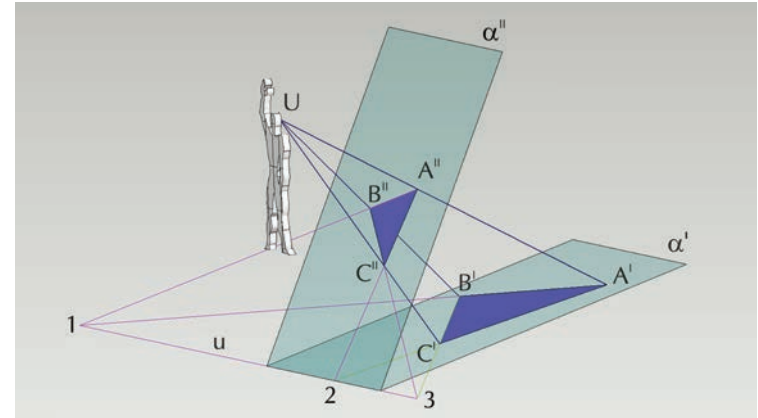
La relazione che abbiamo descritto ha un'utile applicazione. Supponiamo, infatti, di voler sezionare la piramide a base triangolare $A'B'C'$, di vertice U , con il piano α'' . Potremo procedere come segue (fig. 22).

- Si costruisce il punto intersezione di uno degli spigoli della piramide con il piano α'' , e sia il punto A'' .
- Si costruisce la retta $A'B'$ fino a intersecare l'asse u nel punto **1**.
- Si costruisce la retta $A''1$, corrispondente di $A'1$ nella prospettiva che lega i due piani α' e α'' .
- Il punto B'' appartiene alla retta $B'U$, perché è allineato con il centro della prospettiva, e si trova nella intersezione di quest'ultima con la retta $A''1$ già costruita.
- Con analoga costruzione si trova il punto C'' .

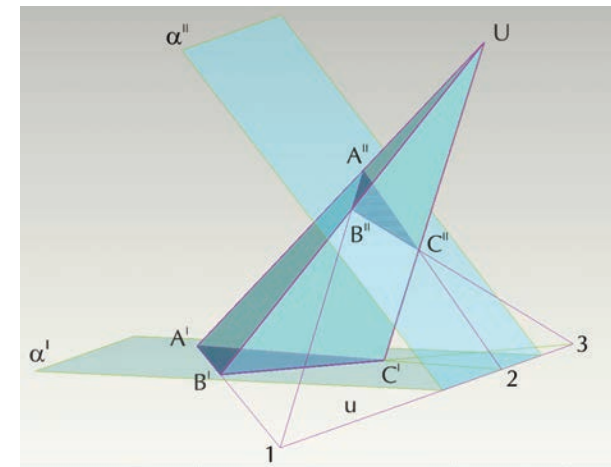
Proiettiamo ora l'intera figura tridimensionale sopra costruita su un piano di quadro π' (così è, ad esempio, quando osserviamo il modello informatico). La proiezione conserverà le proprietà invarianti e perciò, tra le proiezioni dei due triangoli, legati dalla prospettiva, intercederà ancora la relazione che abbiamo descritto e cioè:

- punti corrispondenti saranno allineati con il centro U ;
- rette corrispondenti si incontreranno sull'asse u .

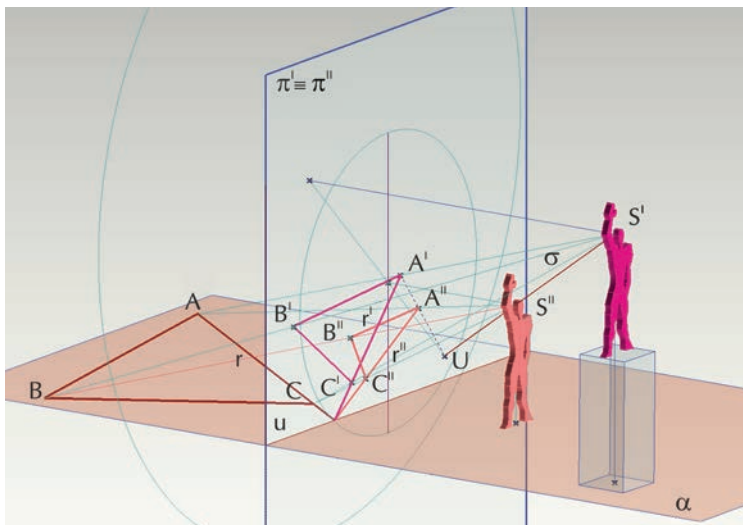
Questa relazione, che si instaura sul piano di proiezione π' , anziché nello spazio, si dice *omologia piana*.



21. I piani che ospitano i due triangoli $A'B'C'$ e $A''B''C''$ sono in corrispondenza prospettiva, cioè sono legati da una prospettiva.



22. La prospettiva può essere applicata, nei modelli, alla sezione piana di parallelepipedi e piramidi.



23. Tra le figure che sono proiezioni, da due centri distinti, sopra due piani di quadro sovrapposti, di una medesima figura dello spazio, intercede una relazione geometrica che è detta *omologia piana*.

Omologia piana

L'omologia può essere generata anche in altro modo. Consideriamo un piano α nel quale sia ospitata una qualsiasi figura e due centri di proiezione S^I e S^{II} , che proiettano la figura su due piani di quadro sovrapposti, π^I e π^{II} . L'apice distingue le operazioni di proiezione e così π^I ospiterà le figure proiettate da S^I , π^{II} le figure proiettate da S^{II} (fig. 23).

Proiettiamo ora il punto A di α . L'operazione consiste nel costruire le due rette proiettanti $S^I A$ e $S^{II} A$ e nel sezionarle, rispettivamente, con π^I e π^{II} , piani coincidenti. Queste due rette proiettanti intersecano $\pi^I \equiv \pi^{II}$ nei punti A^I e A^{II} , che sono le due proiezioni di A e si dicono *punti corrispondenti* nella relazione omologica.

I tre punti S^I , S^{II} e A individuano un piano σ , che seziona i due quadri coincidenti, $\pi^I \equiv \pi^{II}$, secondo due rette coincidenti, individuate dai punti A^I e A^{II} : infatti questi sono punti comuni a σ e a $\pi^I \equiv \pi^{II}$, per costruzione.

Consideriamo ora la retta $S^I S^{II}$: essa appartiene ancora al piano σ e perciò interseca $\pi^I \equiv \pi^{II}$ in un punto della retta $A^I A^{II}$, che chiameremo U .

Convien ora prendere in considerazione altri punti del piano α , come B , C , D e ripetere la costruzione, per osservare che, mentre il piano proiettante di volta in volta individuato dai due centri di proiezione e dal punto considerato si distingue da σ , non muta invece la retta $S^I S^{II}$ e perciò il punto U è sempre il medesimo. I punti omonimi B^I e B^{II} , C^I e C^{II} , D^I e D^{II} appartengono dunque a rette che passano tutte per il punto U .

Si dice, perciò, che punti corrispondenti, cioè punti che sono proiezioni da S^I e da S^{II} di un medesimo punto del piano α , sono allineati con il centro U dell'omologia.

Consideriamo ora una retta r , che appartiene al punto A , e giace sul piano α , e proiettiamola da S^I e da S^{II} su $\pi^I \equiv \pi^{II}$. Le proiezioni r^I e r^{II} della retta considerata avranno in comune le tracce, cioè il punto in cui la retta stessa incontra i due piani di proiezione sovrapposti $\pi^I \equiv \pi^{II}$, punto che appartiene alla retta u , che il piano α ha in comune con i piani di proiezione.

Si dice che rette corrispondenti, cioè rette che sono immagini di una stessa retta, come r^I ed r^{II} , si incontrano sull'asse u dell'omologia.

Riassumendo:

- punti corrispondenti sono allineati con il centro U dell'omologia;
- rette corrispondenti si intersecano sull'asse u dell'omologia.

Tutta la potenza della relazione omologica è racchiusa nelle semplici regole che abbiamo enunciato: esse consentono, infatti, il passaggio immediato da una forma geometrica all'altra, dalla proiezione da un centro alla proiezione da un altro, con notevolissimi vantaggi non solo per le applicazioni, ma soprattutto per l'indagine geometrica.

Ad esempio (fig. 24): data una figura $A'B'C'D'E'$, proiezione di una figura piana $ABCDE$ da un centro S^I , e dati ancora, il centro U , l'asse u dell'omologia e un punto A^{II} della figura $A^{II}B^{II}C^{II}D^{II}E^{II}$, si può costruire quest'ultima come segue.

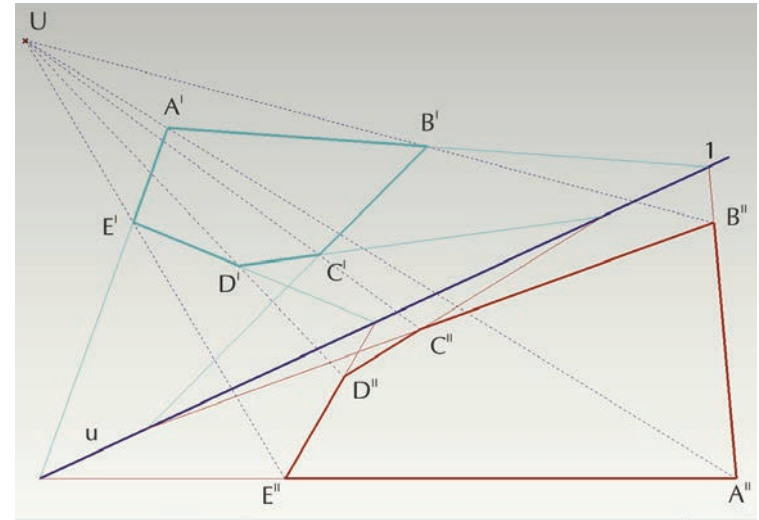
- Si traccia la retta $A'B'$ e si costruisce il punto 1 in cui essa interseca l'asse u .
- Poiché sappiamo che rette corrispondenti si incontrano sull'asse, possiamo ora tracciare la retta $1A^{II}$, corrispondente di $A'1$ nella relazione omologica che stiamo costruendo.
- Il punto B^{II} , dovrà appartenere a questa retta, come B' appartiene alla sua corrispondente. Perciò, ricordando che punti corrispondenti sono allineati con il centro, basterà tracciare la retta UB' per trovare B^{II} nella intersezione di quest'ultima con la $1A^{II}$.

La costruzione viene completata applicando più volte il procedimento su esposto.

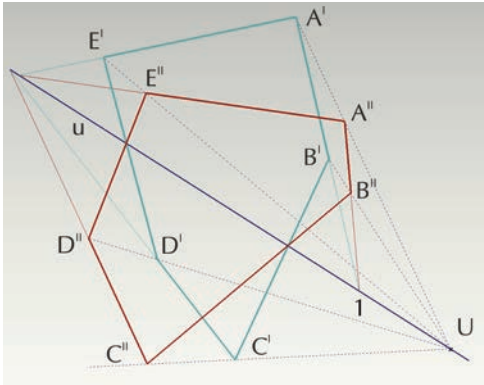
L'omologia interviene nella soluzione di molti problemi applicativi. Ciò comporta la necessità di contemplare molte e diverse situazioni dei centri di proiezione e dei piani che ospitano la figura e le sue rappresentazioni. A queste situazioni fanno riscontro altrettante specializzazioni della relazione omologica che è bene esaminare.

OMOLOGIA SPECIALE

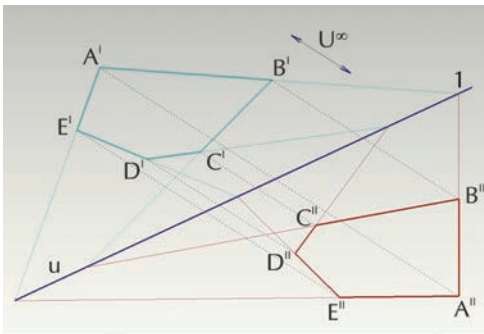
Se i centri di proiezione S^I e S^{II} e la retta u appartengono al medesimo piano, le due rette $S^I S^{II}$ e u sono complanari e hanno perciò in comune un punto, o la direzione: allora il centro dell'omologia



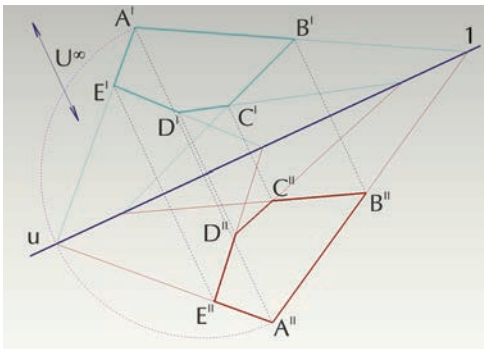
24. L'omologia piana permette un rapido passaggio da una proiezione all'altra della medesima figura piana, purché i piani di quadro siano coincidenti. Le viste del modello informatico di una figura piana sono legate da altrettante omologie.



25. L'omologia che ha il centro sull'asse si dice *speciale*.



26. Quando il centro dell'omologia è una direzione, la relazione prende il nome di *affinità*. Un'affinità può essere obliqua o ortogonale, secondo l'angolo, generico o retto, che le rette che allineano i punti corrispondenti formano con l'asse.



27. Se i punti corrispondenti in una affinità hanno eguali distanze dall'asse, la relazione si dice *simmetria*. La simmetria è la relazione omologica più nota e comunemente applicata in architettura.

appartiene all'asse e l'omologia si dice *speciale* (fig. 25). La costruzione di elementi corrispondenti non presenta particolarità.

OMOLOGIA AFFINE

Quando i centri di proiezione si trovano su un piano parallelo ai piani sovrapposti $\pi^I \equiv \pi^{II}$, la retta $S'S''$, che appartiene ai due centri, è parallela a $\pi^I \equiv \pi^{II}$ e perciò il centro U è una direzione e le rette che allineano punti corrispondenti sono parallele.

Il centro U è una direzione anche quando entrambi i centri di proiezione sono direzioni, in questo caso, infatti, la retta $S'S''$ è una giacitura.

In entrambi i casi l'omologia si dice *affine* oppure si dice che tra le figure di $\pi^I \equiv \pi^{II}$ intercede una *affinità omologica*, o anche, semplicemente, una *affinità* (fig. 26).

In una affinità il centro è dunque una direzione U^∞ del piano $\pi^I \equiv \pi^{II}$, che può essere obliqua, ortogonale, parallela all'asse u , come oblique, ortogonali, parallele all'asse sono, di conseguenza, le rette che allineano punti corrispondenti.

L'affinità, dunque, si caratterizza ulteriormente e si dice, secondo il caso, *affinità obliqua*, *affinità ortogonale*, *affinità speciale*.

In una affinità, i punti corrispondenti hanno distanze dall'asse che stanno in un rapporto costante.

Se, in particolare, queste distanze sono uguali, allora la relazione omologica si dice *simmetria rispetto all'asse*, o, semplicemente, *simmetria* (fig. 27). Una simmetria può essere obliqua o ortogonale. Quando è ortogonale, la figura F^I può essere sovrapposta alla F^{II} , e viceversa, a mezzo di una rotazione del piano π^I (o π^{II}) intorno all'asse u .

La simmetria è comunemente usata per "specchiare" le figure.

OMOTETIA

Quando il piano delle figure α e i piani di quadro $\pi^I \equiv \pi^{II}$ sono paralleli, la loro retta di intersezione è la giacitura dei tre piani, perciò l'asse dell'omologia è la giacitura u^∞ dei piani medesimi.

In tal caso l'omologia si dice *omotetia* (fig. 28).

L'omotetia si dice *diretta* o *inversa* secondo che i punti corrispondenti si trovino dalla stessa parte o da parti opposte rispetto a U .

I punti corrispondenti hanno dal centro distanze che stanno in

rapporto costante. Se, in particolare, queste distanze sono uguali, l'omotetia si dice *simmetria rispetto al centro* ed è tale che le figure corrispondenti possono essere sovrapposte a mezzo di una rotazione complanare intorno a **U**.

L'omotetia è usata per ingrandire o rimpicciolire le figure piane.

TRASLAZIONE

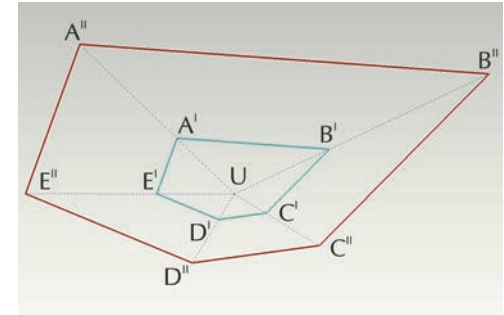
Se i centri di proiezione sono direzioni, ovvero appartengono a un piano parallelo a $\pi^I \equiv \pi^{II}$, e inoltre sono paralleli i piani α e $\pi^I \equiv \pi^{II}$, allora il centro e l'asse dell'omologia sono, rispettivamente, una direzione e una giacitura e l'omologia si dice *equipollenza* o *congruenza per traslazione* o anche semplicemente *traslazione* (fig. 29).

Proiezione nei modelli informatici

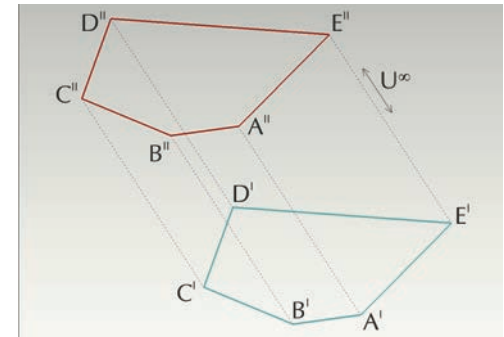
Come abbiamo già osservato, le operazioni di proiezione destinate alla visualizzazione del modello, sono del tutto automatiche nell'ambiente informatico. Può capitare, tuttavia, di voler eseguire comunque una di queste operazioni, utilizzando, come piano di proiezione o quadro, un piano qualsiasi dell'oggetto rappresentato e non lo schermo del computer. In questo caso, alcuni software mettono a disposizione dell'utente comandi idonei. Questi comandi utilizzano, in genere, la sola proiezione parallela, possono dunque proiettare punti e linee assumendo, come centro di proiezione, una direzione assegnata per mezzo di una retta.

Questi programmi non prevedono, dunque, di utilizzare come centro di proiezione un punto, come avviene nella proiezione centrale. In compenso, la proiezione può assumere come quadro o supporto degli enti proiettati, non solo un piano, ma una superficie qualsiasi (fig. 30).

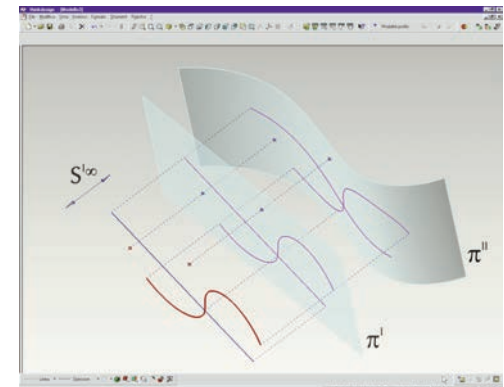
28. Se le rette corrispondenti di una omologia hanno in comune la direzione, anziché i punti dell'asse, la relazione si dice *omotetia*. L'omotetia è comunemente usata per ingrandire o rimpicciolire le figure piane.

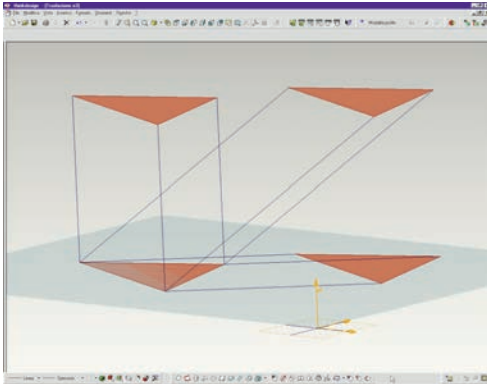


29. Una omotetia che ha per centro una direzione è una semplice traslazione della figura nel piano cui appartiene.



30. I modelli informatici dispongono di comandi atti a generare una proiezione parallela nello spazio del modello. Le figure possono essere proiettate su piani o su superfici qualsiasi.





31. Il *drag and drop* è una tecnica che permette, con un semplice movimento del *mouse*, di applicare una traslazione a una figura muovendola, nel piano o nello spazio, senza alterarne la giacitura.

Operazioni per la costruzione del modello

Abbiamo sin qui trattato delle operazioni che consentono la visualizzazione del modello. Nelle pagine che seguono prenderemo, invece, in considerazione le più comuni operazioni relative alla costruzione e alla modifica del modello.

Traslazione di un piano nello spazio

La prima operazione che bisogna considerare è la *traslazione*. Nei modelli grafici, la più comune traslazione è quella che interessa i piani di proiezione, quando vengono spostati, senza modificarne la giacitura, per semplificare le operazioni sul modello.

Ad esempio, quando un progettista disegna le piante di un edificio multipiano, trasla, di volta in volta, il piano di proiezione orizzontale sul livello che vuole rappresentare. Questa traslazione, perciò, avviene nello spazio, a differenza della traslazione, caso particolare di omotetia, che abbiamo precedentemente illustrato e che avviene nel piano. Lo scopo dell'operazione è spesso quello di portare il piano di lavoro e il piano di proiezione a coincidere, consentendo così al progettista di operare direttamente sulle figure, disponendole sul foglio da disegno.

I modelli informatici consentono la traslazione con vari comandi, il più semplice dei quali, detto *drag and drop*, consiste nel selezionare la figura con il *mouse* e nel trascinarla tenendo premuto il tasto di selezione (fig. 31).

Rotazione di un piano o ribaltamento

Se la figura che deve essere costruita appartiene a un piano che ha giacitura obliqua, rispetto al piano di proiezione, o alla vista, la traslazione non è sufficiente. In questo caso, nell'ambiente grafico come in quello informatico, si possono adottare due provvedimenti.

Il primo consiste nel portare il piano di proiezione, cioè la vista, a coincidere con il piano di costruzione; questo procedimento è noto come *cambiamento del piano di proiezione*.

Il secondo procedimento consiste, invece, nel ruotare il piano di costruzione fino a farlo coincidere con il piano di proiezione; questa operazione si dice *ribaltamento* (fig. 32).

La rotazione del piano di costruzione avviene intorno alla retta intersezione del piano stesso con il piano di proiezione. Questa retta assume il ruolo di *cerniera* del ribaltamento. Tutti gli enti e tutte le figure geometriche che appartengono al piano vengono coinvolti nel ribaltamento e si dispongono, a ribaltamento avvenuto, sul piano di proiezione. Una figura ribaltata appartiene dunque al piano di proiezione, e una figura che appartiene al piano di proiezione non subisce alcuna deformazione per effetto delle operazioni di proiezione e si dice, perciò, in *vera forma*. Inoltre, se al modello geometrico rappresentato non è stato applicato alcun rapporto di riduzione, la figura è anche *in vera grandezza*, altrimenti si dice *in scala*.

Due sono le leggi che governano il ribaltamento di un piano:

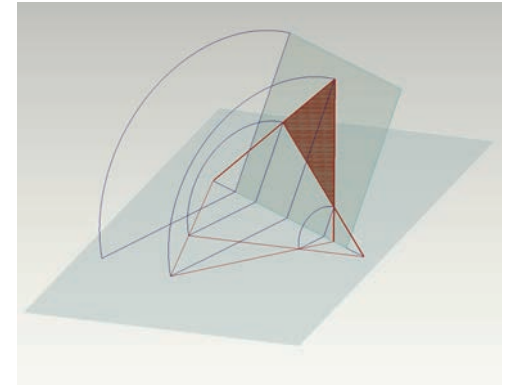
- i punti del piano descrivono, durante il ribaltamento, archi di circonferenza che appartengono a piani perpendicolari alla cerniera;
- i punti del piano conservano, durante il ribaltamento, la propria distanza dalla cerniera.

Nell'ambiente informatico, infine, è anche possibile una terza e più efficace soluzione che consiste nel far coincidere il piano di lavoro con il piano sul quale si deve costruire la figura, senza muovere il piano di proiezione, ovvero senza mutare la vista (fig. 33), come abbiamo già visto trattando del piano di costruzione.

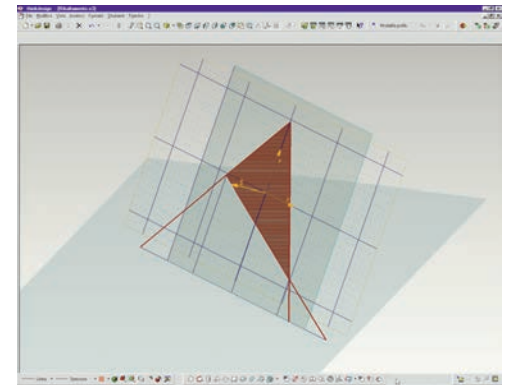
OMOLOGIA DI RIBALTAMENTO

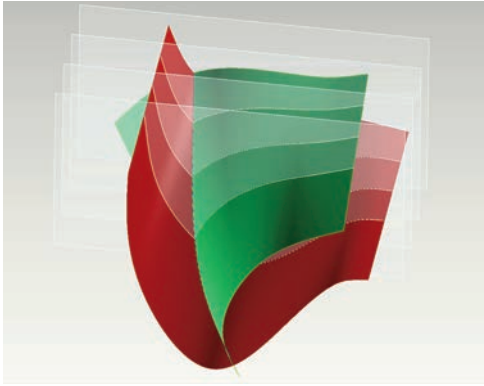
Un comunissimo caso di applicazione dell'omologia si verifica quando un piano, già oggetto di una proiezione, viene ribaltato sul piano di proiezione. Come abbiamo detto, tutti i punti del piano ribaltato descrivono archi di circonferenza che giacciono in piani perpendicolari alla cerniera; è possibile, perciò, sostituire alle traiettorie descritte dai punti, le corde dei rispettivi archi, che risultano tutte parallele. In altre parole, è possibile sostituire al mo-

32. Il ribaltamento di un piano consiste in una rotazione, che porta il piano a coincidere con il piano di proiezione. La rotazione avviene intorno alla retta intersezione del piano ribaltato con il piano di proiezione. Questa retta si dice



33. Nell'ambiente di modellazione informatico è anche possibile portare il piano di lavoro sul piano che ospita la figura da costruire o da modificare. I modellatori dispongono di vari comandi che permettono qualsiasi





34. Per costruire le curve intersezione di due superfici qualsiasi, si tagliano le superfici date con vari piani: ogni sezione dà luogo a due curve i cui punti comuni, se esistono, appartengono alla curva cercata.



35. Per costruire la retta intersezione di due piani si tagliano i piani dati con altri due, generando due coppie di rette che individuano due punti, distinti, della retta intersezione cercata.

vimento rotatorio del piano una operazione di proiezione parallela che assume come direzione quella delle corde suddette. La figura interessata al ribaltamento, viene così proiettata due volte: la prima, dal centro di proiezione proprio della vista considerata, la seconda dalla direzione delle corde. Ciò genera una omologia che può essere utilmente sfruttata nella costruzione della figura ribaltata o, all'inverso, nella costruzione della proiezione, quando la figura sia assegnata in vera forma sul ribaltamento. Questa omologia, detta appunto *omologia di ribaltamento*, sarà più volte applicata nel seguito.

Intersezione

Altra, essenziale, operazione di modellazione è quella che modifica un elemento, tagliandone una parte o unendolo a un altro elemento per poi rimuovere, se necessario, le parti in eccesso. Intersecare due enti geometrici significa compenetrarli e individuare gli enti geometrici che hanno in comune e che costituiscono un loro sottoinsieme. Ad esempio, le rette sono insiemi di infiniti punti, e intersecare due rette significa individuare il punto che hanno in comune; i piani sono insiemi di infinite rette, intersecare due piani significa individuare la retta che hanno in comune; più in generale, le superfici sono insiemi di infinite linee, intersecarle significa individuare le linee che hanno in comune.

Perciò: intersecare due cilindri significa individuare la linea curva che hanno in comune; una linea che, generalmente, è digrammica, cioè composta di due rami, e sghemba, cioè disposta nello spazio, non nel piano.

L'ente geometrico comune a due enti che si tagliano reciprocamente, si dice, semplicemente, *intersezione*. Perciò si dice, brevemente, *punto intersezione di due rette*, *retta intersezione di due piani*, *curva intersezione di due superfici generiche*.

L'intersezione è anche elemento di separazione delle parti che risultano dalla compenetrazione, perciò una retta, un piano, una superficie, possono essere divise nel punto o lungo la linea di intersezione.

I procedimenti che permettono di costruire l'ente geometrico intersezione di altri due sono riconducibili a quattro casi fondamentali: l'intersezione di due superfici e, come caso particolare, l'intersezione di due piani; l'intersezione di una linea e di una superficie e, come caso particolare, l'intersezione di una retta e di un piano.

INTERSEZIONE DI DUE SUPERFICI

Per costruire la curva intersezione di due superfici qualsivoglia, si tagliano le due superfici con un congruo numero di piani (fig. 34). Ogni piano individua sulle due superfici date due linee complanari: i punti che queste due linee hanno in comune, se esistono, sono punti che appartengono alla curva intersezione delle due superfici.

INTERSEZIONE DI DUE PIANI

In particolare, se le due superfici sono piani (fig. 35) è sufficiente tagliarli con altri due piani, poiché a ogni taglio fa seguito una coppia di rette e ogni coppia genera un punto (due punti, distinti, sono sufficienti per individuare una retta).

Quando si conosce il modo di costruire la linea comune a due superfici, e la retta comune a due piani, si può anche costruire il punto intersezione di una linea con una superficie e, come caso particolare, il punto intersezione di una retta e di un piano.

INTERSEZIONE DI UNA LINEA E UNA SUPERFICIE

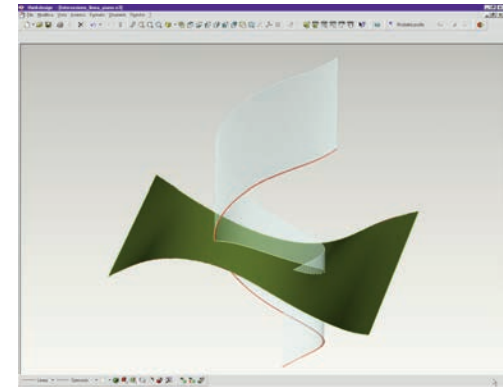
Infatti, per costruire il punto comune a una linea e a una superficie (fig. 36) basta condurre per la linea data un'altra superficie, per esempio un cilindro: questa seconda superficie taglierà la prima secondo una linea (che può essere costruita come sopra abbiamo visto) e il punto, o i punti, comuni a questa linea e alla linea data, se esistono, saranno i punti cercati.

INTERSEZIONE DI UNA RETTA E DI UN PIANO

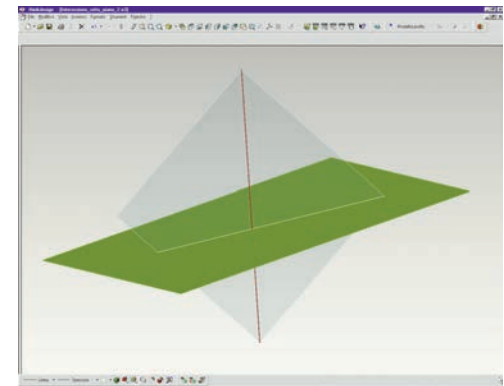
In particolare, per costruire il punto intersezione di una retta e di un piano (fig. 37) basta condurre per la retta data un altro piano, che tagli quello dato: il punto comune alla retta intersezione dei due piani e alla retta data è il punto cercato.

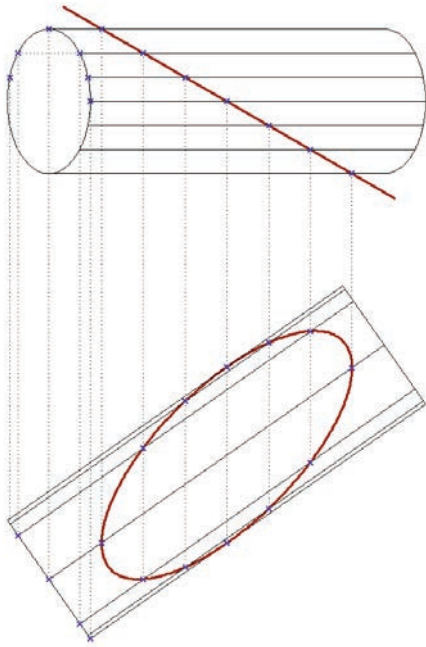
Come si vede, in tutti questi casi il problema è sempre il medesimo: tagliare una superficie con un piano. È dunque legittimo chie-

36. Per costruire il punto intersezione di una linea con una superficie, si taglia la superficie data con un'altra che appartenga alla linea data. La curva intersezione delle due superfici e la linea data si incontrano nel punto cercato.



37. Per costruire il punto intersezione di una retta con un piano, si costruisce un secondo piano per la retta data: il punto comune alla retta intersezione dei due piani e alla retta data è il punto cercato.





38. Nei modelli grafici, la sezione piana di una superficie si semplifica disponendo la vista in modo che il piano di sezione appaia di profilo. In questo caso i punti della sezione si confondono nei punti di un solo segmento (nell'alzato, in questo esempio).

dersi come sia possibile costruire la sezione piana di una qualsiasi superficie senza ricadere nei casi suesposti e, perciò, in un circolo vizioso.

Nei modelli grafici, ci si serve di un semplice artificio: si dispone il quadro e il centro di proiezione in modo che il piano di sezione sia proiettante; in altre parole, si fa in modo che il piano di sezione sia visto di profilo: così facendo, tutti i punti della linea intersezione del piano con la superficie si confondono nei punti di un segmento, circostanza, questa, che rende possibile, e assai semplice, l'operazione di taglio (fig. 38).

Nei modelli informatici il problema non si pone, poiché tutti i software di modellazione dispongono di un comando capace di generare la linea intersezione di due superfici (curve o piane) e di un comando capace di generare il punto intersezione di una linea con una superficie.

Operazioni di ricostruzione nello spazio dell'oggetto rappresentato

Una volta realizzato, il modello viene utilizzato per ricostruire nello spazio l'oggetto rappresentato. Questa fase, ultima nell'ordine di esecuzione, non lo è per importanza, perché proprio ad essa il modello deve il suo grande potenziale applicativo nelle attività di progetto.

La ricostruzione dell'oggetto impiega due distinte operazioni: la *misura* e la *restituzione* dello spazio.

La misura riguarda, essenzialmente, le grandezze lineari e, da queste, deriva quelle di superficie e di volume. Tuttavia nei modelli informatici sono disponibili molti altri controlli, come il peso (data la densità o peso specifico), le coordinate del centro di massa e del centro di volume, i momenti di inerzia, nonché vari strumenti per l'analisi della curvatura delle superfici, come, ad esempio, la costruzione automatica delle linee isofote, che sono le linee lungo le quali una superficie presenta, nel chiaroscuro, la medesima intensità luminosa.

La restituzione nello spazio è, invece, la sorprendente capacità del modello di rievocare l'oggetto rappresentato (o meglio la sua sintesi geometrica) nello spazio situato davanti alla vista o alle viste. Ciò si ottiene semplicemente ripercorrendo le operazioni di proiezione che hanno prodotto la vista medesima, ma in ordine inverso.

Avremo, tra breve, altre occasioni per sperimentare questa straordinaria proprietà dei modelli, per ora ci basta osservare la figura che apre questa parte del testo. Questa figura mostra come, da una tavola di Vallée, celebre autore del XIX secolo, sia possibile ricostruire l'oggetto rappresentato, con grande fedeltà e nella posizione esatta che occupava, avanti il quadro, nel momento in cui fu costruito il modello.

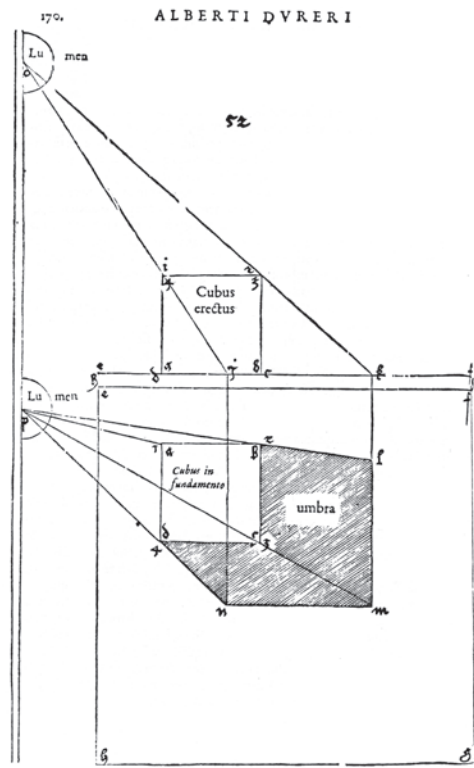
39. Questa tavola di Becchetti dimostra anche in modo semplicemente intuitivo la capacità del modello grafico di restituire nello spazio la forma degli oggetti rappresentati e la posizione dell'uno rispetto all'altro.



Studio teorico-pratico
ombre e del Chiaroscuro

Tav. XVIII

Parte Seconda La costruzione dei modelli



40. In questa tavola di Dürer (1605) il modello che associa due proiezioni ortogonali è usato per compiere le operazioni di proiezione e sezione che costruiscono geometricamente l'ombra di un cubo, proiettata da una sorgente di luce vicina.

Due passi nella storia

Sono nati prima i modelli prospettici, che si fondano sulla proiezione da un punto accessibile, o quelli per proiezione parallela, eseguita da un punto a distanza indeterminata? La questione è controversa ma rilevante, sia per chi voglia scrivere semplicemente la storia dei modelli, sia per chi voglia illustrarli. Infatti l'ordine, nella esposizione della costruzione e delle caratteristiche dei modelli, dovrebbe seguire la medesima sequenza delle conquiste scientifiche che ci hanno condotto alle attuali conoscenze.

Per rispondere alla domanda occorre premettere una distinzione tra i modelli costruiti per semplice intuito e quelli costruiti con consapevolezza delle leggi della proiezione. Il dilemma può essere sciolto, perciò, se si conferisce dignità di rappresentazione delle forme a tre dimensioni soltanto a quei modelli che permettono di ricostruire le forme rappresentate, nello spazio, senza incertezze. Ponendo questa convenzione, si deve concludere che il modello ottenuto per proiezione parallela precede gli altri: ne danno testimonianza le incisioni presenti in molti monumenti antichi e l'architettura stessa, che senza modelli capaci di rappresentarla e misurarla, non avrebbe potuto concretizzarsi nei tanti imponenti edifici che il passato ci ha lasciato.

La prospettiva come modello grafico (o metodo di rappresentazione) ha una storia relativamente recente, che muove dalle scoperte di Guidobaldo Del Monte (DEL MONTE 1600) per approdare alla matura esposizione di Guglielmo Fiedler (FIEDLER 1874) nella seconda metà dell'Ottocento. Prima del XVII secolo, a quanto ci è dato sapere, la prospettiva non può essere considerata un modello grafico, nel senso che noi oggi attribuiamo a questo termine, bensì soltanto un'immagine capace di evocare la profondità dello spazio, simulando il fenomeno della percezione visiva. Infatti, la prospettiva rinascimentale (fig. 41) si serve di un altro modello grafico, sul quale appoggia, rappresentandole, le necessarie operazioni di proiezione: è questo il modello che si ottiene associando due proiezioni ortogonali e che è detto, perciò, *doppia proiezio-*

ne ortogonale.

Il modello grafico della *doppia proiezione ortogonale*, dunque, ha una origine più antica della prospettiva e ben più antica del modello prospettico; un'origine indissolubilmente legata all'architettura. Ciò è dimostrato dalle numerosissime testimonianze costituite da proiezioni ortografiche, incise nella pietra per guidare il taglio e il montaggio dei conci (come, ad esempio, il "progetto" del pronao del Pantheon, che si vede, a Roma, nel lastricato innanzi al Mausoleo d'Augusto; HASSELBERGER 1995) e, ancora, dai passi dedicati alla rappresentazione dell'architettura nel trattato di Marco Vitruvio Pollione (VITRUVIO, libro I, 2, 2).

L'architetto, ricorda Vitruvio, si serve prevalentemente di tre disegni: l'*icnografia*, l'*ortografia*, la *scenografia*.

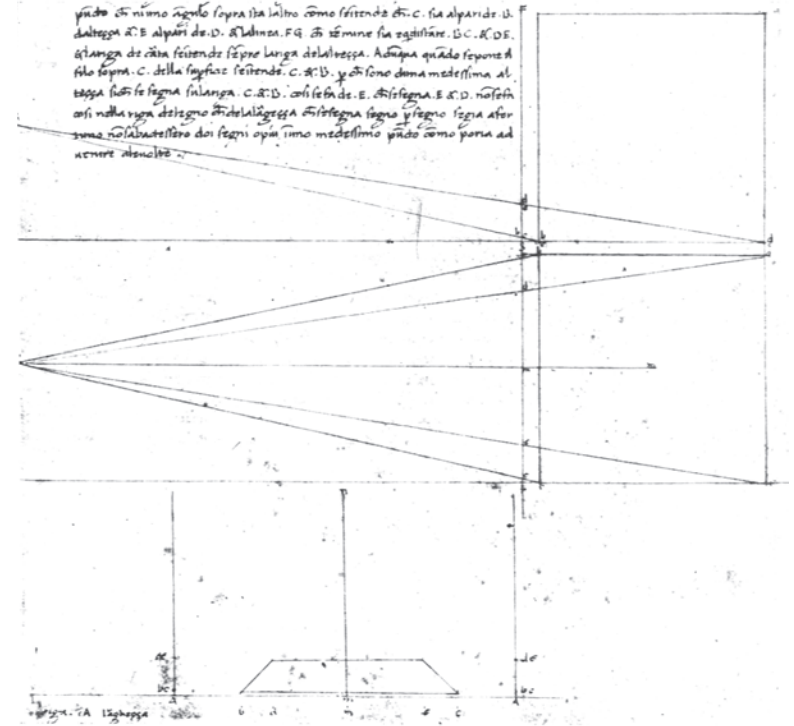
L'*icnografia* o "disegno dell'impronta" è quel che oggi si dice lo *spiccato dell'edificio*, cioè il tracciato sul suolo, sopra il quale si eleva la muratura. L'*icnografia* è, dunque, una pianta.

L'*ortografia* è invece il disegno, in vera forma, degli alzati dell'edificio, cioè dei prospetti e delle sezioni.

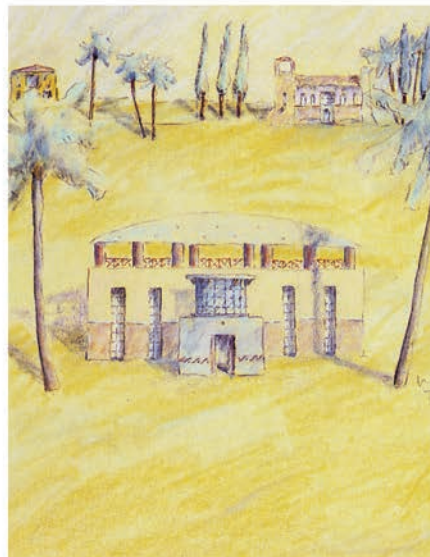
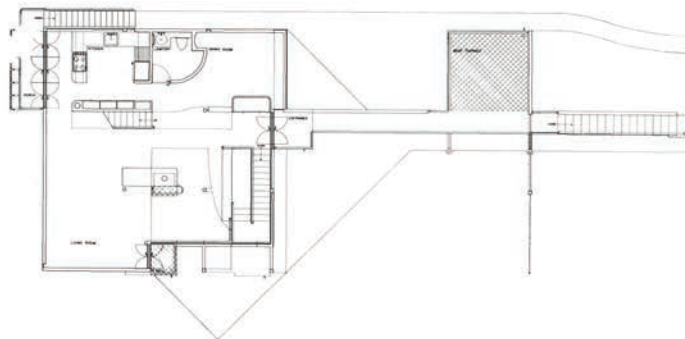
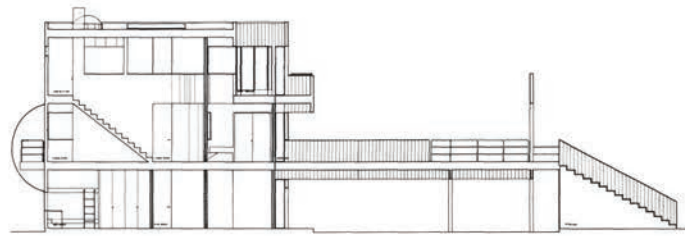
La *scenografia*, infine, è la prospettiva degli antichi.

È interessante osservare, anche per comprendere l'evoluzione di questi strumenti, che Vitruvio attribuisce un significato operativo a questi suoi disegni e li dispone nell'ordine in cui, secondo lui, debbono essere usati: prima l'*icnografia*, per distribuire sul terreno le parti dell'edificio, poi l'*ortografia* per proporzionarlo, infine la *scenografia*, che si desume dai primi due, per apprezzare il fronte e il fianco insieme, cioè il volume.

Duemila anni, ormai, ci separano da questa prima descrizione del modello alla cui evoluzione, fino alla concezione attuale, hanno contribuito molti architetti e matematici, come Guarino Guarini, Amedée Frézier e Gaspard Monge. A quest'ultimo, una storiografia fuorviata e fuorviante ha spesso attribuito il merito di avere "inventato" il metodo della doppia proiezione ortogonale e, con esso, la Geometria descrittiva. In realtà, Gaspard Monge ha certamente coniato il nome, ancora oggi usato, per indicare la scienza della quale ci occupiamo, ma il suo contributo allo sviluppo teorico e applicativo del modello non è maggiore di quello dei molti



41. Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, 1475. La prospettiva rinascimentale non può essere considerata un vero e proprio modello grafico, capace, di per sé, di simulare l'oggetto reale, perché si serve delle proiezioni ortogonali, cioè di un altro modello, per generare l'immagine.



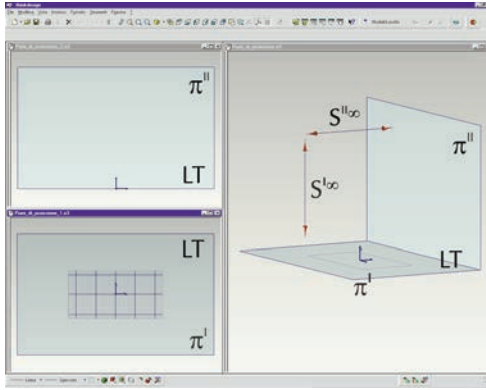
42. La pianta e l'alzato, associati, in un disegno di Michael Graves: in realtà è assai raro che questi disegni vengano usati insieme, come vuole la tradizione; quasi sempre sono uniti solo idealmente, nell'invenzione del progettista, come questo prospetto del medesimo autore (a colori), che cerca di ritrovare lo spazio in un accenno di profondità.

altri, che la storia ricorda, e la sua impostazione è oggi del tutto superata, sicché è quasi scomparsa dall'insegnamento di livello universitario. Mentre il modello delle proiezioni ortogonali, nella sua forma attuale, così come il modello informatico, rappresenta rette e piani per mezzo di punti qualsiasi, offrendo a chi opera una grande libertà di azione, il metodo di Monge si serve di punti e rette particolari, detti *tracce* e cioè: i due punti intersezione con i piani di proiezione, per rappresentare le rette, e le due rette intersezione con i piani di proiezione, per rappresentare i piani. La forma attuale del modello è dunque espressione di una concezione più generale e raggiunge il risultato in modo più semplice. Il modello si rivela così estremamente più duttile, del metodo di Monge, nelle applicazioni.

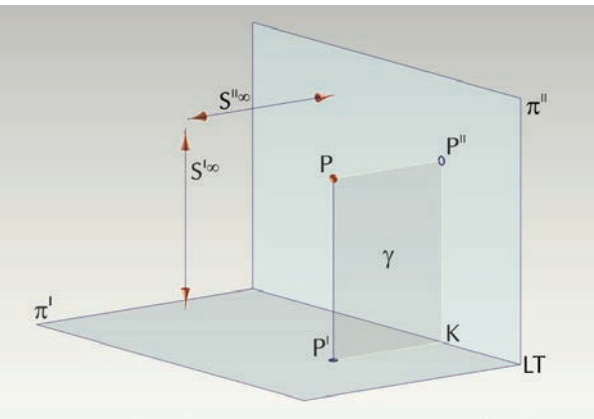
Il modello grafico della doppia proiezione ortogonale viene dunque qui presentato nella forma attuale, di tradizione anglosassone. È facile riconoscere in questa impostazione, generale nei principi teorici, duttile nelle applicazioni, il *modus operandi* che è tipico della modellazione informatica. Anche nell'ambiente informatico, infatti, si comincia con il costruire il modello lavorando su viste nelle quali il piano di proiezione è orizzontale o verticale e che, perciò, si potrebbero chiamare con i termini vitruviani di *iconografia* e *ortografia*. A queste viste, o piani di proiezione, è associato il piano di costruzione sul quale si compiono le prime operazioni. I programmi di modellazione, tuttavia, offrono anche la possibilità di seguire l'evolversi della costruzione su una terza vista, nella quale il piano di proiezione è obliquo (assonometria ortogonale) o, come in molte applicazioni, su una terza vista prospettica. Come abbiamo detto, lo spazio nel quale si trova il modello che vogliamo costruire è riferito a un sistema cartesiano di assi mutuamente ortogonali. Perciò, un punto di questo spazio può essere semplicemente rappresentato per mezzo della terna di coordinate (x, y, z) che ne descrivono la posizione. Tuttavia, questa rappresentazione è puramente mentale, perché non fornisce una vista del punto, né dello spazio nel quale si trova immerso. Se applichiamo al punto l'operazione di proiezione e sezione, per ottenerne una vista, la situazione non migliora: infatti una sola imma-

gine conserva un forte grado di ambiguità. Anche se sono note le modalità di costruzione dell'immagine P^i , per esempio la posizione del quadro e del centro di proiezione, il punto oggettivo P non può essere distinto dagli infiniti punti che appartengono alla retta proiettante. La conoscenza delle coordinate elimina questa ambiguità, ma non migliora l'efficacia visiva del modello. L'unico modo per ottenere, al tempo stesso, l'univocità e la chiarezza della rappresentazione è quello che consiste nell'aggiungere altre proiezioni del punto alla prima. Perciò, in generale, un modello sarà costituito da un insieme di punti noti e da almeno due distinte proiezioni degli stessi. Nei modelli informatici, queste proiezioni si possono variare con grande libertà. Un operatore esperto, dopo aver impostato il modello, lavora, in genere, su molte viste, che genera modificando continuamente la giacitura del piano di proiezione e della direzione di proiezione associata, secondo le esigenze della costruzione. Il modello grafico non gode di altrettanta libertà, ma utilizza egualmente almeno due viste, che possono essere separate o sovrapposte.

Modelli ottenuti per proiezione parallela: la doppia proiezione ortogonale



43. Il più semplice dei modelli utilizza due piani di proiezione ortogonali, l'uno orizzontale detto *icnografia*, l'altro verticale detto *ortografia*, che corrispondono alla pianta e all'alzato degli



44. Il modello grafico di un punto è costituito dalla pianta, che ne definisce la posizione sul piano orizzontale e dall'alzato, che ne descrive l'altezza.

Vedremo ora come sia possibile costruire graficamente le viste più semplici e intuitive di un oggetto: la pianta (o *icnografia* o *top view*) e l'alzato (*ortografia* o *front view*). Vedremo anche come sia possibile ottenere un modello grafico, associando le informazioni ricavate da queste due viste.

Procuriamoci, innanzi tutto, due fogli da disegno, che ci serviranno per costruire il modello grafico. Sul computer, invece, costruiremo due piani delimitati da un rettangolo (fig. 43). Questi piani, in entrambi i casi, daranno all'operazione di proiezione il necessario supporto. Essi, in altre parole, svolgeranno il ruolo di piani di quadro o piani di proiezione e saranno distinti dai simboli π^I e π^{II} .

Il primo piano di proiezione, π^I , è orizzontale, il secondo, π^{II} , è verticale e perciò perpendicolare al primo. Estendendo i due piani è sempre possibile costruire la loro retta di intersezione, che chiameremo *linea di terra* (LT). Associamo ora al primo piano di proiezione una direzione di proiezione ad esso perpendicolare, $S^{I\infty}$, e al secondo una direzione di proiezione, $S^{II\infty}$, pure perpendicolare.

Consideriamo ora un qualsiasi punto P dello spazio e disponiamo i piani di proiezione suddetti in modo che P si trovi al di sopra del primo e davanti al secondo (fig. 44).

Proiettiamo ora P da $S^{I\infty}$ su π^I : basterà condurre per P una retta (*proiettante*) parallela alla $S^{I\infty}$ e individuare il punto P^I in cui questa incontra il quadro (o piano di proiezione) π^I .

Proiettiamo poi P da $S^{II\infty}$ su π^{II} : basterà condurre per P una retta (*proiettante*) parallela alla $S^{II\infty}$ e individuare il punto P^{II} in cui questa incontra il quadro π^{II} .

Le rette proiettanti, incidenti in P , individuano un piano γ , proiettante sia rispetto alla prima che alla seconda direzione di proiezione. Un qualsiasi piano, che abbia questa particolare giacitura, si dice *di profilo*. Il piano γ , come in generale i piani di profilo, è per-

pendicolare alla linea di terra per costruzione e perciò taglia i piani di proiezione secondo rette ortogonali alla linea di terra e incidenti in un punto K di quest'ultima, che è l'intersezione di γ , π^I e π^{II} . (Si osservi che il piano γ contiene le rette proiettanti e che queste sono perpendicolari alla linea di terra perché, per definizione, sono perpendicolari a tutte le rette del piano di quadro rispettivo. Se dunque si sceglie un qualsiasi punto della LT e si conducono per questo punto le parallele alle due direzioni di proiezione, si costruisce un piano perpendicolare alla LT nel modo insegnato da Euclide e questo piano è parallelo a γ , perciò anche γ è perpendicolare alla LT).

Le rette proiettanti incidenti in P sono anche parallele ciascuna al piano di proiezione dell'altra, così PP^{II} è parallela a π^I , PP^I è parallela a π^{II} . Ciò comporta due semplici ma notevoli conseguenze (fig. 45):

- il segmento $P^{II}K$ è congruente al segmento PP^I e misura, perciò, la *quota* di P rispetto al primo piano di proiezione;
- il segmento P^K è congruente al segmento PP^{II} e misura, perciò, l'*aggetto* di P rispetto al secondo piano di proiezione.

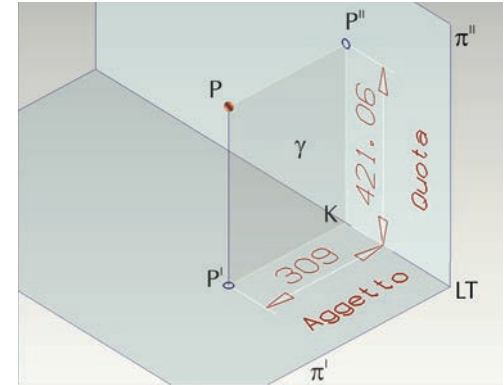
Tutto ciò premesso, possiamo tranquillamente separare i due piani di proiezione, per maneggiarli più facilmente e disporli, insieme o separati, sul tavolo da disegno (fig. 46): su ciascuno figurerà la linea di terra (LT), il punto K e la linea retta, ortogonale alla LT , che appartiene a K e alla proiezione del punto P (P^I sul primo piano di proiezione, P^{II} sul secondo), quest'ultima è detta *linea di richiamo*, perché serve, appunto, per associare le due proiezioni del medesimo punto dello spazio.

Sul modello informatico, osserviamo, invece, quanto segue.

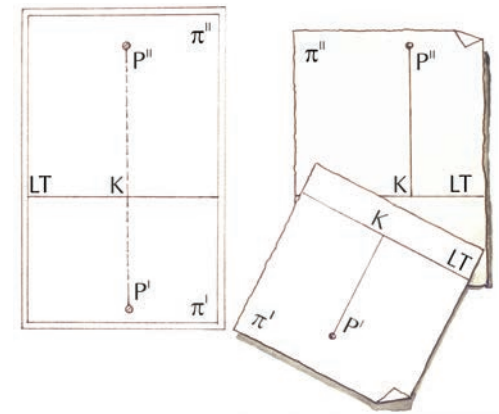
È possibile, innanzi tutto, considerare il modello nel suo insieme e ruotarlo a piacimento nello spazio. In questo caso le viste che si susseguono sullo schermo sono assonometrie ortogonali. Queste viste utilizzano, come piano di proiezione, lo schermo del computer.

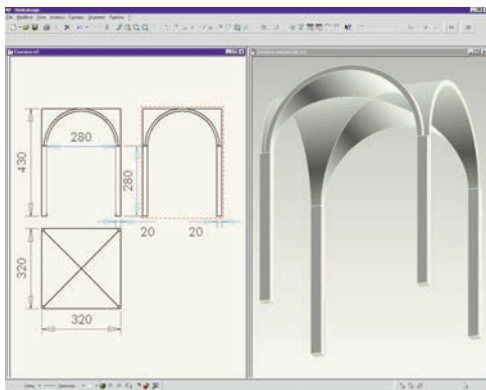
Ma è anche possibile portare lo schermo a coincidere con i due piani, π^I e π^{II} , che abbiamo costruito. Ciò si ottiene utilizzando i comandi relativi alla vista e, in particolare, *Top* o *Vista dall'alto*, per

45. Le distanze della prima e della seconda proiezione dalla linea di terra misurano, rispettivamente, l'aggetto e la quota del punto rispetto ai piani di proiezione.

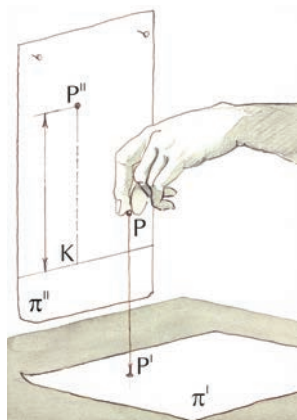


46. La pianta e l'alzato, legati dalle linee di richiamo, possono essere posti uno sull'altro, o separati, per comodità d'uso, in due diversi disegni.

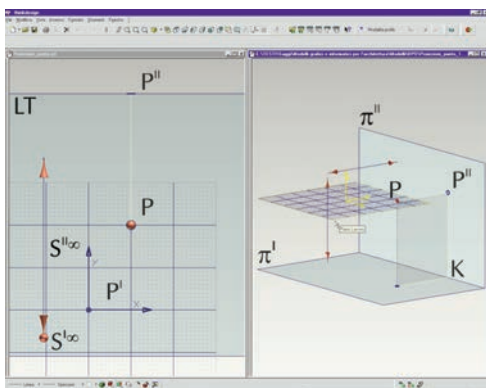




47. È anche possibile usare il modello tridimensionale informatico per generare automaticamente una pianta e un alzato bidimensionali.



48. Il modello permette di ricostruire l'oggetto rappresentato nello spazio. Il punto P oggettivo, ad esempio, si trova sulla perpendicolare in P^I a una distanza, da P^I , pari alla sua quota.



49. Un punto dello spazio si può costruire trasladando il piano di lavoro alla sua quota e misurandone le coordinate x, y .

la pianta, e *Front* o *Vista di fronte*, per l'alzato. È anche possibile visualizzare contemporaneamente più viste con la pianta e l'alzato. Infine, ma ciò vale solo per alcuni programmi, è possibile generare una tavola, cioè un disegno bidimensionale, che dispone l'uno accanto all'altro, sullo stesso foglio, i piani di proiezione e gli enti rappresentati (fig. 47). Su questo disegno si può poi intervenire, ad esempio per aggiungere del testo o una squadratura o altri elementi grafici.

Verifichiamo ora che, effettivamente, il modello grafico costituito dalle due proiezioni di P (P^I, P^{II}) sia in grado di restituire la posizione di P nello spazio. A questo scopo disponiamo il primo piano di proiezione sul tavolo, misuriamo poi la quota del punto P sul secondo piano di proiezione, nel segmento KP^{II} , e riportiamo infine il punto P sulla perpendicolare al primo piano di proiezione nel punto P^I , a una altezza pari a KP^{II} . Il punto così ottenuto ricostruisce, con tutta evidenza, la posizione effettiva di P nello spazio (fig. 48).

Costruzione degli enti geometrici fondamentali

Gli enti geometrici fondamentali, come abbiamo detto, sono i punti, le linee e le superfici.

PUNTI

Per costruire un punto dello spazio (fig. 49), ad esempio il punto P , di coordinate x, y, z , occorre, innanzi tutto, disporre in modo opportuno il piano di costruzione, trasladandolo, lungo l'asse z , fino alla quota relativa. Ciò fatto, potremo costruire il punto di coordinate piane x, y . Questa procedura è valida in generale, ma è anche possibile costruire il punto assegnando direttamente le sue coordinate tridimensionali tramite la tastiera.

Nei modelli grafici, basta invece disegnare in pianta il punto P^I di coordinate x, y e, sulla linea di richiamo, nell'alzato, il punto P^{II} di quota z .

Dopo aver rappresentato un punto, è in genere necessario riprenderlo per proseguire la costruzione. Questa operazione, che è detta *cattura* del punto ed è del tutto intuitiva nel disegno, può es-

sere compiuta nei modelli grafici con i comandi *Snap*. Lo *Snap* è un filtro che consente alla macchina di riconoscere un ente, quando il puntatore, comandato dal *mouse*, gli si avvicina. Per catturare un punto isolato, si deve attivare lo *Snap point*. Esistono molte altre possibilità di *Snap*, che saranno esaminate in volumi successivi.

RETTE

La retta si intende indefinitamente estesa, ma si rappresenta sempre mediante una sua porzione, cioè un segmento. Perciò, nel seguito, non faremo distinzione tra i termini *retta* e *segmento*, seguendo in ciò la tradizione euclidea.

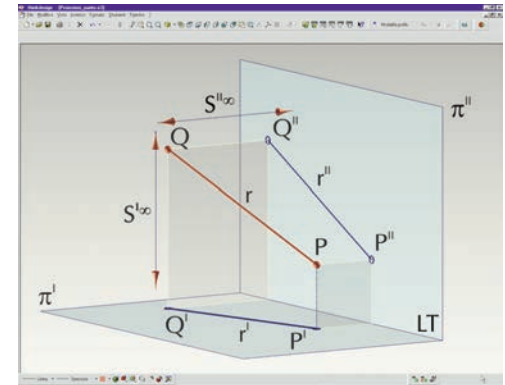
Una retta resta individuata quando siano dati due punti, distinti, che le appartengono. Perciò, per rappresentare una retta, basta rappresentare due suoi punti, come **P** e **Q** (fig. 50). È buona abitudine nominare i punti nell'ordine crescente della loro quota: perciò si osserva sulla seconda proiezione la quota dei punti nello spazio e si nomina prima **P^{II}** (a quota minore), poi **Q^{II}** (a quota maggiore); infine, con le linee di richiamo, si riconoscono le prime proiezioni **P^I** e **Q^I**.

Una volta individuati i due punti della retta da rappresentare non resta che unirli con un tratto. Nel modello grafico questa operazione è immediata e si compie con l'aiuto della riga, appoggiandola ai punti già costruiti. Nei modelli informatici si possono, invece, seguire varie procedure:

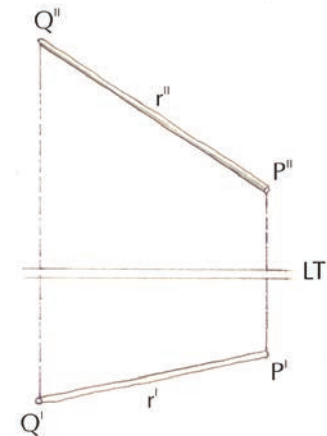
- la prima e la più semplice consiste nel dare il comando *Line* e catturare in successione gli estremi del segmento, ma occorre, ovviamente, aver già costruito i due punti **P** e **Q**;
- la seconda consiste nell'attivare il comando *Line* e nell'assegnare le coordinate dei due punti **P** e **Q** immettendone le coordinate nella riga di comando;
- infine, si può trascinare e ruotare il piano di costruzione per fare in modo che passi per i punti **P** e **Q**, quindi costruire la retta con il comando *Line*.

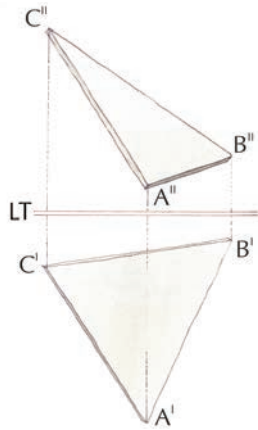
Nel disegno, per far sì che la retta rappresentata appartenga effettivamente ai punti che la individuano, basta assicurarsi che il segmento **r^I** colleghi **P^I** e **Q^I**, per ottenere la pianta, e che il segmento **r^{II}** colleghi **P^{II}** e **Q^{II}**, per l'alzato (fig. 51).

50. Una retta si costruisce per mezzo di due punti, che le appartengono.

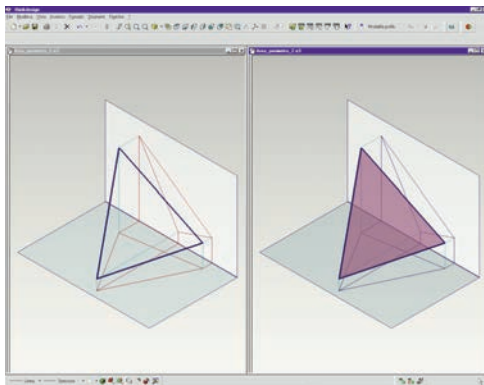


51. Nel modello grafico, le proiezioni della retta appartengono alle proiezioni omonime dei punti che la individuano.

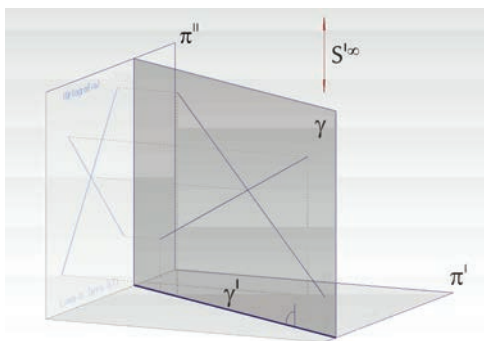




52. Nel modello grafico, le proiezioni del piano appartengono alle proiezioni omonime dei punti che lo individuano.



53. Nei modelli informatici la distinzione tra il perimetro di una figura piana e la superficie che essa racchiude è esplicita. Perciò, per costruire un piano, occorre, di norma, prima definire un perimetro e poi stendere su di esso la superficie.



54. I piani proiettanti in prima hanno per pianta una retta, nella quale si confondono le prime proiezioni di tutte le rette del piano.

Rette parallele hanno le proiezioni *omonime* parallele. Infatti i due piani che proiettano due rette parallele r e s , su ciascuno dei piani di proiezione, sono paralleli e, quando due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano, incidente (cioè il piano di proiezione), le rette intersezione relative (cioè le proiezioni di r e s su quel piano), sono parallele (EUCLIDE, XI, proposizione 16).

Segmenti equipollenti (cioè congruenti e paralleli) hanno le proiezioni omonime equipollenti.

PIANI

Un piano resta individuato quando siano dati:

- tre punti non allineati, che gli appartengono;
- una retta e un punto, distinti, che gli appartengono;
- due rette incidenti, che gli appartengono;
- in generale, una figura piana, che gli appartiene.

Perciò, per rappresentare un piano occorre, in generale, rappresentare una figura piana che gli appartiene e, in particolare, tre punti che non siano allineati (fig. 52).

Nei modelli informatici il piano viene in genere rappresentato con un poligono che gli appartiene. Per costruire questa figura, bisogna, innanzi tutto, disporre il piano di costruzione in modo opportuno, quindi è possibile impiegare i comandi relativi, che sono capaci di generare qualsiasi poligono regolare o irregolare con pochissime azioni compiute con il *mouse* e sulla tastiera. Tuttavia è anche possibile seguire il medesimo procedimento che si impiega nel modello grafico e perciò costruire prima almeno tre punti non allineati, poi i tre segmenti che restano individuati dai punti presi a coppie.

Nel modello informatico, tuttavia, non è implicita la descrizione della superficie, come invece avviene nei modelli grafici. Su questo concetto è bene soffermarsi brevemente.

Quando si traccia un triangolo sul foglio da disegno, i segni tracciati alludono, contemporaneamente, a due diverse entità: la figura costituita dai tre lati, la cui misura è detta *perimetro*, e la superficie compresa all'interno dei tre lati, che è una porzione di piano, la cui misura è detta *area*. Ebbene: quando si costruisce un triangolo (fig. 53), come insieme di segmenti contigui, il software, in ge-

nere, riconosce la figura come una linea spezzata chiusa, non come superficie. Per costruire la superficie, occorre impiegare un comando apposito, che costruisce il poligono come porzione di piano o che taglia una porzione di piano usando una linea chiusa assegnata.

Rappresentazione di piani, rette e punti in posizioni particolari

PIANI PROIETTANTI IN PRIMA PROIEZIONE

I *piani proiettanti in prima proiezione* sono i piani paralleli alla prima direzione di proiezione, perciò verticali (figg. 54, 55). La loro prima proiezione γ^1 si riduce a un'unica retta, nella quale si confondono le prime proiezioni di tutte le rette del piano.

Un sottoinsieme dei piani proiettanti in prima proiezione è costituito dai *piani frontali*, che sono anche perpendicolari alla seconda direzione di proiezione (e, perciò, di fronte a chi osserva l'alzato); i piani frontali sono dunque paralleli al secondo piano di proiezione. La prima proiezione di questi piani φ^1 è una retta parallela alla linea di terra e perciò ortogonale alle rette di richiamo. La linea di terra stessa può essere vista come la prima proiezione di un particolare piano frontale: il secondo piano di proiezione.

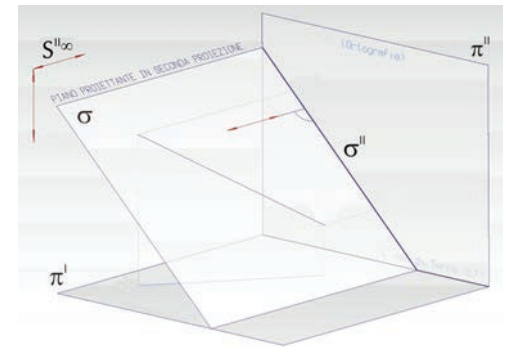
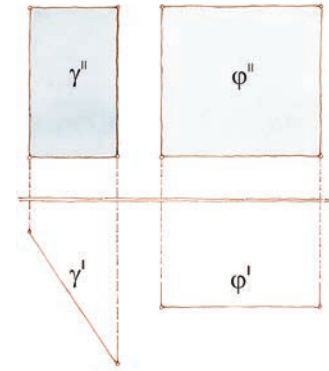
Tutte le rette che appartengono a un piano frontale si dicono *frontali*.

PIANI PROIETTANTI IN SECONDA PROIEZIONE

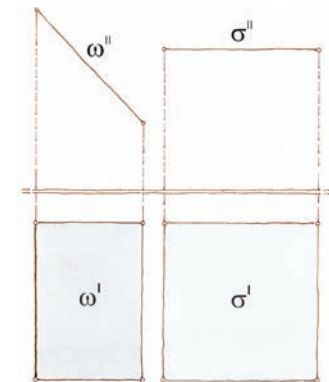
I *piani proiettanti in seconda proiezione* sono i piani che appartengono alla seconda direzione di proiezione, perciò perpendicolari al secondo piano di proiezione (figg. 56, 57). La loro seconda proiezione σ^2 si riduce a un'unica retta, nella quale si confondono le seconde proiezioni di tutte le rette del piano.

Un sottoinsieme dei piani proiettanti in seconda proiezione è costituito dai *piani orizzontali*, che sono anche perpendicolari alla prima direzione di proiezione; i piani orizzontali sono dunque paralleli al primo piano di proiezione. La seconda proiezione di questi piani ω^2 è una retta parallela alla linea di terra e perciò ortogonale alle rette di richiamo. La linea di terra stessa può essere vista

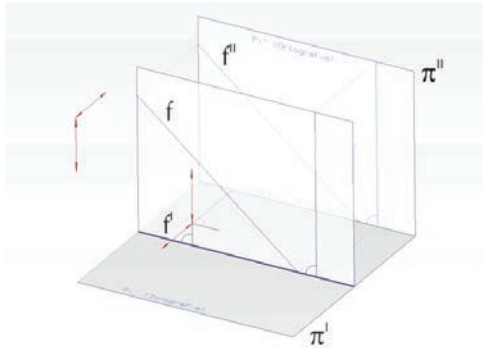
55. Modello grafico di due piani proiettanti in prima, uno dei quali frontale.



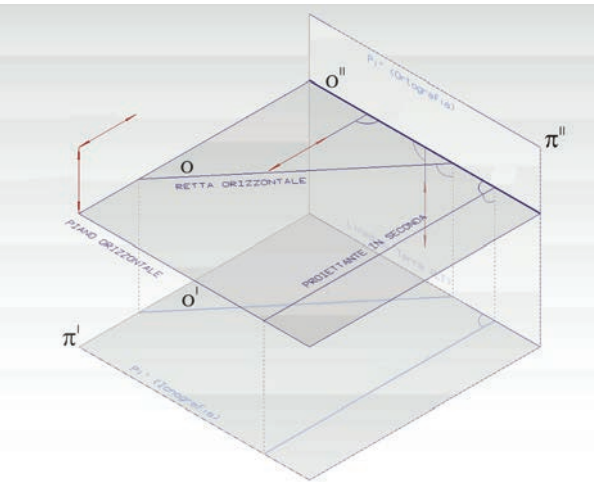
56. I piani proiettanti in seconda hanno per alzato una retta, nella quale si confondono le prime proiezioni di tutte le rette del piano.



57. Modello grafico di due piani proiettanti in seconda, uno dei quali orizzontale.



58. I piani frontali sono proiettanti in prima e perpendicolari alla seconda direzione di proiezione. Le rette frontali hanno la prima proiezione parallela alla linea di terra.



59. I piani orizzontali sono proiettanti in seconda e perpendicolari alla prima direzione di proiezione. Le rette orizzontali hanno la seconda proiezione parallela alla linea di terra.

come la seconda proiezione di un particolare piano orizzontale: il primo piano di proiezione. Tutte le rette che appartengono a un piano orizzontale si dicono *orizzontali*.

PIANI DI PROFILO

I *piani di profilo* sono, al contempo, proiettanti in prima e in seconda proiezione.

RETTE FRONTALI

Le *rette frontali* (fig. 58) sono quelle che appartengono a piani frontali e sono perciò parallele al secondo piano di proiezione. Queste rette hanno la prima proiezione f' parallela alla linea di terra, perciò perpendicolare alle linee di richiamo.

Un sottoinsieme delle rette frontali è costituito dalle rette proiettanti in prima proiezione, queste ultime hanno la prima proiezione che si riduce a un punto, nel quale si proiettano tutti i punti della retta, mentre la seconda proiezione è parallela alle linee di richiamo e ortogonale alla linea di terra.

RETTE ORIZZONTALI

Le *rette orizzontali* (fig. 59) sono quelle che appartengono a piani orizzontali e sono perciò parallele al primo piano di proiezione. Queste rette hanno la seconda proiezione o'' parallela alla linea di terra, perciò perpendicolare alle linee di richiamo.

Un sottoinsieme delle rette orizzontali è costituito dalle rette proiettanti in seconda proiezione, queste ultime hanno la seconda proiezione che si riduce a un punto, nel quale si proiettano tutti i punti della retta, mentre la prima proiezione è parallela alle linee di richiamo e ortogonale alla linea di terra.

PUNTI APPARTENENTI AL PRIMO E SECONDO PIANO DI PROIEZIONE E ALLA LINEA DI TERRA

I punti che appartengono al primo piano di proiezione hanno la prima proiezione coincidente con il punto oggettivo, la seconda sulla linea di terra: infatti la loro quota è nulla.

I punti che appartengono al secondo piano di proiezione hanno la seconda proiezione coincidente con il punto oggettivo, la prima sulla linea di terra: infatti il loro aggetto è nullo.

I punti che appartengono alla linea di terra hanno le proiezioni coincidenti con il punto oggettivo (quota e aggetto sono nulli).

Principali operazioni di sezione

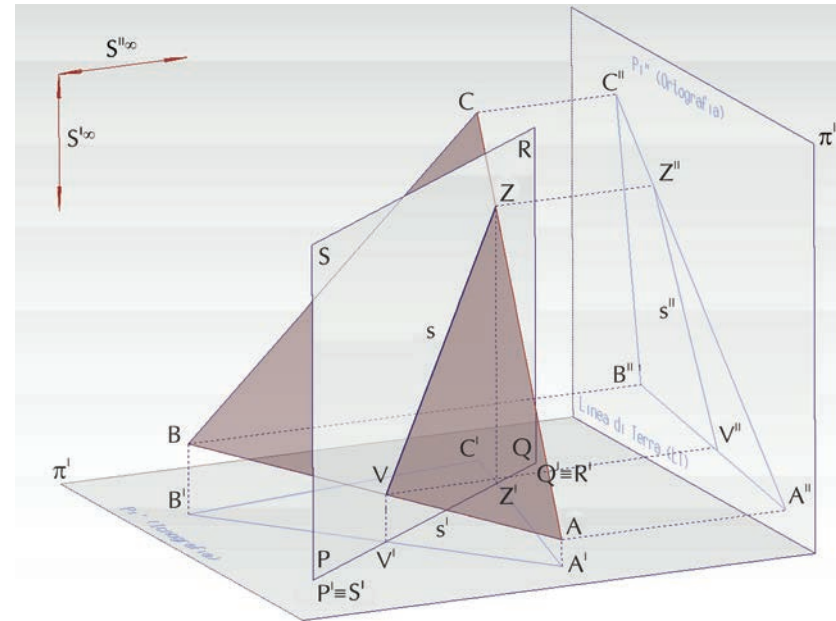
RETTA INTERSEZIONE DI UN PIANO GENERICO CON PIANO PROIETTANTE

La retta intersezione di un piano generico ABC con un piano proiettante si costruisce facilmente sfruttando le proprietà di quest'ultimo (fig. 60).

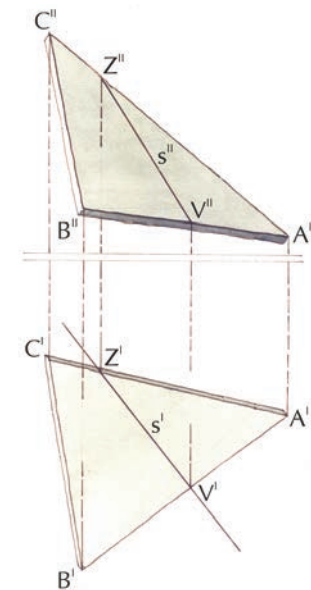
Consideriamo dapprima un piano $PQRS$, proiettante in prima, che taglia il piano ABC in posizione generica. Come abbiamo già osservato, le prime proiezioni di tutte le rette del piano si confondono in un'unica retta, la $P'Q'R'S'$: questa retta è, perciò, anche la prima proiezione, s' , della retta s , che il piano proiettante ha in comune con il piano ABC . Questa retta s e la figura ABC , che descrive il piano, sono dunque complanari e perciò hanno almeno due punti distinti V e Z in comune. Le prime proiezioni di questi punti, V' e Z' , si individuano immediatamente, giacché sono date dai punti che la retta s' , prima proiezione di s , ha in comune con la figura $A'B'C'$, prima proiezione di ABC . Le seconde proiezioni, V'' e Z'' , dei punti V e Z si trovano sulle seconde proiezioni dei lati della figura ai quali appartengono e sono allineate su linee di richiamo. La seconda proiezione s'' della retta intersezione è dunque individuata. Se il piano è proiettante in seconda, sono le seconde proiezioni delle rette del piano a confondersi in un'unica retta; si utilizza, dunque, questa proprietà per individuare subito la seconda proiezione della retta intersezione e tornare, da quest'ultima, alla prima proiezione.

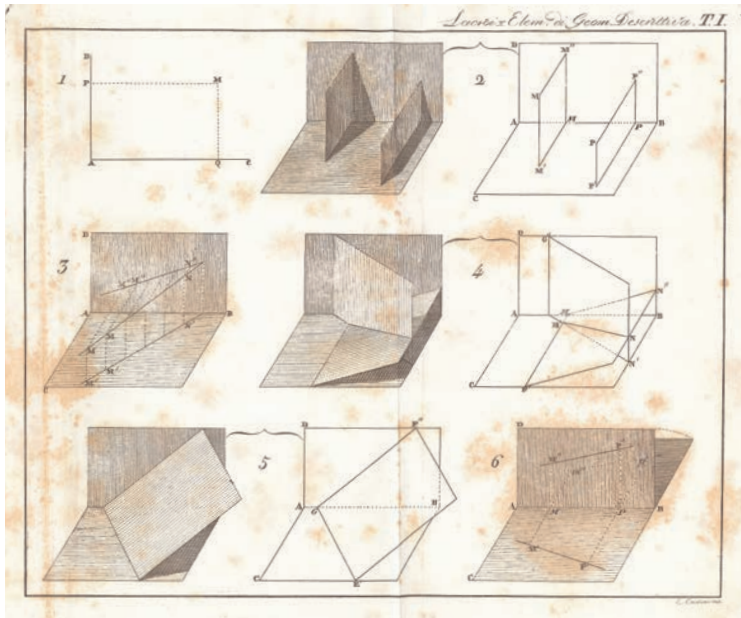
SEZIONI PRINCIPALI DEL PIANO: FRONTALE, ORIZZONTALE E RETTA

La costruzione delle sezioni principali del piano è la base per la soluzione di un gran numero di problemi, come quelli relativi alla perpendicolarità tra rette e piani e tra piano e piano, alla vera forma delle figure piane, alla misura degli angoli piani e diedri e, in particolare, degli angoli di pendenza di rette e piani. Nel metodo di Monge questo ruolo è assolto dalle tracce, oltre che dalla retta di massima pendenza. Le tracce, intersezioni del piano dato con i piani di proiezione, sono, di fatto, due particolari rette, l'una orizzontale e l'altra frontale. Anche qui si può dunque constatare co-



60. La retta intersezione di un piano generico con un piano proiettante in prima ha la prima proiezione che si confonde nella prima proiezione di tutte le rette del piano proiettante. La retta intersezione di un piano generico con un piano proiettante in seconda ha la prima proiezione che si confonde nella seconda proiezione di tutte le rette del piano proiettante. Nel modello grafico, dalla prima proiezione del piano proiettante si risale alla seconda proiezione della retta intersezione di questo col piano dato.





61. Studio dei piani proiettanti (dalla *Geometria descrittiva* di Lacroix, 1795).

me il modello delle proiezioni ortogonali, nella sua forma attuale, attinga ad una più ampia generalità.

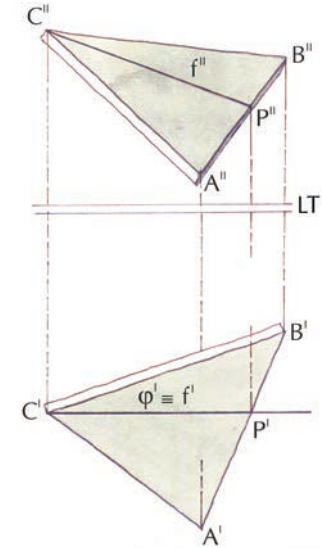
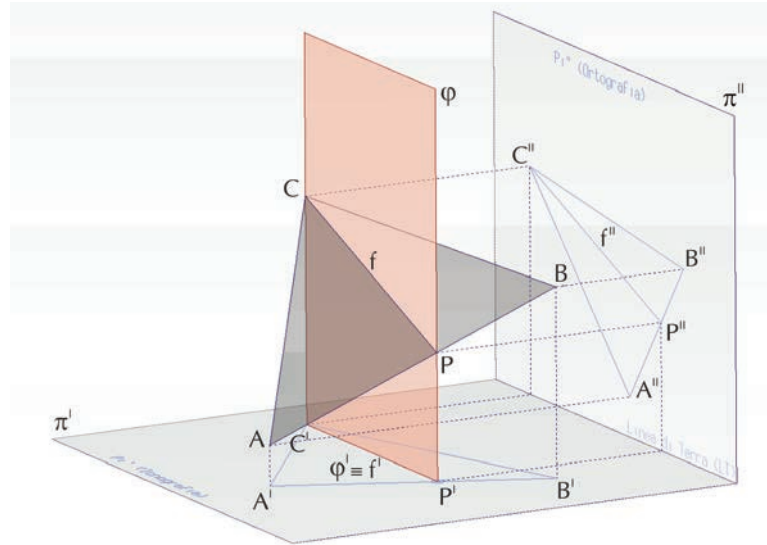
La *sezione frontale* di un piano in posizione generica si ottiene tagliando il piano assegnato con un piano frontale φ : la retta intersezione che ne deriva è una retta frontale del piano dato (fig. 62).

Se, come sempre accade nel disegno di progetto, il piano è assegnato per mezzo di un poligono che gli appartiene, conviene costruire il piano frontale per uno dei vertici della figura e si traccia perciò, per prima, una retta φ^1 , ortogonale alle linee di richiamo, per la prima proiezione di uno dei suddetti vertici: sarà questa la prima proiezione del piano frontale, nella quale si confonde la prima proiezione f^1 della retta frontale. Si individua poi il punto P^1 che la suddetta retta f^1 ha in comune con la prima proiezione di uno dei lati della figura, o con il suo prolungamento, e da questo si risale alla seconda proiezione P^2 , con la linea di richiamo. La seconda proiezione, f^2 , della retta f , appartiene dunque al punto P^2 e alla seconda proiezione del vertice prescelto per la sua costruzione (C , nella figura).

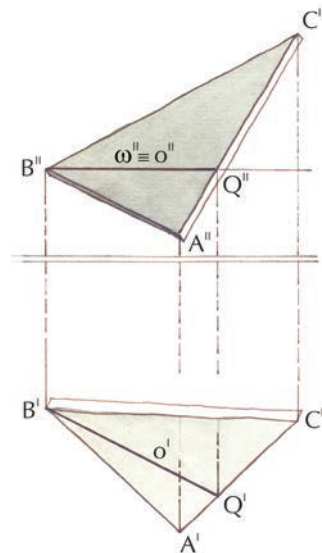
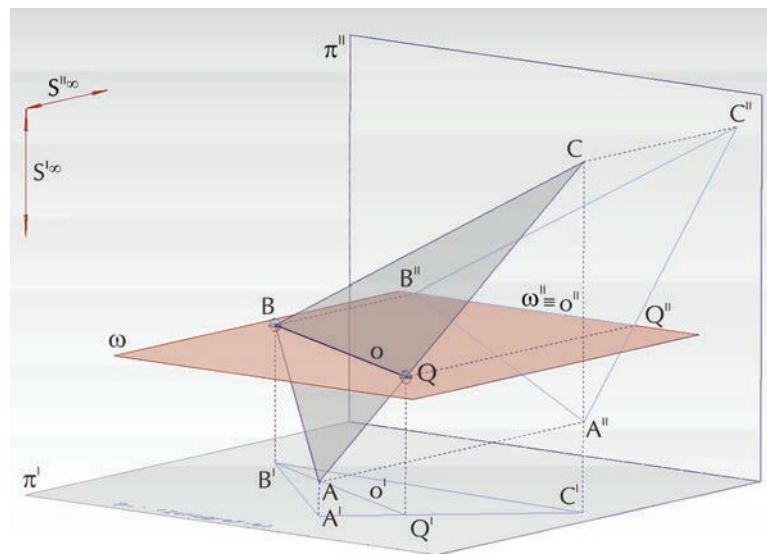
La *sezione orizzontale* di un piano in posizione generica si ottiene tagliando il piano assegnato con un piano orizzontale: la retta intersezione che ne deriva è una retta orizzontale del piano dato (fig. 63).

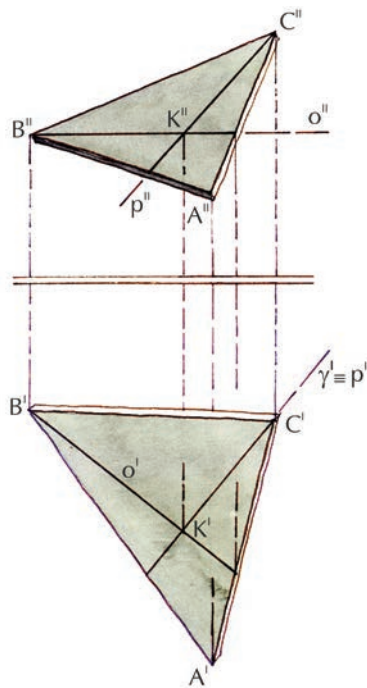
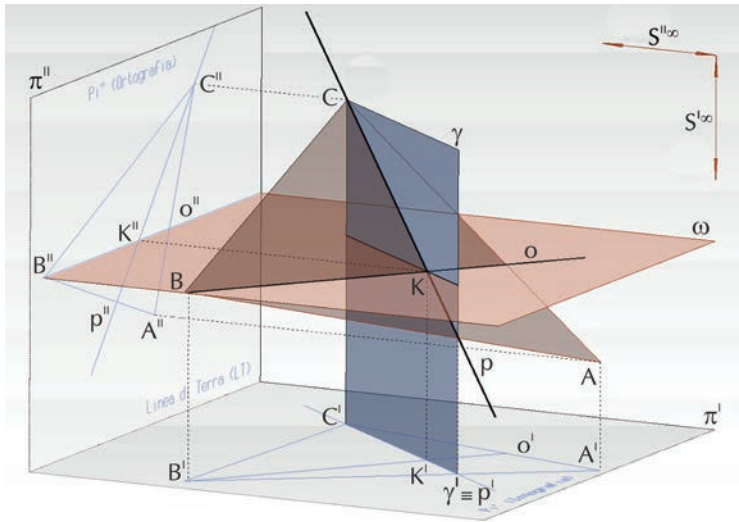
Se, come sempre accade nel disegno di progetto, il piano è assegnato per mezzo di un poligono che gli appartiene, conviene costruire il piano orizzontale per uno dei vertici della figura e si traccia perciò, per prima, una retta, ortogonale alle linee di richiamo, per la seconda proiezione di uno dei suddetti vertici: sarà questa la seconda proiezione ω^2 del piano orizzontale ω , nella quale si confonde la seconda proiezione o^2 , della retta orizzontale. Si individua poi il punto Q^2 , che la suddetta retta o^2 ha in comune con la seconda proiezione di uno dei lati della figura, o con il suo prolungamento, e da questo si perviene alla prima proiezione Q^1 , con la linea di richiamo. La prima proiezione, o^1 , della retta o , appartiene dunque al punto Q^1 e alla prima proiezione del vertice prescelto per la sua costruzione (B , nella figura).

62. Per costruire una retta frontale di un piano generico, basta tagliare il piano stesso con un piano frontale. Nel modello grafico, la prima proiezione del piano frontale è una retta parallela alla linea di terra (e ortogonale alle linee di richiamo): da questa si risale alla seconda proiezione della retta frontale per mezzo dei punti che quest'ultima ha in comune con le rette del piano dato.



63. Per costruire una retta orizzontale di un piano generico, basta tagliare il piano stesso con un piano orizzontale. Nel modello grafico, la seconda proiezione del piano orizzontale è una retta parallela alla linea di terra (e ortogonale alle linee di richiamo): da questa si ritorna alla prima proiezione della retta orizzontale per mezzo dei punti che quest'ultima ha in comune con le rette del piano dato.





64. La sezione retta di un piano generico si ottiene tagliando il piano con un piano verticale proiettante in prima, perpendicolare alle rette orizzontali del piano dato. Il risultato è la linea di scorrimento dell'acqua, cioè la retta di massima pendenza del piano. Nel modello grafico si costruisce prima una retta orizzontale e si seziona poi il piano dato con un piano, proiettante in prima, perpendicolare alla retta orizzontale: questo piano è detto *piano della sezione retta*.

La *sezione retta* di un piano in posizione generica si ottiene tagliando il piano assegnato con un piano proiettante in prima, perpendicolare alle rette orizzontali del piano dato: la retta intersezione che ne deriva è una retta di massima pendenza del piano dato; essa risulta, per costruzione, ortogonale alle rette orizzontali del piano (fig. 64).

Il piano è assegnato per mezzo di un poligono, come nel comunissimo caso della falda di un tetto: si costruisce, per prima, una retta orizzontale o del piano.

Si conduce, poi, possibilmente per uno dei punti noti, il piano verticale di sezione γ : la sua prima proiezione è una retta γ^1 ortogonale alla prima proiezione o^1 della retta orizzontale o . Nella retta γ^1 si confondono le prime proiezioni di tutte le rette del piano γ e perciò anche la prima proiezione p^1 della retta p .

La p^1 incontra la retta o^1 in un punto K^1 , che è la prima proiezione del punto K che le rette p e o hanno in comune. Da K^1 si risale a K^1 con retta di richiamo e la retta p^1 , seconda proiezione di p , resta così individuata.

PUNTO INTERSEZIONE DI UNA RETTA CON UN PIANO

Applicando le operazioni di sezione che abbiamo esaminato, si può risolvere il problema della costruzione del punto intersezione di una retta con un piano, così come quello della costruzione della retta intersezione di due piani.

Sono dati: un piano ABC e una retta r , entrambi in posizione generica (figg. 65). Per costruire il punto intersezione della retta r con il piano ABC si costruisce il piano γ , che proietta la retta in prima proiezione, e con questo piano si seziona il piano dato. Chiamiamo s la retta intersezione di γ con il piano ABC : questa retta s e la retta r data sono complanari per costruzione (entrambe appartengono a γ) e, perciò, sono incidenti in un punto Q , che è il punto intersezione cercato. Infatti Q appartiene a r e al piano ABC , perché appartiene anche a s che è, appunto, una retta del piano dato.

La costruzione grafica procede secondo i seguenti passi:

- si costruisce il piano γ proiettante la retta r : γ^1 coincide con r^1 ;
- non è necessario disegnare la seconda proiezione di γ ;

- si cercano i punti E' ed F' , intersezione di $r' \equiv \gamma'$ con due dei lati della figura $A'B'C'$ proiezione della figura piana ABC . La retta s , intersezione di γ e del piano dato, appartiene ai punti E e F , perciò la prima proiezione s' di s coincide ancora con la $r' \equiv \gamma'$;
- si costruisce la seconda proiezione di s , s'' , risalendo, con linee di richiamo, alle seconde proiezioni dei punti E ed F : E'' e F'' ;
- il punto in cui s'' ed r'' si incontrano è la seconda proiezione del punto intersezione Q , cercato; alla prima proiezione Q' si perviene con la linea di richiamo.

Prima osservazione: il punto Q può trovarsi anche fuori del piano ABC . In questo caso Q' e Q'' saranno esterni alle omonime proiezioni della figura ABC .

Seconda osservazione: è importante distinguere la parte visibile della retta dalla parte che viene nascosta dal piano, nelle due viste, in pianta e in alzato.

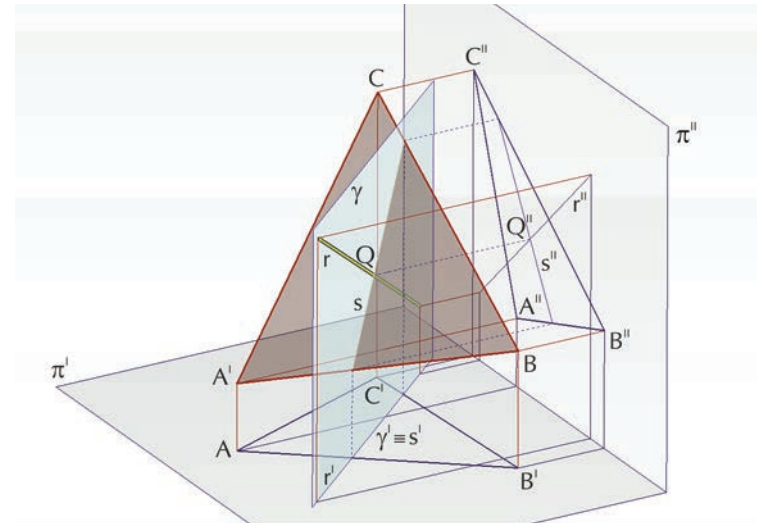
La costruzione, che abbiamo descritta nello spazio, è applicabile anche ai modelli informatici ma, in genere, questi dispongono di un comando apposito, che calcola il punto intersezione e lo visualizza, senza bisogno di altre istruzioni.

RETTA INTERSEZIONE DI DUE PIANI

Vi sono due modi, identici nella sostanza, ma diversi nella forma, per costruire la retta intersezione di due piani. Il primo consiste nel trovare i punti in cui due rette del primo piano intersecano il secondo e, perciò, consiste nella applicazione, per due volte, del procedimento illustrato poc' anzi. Il secondo, invece, consiste nel sezionare i piani dati con altri due: ognuno di questi altri due piani seziona i piani dati in una coppia di rette e ogni coppia fornisce un punto della retta intersezione cercata.

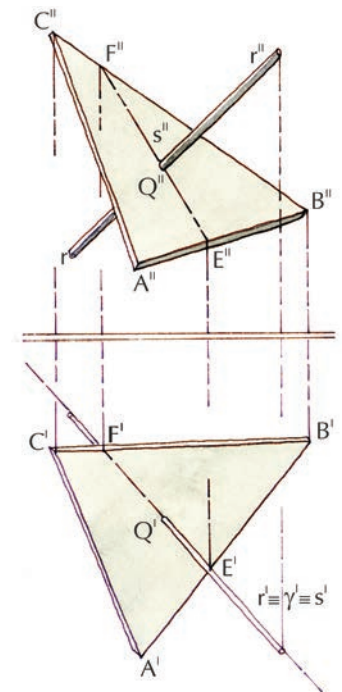
Anche per questa operazione i modelli informatici dispongono di un apposito comando, che costruisce, in generale, l'intersezione di due superfici e si applica, perciò, anche alla retta intersezione di due piani.

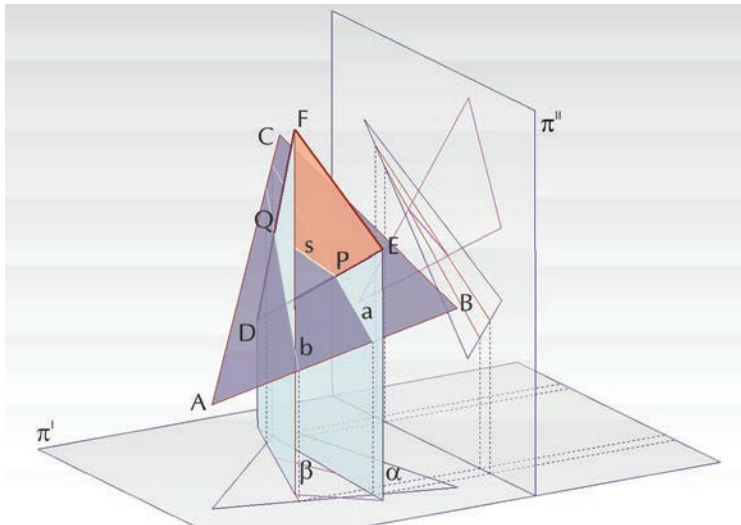
Esamineremo ora, separatamente, i due procedimenti per riconoscere poi la sostanziale identità, nonché per riconoscere, in entrambi, il procedimento generale che abbiamo descritto nella Parte Prima (*Operazioni per la costruzione del modello. Intersezione*).



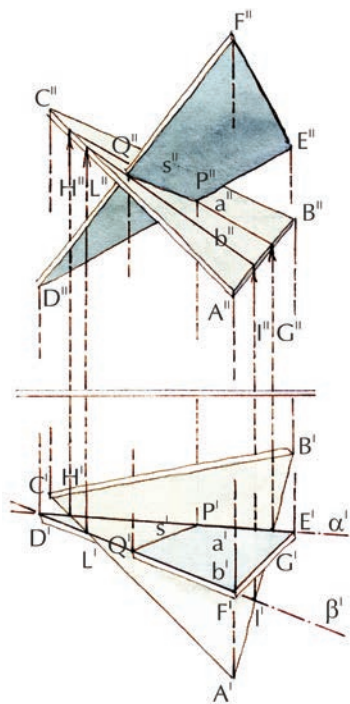
65. Il punto intersezione di una retta con un piano si costruisce sezionando il piano dato con un piano proiettante la retta per esempio in prima proiezione. Il punto comune alla retta data e alla retta intersezione dei due piani è il punto cercato.

Nel modello grafico, si costruisce prima la retta intersezione del piano dato con il piano proiettante la retta data, nell'esempio in prima proiezione; si individua quindi il punto comune alle proiezioni della retta intersezione e della retta data, nell'esempio in seconda proiezione.





66. La retta intersezione di due poligoni si può costruire individuando i punti in cui due lati dell'uno intersecano l'altro.



67. Nel modello grafico, si ripete due volte la costruzione del punto intersezione di due rette di un piano dato con l'altro.

Primo procedimento. Sono dati i due piani **ABC** e **DEF** (fig. 66). Si costruiscono i piani proiettanti dei lati di una delle due figure, ad esempio **DE** e **DF**, e siano i piani α e β , rispettivamente. Il piano α taglia il piano **ABC** secondo la retta **a**, che ha in comune con la retta **DE** il punto **P**; analogamente, il piano β taglia il piano **ABC** secondo una retta **b**, che ha in comune con la retta **DF** il punto **Q**. **P** e **Q** individuano la retta intersezione **s** cercata.

Questo procedimento si traduce nella seguente costruzione grafica (fig. 67).

- Si costruiscono i due piani proiettanti α e β : α^1 coincide con **D'E'**, β^1 con **D'F'**.

- Si individuano i punti **G** e **H** che α ha in comune con i lati della figura **DEF**: le relative prime proiezioni si trovano ove α^1 incontra le prime proiezioni dei lati suddetti.

- Si costruiscono, con le linee di richiamo, le seconde proiezioni di **G** e **H**, **G''** e **H''**.

- Si traccia quindi la retta **G''H''** che è la seconda proiezione della retta **a**, intersezione di α con il piano **DEF**. Il punto che questa retta ha in comune con la retta **D''E''** è la seconda proiezione del punto **P**, **P''**.

- Si ripetono le due operazioni che precedono per il piano β , trovando i punti **I** e **L** e, quindi, il punto **Q''**.

- Si traccia la retta **P''Q''**, che è la seconda proiezione della retta **s** cercata, **s''**, e si costruisce infine la prima proiezione di **s**, **s'**, per mezzo delle prime proiezioni dei punti **P** e **Q**, **P'** e **Q'**, che si trovano con l'aiuto delle linee di richiamo.

Bisogna osservare che è importante stabilire quali sono le parti visibili dei due piani e quali quelle nascoste.

Secondo procedimento. Sono dati i due piani **ABC** e **DEF**. Si costruiscono due piani proiettanti qualsiasi, α e β (fig. 68), ad esempio due piani proiettanti in seconda e orizzontali. Il piano α taglia il piano **ABC** secondo la retta **a** e il piano **DEF** secondo la retta **z**. Le due rette **a** e **z**, complanari per costruzione, hanno un punto in comune, **P**, che appartiene a entrambi i piani dati e che, perciò, appartiene alla loro retta intersezione **s**.

Il piano β , a sua volta, taglia il piano **ABC** secondo la retta **b** e il pia-

no **DEF** secondo la retta **v**. Le due rette **b** e **v**, complanari per costruzione, hanno un punto in comune, **Q**, che appartiene a entrambi i piani dati e che, perciò, appartiene alla loro retta intersezione **s**. Si dispone, così, di due punti distinti (**P** e **Q**) della retta intersezione **s**, che resta individuata.

Questo procedimento si traduce nella seguente costruzione grafica (fig. 69).

- Si costruiscono i due piani proiettanti α e β . I piani possono essere scelti in qualsiasi modo, ma alcune posizioni particolari possono semplificare notevolmente la costruzione e ridurre, di conseguenza, l'errore grafico. I piani qui impiegati sono orizzontali e appartengono a punti dati.

- Si individuano i punti G'' e H'' , che a'' ha in comune con le seconde proiezioni dei lati della figura **ABC**, e I'' e L'' , che ha in comune con le seconde proiezioni dei lati della figura **DEF**. In particolare, e per le solite ragioni di opportunità grafica, $G'' \equiv B''$. I punti **G** e **H** individuano la retta **a**, intersezione del piano α con **ABC**; i punti **I** e **L** individuano la retta **z**, intersezione del piano α con **DEF**.

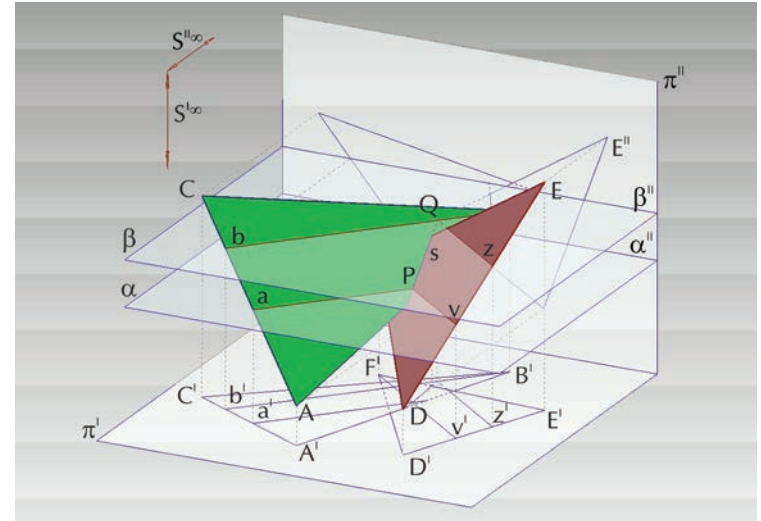
- Si costruiscono, con le linee di richiamo, le prime proiezioni dei punti **G**, **H**, **I** e **L**, G' , H' , I' , L' . Si tracciano quindi le rette $a' \equiv G'H'$ e $z' \equiv I'L'$. Il punto comune a queste due rette, P' , è la prima proiezione del punto **P** della retta **s** cercata, intersezione dei due piani dati.

- Si ripetono le due operazioni che precedono per il piano β , trovando i punti **M** e **N** (che forniscono la retta **b**) e **R** e **T** (che forniscono la retta **v**); quindi, il punto **Q**, intersezione di **b** e **v**.

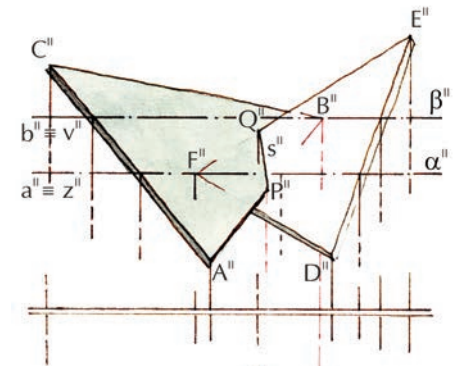
- Si traccia la retta $P'Q'$, che è la prima proiezione della retta **s** cercata, s' .

- Si costruisce infine la seconda proiezione di **s**, s'' , per mezzo delle seconde proiezioni dei punti **P** e **Q**, P'' e Q'' , che si trovano con l'aiuto delle linee di richiamo.

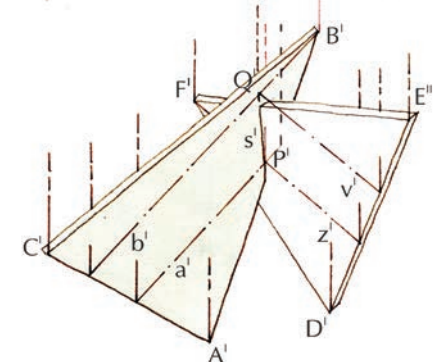
È opportuno aggiungere due osservazioni. In primo luogo, le rette **a** e **b** sono parallele, in quanto intersezioni di due piani paralleli con uno stesso piano **ABC**, e hanno dunque le proiezioni omonime parallele. Analogamente, le rette **v** e **z** hanno le

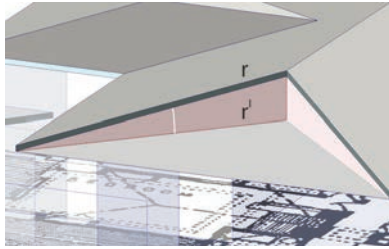


68. La medesima retta si può anche costruire sezionando i due poligoni con due piani, ad esempio orizzontali, a quote diverse. Ogni piano di sezione dà luogo a una coppia di rette, ogni coppia di rette dà luogo a un punto della retta intersezione cercata.

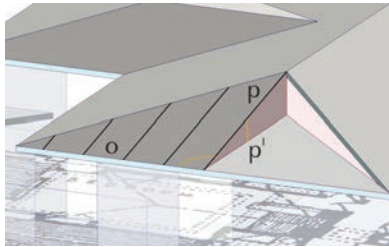


69. Nel modello grafico, basta sezionare i due piani dati con altri due piani proiettanti: nell'esempio, due piani orizzontali.

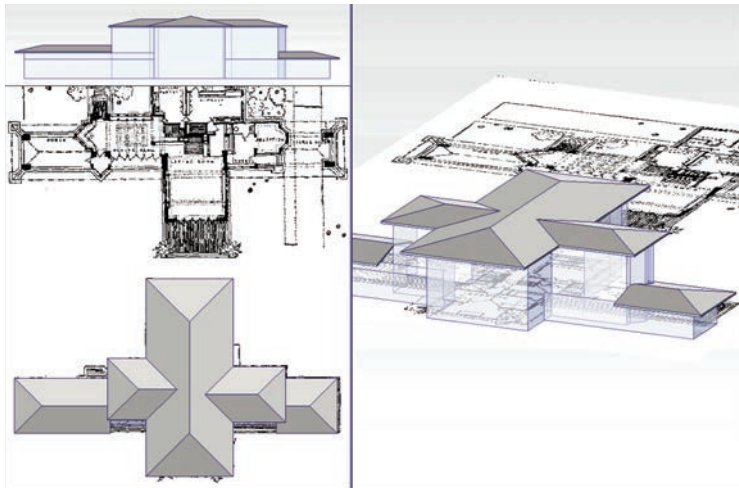




70. L'angolo di pendenza della retta di displuvio di un tetto è l'angolo che la retta forma con il piano di imposta del tetto, cioè con la proiezione ortogonale della stessa su un piano orizzontale.



71. L'angolo di pendio della falda di un tetto è l'angolo di pendenza della retta di massima pendenza della falda, che si costruisce come sezione retta della falda.



72. Il controllo dell'angolo di pendenza di rette e piani è indispensabile nel progetto e nella modellazione dei tetti.

proiezioni omonime parallele. Si può dunque sfruttare questa proprietà limitando la ricerca dei punti intersezione del piano β con i piani dati a un solo punto per ciascun piano.

In secondo luogo, non è detto, e non è necessario, che i punti comuni alle rette a e z , b e v , siano all'interno delle figure piane assegnate (ABC e DEF).

Principali operazioni di misura

L'angolo di pendenza di una retta è l'angolo che la retta forma con la sua proiezione ortogonale sul piano orizzontale. Ad esempio (fig. 70), l'angolo di pendenza di una retta r in posizione generica è l'angolo rr' formato dalla retta e dalla sua prima proiezione r' .

La retta di massima pendenza p di un piano è quella che forma un angolo retto con le rette orizzontali o del piano. Essa si ottiene come sezione retta del piano dato. Su un piano in posizione obliqua si possono descrivere infinite rette il cui angolo di pendenza varia da un valore nullo (per le rette orizzontali) a un valore massimo (per le rette di massima pendenza). Queste ultime descrivono il più breve percorso tra due diverse quote del piano: è il percorso dell'acqua che scorre su un piano inclinato e, per questa ragione, la loro esatta direzione è determinante nella progettazione delle coperture degli edifici.

L'angolo di pendio di un piano è l'angolo di pendenza della sua retta di massima pendenza (figg. 71, 72).

MISURA DELL'ANGOLO DI PENDENZA DI UNA RETTA

Per misurare l'angolo di pendenza di una retta, o l'angolo di pendio di un piano, si ricorre a un ribaltamento. Ricordiamo, perciò, quanto già abbiamo stabilito trattando dei movimenti di un piano (vedi Parte Prima, *Operazioni per la costruzione del modello*). Il ribaltamento, in generale, consiste in una rotazione che porta il piano a coincidere con il piano di proiezione. Questa rotazione avviene intorno alla retta intersezione dei due piani, che assume il ruolo di cerniera del ribaltamento.

Come abbiamo detto, due sono le leggi che governano il ribaltamento di un piano:

- i punti del piano descrivono, durante il ribaltamento, archi di circonferenza che appartengono a piani perpendicolari alla cerniera;
 - i punti del piano conservano, durante il ribaltamento, la propria distanza dalla cerniera.

Vediamo dunque come è possibile, con un ribaltamento, trasportare un qualsiasi punto P dallo spazio al primo piano di proiezione (figg. 73, 74).

Costruiamo, in primo luogo, uno qualsiasi degli infiniti piani proiettanti in prima, che passano per il punto P , e sia il piano γ . La prima proiezione del piano γ' appartiene a P' ed è la cerniera del ribaltamento. Per effetto della prima legge il punto P si muove, durante il ribaltamento, in un piano δ , perpendicolare alla cerniera: questo piano, perciò, è anch'esso proiettante in prima e ha la prima proiezione δ' ortogonale a γ' in P' . Per effetto della seconda legge il punto conserva la propria distanza dalla cerniera e dunque, a ribaltamento avvenuto, si porta sulla δ' ad una distanza da P' pari alla quota PP' . Si misura dunque la quota sulla seconda proiezione e la si riporta sulla δ' , costruendo il punto P^* (leggi P ribaltato), da una parte o dall'altra, secondo il verso prescelto per il ribaltamento del piano γ .

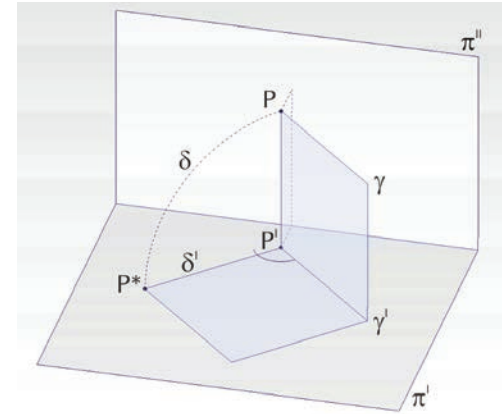
Vogliamo ora servirci del ribaltamento per misurare la lunghezza di un segmento PQ e il suo angolo di pendenza. L'operazione si svolge come segue (fig. 75).

In primo luogo si trasla il piano di proiezione fino al punto più basso del segmento. Si osservi, più in generale, che i piani di proiezione possono essere traslati parallelamente alla direzione di proiezione senza alcun effetto sulla omonima proiezione dei punti. Queste traslazioni sono utili perché annullano la quota o l'aggetto di alcuni punti, semplificando le operazioni successive.

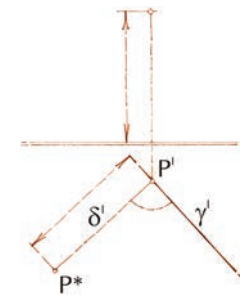
Si costruisce poi il piano γ che proietta il segmento dato sul primo piano di proiezione, come sopra disposto.

Si ribalta poi il piano proiettante γ sul primo piano di proiezione, assumendo come cerniera la prima proiezione della retta data: ciò fatto, il segmento e l'angolo formato dal segmento stesso con la sua prima proiezione appaiono in vera forma. Sul piano γ , come sopra ribaltato, si compiono le misure del segmento e dell'angolo.

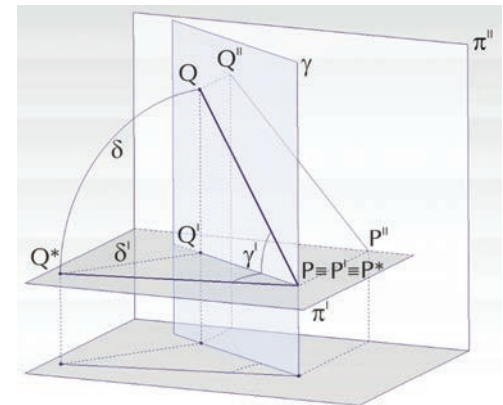
73. Il ribaltamento di un piano proiettante, nell'esempio in prima proiezione, si ottiene ruotando il piano stesso intorno alla retta che ha in comune con il piano di proiezione: questa retta si dice *cerniera* del ribaltamento.

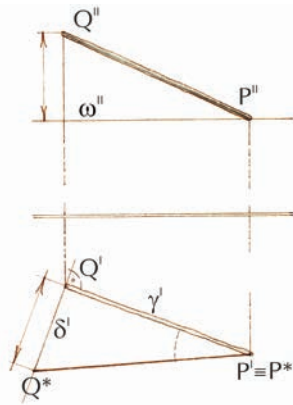


74. Nel modello grafico, si costruisce prima la retta intersezione del piano perpendicolare alla cerniera con il piano di proiezione; si alza, poi, su questa retta la quota del punto considerato, misurandola sulla seconda proiezione.

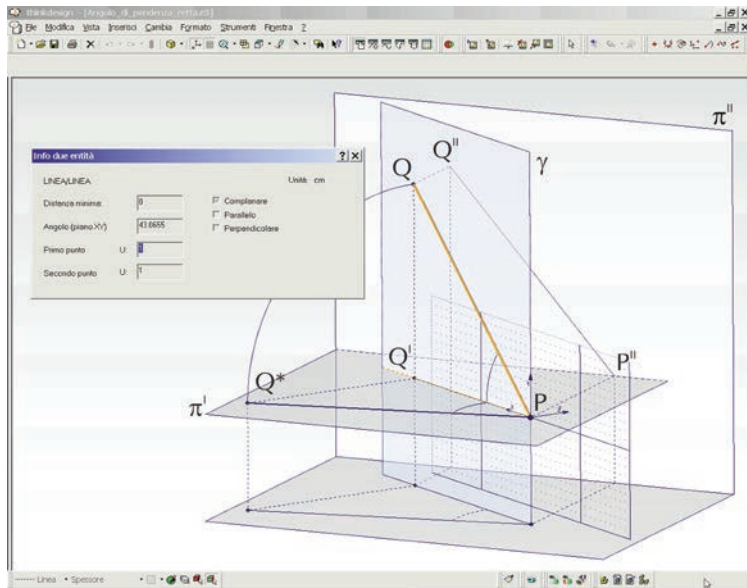


75. La misura di un segmento e del suo angolo di pendenza si ottiene facilmente ribaltando il piano che proietta il segmento sul primo piano di proiezione.





76. Nel modello grafico, si costruisce prima un piano parallelo al piano di proiezione per un punto della retta che si vuole ribaltare; poi si ribalta il piano proiettante considerando un secondo punto della retta.



77. Nei modelli informatici non è necessario ribaltare il piano proiettante, si può portare il piano di lavoro sul piano proiettante e compiere la misura nello spazio.

Il procedimento grafico trascrive nel disegno le suddette operazioni, nell'ordine che segue (fig. 76). È dato il segmento PQ , in posizione generica, mediante le proiezioni $P'Q'$ e $P''Q''$.

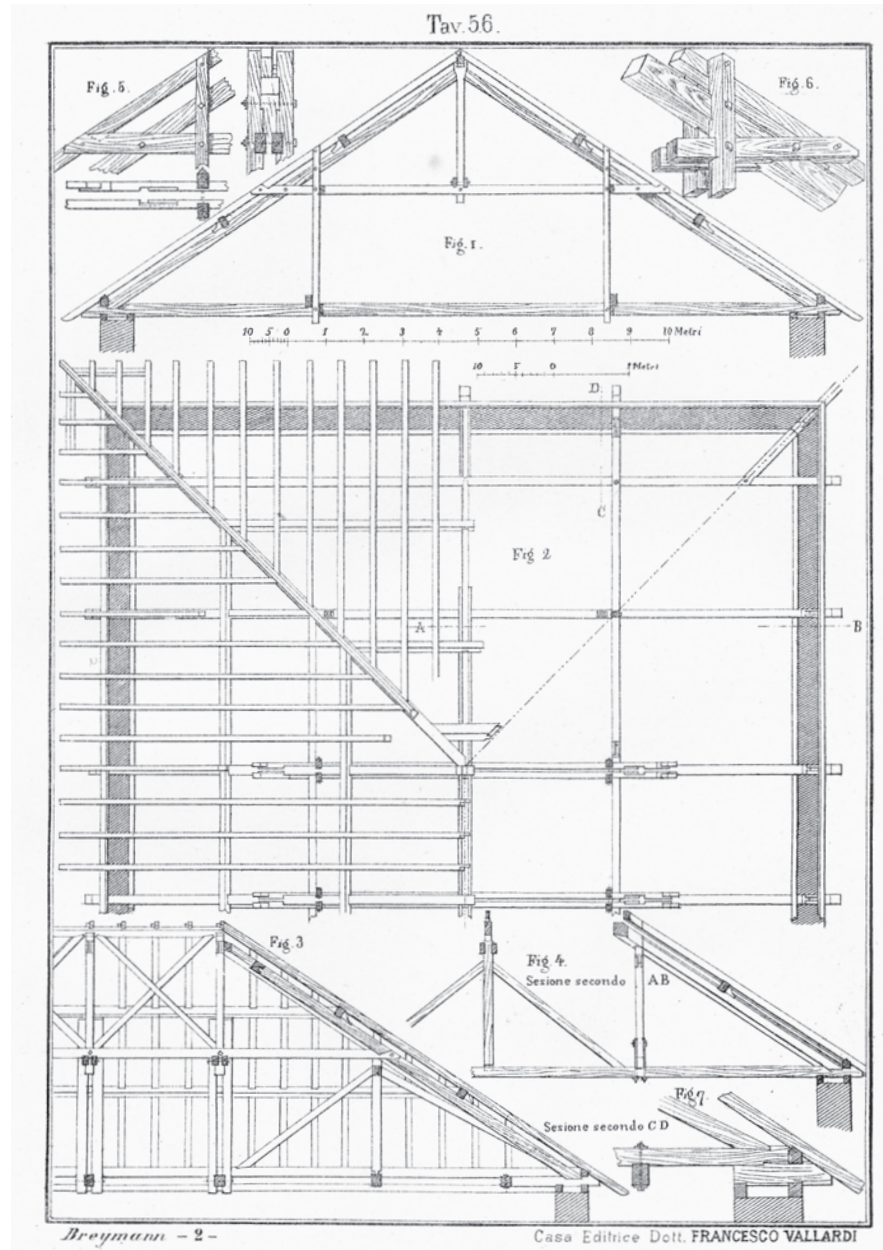
- Si stabilisce il piano orizzontale ω per il punto P , il più basso degli estremi del segmento PQ , e lo si assume come primo piano di proiezione: la retta ω'' , seconda proiezione del piano, appartiene al punto P'' , seconda proiezione di P ; a traslazione avvenuta, la quota del punto P è nulla, mentre la quota del punto Q è misurata dalla distanza della seconda proiezione Q'' dalla retta ω'' .

- Si ribalta il piano γ proiettante PQ su $\omega \equiv \pi'$. La retta $P'Q'$, proiezione di PQ , è la cerniera del ribaltamento. Il punto P descrive, nel movimento del piano, un arco di circonferenza che giace in un piano perpendicolare alla cerniera e si porta perciò sulla retta del primo piano di proiezione, ortogonale alla $P'Q'$, che passa per Q' . Il punto Q conserva, altresì, la distanza dalla cerniera, che è pari alla sua quota, e si porta perciò, a ribaltamento avvenuto, nel punto Q^* , dove il segmento $Q'Q^*$ misura, appunto, quanto la quota di Q . Il punto P , che appartiene alla cerniera, per costruzione, ed ha quota nulla, non modifica la propria posizione.

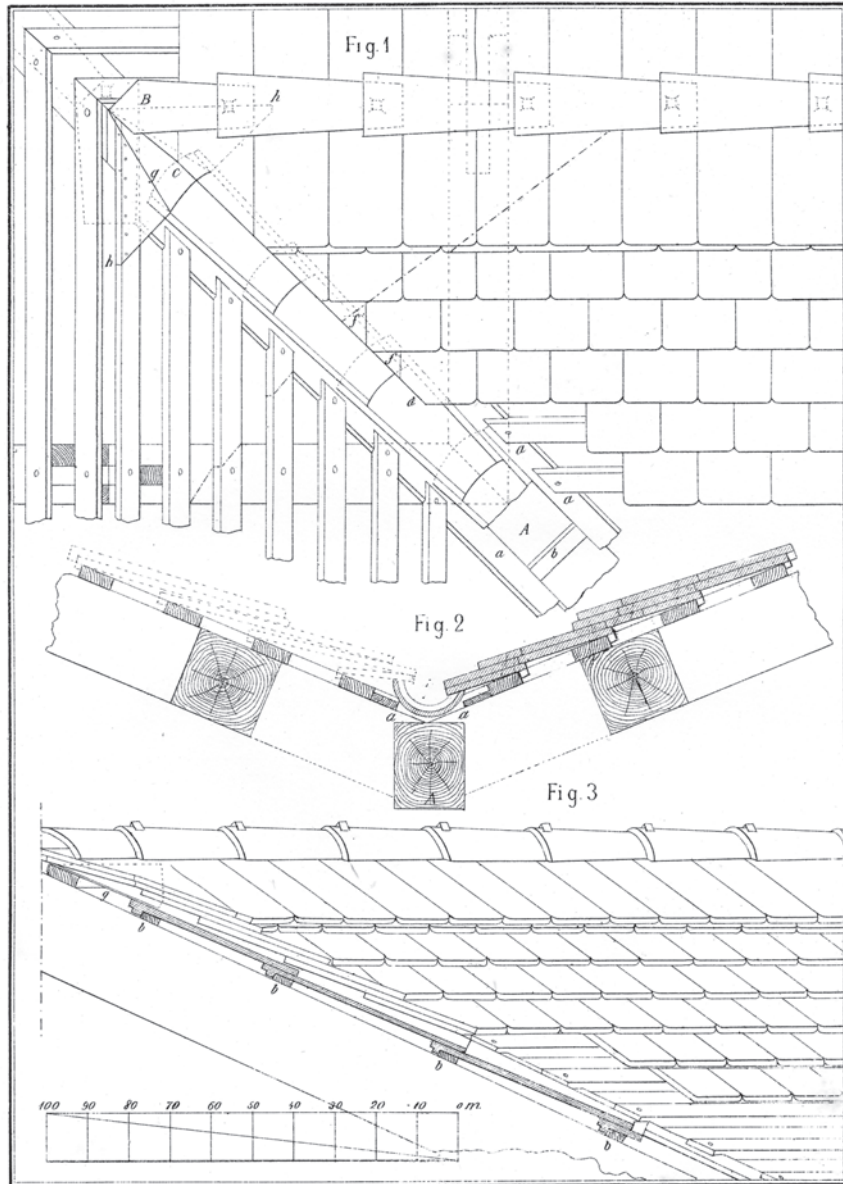
Il segmento $P'Q^*$ rappresenta dunque il ribaltamento del segmento oggettivo PQ e ne misura la lunghezza. Ma non solo: come è immediato constatare, l'angolo tra il segmento ribaltato e la cerniera ($Q'P'Q^*$) è l'angolo che il segmento forma con la sua prima proiezione, cioè l'angolo di pendenza della retta cui appartiene.

Nel modello informatico, la misura dell'angolo si può ottenere anche senza ricorrere al ribaltamento del piano cui appartiene, considerata la possibilità di muovere nello spazio il piano di costruzione (fig. 77).

In *thinkDesign*, ad esempio, si porta il piano di costruzione sul piano individuato dalle due rette, quindi si selezionano queste ultime (incidenti o sghembe), e si dà il comando *Info(rmazioni)/Due entità*, ottenendo quanto è descritto in figura. Tuttavia, come appare evidente, è necessario disporre dei due lati dell'angolo e perciò, per misurare l'angolo di pendenza di una retta, occorre prima costruirne la proiezione ortogonale su un piano orizzontale, come nel modello grafico.



78. La misura degli angoli di pendenza è essenziale nella progettazione dei tetti. La tavola è tratta da Gustav Adolf Breyman, *Costruzioni in pietra e strutture murali*, Milano, 1885.



Breymannl

Casa Edit.^o D'F.^o Vallardi

Milano, Stab.^o Lit.^o Galileo

79. In questo disegno di Breymann viene costruito il compluvio di due falde di tetto applicando le considerazioni relative agli angoli di pendenza.

MISURA DELL'ANGOLO DI PENDIO DI UN PIANO

Come abbiamo detto, l'angolo di pendio di un piano è l'angolo di pendenza della sua retta di massima pendenza. Dunque per misurare l'angolo di pendio di un piano basta applicare in sequenza due operazioni già note:

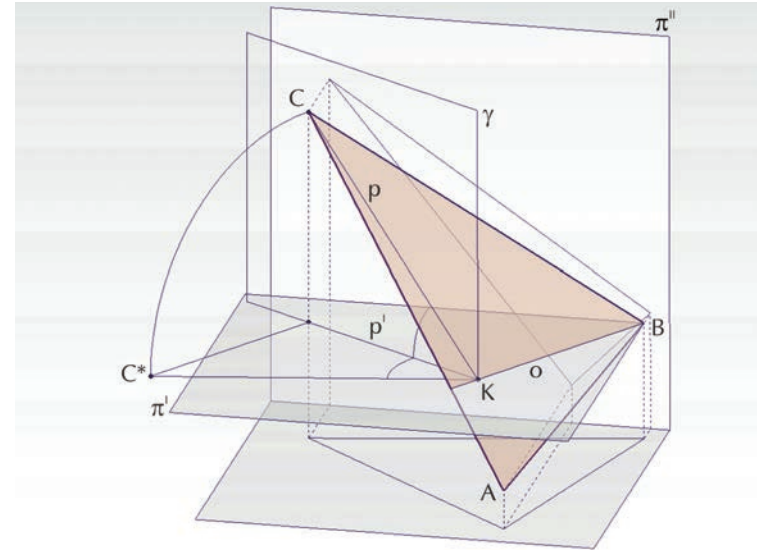
- la costruzione di una retta di massima pendenza, mediante la sezione retta del piano;
- la misura dell'angolo di pendenza di quest'ultima.

Ad esempio (fig. 80), dato il piano ABC :

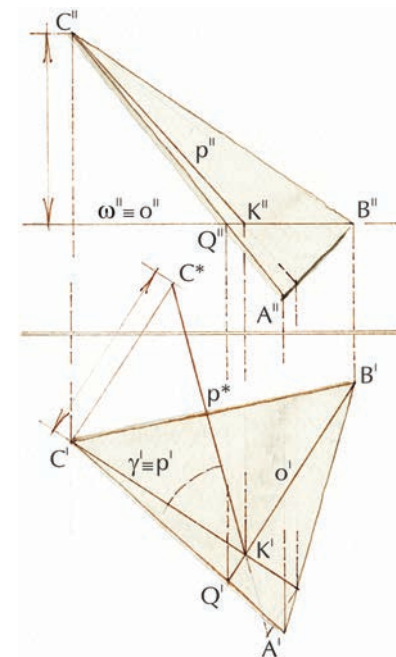
- si costruisce per prima una retta orizzontale o del piano;
- si seziona poi il piano con il piano γ proiettante in prima e perpendicolare alla retta o ;
- il piano γ taglia ABC secondo la retta di massima pendenza p e il primo piano di proiezione secondo la p' ;
- si ribalta infine γ intorno alla cerniera p' sul primo piano di proiezione, dove si effettua la misura dell'angolo.

Questa costruzione si traduce nel seguente procedimento grafico (fig. 81).

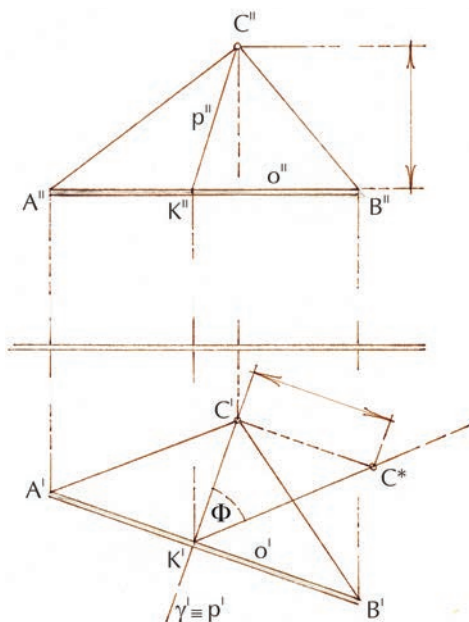
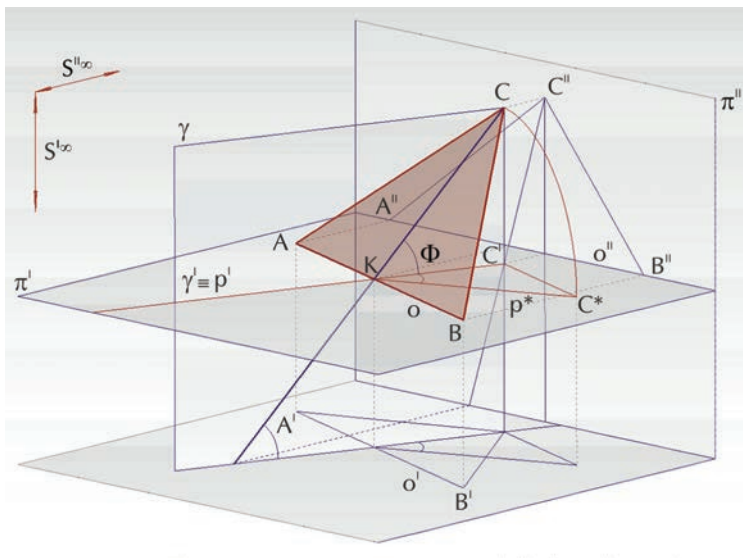
- Si traccia la seconda proiezione di un piano orizzontale ω , facendolo passare per uno dei vertici della figura, per esempio B . In ω'' si confonde la seconda proiezione della retta orizzontale o del piano ABC , $\omega'' \equiv o''$.
- La retta suddetta incontra il lato AC della figura nel punto Q , la cui seconda proiezione Q'' appartiene ad $A''C''$. Con linea di richiamo si trova Q' su $A'C'$ e si individua così la prima proiezione o' della retta o .
- Si traccia ora la prima proiezione γ' del piano γ , perpendicolare alla retta o e proiettante in prima, facendolo passare per uno dei vertici della figura, per esempio C .
- Si disegna (non è indispensabile ma è utile) la seconda proiezione p'' della retta di massima pendenza p , con l'aiuto del punto K , intersezione di γ e della retta o .
- Si ribalta il piano γ e, con esso, il punto C , che si dispone in C^* , ad una distanza da C' pari alla quota rispetto a ω , che si misura nella seconda proiezione. La retta p si ribalta in $K'C^*$.
- Si misura l'angolo di pendenza $C^*K'C'$.



80. Per misurare l'angolo di pendio di un piano, si costruisce la retta di massima pendenza del piano e si misura l'angolo che questa forma con la sua proiezione sul primo piano di proiezione.



81. Nel modello grafico, si costruisce prima la sezione retta del piano, poi la si ribalta su un piano orizzontale.



82. Per costruire un piano di dato angolo di pendio si costruisce prima un piano perpendicolare alle rette orizzontali del piano desiderato e su questo si costruisce la retta di massima pendenza. Nel modello grafico, si costruisce prima il ribaltamento di un piano perpendicolare alla retta orizzontale data; su questo si disegna il ribaltamento della retta di massima pendenza, in funzione dell'angolo di pendio voluto. Questa operazione, che è l'inverso di un ribaltamento, si dice *raddrizzamento*.

I procedimenti che abbiamo appena descritto consentono di costruire un piano di dato angolo di pendio e di misurare l'area di una figura che gli appartiene, come quando si progetta una copertura a tetto.

Data la retta orizzontale $o = AB$, mediante le proiezioni $o^I = A'B'$ e $o^{II} = A''B''$, vogliamo costruire il piano ABC che abbia un angolo di pendio di Φ gradi (fig. 82). Procederemo come segue.

- In primo luogo, si trasla il primo piano di proiezione in modo che appartenga alla retta data.

- Ciò fatto, si costruisce un piano γ perpendicolare alla retta AB : questo piano taglia il primo piano di proiezione in una retta γ^I ortogonale alla $A'B'$ che comprende anche la prima proiezione p^I della retta di massima pendenza p . Chiamiamo K (K^I, K^{II}) il punto comune a γ e AB .

- Si ribalta ora il piano γ su π^I e, sul ribaltamento del piano, si tracciano la retta p^* , ribaltamento di p : la p^* forma con la p^I un angolo uguale all'angolo di pendio assegnato.

- Su questa retta p^* si stacca un punto C^* qualsiasi (purché distinto dalla retta o): questo punto è il ribaltamento del punto C del piano che si vuole costruire.

- Sul ribaltamento di γ , si misura la quota di C : essa è pari alla distanza C^*C^I di C^* dalla cerniera p^I . La seconda proiezione C^{II} di C si trova sulla linea di richiamo e si costruisce immediatamente, grazie alla quota. La seconda proiezione p^{II} della retta p appartiene a C^{II} e K^{II} .

La medesima costruzione, nei modelli informatici, si può realizzare senza ribaltamenti: basta applicare il piano di costruzione sul piano γ . Oppure ci si può avvalere di una tecnica particolarmente efficiente, che consiste nel costruire prima il piano nella posizione orizzontale, per ruotarlo, successivamente, dell'angolo assegnato, intorno a una retta orizzontale.

MISURA DI UNA FIGURA PIANA

Per misurare una figura piana disposta nello spazio su un piano in posizione generica occorre riconoscere la sua vera forma. A tal fine bisogna portare il piano su cui è disposta a coincidere con il primo piano di proiezione, mediante un ribaltamento. Una volta

adagiata sul piano di proiezione, la figura può essere misurata e modificata in qualsiasi modo (fig. 83).

Il ribaltamento richiede due sole operazioni: la costruzione della cerniera, che è la retta o , intersezione del piano dato con il piano di proiezione, e la misura della distanza di un punto qualsiasi P dalla cerniera stessa; infatti, come sappiamo, a ribaltamento avvenuto, il punto P si porterà in P^* sulla retta ortogonale alla cerniera, che passa per la sua prima proiezione P^l , ad una distanza dalla medesima che è pari a quella misurata nello spazio (PK).

Quanto abbiamo osservato a proposito del generico punto P vale per qualsiasi punto del piano dato, sicché possiamo affermare che le prime proiezioni dei punti del piano e i rispettivi ribaltamenti sono, in generale, allineati su rette ortogonali alla cerniera.

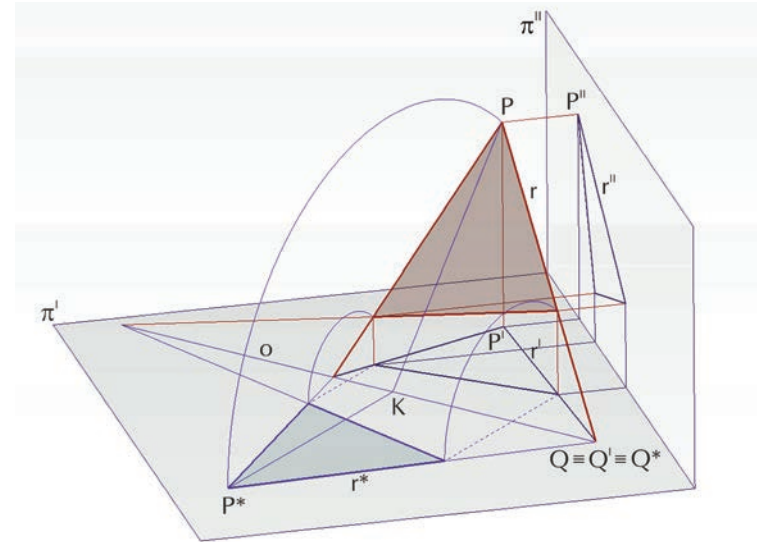
I punti, come Q , che appartengono alla cerniera non subiscono alcuno spostamento; si può dire che la loro distanza dalla cerniera è nulla e che, per questi punti in posizione particolare, prima proiezione e ribaltamento coincidono con il punto oggettivo: $Q^l \equiv Q^* \equiv Q$. Perciò, se una retta $r = PQ$ del piano incontra la cerniera in un punto Q , anche la prima proiezione della retta $r^l = P^lQ^l$ e il suo ribaltamento $r^* = P^*Q^*$ si incontrano in Q .

Punti come P^l e P^* , che sono prima proiezione e ribaltamento di un medesimo punto P del piano dato, e rette come r^l e r^* , che sono prima proiezione e ribaltamento di una medesima retta r del piano dato, si dicono *corrispondenti*. Tra la prima proiezione della figura e il suo ribaltamento intercede, dunque, una *affinità ortogonale* nella quale la cerniera è asse e la direzione ortogonale alla cerniera è centro.

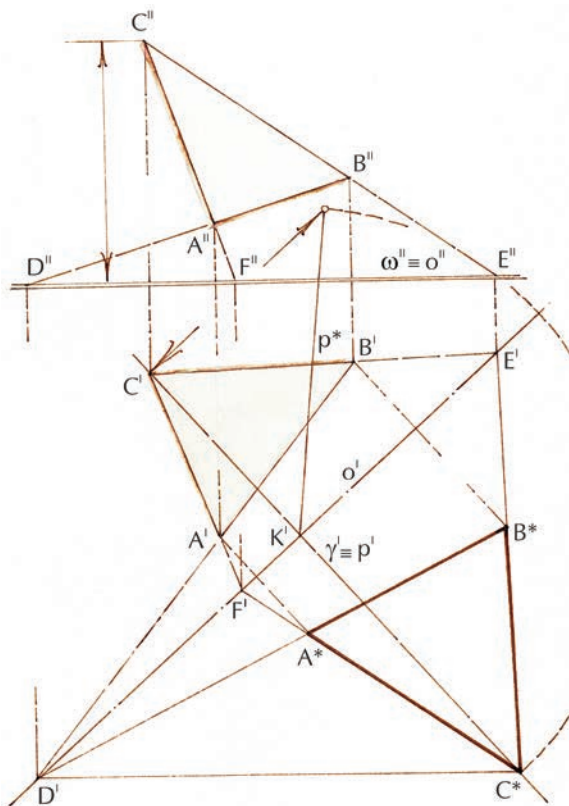
Infatti, come abbiamo spiegato nella prima parte, l'affinità ortogonale è una relazione omologica nella quale:

- punti corrispondenti sono allineati su rette ortogonali all'asse;
- rette corrispondenti si incontrano sull'asse.

La conoscenza di tale relazione rende particolarmente semplici le operazioni connesse alla costruzione della vera forma di una figura piana: costruendo la vera forma di una figura piana qualsiasi mediante l'applicazione delle relazioni di affinità ortogonale che intercedono tra la vera forma della figura e la sua prima proiezione.



83. La vera forma di una figura piana, della quale siano date le proiezioni, si costruisce ribaltando il piano che ospita la figura sul primo piano di proiezione. Tra la prima proiezione della figura e il suo ribaltamento intercede una affinità ortogonale.



84. Nel modello grafico, si ribalta una qualsiasi retta del piano dato: tra il ribaltamento di questa retta e la prima proiezione della stessa intercede una affinità omologica ortogonale che ha la cerniera del ribaltamento come asse.

È dato il triangolo ABC , a mezzo delle sue proiezioni $A'B'C'$ e $A''B''C''$, e se ne vuole la vera forma (fig. 84).

Il lato AB del triangolo, eventualmente prolungato, incontra il primo piano di proiezione nel punto D . Ove ciò non avvenisse in una zona comoda e accessibile del modello, si può traslare il primo piano di proiezione fino a farlo coincidere con un piano ω orizzontale, disposto in modo opportuno.

La seconda proiezione D'' del punto D appartiene dunque alla linea di terra da noi stabilita, ω'' . Alla prima proiezione D' del punto suddetto, si perviene con linea di richiamo.

Analogamente, il lato BC del triangolo, opportunamente prolungato, incontra il piano ω in un punto E . La retta intersezione di ABC con ω resta così individuata: è la retta orizzontale o , che appartiene al punto D e al punto E e che servirà da cerniera del ribaltamento. Questa retta o è il luogo geometrico dei punti comuni al piano ABC e al piano ω , perciò anche il terzo lato AC del triangolo incontra il piano ω in un punto F della stessa.

Si costruisce, ora, il piano della sezione retta γ , perpendicolare alla retta o e proiettante in prima. La costruzione riesce anche più semplice se questo piano passa per uno dei punti dati, come C . Il piano γ suddetto seziona il piano dato lungo una retta di massima pendenza p , precisamente quella che misura la distanza di C dalla cerniera. Per leggere questa distanza, basta ribaltare γ sul primo piano di proiezione. Ciò fatto, si riporta la distanza di C dalla cerniera con un arco che ha centro nel punto K' , comune a γ' e alla cerniera, determinando C^* . Si noti che l'arco ora tracciato sul ribaltamento del piano γ descrive bene il movimento del punto C nello spazio. Da questo momento, la relazione di affinità permette di concludere rapidamente la costruzione della figura ribaltata.

Infatti:

- la retta CB' incontra l'asse della affinità (la cerniera) nel punto E' ; pertanto la corrispondente retta C^*B^* deve passare per il medesimo punto e resta individuata (è questa un'applicazione della seconda regola);
- il punto B^* è allineato con B' su una retta ortogonale all'asse; pertanto è individuato (è questa una applicazione della prima regola).

In modo analogo si costruisce A^* e qualsiasi altro punto del piano assegnato.

COSTRUZIONE DI UNA FIGURA PIANA

Vogliamo ora affrontare il problema inverso: la costruzione delle proiezioni ortogonali di una figura piana di forma nota, ad esempio il quadrato $ABCD$, che appartiene a un piano α assegnato, del quale è data la retta orizzontale o e la retta di massima pendenza p (fig. 85).

In primo luogo si stacca sulla retta p un qualsiasi punto Q (Q' , Q'') e si ribalta il piano α sul primo piano di proiezione, che si assume appartenente alla retta o . A ribaltamento avvenuto, il punto Q si porta in Q^* .

Si costruisce, sul ribaltamento del piano α , il quadrato $A^*B^*C^*D^*$, ribaltamento della figura della quale si vogliono le proiezioni.

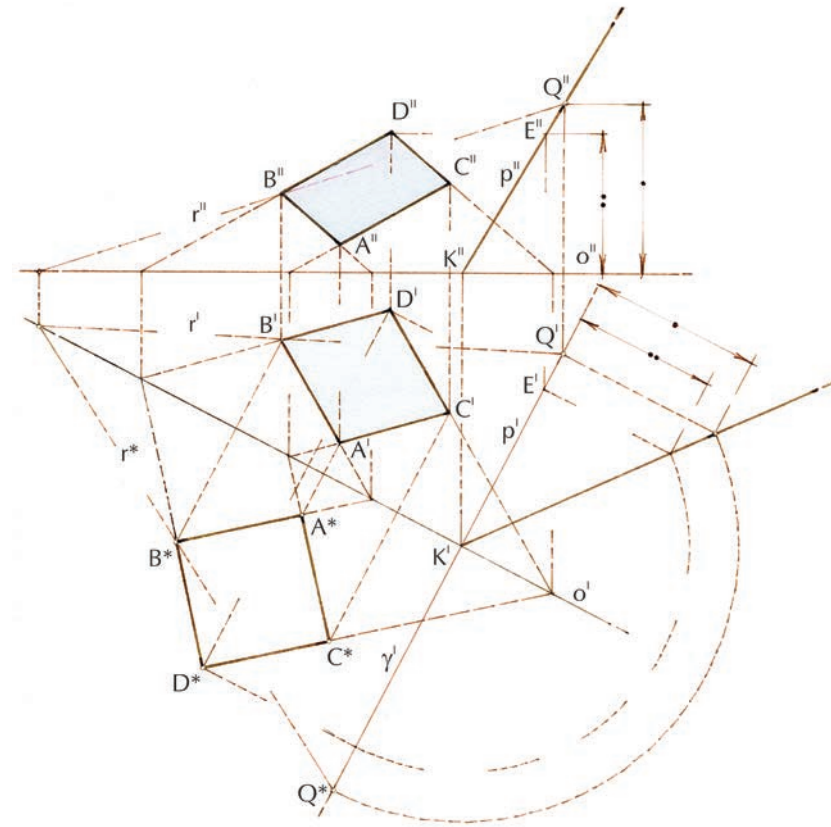
Si costruisce ora la retta individuata da Q^* e da uno qualsiasi dei vertici del quadrato, ad esempio B^* : la relazione di affinità restituisce subito il punto B' , corrispondente di B^* ; infatti la retta $r' = Q'B'$ e la corrispondente $r^* = Q^*B^*$ si incontrano sull'asse, e perciò, essendo noto Q' si può tracciare la r' ; inoltre i punti B^* e B' , corrispondenti, sono allineati sulla retta ortogonale all'asse o' e perciò, dato B^* e r' , resta individuato B' .

L'applicazione successiva della relazione di affinità ortogonale permette di completare rapidamente la prima proiezione.

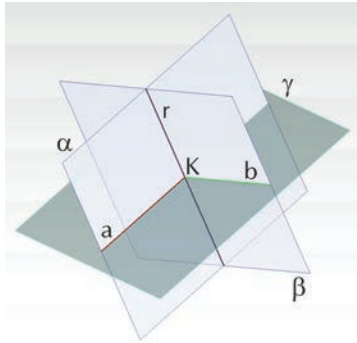
Quanto alla seconda proiezione, i punti relativi si trovano sulle rette di richiamo a quote che possono essere facilmente misurate sul ribaltamento del piano γ della sezione retta. Infatti, se si costruisce per il punto D , ad esempio, una retta orizzontale, questa taglia la retta di massima pendenza p di α in un punto E la cui quota è la stessa di D , ma la quota di E , si legge facilmente sul ribaltamento, già costruito, della retta di massima pendenza p .

COSTRUZIONE DI ENTI GEOMETRICI TRA LORO PERPENDICOLARI

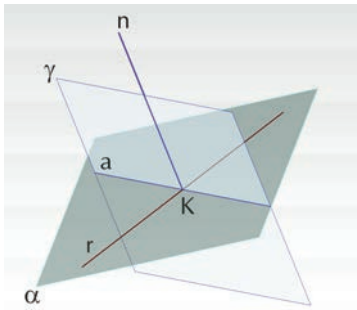
Dobbiamo ora occuparci di un altro, fondamentale, problema di misura: la costruzione di enti geometrici tra loro perpendicolari. Prima, però, è bene ricordare i postulati e i teoremi della geometria elementare che definiscono la perpendicolarità di rette e piani nello spazio.



85. Per costruire le proiezioni di una figura data, disposta su un piano generico del quale sia noto l'angolo di pendenza, si costruisce prima la figura in vera forma sul primo piano di proiezione e si sfrutta, poi, la relazione di affinità che intercede tra la figura in vera forma e la sua prima proiezione.



86. Per costruire un piano perpendicolare a una retta, si costruiscono due piani distinti che appartengano alla retta data, su questi piani si costruiscono due rette incidenti, ortogonali alla retta data. Queste due rette individuano il piano cercato.



87. Per costruire una retta perpendicolare a un piano, si costruisce prima un piano perpendicolare a una retta qualsiasi del piano dato e, su quest'ultimo, si costruisce la retta ortogonale alla retta intersezione dei due piani.

Definizione. Si conviene che una retta è perpendicolare ad un piano quando forma angoli retti con tutte le rette del piano che la incontrano (EUCLIDE, XI, definizione III). Se si stabilisce, inoltre, che l'angolo di due rette sghembe è quello formato dall'una con una qualsiasi retta incidente parallela all'altra, la definizione euclidea può anche essere posta in modo più generale: *una retta è perpendicolare a un piano quando forma angoli retti con tutte le rette del piano.*

Teorema. Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano, essa è perpendicolare al piano (EUCLIDE, XI, proposizione 4).

Ciò premesso, possiamo risolvere i due problemi che seguono:

- costruire un piano perpendicolare a una retta;
- costruire una retta perpendicolare a un piano.

Per costruire un piano perpendicolare a una retta (fig. 86):

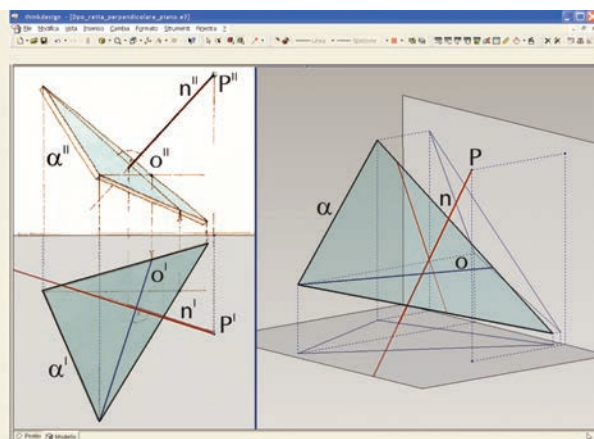
- si costruiscono due piani qualsiasi, distinti, α e β che appartengano alla retta r data;
- si stacca sulla retta r un punto qualsiasi K ;
- si costruisce su α una retta a perpendicolare a r nel punto K ;
- si costruisce su β una retta b perpendicolare a r nel punto K ;
- le rette a e b individuano il piano γ , perpendicolare a r . Infatti la retta r risulta, per costruzione, perpendicolare a due rette del piano γ , a e b .

Per costruire una retta perpendicolare a un piano (fig. 87):

- si costruisce una qualsiasi retta r del piano α , dato, e, su di essa, si stacca un punto K ;
- si costruisce il piano γ , perpendicolare a r , nel modo esaminato in precedenza;
- si costruisce quindi la retta a , intersezione del piano dato α con il piano γ ;
- si costruisce infine, nel piano γ , una retta n perpendicolare ad a ;
- la retta n è la retta cercata, essa, infatti, risulta, per costruzione, perpendicolare a due rette del piano α : a e r .

Le due costruzioni suddette si applicano alla soluzione dei problemi relativi e, in particolare, a quello che ci interessa: la costruzione delle proiezioni di una retta n perpendicolare a un piano α dato e appartenente a un punto P dello spazio, pure assegnato.

88. La prima proiezione di una retta ortogonale a un piano è ortogonale alla prima proiezione delle rette orizzontali del piano; la seconda proiezione è ortogonale alla seconda proiezione delle rette frontali del piano.



Infatti, per costruire una retta n perpendicolare a un piano α dato basta applicare il procedimento che insegna Euclide adottando, in luogo di una retta qualsiasi del piano dato, una retta orizzontale o (fig. 88). In tal caso, il piano γ risulta anche perpendicolare al primo piano di proiezione π^1 , cioè proiettante in prima, poiché o è parallela a π^1 .

Assumendo poi γ appartenente al punto P assegnato, la prima proiezione n^1 della retta n cercata si confonderà con la prima proiezione γ^1 di tutte le rette del piano γ .

Per costruire la seconda proiezione, n^2 , basta costruire, per P , un secondo piano δ , questa volta perpendicolare alla retta frontale f del piano dato. Il piano δ risulta proiettante in seconda e perciò nella sua seconda proiezione si confonde anche la seconda proiezione n^2 cercata.

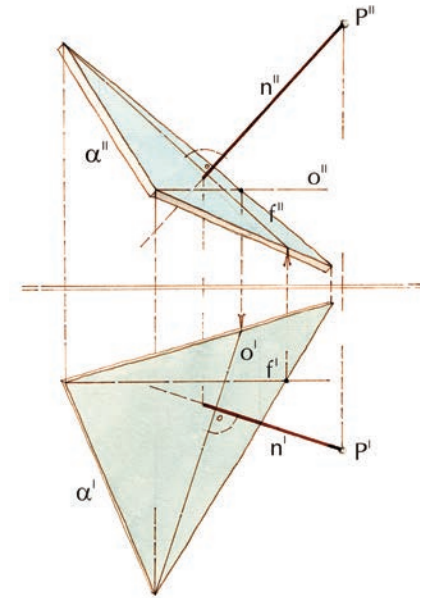
La costruzione si traduce nel seguente enunciato: dato un piano α e costruita, come sopra si è detto, la perpendicolare n che passa per un qualsiasi punto P dello spazio, la prima proiezione n^1 della perpendicolare è ortogonale alla prima proiezione o^1 di una qualsiasi retta orizzontale o del piano α , la seconda proiezione n^2 è ortogonale alla seconda proiezione f^2 di una qualsiasi retta frontale f del medesimo piano α .

Sul piano squisitamente grafico si procede, nei vari casi del disegno, come segue (fig. 89).

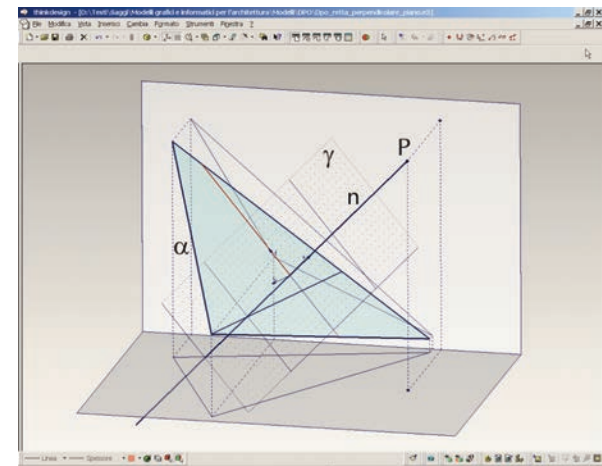
È dato il piano α e un punto P che può appartenere al piano o esserne distinto.

- Si costruiscono: una retta qualsiasi orizzontale o (o^1, o^2) e una retta qualsiasi frontale f (f^1, f^2) del piano.
- Si conduce la prima proiezione n^1 , per la prima proiezione P^1 del punto dato, ortogonale a o^1 .
- Si conduce la seconda proiezione n^2 per la seconda proiezione P^2 del punto dato, ortogonale a f^2 .

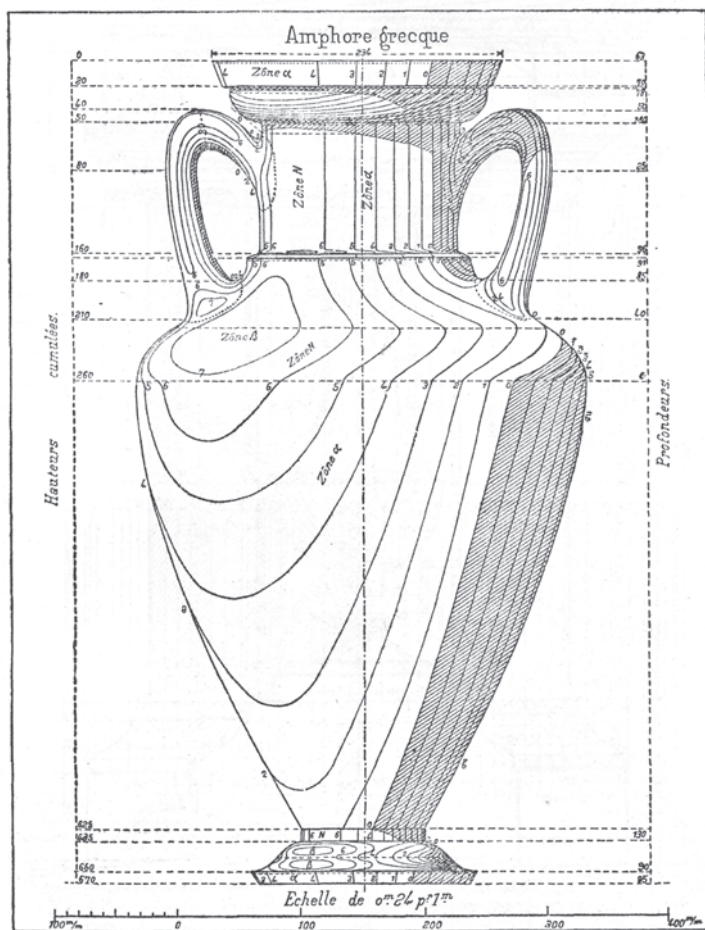
Nei modelli informatici (fig. 90) si applica esattamente il procedimento euclideo. In questi modelli, il piano di costruzione svolge il ruolo del piano γ . Alcuni programmi prevedono la possibilità di costruire rette perpendicolari al piano di costruzione: ciò rende la costruzione più spedita.



89. Nel modello grafico, si costruiscono due rette del piano dato: l'una orizzontale e l'altra frontale; poi si tracciano le proiezioni della retta perpendicolare al piano in modo che la prima sia ortogonale alla prima proiezione della retta orizzontale e la seconda sia ortogonale alla seconda proiezione della retta frontale.



90. Nei modelli informatici si applica al piano di costruzione una rototraslazione che porta gli assi x e y a coincidere con il piano dato. Ciò fatto, si ruota ancora il piano di costruzione di novanta gradi intorno a uno degli assi x o y , per costruire infine la retta perpendicolare voluta.



91. L'uso delle linee grafiche nel modello di un'anfora greca disegnata da J.J. Pillet per lo studio delle isofote, 1921.

Rappresentazione di una linea grafica

Come abbiamo detto, la linea grafica è quella che deriva dal gesto libero della mano che disegna e, pertanto, non può essere descritta come luogo geometrico. Ad esempio, il bordo frastagliato di una foglia d'edera, è una linea siffatta che, benché curva e continua, non potrebbe essere tracciata né da un compasso, né da un altro strumento più complesso. L'antica scuola del disegno ci ha insegnato, in questi casi, a trasformare la linea in una spezzata, o meglio ancora, in una struttura geometrica, che possa essere controllata in modo più semplice. Così, ad esempio, la foglia dell'edera può essere inscritta in un poligono e quest'ultimo può essere usato per impostare il disegno e guidare il suo completamento a mano libera (fig. 92).

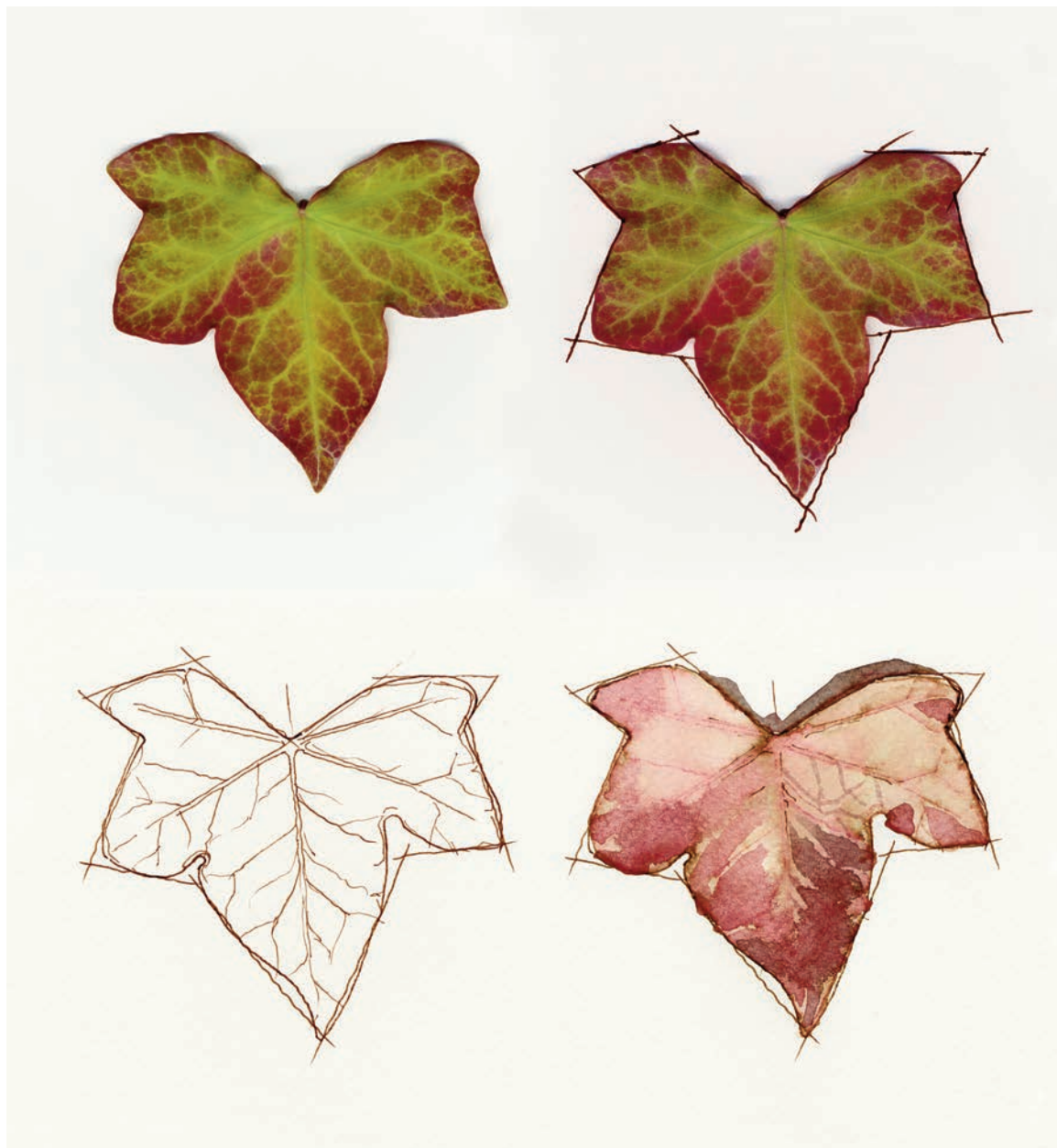
Da questa tecnica deriva il modo di trattare le linee grafiche nei modelli. Infatti, per rappresentare una linea grafica, cioè per costruirne la forma e le proiezioni, si trasforma la linea in un insieme discreto di rette e punti. Nei modelli grafici, in particolare, si usano le tangenti alla curva e i relativi punti di contatto. In tal modo si sostituisce alla curva una spezzata, che approssima la curva stessa e che è facile controllare con gli strumenti sin qui sviluppati.

Anche nei modelli informatici si utilizzano punti e tangenti per controllare la curva: i due processi, tuttavia, si differenziano profondamente. Infatti, nei modelli grafici, la linea è descritta accuratamente solo nei punti prescelti, mentre nel modello informatico la descrizione della linea è continua, punto a punto, anche se, per controllarne l'andamento, si utilizzano solo pochi punti e le relative tangenti. Conviene pertanto esaminare i due modelli, grafico e informatico, separatamente.

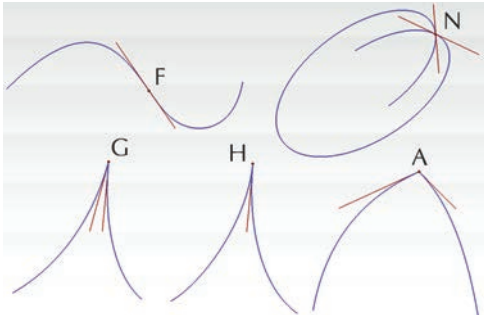
DESCRIZIONE DELLE LINEE CURVE NEI MODELLI GRAFICI

I punti che appartengono alla curva si possono ordinare in tre gruppi:

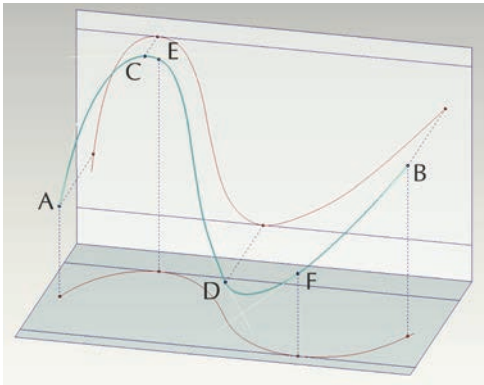
- *punti ordinari*, che sono quelli che non presentano caratteristiche particolari;
- *punti singolari*, nei quali la curva presenta un comportamento particolare rispetto alla tangente;



92. Una linea curva che sfugge, almeno apparentemente, a una legge geometrica, può essere descritta inscrivendola in una spezzata, più facile da controllare.



93. I punti singolari di una linea grafica, con le relative tangenti.



94. I punti notevoli per posizione di una linea grafica.

- *punti notevoli per posizione.*

I punti singolari (fig. 93) sono:

- i *flessi*, nei quali la curva passa con continuità da una parte all'altra della tangente (F);
- le *cuspidi*, punti nei quali la curva ammette due tangenti, distinte (G) o coincidenti (H), e resta esterna all'angolo da loro formato;
- i *nodi*, nei quali la curva passa due o più volte (N);
- i *punti angolosi*, nei quali la curva ammette due tangenti distinte (A), e si mantiene all'interno dell'angolo da loro formato.

I punti notevoli per posizione (fig. 94) sono:

- il punto di inizio (*start point*), come A;
- il punto di arresto (*end point*), come B;
- i punti più alto e più basso, relativamente al piano orizzontale, come C e D; la tangente in questi punti è orizzontale;
- i punti più vicino e più lontano dal piano di proiezione, ove questo venga considerato, come è utile nei ribaltamenti (i punti E ed F, rispettivamente più vicino e più lontano dal secondo piano di proiezione, come anche i già citati C e D); si osservi, in generale, che le tangenti alla curva nei punti più vicino e più lontano dal piano di proiezione sono parallele al piano di proiezione.

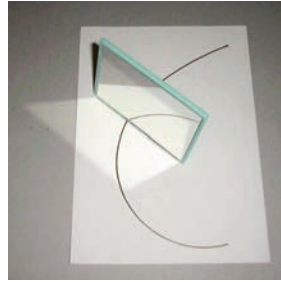
La tangente in un punto qualsiasi della curva può costruirsi con ottima approssimazione con l'ausilio di uno specchietto o, meglio, di una riga specchiata (fig. 95): si appoggia la riga di taglio sul punto e la si ruota fino a quando la curva si salda con continuità alla curva riflessa (fig. 96); la riga, allora, fornisce la normale alla tangente nel punto considerato (figg. 97, 98).

Una volta compiute le suddette operazioni si rappresenta la linea spezzata (fig. 99) e si tracciano infine le proiezioni della curva raccordando, a mano libera, le proiezioni dei punti notevoli, e rispettando l'andamento imposto dalle proiezioni delle tangenti relative.

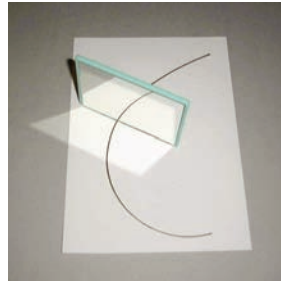
La più comune applicazione del procedimento che abbiamo descritto riguarda la costruzione delle proiezioni del cerchio, che qui viene considerato, appunto, come una semplice linea grafica e senza tenere conto delle sue importanti proprietà geometriche.

È dato un piano, per mezzo di una retta orizzontale o e di una ret-

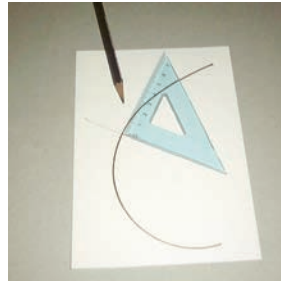
95. Per costruire la tangente in un punto di una curva, con l'aiuto di uno specchietto, si appoggia il filo dello specchio sul punto della curva nel quale si vuole costruire la tangente.



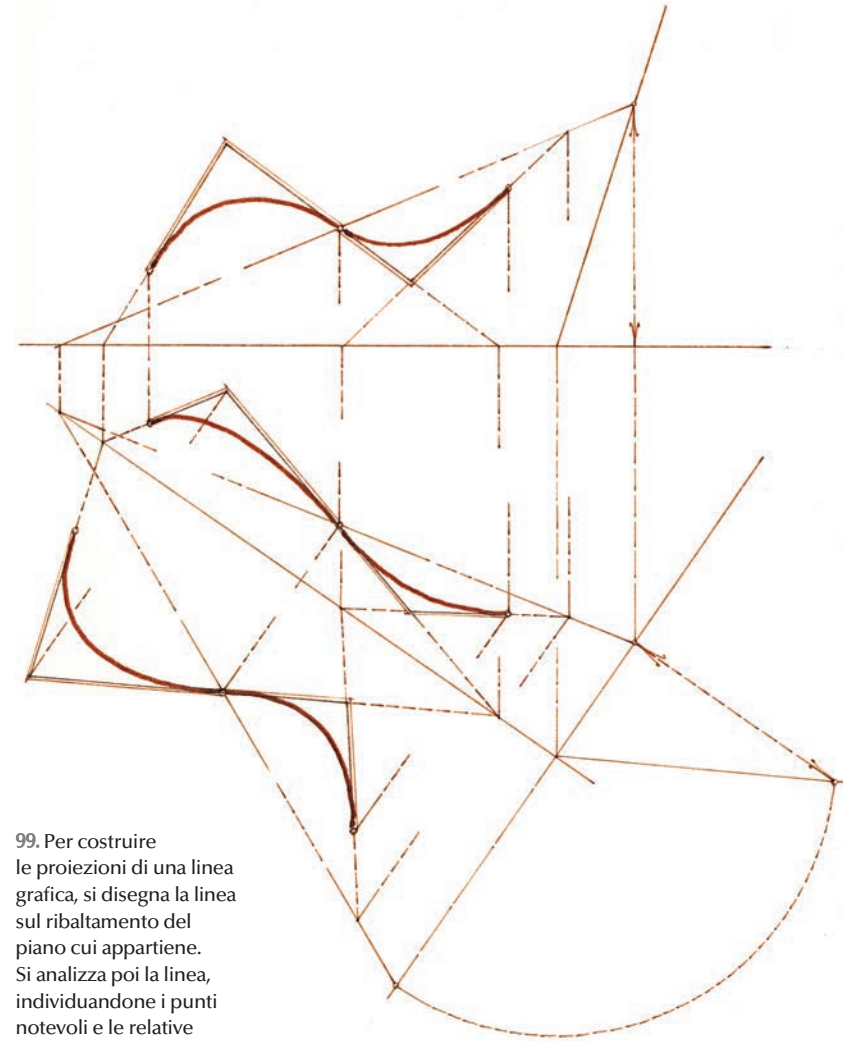
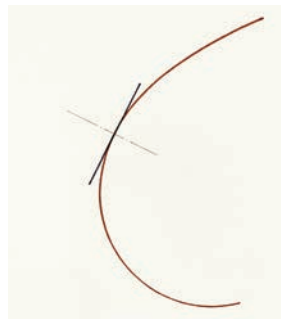
96. Si ruota lo specchio fino a quando la curva riflessa si salda alla curva reale, con continuità; si disegna quindi una retta servendosi del bordo dello specchio come di una riga.



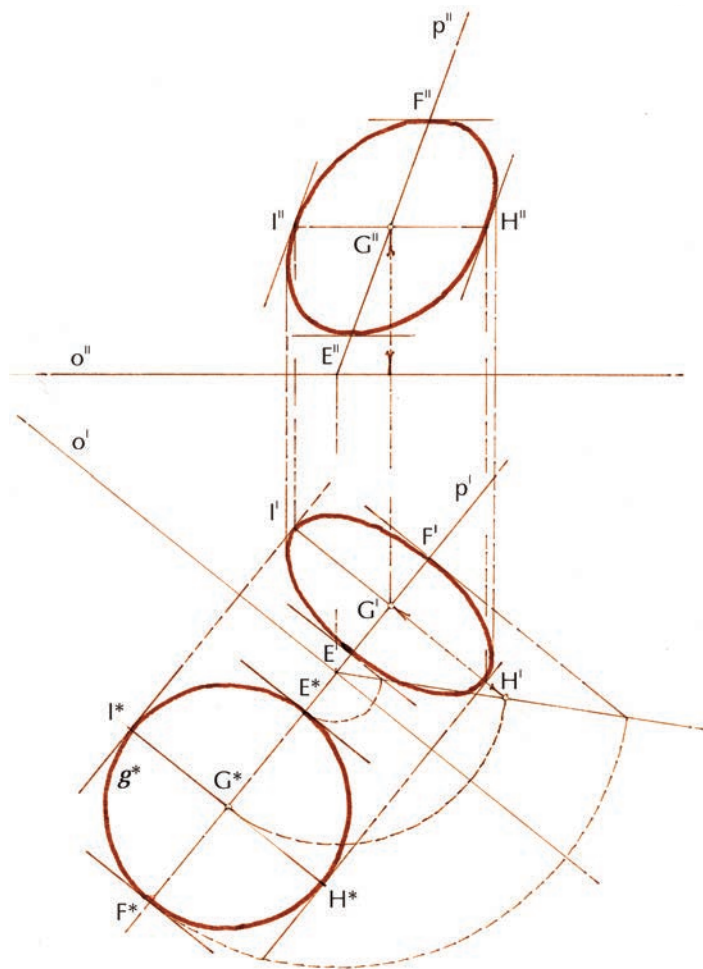
97. Questa retta è la normale alla tangente nel punto considerato.



98. Il procedimento fornisce la tangente con buona approssimazione.



99. Per costruire le proiezioni di una linea grafica, si disegna la linea sul ribaltamento del piano cui appartiene. Si analizza poi la linea, individuandone i punti notevoli e le relative tangenti. Infine si raddrizza il piano. Le proiezioni, prima e seconda, della spezzata costituita dalle tangenti consentono un disegno accurato delle proiezioni della linea grafica.



100. Per costruire le proiezioni di un cerchio, visto come linea grafica, si costruiscono le proiezioni di quattro punti diametralmente opposti e delle relative tangenti.

ta di massima pendenza p (fig. 100). È dato anche un punto G , che appartiene al piano, e la misura r del raggio del cerchio. Si vogliono le proiezioni del cerchio che appartiene al piano, ha centro in G e raggio r .

- Si ribalta il piano sul primo piano di proiezione: il punto G si porta in G^* .

- Con il compasso, si traccia il cerchio g^* , sul ribaltamento del piano.

- Per il centro G^* si conduce quindi una retta perpendicolare alla cerniera del ribaltamento. Questa retta taglia il cerchio g^* in due punti E^* e F^* , che sono, rispettivamente, il ribaltamenti del punto più basso e del punto più alto della curva.

- Si conducono ora le tangenti alla curva nei punti suddetti, che sono ortogonali al raggio e perciò parallele alla cerniera del ribaltamento.

- Per il centro G^* si traccia ora una retta parallela alla cerniera, che taglia il cerchio nei punti H^* e I^* . Le tangenti alla curva in questi punti risultano perpendicolari alla cerniera. Questi quattro punti, con le relative tangenti, sono sufficienti per disegnare le proiezioni della curva.

- Si costruiscono ora le prime e le seconde proiezioni dei punti E , F , G , H , I e delle relative tangenti.

Nell'eseguire la costruzione, secondo i procedimenti noti relativi alla vera forma di una figura piana, occorre prestare attenzione alla simmetria della figura, affinché sia rispettata anche nelle proiezioni. I segmenti EG e GF sono equipollenti, per costruzione, altrettanto deve essere dei segmenti $E'G'$, $G'F'$ e $E''G''$, $G''F''$. Perciò, costruito uno dei punti delle suddette coppie, si può costruire l'altro per simmetria, con il compasso.

Mentre gli esempi di linee luogo geometrico, e delle superfici da esse generate, sono innumerevoli in architettura, le linee grafiche sono presenti nelle decorazioni, ma è raro trovarle come elemento generatore delle grandi massi. Vi è, tuttavia, una eccezione assai interessante: è la curva dell'entasi, cioè la curva che raccorda l'imoscapo al sommoscapo nella sezione rastremata del fusto delle colonne di ordine classico.

Come ben si comprende, questa curva deve essere descritta geometricamente, se si vuole che il progetto possa essere realizzato e che più colonne risultino eguali. I trattatisti hanno perciò studiato e descritto varie costruzioni che forniscono alcuni punti di questa curva. Queste costruzioni, tuttavia, presentano due difetti: in primo luogo sono complesse, perciò soggette a un forte errore grafico; in secondo luogo riducono la curva a un insieme di pochi punti da raccordare o, come oggi si dice, la discretizzano.

Tenendo presente quanto premesso, è più facile intendere il carattere innovativo della costruzione proposta da Pietro Cataneo: “si porrà una riga o regolo piegabile sopra ciascuna delle due linee che serrano la colonna, prima da l’una banda (fig. 101), e poi dall’altra, avvertendo che la grossezza del taglio del regolo venghi tutta dentro la linea; debbesi di poi fissare un chiodo sottile o stiletto di ferro fuor del regolo per sostegno di quello, alquanto più basso della basa o imoscapo della colonna, e un altro chiodo o stiletto si fisserà dentro al detto regolo similmente per suo sostegno al terzo dell’altezza del suo fusto, dove ha da cominciare a diminuire detta colonna, piegando o ricurvando di poi il regolo da capo all’indentro sino al punto e termine di tal diminuzione; si fermerà il terzo chiodo o stile di ferro al regolo dalla banda di fuore alquanto più alto del sommoscapo, e così serà con tre chiodi o stilette fermo e ricurvato il regolo sopra il terzo del fusto. Fuora del qual regolo, di poi operando con la penna, con il piombo o con il lapis da ambedue i lati si verrà a formare la colonna graziosamente diminuita, osservando però tal regola diligentemente ...” (CATANEO 1567, libro V, capitolo XI).

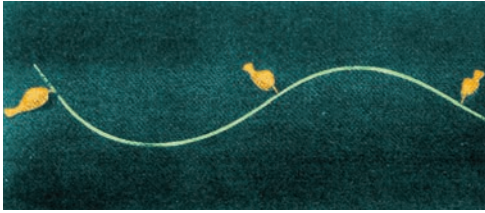
La costruzione suggerita da Cataneo per il cantiere si può benissimo utilizzare per il disegno di progetto o di rilievo. Si può dimostrare, con i metodi della scienza delle costruzioni, che, purché sia piccola la rastremazione, rispetto all’altezza della colonna, la curva sarà sempre la stessa, quale che sia il materiale di cui è fatto il regolo e quale che sia la sua sezione.

DESCRIZIONE DELLE LINEE CURVE NEI MODELLI INFORMATICI

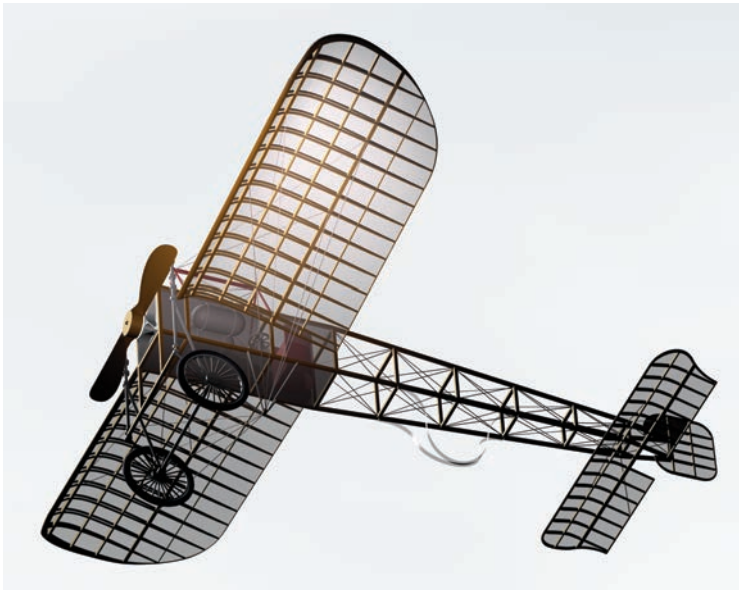
Un problema identico a quello della curva dell’entasi si presenta nella costruzione degli scafi, degli aerei e delle carrozzerie delle

101. La costruzione dell’entasi di Pietro Cataneo: un righello di legno, fisso nel terzo inferiore del profilo, viene spinto nell’estremo superiore, in modo che si fletta, fino a raggiungere il punto voluto. Si segna poi la linea descritta dal righello. Se lo spostamento è piccolo, quale che sia la sezione del righello e il materiale di cui è fatto, la curva non cambia. È il primo esempio di *spline* che si trovi in letteratura.





102. La *spline*, asticella flessibile, bloccata in posizione per mezzo dei *ducks*.



103. L'uso delle *spline* nel modello del monoplano Blériot.

automobili e una identica soluzione è stata utilizzata per controllare queste curve dalla forma libera, fino all'avvento dell'informatica. Le curve, infatti, venivano tracciate raccordando pochi punti con sottili listelli detti *spline*, bloccati con pesi, o *duck*, (fig. 102) o con altri espedienti.

Oggi, invece, il termine *spline* (anche usato come abbreviazione dell'espressione *smooth polyline*) sta a indicare un algoritmo che permette di descrivere matematicamente una curva qualsiasi. Questa soluzione ha numerosi vantaggi: la curva è controllata con grande accuratezza in ogni suo punto; può essere riprodotta esattamente, ingrandita o rimpicciolita a piacere; è possibile infine, come vedremo, descrivere con il medesimo metodo curve, e superfici da esse generate, diversissime, nonché le curve e le superfici luogo geometrico, come caso particolare.

Una *spline* è, in generale, una curva, generata analiticamente, che simula il comportamento di una linea grafica ovvero dei listelli flessibili, usati per disegnare forme "avviate", come quelle degli scafi o degli aeroplani (figg. 103, 104).

La *spline* viene governata da una serie di punti isolati, oppure anche dai vertici di una linea spezzata: questi punti sono detti *poli* o *punti di controllo* (fig. 105).

Indichiamo con n il grado del polinomio che descrive la curva, con p il numero dei punti di controllo e con k l'ordine della curva. Il grado e l'ordine sono legati dalla semplice relazione: $n = k - 1$. Ciò significa, ad esempio, che una *spline* di quinto ordine è descritta da un polinomio di quarto grado.

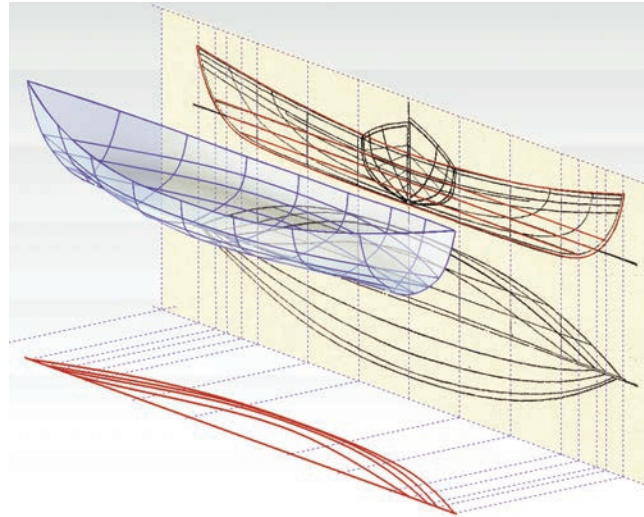
Una *spline* può appartenere ai punti di controllo o semplicemente avvicinarsi ad essi, nel primo caso si dice *curva di interpolazione*, nel secondo *curva di approssimazione*.

Le *spline di interpolazione* che hanno ordine $k = 4$ e sono descritte da polinomi di terzo grado ($n = 3$) si dicono anche *curve polinomiali cubiche*.

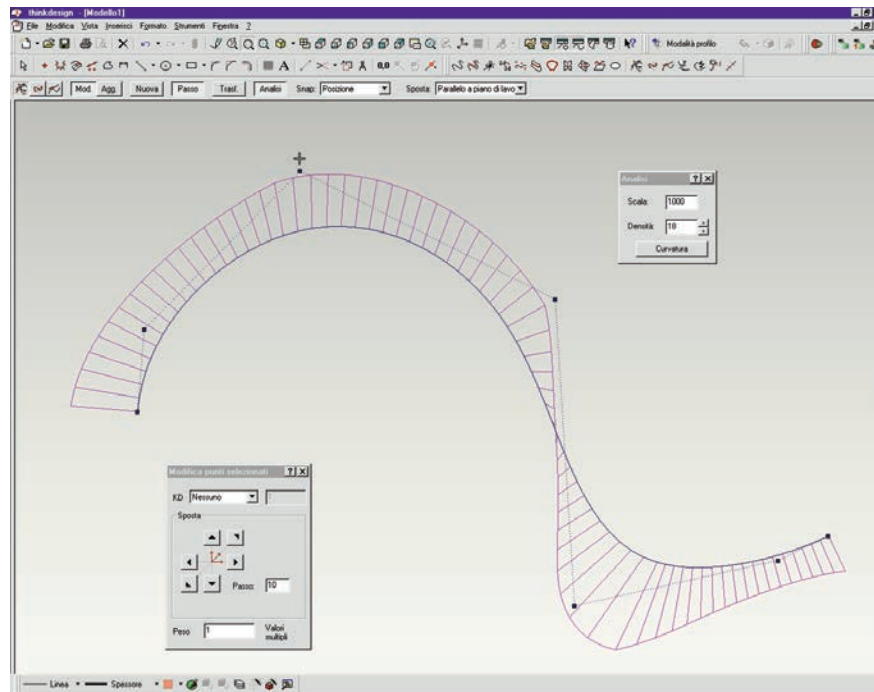
Tutti i modellatori dispongono di comandi per costruire le *spline* cubiche, eventualmente come caso particolare di curve più complesse (come le NURBS, delle quali si dirà tra poco).

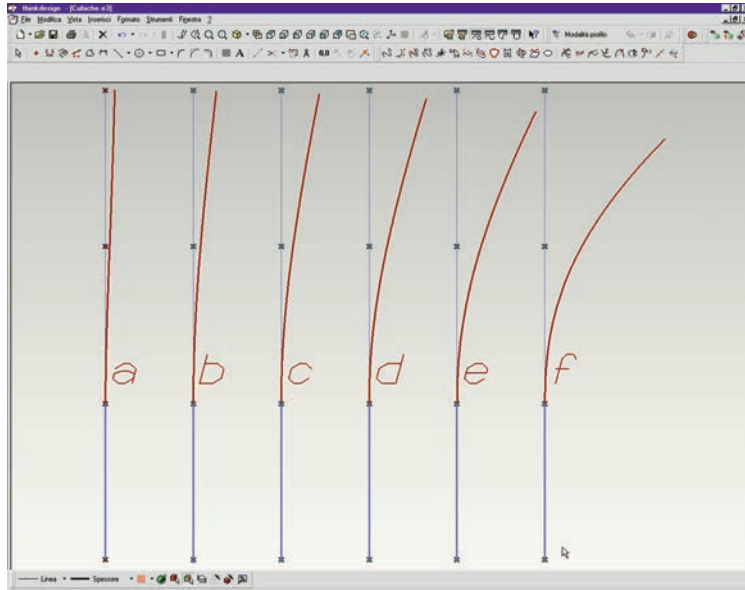
In *thinkDesign*, ponendo il grado del polinomio $n = 3$ e assegnan-

104. L'uso della doppia proiezione ortogonale e delle *spline* nella modellazione di uno scafo.

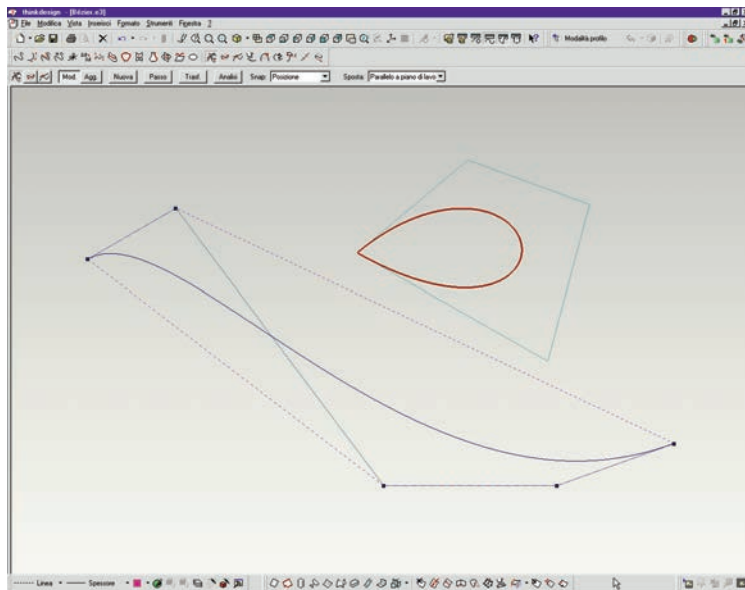


105. Una *spline* e alcuni strumenti di modellazione della curva in *thinkDesign*.





106. Queste curve, che esagerano la genesi dell'éntasi, sono cubiche $n = 3$.



107. Nelle curve di Bézier il grado è uguale al numero dei punti di controllo diminuito di uno: $n = p - 1$.

do quattro punti di controllo, si ottiene una cubica (fig. 106). Se lo spostamento è piccolo, questa curva (vedi *a* in figura) coincide con la linea elastica di una trave incastrata e flessa. Se lo spostamento è grande (vedi *b, c, d*, ecc.) la curva approssima la linea elastica.

Il più noto degli algoritmi di approssimazione è dovuto al matematico francese Pierre Bézier. Una curva di Bézier è una curva di approssimazione che non passa attraverso i punti che interpola (con l'eccezione del primo e dell'ultimo). L'ordine di una curva di Bézier è sempre uguale al numero dei punti di controllo ($k = p$). Conseguentemente, il grado del polinomio che descrive una curva di Bézier è pari a $n = p - 1$, pari, cioè, al numero di punti di controllo, diminuito di uno. Ad esempio, se i punti di controllo sono 6, il grado del polinomio che descrive la curva è 5.

Le curve di Bézier hanno le seguenti proprietà (fig. 107):

- se è aperta, la curva passa per lo *start point* e per l'*end point*; se è chiusa passa solo per il primo e l'ultimo dei punti di controllo, che coincidono;
- le tangenti alla curva nei punti suddetti sono il primo e l'ultimo segmento della spezzata guida;
- la curva giace per intero nell'involucro convesso della spezzata guida, cioè all'interno del poligono convesso che si ottiene "avvolgendo la spezzata con un elastico" (in figura tratteggiato).

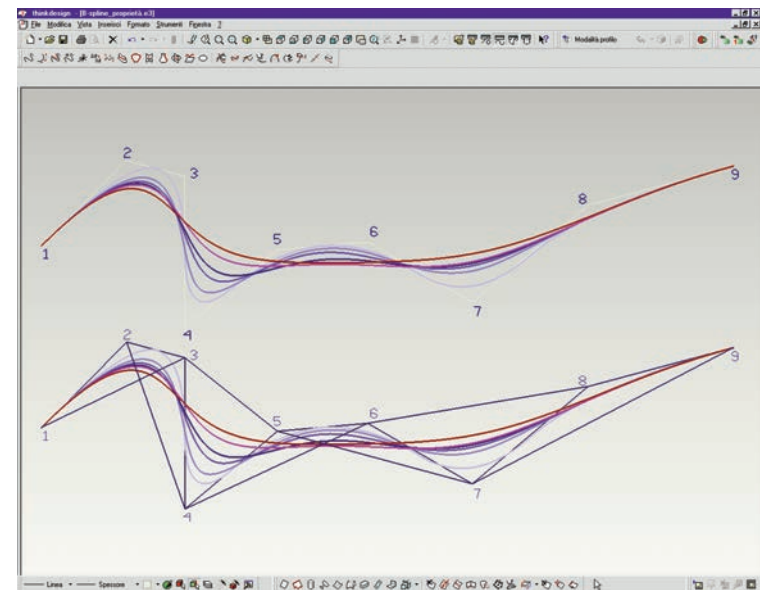
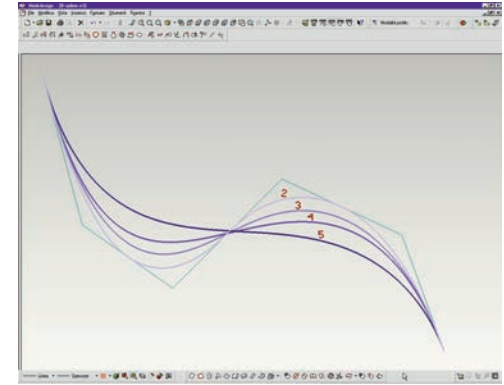
Le *B-spline* sono curve che discendono dalle curve di Bézier, ma sono formate da più tratti o *spans* e hanno ordine k minore o uguale al numero p dei poli: per esempio, data una spezzata con 12 vertici, l'ordine della curva può variare tra 12 e 2. Conseguentemente, il grado della curva può variare tra 11 e 1. Se il grado è 11, la curva è una curva di Bézier, come caso particolare. Se il grado è 1, la curva degenera e coincide con la spezzata di controllo.

Le curve di Bézier sono, dunque, un caso particolare delle *B-spline*.

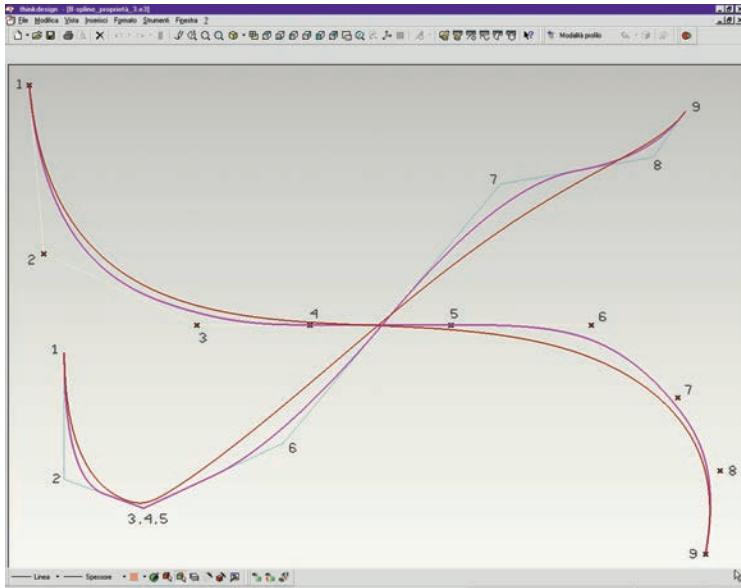
In figura 108 si vede una spezzata con sei vertici che controlla quattro *B-spline*, rispettivamente di grado 2 (in grigio chiaro), 3, 4 e 5 (in blu). La *B-spline* blu di grado 5 è una curva di Bézier.

Riassumiamo qui di seguito le proprietà delle *B-spline* che consentono di modellarle (fig. 109):

108. Nelle *B-spline* il grado può variare tra $p - 1$ e 1.



109. Le *B-spline* giacciono per intero nell'involucro convesso generato dai k vertici contigui della spezzata guida, dove k è l'ordine della curva.



110. La spezzata guida in giallo chiaro possiede nove vertici, quattro dei quali allineati; la *B-spline* viola ha ordine 4, la rossa ordine 7; la *B-spline* viola ha un tratto rettilineo compreso tra i quattro punti di controllo allineati, la rossa, no; la spezzata azzurra, ha tre punti di controllo coincidenti (n. 3, 4, 5); la *spline* viola, di ordine 3, passa per il vertice, spezzandosi; la *spline* rossa, di ordine 7, non passa per il vertice, ma gli si avvicina.

- la *B-spline* è una curva il cui ordine k può essere uguale o minore del numero p dei poli; la curva passa per lo *start point* e per l'*end point*;
- le tangenti alla curva nei punti suddetti sono il primo e l'ultimo segmento della spezzata guida;
- la curva si allontana dai poli tanto più, quanto più è grande il suo ordine k (si veda il primo esempio di *B-spline* dato sopra); quindi, più si desidera smussare la spezzata di controllo, più alto deve essere il grado della curva;
- la curva giace per intero nell'involucro convesso generato dai k vertici contigui della spezzata guida, dove k è l'ordine della curva; ad esempio: se si costruisce una *B-spline* di ordine 3 (in viola, nella figura), controllata dai nove vertici di una spezzata (in giallo chiaro) e si costruiscono i poligoni che hanno per vertici tre punti di controllo successivi della curva, si vede che la *B-spline* è tutta compresa all'interno della figura risultante; una *B-spline* di grado superiore (in rosso), invece, ha un ampio tratto esterno al poligono;
- se la spezzata guida possiede k nodi consecutivi allineati, la curva è rettilinea nel tratto compreso tra quei punti.

La *B-spline* consente il controllo locale della forma: se si cambia un nodo, vengono influenzati k tratti soltanto; viceversa, ogni tratto della curva è influenzato da k punti di controllo; se due o più punti di controllo coincidono, la curva si avvicina al nodo, tanto più, quanto maggiore è il numero dei punti coincidenti; per k nodi coincidenti, la curva passa per il punto di controllo. Ad esempio nella figura 110: la spezzata guida in giallo chiaro possiede nove vertici, quattro dei quali allineati; la *B-spline* viola ha ordine 4, la rossa ordine 7; la *B-spline* viola ha un tratto rettilineo compreso tra i quattro punti di controllo allineati, la rossa, no; la spezzata azzurra, ha tre punti di controllo coincidenti (n. 3, 4, 5); la *spline* viola, di ordine 3, passa per il vertice, spezzandosi; la *spline* rossa, di ordine 7, non passa per il vertice, ma gli si avvicina.

Le NURBS (*Non Uniform Rational B-spline*) sono *B-spline* controllate da punti e da pesi relativi ad ogni punto di controllo.

Le *B-spline* sono dunque un caso particolare delle NURBS, che si verifica quando i pesi dei punti di controllo sono tutti eguali.

Anche le NURBS, come le *B-Spline* sono formate da più archi o *spans*. La continuità tra questi archi è descritta da un numero intero: **con** = 0 sta per continuità posizionale, gli archi sono semplicemente contigui; **con** = 1 sta per continuità tangenziale, gli archi sono contigui e ammettono la medesima tangente nel punto di saldatura; **con** = 2 sta per continuità di curvatura, gli archi sono contigui, ammettono la medesima tangente e hanno la medesima curvatura (il reciproco del raggio) nel punto di saldatura.

I parametri che modellano una NURBS sono dunque:

- il numero **np** dei poli o punti di controllo e il loro peso;
- il numero **na** degli archi o *spans* che compongono la curva;
- la continuità **con** tra gli archi nei punti di saldatura (*knots*);
- il grado della curva, **deg**.

Questi parametri sono legati tra loro dalla relazione:

$$\mathbf{np} = (\mathbf{deg} - \mathbf{con}) \mathbf{na} + \mathbf{con} + 1.$$

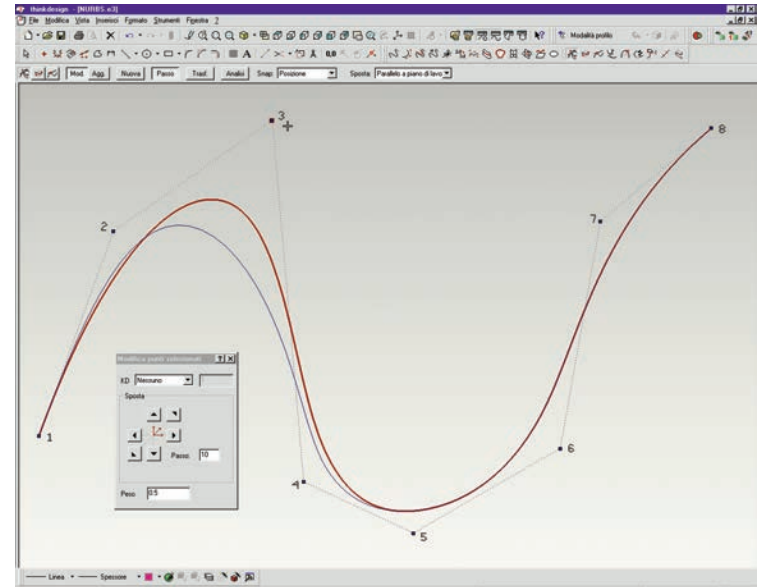
Una caratteristica notevole delle NURBS è la loro capacità di descrivere le coniche esattamente e non per approssimazione, come le altre *spline*.

I modellatori più recenti adottano quasi esclusivamente gli algoritmi NURBS, con i quali sono in grado di modellare un numero amplissimo di linee e superfici curve.

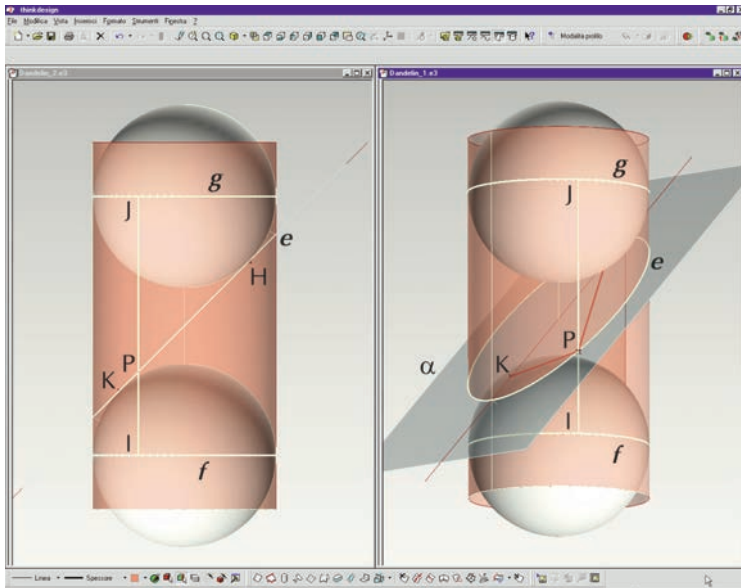
Così, per costruire una NURBS con *thinkDesign*, si utilizzano i comandi generici dedicati alle *spline*. Il software costruisce una NURBS, nella quale tutti i pesi dei punti di controllo sono eguali. È poi possibile modificare questi pesi; ad esempio, in figura 111, nella NURBS rossa è stato modificato il peso del punto 3, portandolo dal valore 1 al valore 0,5: il risultato della trasformazione è la curva blu, che si è allontanata dal punto 3.

Rappresentazione del cerchio come sezione conica

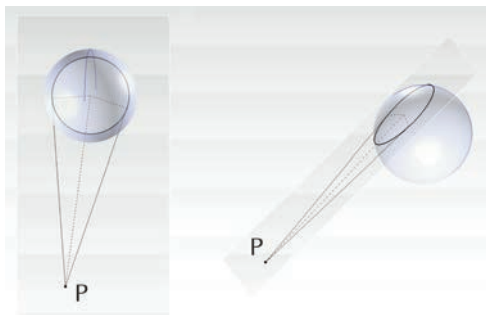
Le curve g' e g'' , prima e seconda proiezione del cerchio g , che abbiamo già costruito come linee grafiche, sono ellissi; così come, in generale, è una ellisse la proiezione parallela di un cerchio ed anche la sezione piana di un cilindro che ammetta tra le sue direttrici un cerchio.



111. Le NURBS sono *spline* nelle quali è possibile variare il peso dei punti di controllo; in questo esempio è stato variato il peso del punto di controllo 3.



112. Questa celebre costruzione, dovuta a Pierre Germain Dandelin, dimostra che tutti i punti dell'ellisse sezione del cilindro hanno costante la somma delle distanze da due punti fissi. Questi punti sono i fuochi dell'ellisse.



113. Se si conducono due tangenti a una sfera, da un qualsiasi punto P dello spazio, i segmenti staccati sulle due rette dal punto P e dai punti di contatto con la superficie della sfera, sono eguali.

IL TEOREMA DI DANDELIN

Vogliamo ora studiare alcune importanti proprietà di questa curva. Ci serviremo, a tale scopo, di una celebre costruzione dovuta a Germain Pierre Dandelin (1783-1842).

Consideriamo dunque un cilindro circolare retto, sezionato da un piano α secondo una ellisse e (fig. 112). Inscriviamo nel cilindro due sfere in modo che siano tangenti al piano α , l'una al di sopra, l'altra al di sotto del piano, e siano K e H i rispettivi punti di contatto. Le due sfere toccano il cilindro secondo due circonferenze f e g , che sono i cerchi massimi delle due sfere appartenenti a piani perpendicolari all'asse del cilindro e, al tempo stesso, direttrici di quest'ultimo.

Stacciamo ora sull'ellisse e un punto qualsiasi P e costruiamo la generatrice del cilindro che passa per questo punto. Questa retta incontra le due circonferenze f e g , rispettivamente, nei punti I e J . Costruiamo infine i segmenti PH , PI , PK , PJ .

Ebbene, la somma dei segmenti PI e PJ è uguale alla lunghezza del segmento IJ ed è costante, quale che sia il punto P , perché le generatrici del cilindro sono tutte parallele e i piani delle direttrici f e g sono pure paralleli.

Le lunghezze dei segmenti PH e PI sono uguali, perché i due segmenti sono entrambi tangenti alla stessa sfera e incidenti nel punto P . Infatti (fig. 113), le due tangenti, incidenti in P , individuano un piano, che seziona la sfera secondo un cerchio. I segmenti staccati sulle tangenti dal punto P e dai punti di contatto, i raggi del cerchio, che passano per i suddetti punti di contatto, e il segmento, che ha per estremi il punto P e il centro del cerchio, formano due triangoli congruenti, come si dimostra facilmente, osservando che sono rettangoli, nei punti di contatto, e hanno due lati eguali: i raggi e il lato in comune.

Per lo stesso motivo sono uguali le lunghezze dei segmenti PK e PJ . Riassumendo:

$$PI + PJ = \text{costante}$$

$$PH = PI; PK = PJ;$$

dunque:

$$PH + PK = \text{costante}.$$

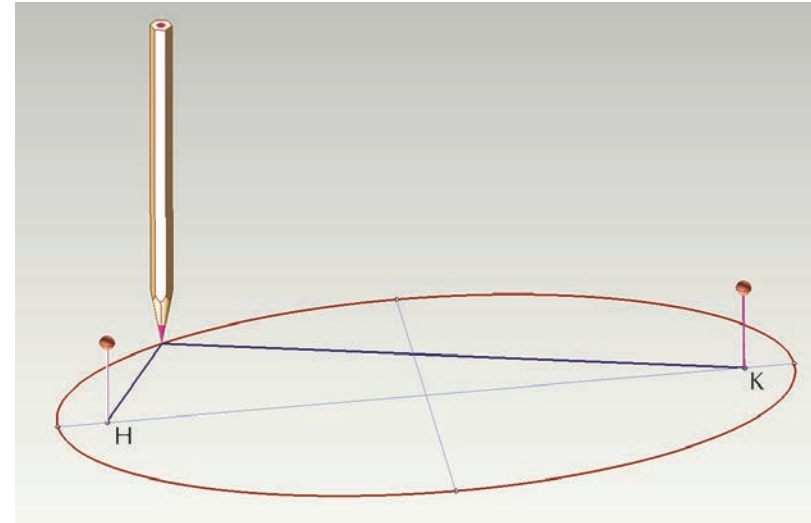
Possiamo perciò affermare che in una ellisse è costante la somma delle distanze di un punto qualsiasi P da due punti fissi K e J . Questi punti sono detti *fuochi* dell'ellisse.

Questa importante proprietà dell'ellisse può essere utilizzata per tracciare la curva, con l'ausilio di un filo (fig. 114): basta fissare i due capi del filo nei fuochi H e K e lasciare scorrere la matita sul foglio mantenendo teso il filo. È questa la nota "costruzione del giardiniere", per l'uso che è possibile farne nel disegno delle aiuole.

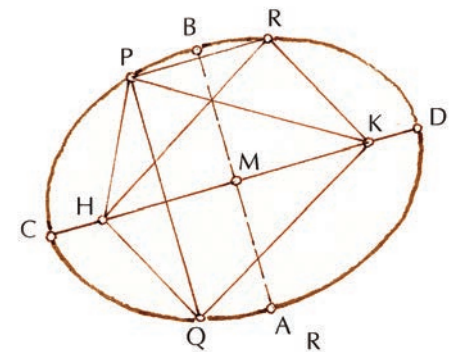
Tuttavia, per applicare effettivamente il suddetto tracciamento alla proiezione parallela del cerchio, occorrono anche altre considerazioni. Bisogna infatti conoscere l'esatta collocazione dei fuochi e la lunghezza della costante IJ , cioè la lunghezza del filo.

Osserviamo, allora (fig. 115), che i fuochi appartengono a una retta che divide la curva in due parti, e la incontra nei punti C e D . Il segmento CD è l'*asse maggiore* dell'ellisse. I punti C e D sono i *vertici* della curva. Il punto medio M dell'asse maggiore è il *centro* dell'ellisse. Il segmento AB che una retta per il centro, ortogonale all'asse maggiore, stacca sulla curva, è l'*asse minore* dell'ellisse.

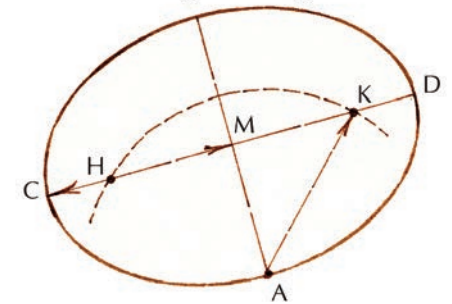
Osserviamo ora che, dato un punto qualsiasi P , sulla curva, si può costruire un triangolo che ha per lati il segmento HK , sotteso dai fuochi, e i segmenti PH e PK . È anche possibile costruire due triangoli congruenti a questo, l'uno dalla parte opposta dell'asse maggiore, l'altro dalla parte opposta dell'asse minore. Questi due triangoli conducono ad altrettanti punti della curva: il primo (Q) simmetrico di P rispetto all'asse maggiore; il secondo (R) simmetrico di P rispetto all'asse minore. Gli assi dell'ellisse sono dunque *assi di simmetria ortogonale* della curva. Ciò significa che, dati gli assi e un punto qualsiasi P della curva, è possibile costruire altri due punti (Q e R) come segue. Dal punto P si traccia una perpendicolare all'asse minore, prolungandola al di là del piede; su questa perpendicolare si stacca, dalla parte opposta di P e a partire dal piede, un segmento uguale alla distanza di P dall'asse: questo segmento appartiene alla curva. Analogamente si procede sulla perpendicolare per P all'asse maggiore: anche in questo caso il punto simmetrico di P , rispetto all'asse maggiore, appartiene alla curva.

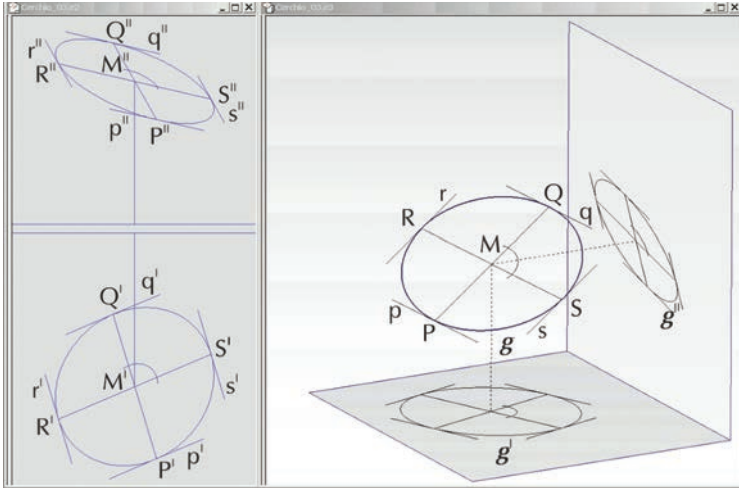


114. L'ellisse si può tracciare con un filo fissato nei fuochi e teso dalla punta della matita; la lunghezza del filo è pari alla lunghezza dell'asse maggiore.



115. L'ellisse ha due assi di simmetria ortogonale; l'arco che ha centro in uno degli estremi dell'asse minore e raggio pari alla metà dell'asse maggiore, taglia quest'ultimo nei fuochi della curva.





116. Le coppie di diametri ortogonali del cerchio si trasformano, nella proiezione parallela, in coppie di diametri coniugati dell'ellisse proiezione.

Si consideri, ora, uno dei vertici dell'ellisse, ad esempio C . La somma delle distanze di questo punto dai fuochi vale $CH + CK$, dove CK è uguale a $CH + HK$. La costante vale, dunque: $CH + CH + HK$. Ma il segmento CH è uguale al segmento KD , per simmetria, e dunque la suddetta costante vale: $CH + HK + KD$.

In sintesi: la somma delle distanze di un qualsiasi punto P dell'ellisse dai fuochi è pari alla lunghezza dell'asse maggiore.

Questa ultima osservazione consente di costruire i fuochi dell'ellisse, noti che siano gli assi: basterà aprire il compasso a un raggio pari al semiasse maggiore, puntarlo in A (o in B) e tagliare con un arco l'asse maggiore, nei punti H e K . Evidentemente, la somma delle distanze di H e K da A (o da B) è pari alla lunghezza dell'asse maggiore.

RELAZIONE FRA CERCHIO ED ELLISSE

Consideriamo ora un piano α in posizione generica (fig. 116) e, su di esso, un cerchio g , di centro M . Per costruire le proiezioni ortogonali g' e g'' del cerchio g tracciamo due diametri del cerchio qualsiasi, tra loro ortogonali: PQ e RS . Osserviamo che le tangenti al cerchio negli estremi di ciascun diametro (p, q, r, s) sono parallele all'altro (infatti le tangenti nei punti di un cerchio sono ortogonali al raggio): $p, q \parallel RS$; $r, s \parallel PQ$.

Costruiamo ora le proiezioni dei due diametri suddetti e delle relative tangenti, come abbiamo già fatto trattando il cerchio come linea grafica.

Abbiamo già osservato che la proiezione parallela conserva il parallelismo e l'equipollenza dei segmenti, mentre non conserva le proprietà metriche. Perciò:

- le proiezioni delle tangenti sono parallele alle omonime proiezioni del diametro opposto: $p', q' \parallel R'S'$; $r', s' \parallel P'Q'$; ecc.;
- i semidiametri del cerchio si proiettano nei semidiametri dell'ellisse: $P'M' = M'Q'$; $R'M' = M'S'$; ecc.;
- l'angolo formato dai diametri non è più retto, ma ha subito lo scorcio che caratterizza la proiezione di figure in posizione generica.

In sintesi: i diametri di una ellisse, che risultano dalla proiezione di una coppia di diametri ortogonali del cerchio, si dicono *diametri*

coniugati poiché le tangenti alla curva, negli estremi dell'uno, sono parallele all'altro.

I diametri coniugati sono *assi di simmetria obliqua* dell'ellisse. Infatti, ad ogni punto della curva ne corrisponde uno che si trova dalla parte opposta del diametro considerato, ad una uguale distanza, sulla retta che passa per il punto ed è parallela al diametro coniugato (figg. 117, 118). Si verifica facilmente che questa proprietà non è altro che una trasformazione proiettiva per proiezione parallela della analoga proprietà del cerchio, dove però, la simmetria è ortogonale.

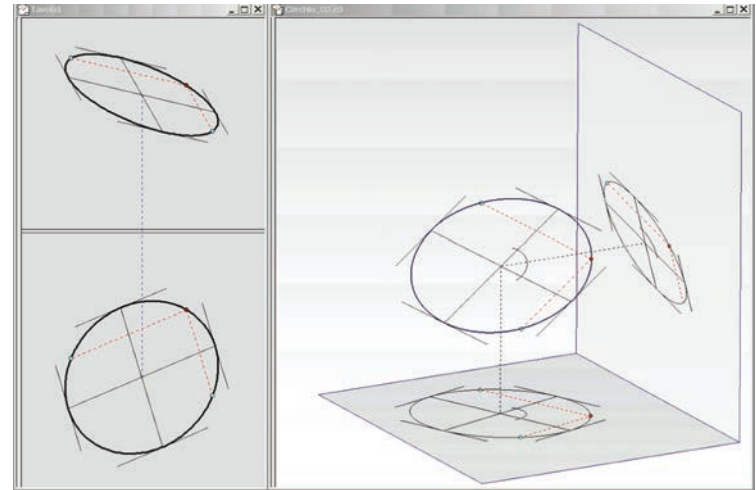
Dal punto di vista grafico, i diametri coniugati costituiscono un ottimo ausilio al tracciamento della figura, ma non consentono di ritrovarne i fuochi.

Per costruire i fuochi, occorre trovare gli assi dell'ellisse, vale a dire, quella particolare coppia di diametri coniugati che sono anche ortogonali, come abbiamo visto poc'anzi.

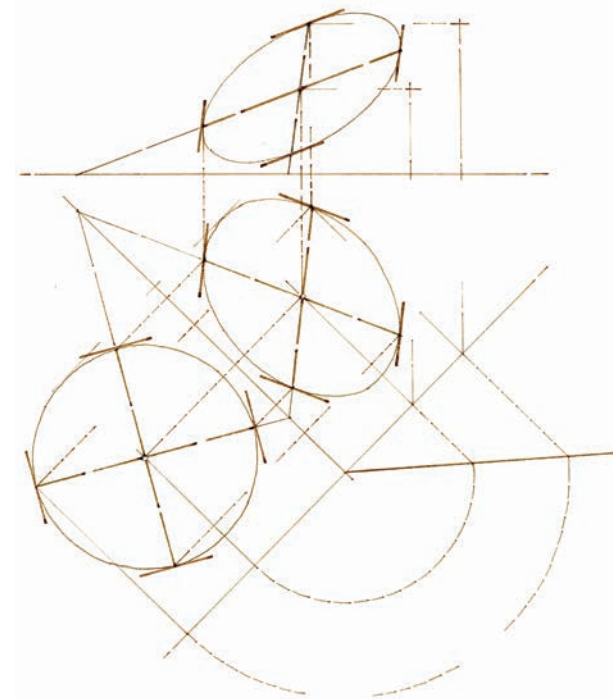
Si possono, a questo fine, seguire due vie. La prima consiste nel ricercare sul cerchio da proiettare quale sia quella coppia di diametri ortogonali che si trasforma, per proiezione parallela, negli assi dell'ellisse proiezione: in una proiezione ortogonale, questa coppia è costituita dal diametro parallelo al piano di proiezione e dal suo coniugato. La seconda consiste nel ricavare direttamente gli assi dai diametri coniugati mediante una costruzione appropriata. Vediamo come.

Prima via. L'asse maggiore di una ellisse è il diametro di maggiore lunghezza; dunque il diametro del cerchio che, in una proiezione ortogonale, si proietta nell'asse maggiore dell'ellisse proiezione è il diametro che subisce il minimo scorcio, perciò quello parallelo al piano di proiezione. Il diametro del cerchio che si proietta, invece, nell'asse minore è il coniugato, cioè il diametro ortogonale al primo.

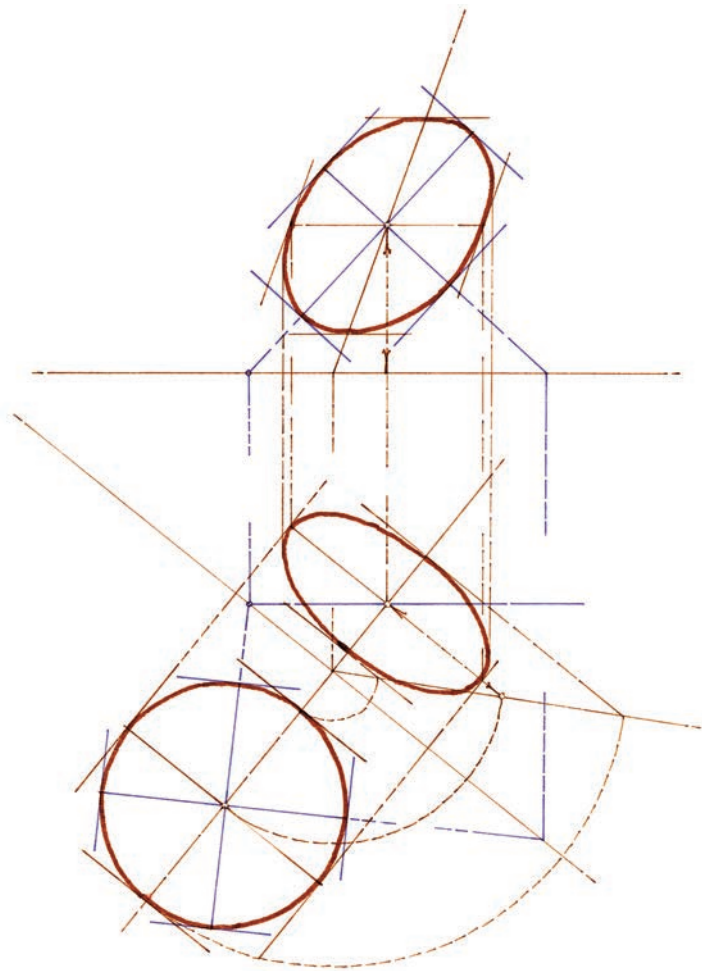
Di conseguenza, per ottenere gli assi dell'ellisse prima proiezione si debbono considerare il diametro orizzontale del cerchio e il suo coniugato, che gli è ortogonale e perciò disposto lungo la linea di massima pendenza del piano cui il cerchio da proiettare appartiene. Se si opera sul ribaltamento del piano, ciò significa con-



117. I diametri coniugati dell'ellisse sono assi di simmetria obliqua.



118. Una coppia di diametri ortogonali del cerchio si trasforma, nella proiezione parallela, in una coppia di diametri coniugati dell'ellisse proiezione.



119. Il diametro del cerchio che è parallelo al piano di proiezione si trasforma, nella proiezione ortogonale, nell'asse maggiore dell'ellisse proiezione. Il suo coniugato, nell'asse minore.

siderare il diametro parallelo alla cerniera, che è, appunto, una retta orizzontale del piano, e il suo coniugato (fig. 119).

Per ottenere gli assi dell'ellisse seconda proiezione si debbono considerare il diametro frontale del cerchio e il suo coniugato, che gli è ortogonale. Se si opera sul ribaltamento del piano, ciò significa considerare il diametro parallelo al ribaltamento della frontale e il suo coniugato.

Seconda via. Data una coppia $P^I Q^I$ e $R^I S^I$ di diametri coniugati, incidenti in M^I , di una ellisse e , è possibile costruirne gli assi per mezzo del seguente procedimento grafico (fig. 120):

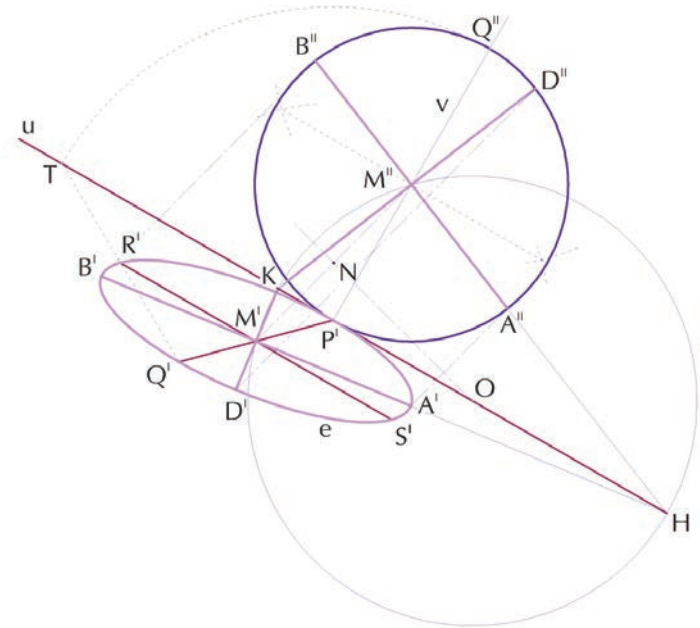
- si traccia per uno degli estremi di un diametro, ad esempio P^I , una retta u parallela al coniugato;
- si costruisce la perpendicolare v a u nel punto P^I ;
- si costruisce la retta $Q^I R^I$, fino a incontrare la retta u in T ;
- con centro in P^I si traccia l'arco di raggio $P^I T$, fino a incontrare v in Q^II ;
- si trova il punto medio M^II di $P^I Q^II$ e si traccia il cerchio di raggio $M^II Q^II = M^II P^I$;
- si costruisce la retta $M^II M^I$ e se ne trova il punto medio N ;
- si traccia la perpendicolare in N a $M^II M^I$ fino a incontrare u nel punto O ;
- con centro in O , si traccia il cerchio di raggio $OM^II = OM^I$;
- detto cerchio incontra u nei punti H e K ;
- si tracciano le rette $M^II H$, $M^II K$: gli assi dell'ellisse appartengono a queste rette;
- per costruire gli estremi degli assi si tracciano le rette $M^II H$ e $M^II K$, che tagliano il cerchio di centro M^II nei punti A^II , B^II , C^II , D^II ;
- per i punti suddetti si conducono le parallele alla retta $M^II M^II$, che staccano sulle rette $M^II H$ e $M^II K$ gli estremi degli assi: A^I , B^I , C^I , D^I .

Questa costruzione può apparire complessa, ma non lo è affatto; basta comprenderne appieno la giustificazione geometrica. Le prime operazioni mirano a costruire una relazione di affinità tra l'ellisse e un cerchio, che ha centro in M^II , dal quale si immagina l'ellisse derivi per proiezione. Questa affinità è in tutto analoga a quella che abbiamo già utilizzato per risolvere i problemi di vera forma, con la differenza che le rette che allineano punti corrispon-

denti non sono qui perpendicolari all'asse ma oblique: si tratta, appunto, di una affinità obliqua.

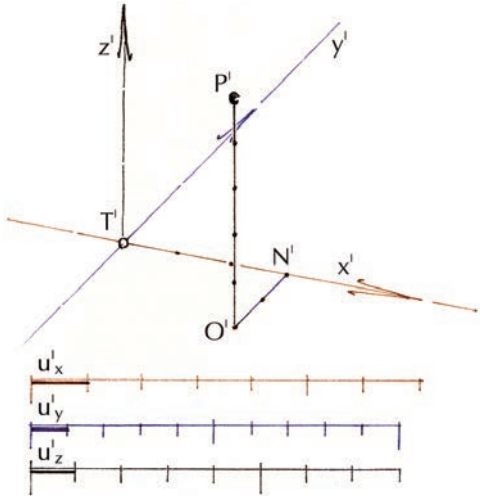
Le operazioni successive mirano, invece, a ritrovare quella coppia di diametri ortogonali del cerchio che si trasformi, nella affinità, in una coppia di diametri ortogonali dell'ellisse. Il cerchio di centro O fornisce appunto queste due coppie.

Questa costruzione può tornare utile anche nei modelli informatici, perché i programmi di modellazione non sempre forniscono un comando idoneo. In alternativa è possibile staccare sulla curva cinque punti in corrispondenza ai valori $0 - 0,25 - 0,50 - 0,75 - 1$ del parametro u . L'ultimo punto coincide con il primo, tutti staccano sulla curva gli estremi degli assi maggiore e minore.

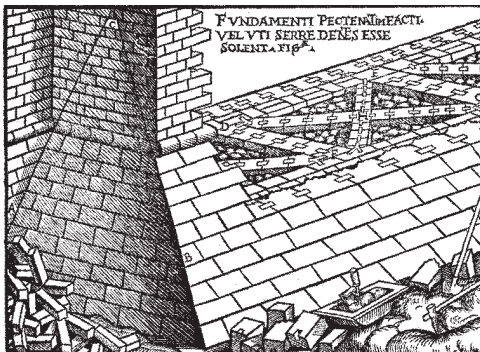


120. Per costruire gli assi di un'ellisse, della quale siano dati i diametri coniugati, basta istituire un'affinità tra l'ellisse stessa e il cerchio che la genera per proiezione parallela. Questa costruzione torna utilissima anche nei modelli informatici.

Modelli ottenuti per proiezione parallela: l'assonometria



121. Il più semplice modello assonometrico discende dalla applicazione grafica della rappresentazione cartesiana di un punto.



122. L'assonometria, costruita intuitivamente, di una struttura di fondazione in una xilografia tratta dal Vitruvio di Cesariano (1521).

Come abbiamo avuto modo di osservare, il modello informatico propone automaticamente un gran numero di viste dell'oggetto che, insieme o in rapida successione, lo descrivono compiutamente. Queste viste sono generalmente prodotte collocando idealmente il piano di proiezione, cioè lo schermo del computer, in posizione obliqua rispetto all'oggetto e alla terna di assi cartesiani di riferimento.

Ci interessa, ora, ottenere un simile risultato con i semplici mezzi del disegno.

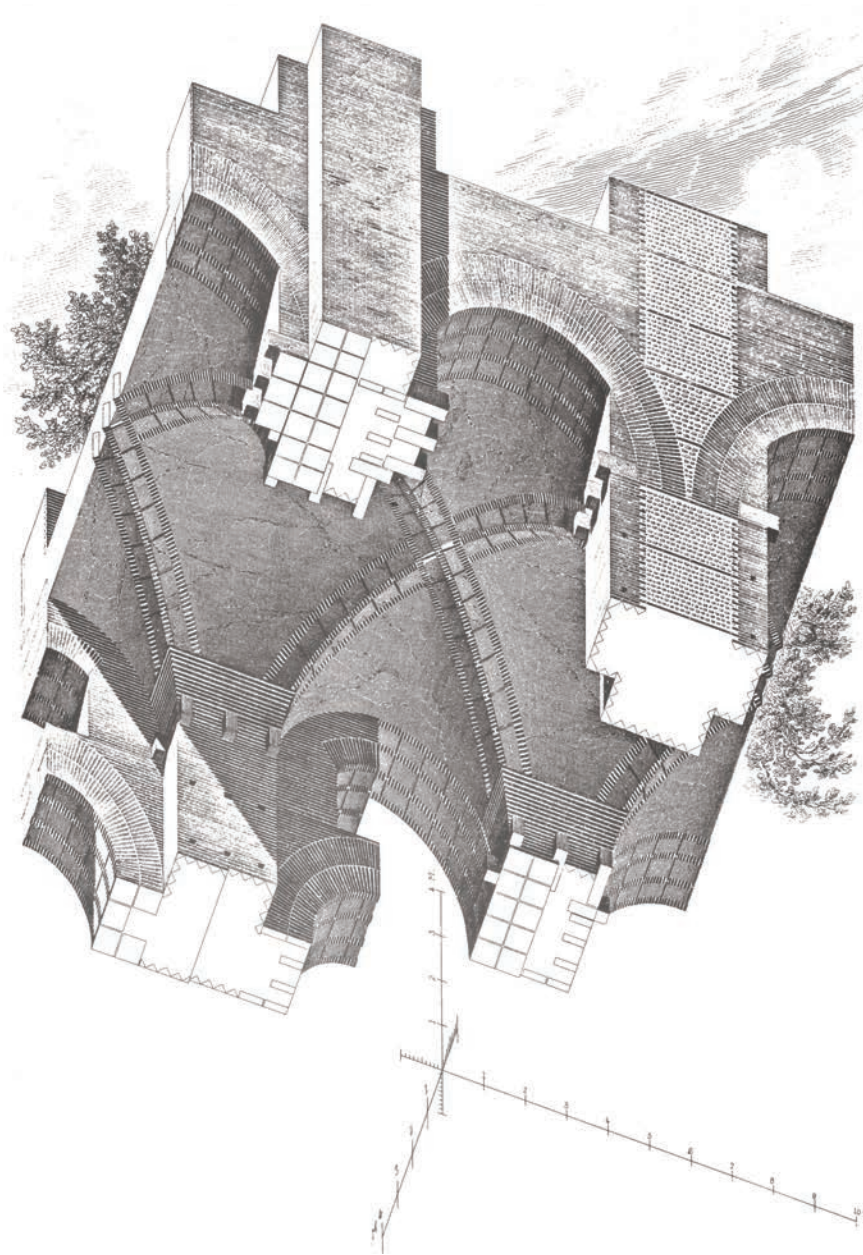
La conservazione del parallelismo nelle proiezioni parallele suggerisce un metodo assai efficace per costruire questa proiezione. Basta, infatti, rappresentare la terna di assi cartesiani (x, y, z) e riferire a essi la posizione dei punti dello spazio.

Consideriamo ad esempio il punto P di coordinate $3, -2, 5$. Se la proiezione della terna cartesiana è $T'(x', y', z')$ e u'_x, u'_y, u'_z sono le rispettive unità di misura assonometriche, per ottenere la proiezione P' di P si procederà come segue (fig. 121):

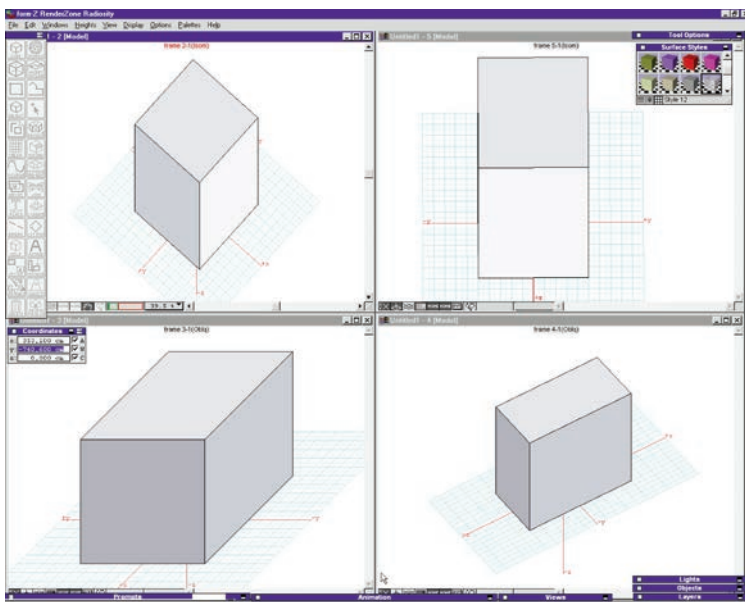
- si stacca su x' un segmento di lunghezza 3, riportando tre volte l'unità di misura u'_x dall'origine T' fino al punto N' ;
- si conduce per N' una parallela a y' e si stacca su di essa il segmento $N'O'$, riportando due volte, su y' , l'unità di misura u'_y nel verso indicato dal segno meno;
- si conduce per O' una parallela a z' e si stacca su di essa il segmento $O'P'$ riportando cinque volte, su z' , l'unità di misura u'_z .

La sequenza dei tre segmenti, di lunghezza rispettivamente uguale alle coordinate del punto P , misurate con le rispettive unità, si dice *spezzata costruttrice* del punto.

Questo procedimento, che in generale si può accreditare ai matematici francesi del Seicento e, in particolare, a Girard Desargues, che per primo lo applicò alla prospettiva, fu ampiamente usato in una forma intuitiva sin dal Rinascimento (fig. 122), ma fu proposto,



123. Aguste Choisy non usava scorciare la proiezione nel modello assonometrico, come si può notare osservando le scale riportate in basso: questa assonometria militare, tratta da *L'art de bâtir chez les romains* (Paris, 1873), mostra un sistema voltato osservato al Palatino.



124. Alcuni software permettono di generare viste assonometriche oblique, tuttavia la presenza di vistose deformazioni apparenti non ne giustifica l'uso nell'ambiente informatico.

come metodo di rappresentazione, soltanto nel primo Ottocento da Sir William Farish, che lo chiamò *Isometrical Perspective* (Prospettiva isometrica). Il nome inglese è rimasto (*Isometric View*), mentre in italiano si preferisce usare, in generale, il termine di *assonometria*, cioè di modello nel quale le misure si applicano e si leggono lungo gli assi.

La costruzione grafica dell'assonometria si riduce a determinare le proiezioni, x^l, y^l, z^l , degli assi della terna principale di riferimento (x, y, z) , nonché le proiezioni u_x^l, u_y^l, u_z^l delle unità di misura $u_x = u_y = u_z$ della terna oggettiva.

A questo riguardo, possono darsi due casi, che comportano diversi metodi di impostazione del disegno:

- la direzione di proiezione è perpendicolare al piano di proiezione π^l , come avviene appunto nel modello informatico, la rappresentazione si dice allora *assonometria ortogonale*;
- la direzione di proiezione è obliqua rispetto al piano di proiezione π^l , la rappresentazione si dice allora *assonometria obliqua*.

La modellazione informatica ripropone, nelle sue viste, la tecnica e le caratteristiche proiettive della assonometria ortogonale. Nel CAD, infatti, i punti dello spazio hanno una rappresentazione squisitamente numerica e tutte le rappresentazioni comunemente usate sono proiezioni parallele ortogonali.

Le applicazioni CAD non dispongono invece, in genere, di una vista assonometrica obliqua, infatti quest'ultima è utile nelle applicazioni grafiche, per la sua semplicità esecutiva, ma non offre una immagine dell'oggetto confrontabile non la percezione naturale; si tratta piuttosto di una vista convenzionale, non priva di deformazioni apparenti.

Tuttavia, alcuni programmi hanno strumenti software in grado di generare anche queste viste (fig. 124).

L'assonometria ortogonale

Consideriamo un piano di proiezione assonometrica π^l e disponiamo, al di là del piano, una terna cartesiana di riferimento $T(x, y, z)$ in modo che gli assi siano tutti incidenti il piano di proiezione,

ammettendo che possano formare, con il piano stesso, tre angoli qualsiasi Φ , Θ e Ψ (leggi *fi*, *teta* e *psi*).

I tre assi (fig. 125) intersecano il piano di proiezione π^l in tre punti T'_x , T'_y , T'_z che sono detti *tracce degli assi*.

Gli assi individuano, a coppie, i tre piani coordinati xy , xz , yz . Le rette intersezione di questi tre piani con il piano di proiezione – t'_{xy} , t'_{xz} , t'_{yz} – si chiamano *tracce dei piani coordinati*.

Le tracce dei piani coordinati si incontrano nei punti T'_x , T'_y , T'_z che sono vertici del *triangolo delle tracce*. Il triangolo delle tracce è sempre acutangolo.

Il teorema di Shlömilch afferma che: *la proiezione T' , dell'origine T della terna triortogonale di riferimento, è l'ortocentro del triangolo delle tracce.*

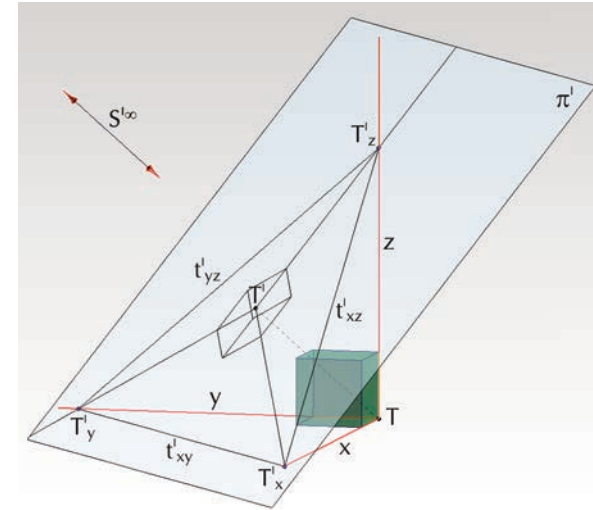
Ricordiamo che l'ortocentro di un triangolo è il punto in cui si intersecano le altezze.

Il teorema si dimostra facilmente osservando che ogni asse coordinato è, per costruzione, perpendicolare al piano individuato dagli altri due. Ma noi abbiamo già dimostrato che, in una proiezione parallela ortogonale, la proiezione di una retta perpendicolare a un piano è ortogonale alla proiezione delle rette del piano che sono parallele al piano di proiezione. Perciò, se x è perpendicolare al piano yz , x^l sarà ortogonale alla proiezione di una qualsiasi retta del piano yz parallela al piano di proiezione π^l . Orbene, la traccia assonometrica t'_{yz} si trova appunto in questa condizione, perché appartiene al piano di proiezione. Inoltre la proiezione x^l dell'asse x appartiene alla traccia assonometrica T'_x dell'asse medesimo e, dunque, è una delle altezze del triangolo delle tracce. Lo stesso ragionamento si applica agli altri due assi, dimostrando il teorema.

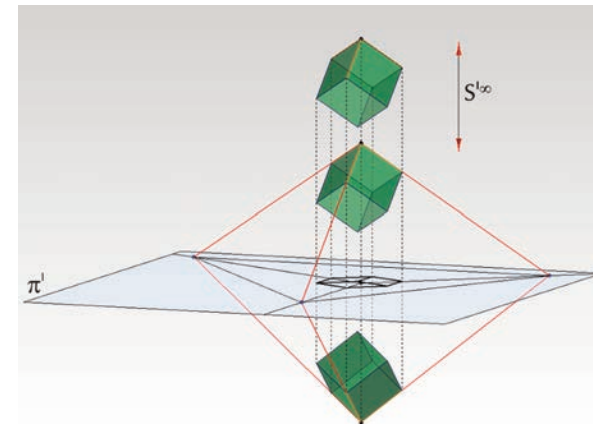
Osserviamo infine (fig. 126) che, se si trascura l'orientamento della terna di riferimento (regola della mano sinistra), vi sono almeno due infinità di posizioni reciproche della terna stessa, dell'oggetto e del piano di proiezione π^l che danno luogo alla medesima proiezione.

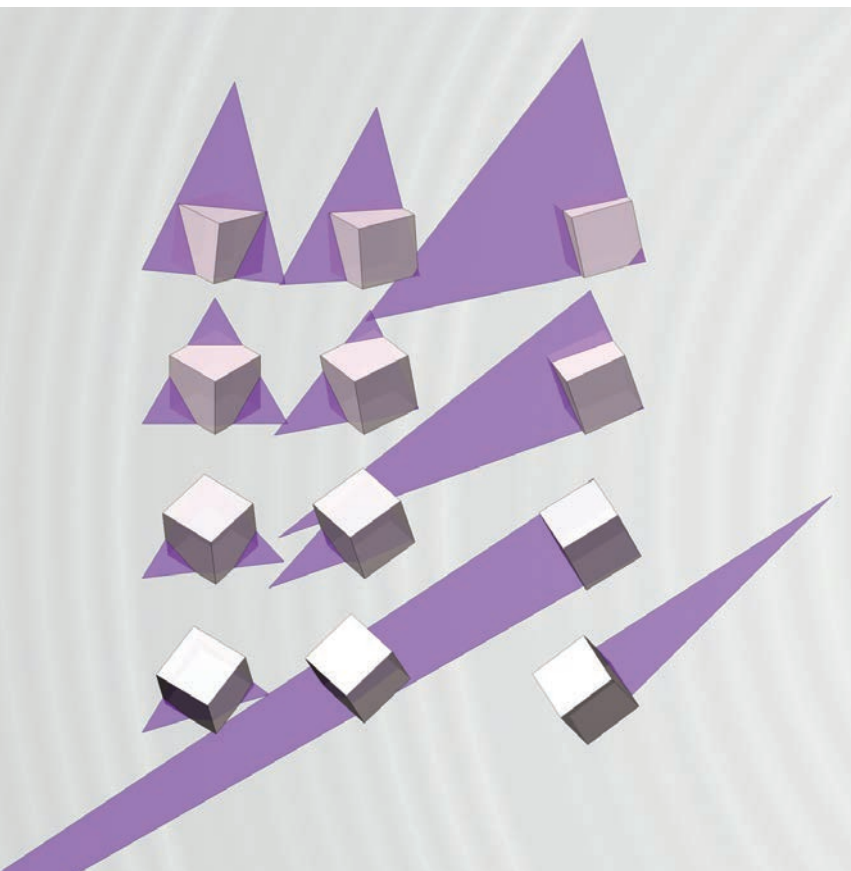
Infatti, se si riflette la terna triortogonale di riferimento dalla parte opposta del piano di proiezione, si ottiene una proiezione asso-

125. Il teorema di Shlömilch afferma che la proiezione T' , dell'origine T della terna triortogonale di riferimento, è l'ortocentro del triangolo delle tracce.



126. Se si trascura l'orientamento orario o antiorario della terna di riferimento, vi sono almeno due infinità di posizioni reciproche della terna stessa e del piano di proiezione π^l che danno luogo alla medesima proiezione.





127. Il triangolo delle tracce è sempre acutangolo, ma può assumere forme assai diverse, in funzione dello scorcio desiderato.

nometrica x' , y' , z' che coincide con quella della terna originaria. Inoltre, se si trasla l'oggetto rappresentato (un cubo, nella figura) lungo la direzione di proiezione, la proiezione dello stesso non cambia e, poiché infinite sono le posizioni che l'oggetto può assumere nella traslazione, sia che sia riferito all'una sia che sia riferito all'altra delle due terne, simmetriche rispetto al piano di proiezione, due sono le infinite di posizioni che danno luogo alla medesima proiezione.

IMPOSTAZIONE DIRETTA DELLA ASSONOMETRIA ORTOGONALE

Sul teorema di Shlömilch si fonda il seguente procedimento per l'impostazione diretta del modello assonometrico ortogonale.

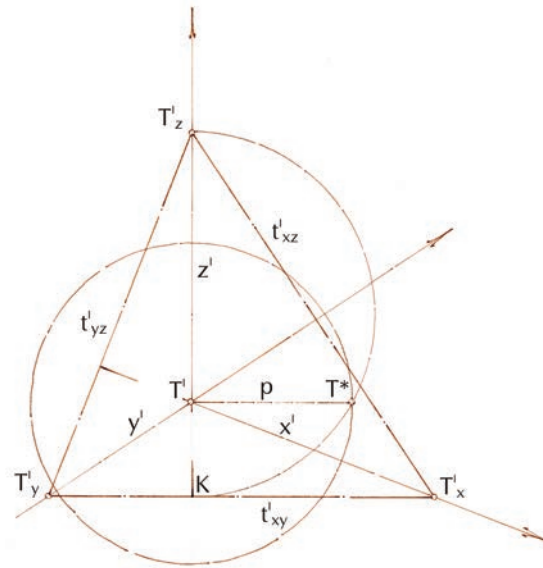
In primo luogo si assegnano le proiezioni dei tre assi (x' , y' , z') secondo lo scorcio che si vuole ottenere (figg. 127, 128), con un'unica condizione da rispettare: tali proiezioni debbono formare angoli maggiori di un angolo retto, affinché il triangolo delle tracce risulti acutangolo.

Si disegna la traccia di uno qualsiasi dei piani coordinati, per esempio t'_{xy} , in modo che sia ortogonale alla proiezione (in questo caso z') dell'asse opposto. La traccia così disegnata interseca le proiezioni degli assi relativi nelle rispettive tracce assonometriche (in questo caso t'_{xy} incontra x' nel punto T'_x e y' nel punto T'_y).

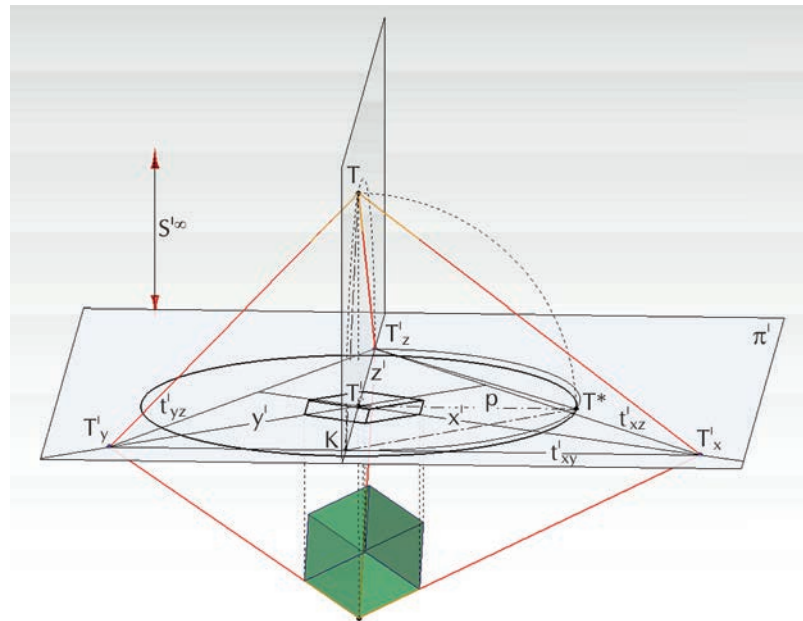
Si disegnano poi le tracce degli altri due piani coordinati, ortogonali alle proiezioni degli assi opposti, e si completa, in questo modo, il triangolo delle tracce.

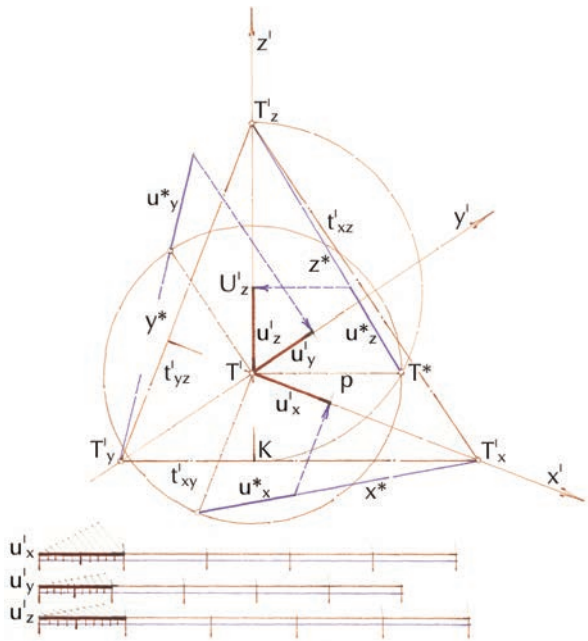
Il triangolo delle tracce determina la distanza dell'origine T dal piano di proiezione. Per misurare il segmento TT' , si ribalta il piano proiettante uno degli assi coordinati: ad esempio l'asse z (fig. 129). La cerniera del ribaltamento è la stessa proiezione z' dell'asse. Il piano proiettante l'asse z taglia la traccia t'_{xy} del piano coordinato opposto, nel punto K . A ribaltamento avvenuto l'origine T oggettiva si porta in T^* sulla perpendicolare p a z' nel punto T' , costruita da una parte o dall'altra della cerniera, indifferentemente, secondo il verso di rotazione del piano proiettante. Per costruire il punto T^* , si osserva che il triangolo T'_zTK è rettangolo in T . Altrettanto deve essere, dunque, per il triangolo T'_zT^*K . Per costruire T^* basta tracciare una semicirconferenza che abbia per diametro il seg-

128. Impostazione diretta dell'assonometria ortogonale: si assegnano le proiezioni degli assi, in modo che formino angoli maggiori di un angolo retto, quindi si costruisce il triangolo delle tracce e il cerchio di distanza.

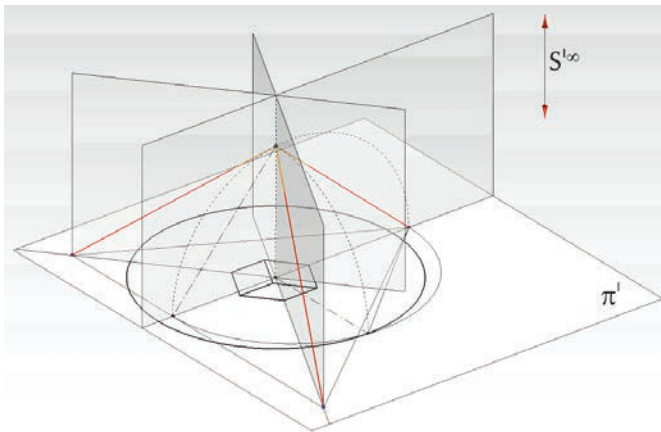


129. Il cerchio di distanza permette di ricostruire la posizione dell'origine della terna nello spazio: infatti ha per raggio la distanza dell'origine dal piano di proiezione. Per costruirlo, conviene immaginare la terna disposta al disopra del disegno e ribaltare il piano proiettante uno degli assi.





130. Impostazione diretta dell'assonometria ortogonale: il primo procedimento per la costruzione delle unità di misura assonometriche si serve del ribaltamento dei piani che proiettano gli assi.



131. Qui sono stati costruiti i piani proiettanti che, ribaltati, consentono la costruzione delle unità di misura assonometriche.

mento T^1K . Il punto in cui questa semicirconferenza taglia la retta p è il ribaltamento T^* dell'origine T .

La costruzione si conclude disegnando il cerchio di centro T^1 e raggio T^1T^* , luogo geometrico dei punti del piano di proiezione che distano da T^1 quanto T^1 dista dall'origine T , nello spazio. Questo cerchio, è detto, appunto, *cerchio di distanza*.

Si debbono ora costruire le unità di misura assonometriche u^1_x , u^1_y , u^1_z come proiezioni delle rispettive unità di misura oggettive $u_x = u_y = u_z$. A questo scopo si possono seguire due diversi procedimenti: il primo consiste nel ribaltare il piano proiettante l'asse considerato; il secondo nel ribaltare uno dei due piani coordinati cui l'asse considerato appartiene.

Primo procedimento.

- Si ribalta sul piano di proiezione il piano proiettante l'asse del quale si vuole l'unità di misura assonometrica, ad esempio z (figg. 130, 131). La cerniera del ribaltamento è la proiezione assonometrica dell'asse, in questo caso z^1 . L'origine T si porta sulla retta p , perpendicolare alla cerniera, nel punto T^* in cui la retta stessa incontra il cerchio di distanza. Si noti che la retta T^*T^1 è il ribaltamento della retta proiettante l'origine e descrive la direzione di proiezione nel ribaltamento del piano proiettante.

- Si disegna il ribaltamento z^* dell'asse considerato, da T^* alla traccia assonometrica del medesimo, in questo caso T^1_z .

- Si riporta l'unità di misura u_z sul ribaltamento dell'asse z , in u^*_z , da T^* fino al punto U^*_z .

- Si proietta l'estremità U^*_z sulla proiezione z^1 dell'asse z , per mezzo di una retta parallela alla T^*T^1 . Questa retta incontra la z^1 nel punto U^1_z estremità dell'unità di misura cercata.

- Si ripetono le operazioni suddette per gli altri due assi, arrivando così alla determinazione di tutte e tre le unità di misura assonometriche, u^1_x , u^1_y , u^1_z .

Secondo procedimento.

- Si ribalta il piano coordinato che appartiene a due degli assi, ad esempio xy (figg. 132, 133). La cerniera del ribaltamento è la traccia assonometrica del piano prescelto, in questo caso t^1_{xy} . L'origine T ruota in un piano perpendicolare alla cerniera che è il piano

proiettante l'asse z , opposto al piano coordinato considerato, e si porta, perciò, sulla perpendicolare q alla cerniera per T^l . Il piano proiettante suddetto, cui appartiene la traiettoria di T nel ribaltamento, taglia la cerniera nel punto K .

- Per completare il ribaltamento, occorre misurare la distanza TK , sul ribaltamento del triangolo T^lTK , effettuato come nell'algoritmo precedente.

- Si riporta la distanza T^*K sulla q , in T^{**} per mezzo di un arco di circonferenza di centro K .

- Le rette $T^{**}T_x^l$ e $T^{**}T_y^l$ rappresentano i ribaltamenti x^{**} e y^{**} degli assi coordinati x e y . Queste due rette risulteranno ortogonali, come gli assi di cui descrivono il ribaltamento. Ne consegue che il punto T^{**} deve appartenere alla semicirconferenza che ha il segmento $T_y^lT_x^l$ per diametro. Questa osservazione consente di costruire il punto T^{**} anche come intersezione della retta q con la suddetta semicirconferenza, che può essere preventivamente tracciata facendo centro nel punto medio del segmento $T_x^lT_y^l$.

- Tra i ribaltamenti x^{**} e y^{**} e le omonime proiezioni assonometriche degli assi, x^l e y^l , intercede una affinità ortogonale, che ha centro U^o nella direzione T^lT^{**} e ha per asse u la cerniera t_{xy}^l .

- Sfruttando l'affinità che lega il ribaltamento del piano xy alla sua proiezione, si costruiscono le unità di misura assonometriche u_x^l e u_y^l .

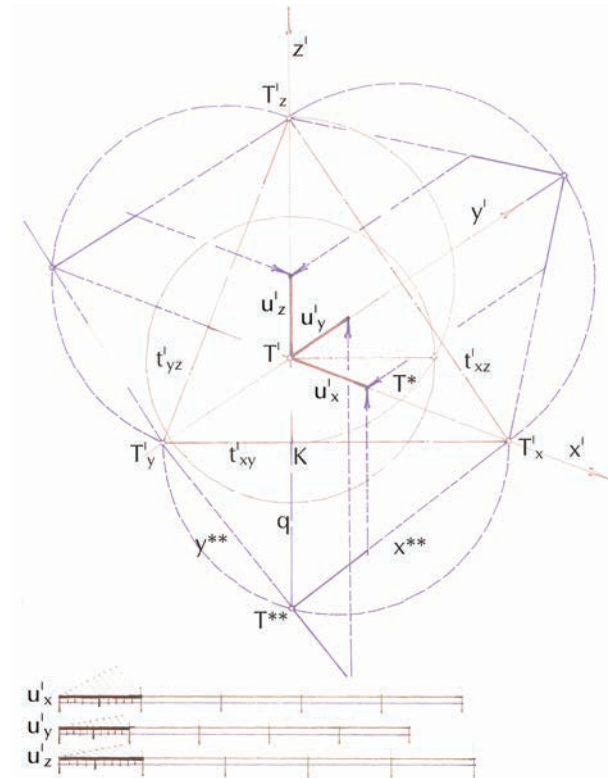
- Le suddette operazioni si ripetono, volendo, per un altro piano coordinato, determinando così tutte e tre le unità di misura assonometriche.

Applicando i procedimenti che abbiamo illustrato è dunque possibile:

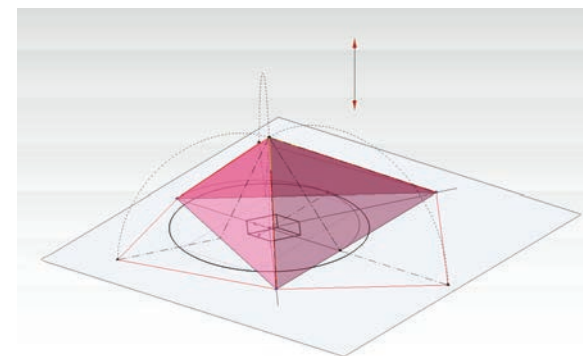
- assegnare in modo opportuno le proiezioni degli assi coordinati;
- costruire le relative unità di misura assonometriche, nell'ipotesi che la direzione di proiezione sia perpendicolare al quadro.

Una volta ottenuti questi elementi, l'assonometria ortogonale è impostata e la proiezione di un qualsiasi punto P dello spazio, di note coordinate numeriche, si può ottenere per mezzo della spezzata costruttrice del punto, nel modo illustrato in principio.

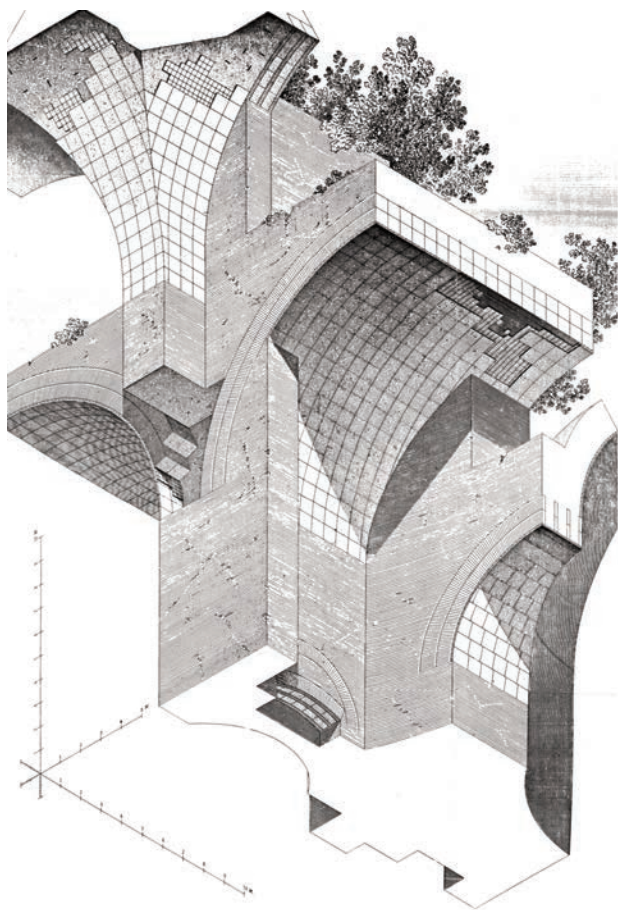
Le tre unità di misura, u_x^l , u_y^l e u_z^l sono in generale diverse l'una



132. Impostazione diretta dell'assonometria ortogonale: il secondo procedimento per la costruzione delle unità di misura assonometriche si serve del ribaltamento dei piani coordinati.



133. I piani coordinati vengono ribaltati sul piano di proiezione usando le tracce come cerniere dei rispettivi ribaltamenti: tra il ribaltamento e la proiezione degli assi omonimi si stabilisce una affinità ortogonale.



134. Il modello assonometrico è stata usato da Auguste Choisy come un vero e proprio strumento di studio. Questa assonometria ortogonale, che mostra il sistema di volte delle Terme di Caracalla, è tratta da *L'art de bâtir chez les romains*, Paris, 1873.

dall'altra e in un rapporto, con la omonima unità oggettiva, che è dato dalle relazioni:

$$- u'_x = u_x \cos\Phi;$$

$$- u'_y = u_y \cos\Theta;$$

$$- u'_z = u_z \cos\Psi;$$

dove Φ , Θ e Ψ sono gli angoli che gli assi coordinati formano con il piano di proiezione.

COSTRUZIONE DELLE SCALE ASSONOMETRICHE

Nella pratica del disegno, per servirsi agevolmente delle unità di misura, conviene costruire le *scale assonometriche* dei tre assi x' , y' e z' .

A questo scopo, si stabiliscono le unità di misura oggettive $u_x = u_y = u_z$ tenendo conto del rapporto di riduzione del modello che si vuole costruire. Ad esempio, se la scala del modello è 1:50 e l'unità di misura oggettiva è il metro, le unità di misura del modello ridotto sono: $u_x = u_y = u_z = 2$ cm.

Si costruiscono le unità di misura assonometriche u'_x , u'_y , u'_z .

Si riportano le suddette ciascuna su una diversa striscia di cartoncino, quante volte si vuole, e si dividono in sottomultipli. Si contrassegnano le tre strisce con i simboli x' , y' , z' . Sono queste le scale assonometriche del modello.

Si misurano i lati della spezzata costruttrice con le rispettive scale assonometriche (vedi le figure che illustrano modelli grafici, ove sono sempre riportate).

Poiché le unità di misura assonometriche dipendono, come si è visto, dall'angolo che i rispettivi assi formano con il piano di proiezione, è possibile che due di esse siano uguali o anche che tutte e tre siano uguali.

Se tutte e tre le unità di misura sono diverse l'una dall'altra, il triangolo delle tracce è acutangolo e l'assonometria si dice *ortogonale trimetrica* o *ortogonale anisometrica*.

Se due unità assonometriche sono uguali, il triangolo delle tracce è acutangolo isoscele e l'assonometria si dice *ortogonale dimetrica*. Se tutte e tre le unità di misura sono uguali, il triangolo delle tracce è equilatero e l'assonometria si dice *ortogonale isometrica*. Conseguentemente:

- se si vuole costruire un'assonometria ortogonale dimetrica basta assegnare le proiezioni degli assi in modo che due di essi formino angoli uguali con la proiezione del terzo asse;

- se si vuole costruire un'assonometria ortogonale isometrica basta assegnare le proiezioni degli assi in modo che formino tra loro angoli uguali e perciò angoli di 120° .

Nella pratica del disegno, quando si costruisce una assonometria ortogonale isometrica, non si usano le scale assonometriche, ma si misurano le proiezioni degli assi, direttamente nella scala del disegno. Poiché, in questo caso, le unità di misura assonometriche dovrebbero invece valere $u'_x = u_x 0,816 \dots$; $u'_y = u_y 0,816 \dots$; $u'_z = u_z 0,816 \dots$ si usa dire che si è applicato al modello un *ingrandimento convenzionale* pari a 1,224. Il seno dell'angolo che gli assi formano con il quadro vale, in questo caso, $1/\sqrt{3}$, il valore dell'angolo è dunque $35,26438968$ gradi sessadecimali, il coseno di quest'angolo, ovvero la lunghezza dell'unità di misura assonometrica u' vale, conseguentemente, $0,816496581$. L'ingrandimento convenzionale è pari a $1/u' = 1,224744871$. L'operazione è legittima, ma produce l'assonometria di un oggetto che è 1,224 volte più grande del vero (fig. 135).

L'ingrandimento convenzionale è evidente se si confronta la stampa di una assonometria isometrica realizzata al CAD, e perciò corretta nei rapporti di accorciamento, con una realizzata graficamente usando unità di misura assonometriche eguali a u : la prima apparirà vistosamente più piccola della seconda.

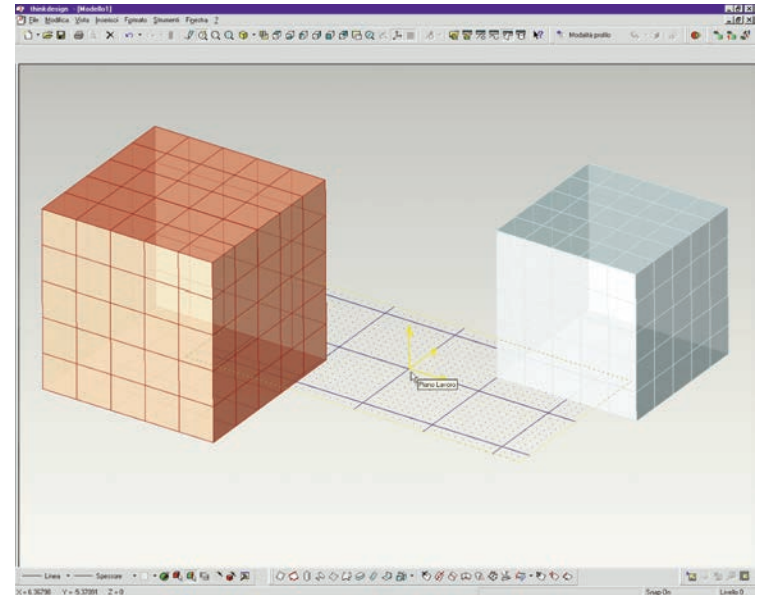
L'assonometria obliqua

Riassumiamo le fasi di impostazione di una assonometria ortogonale:

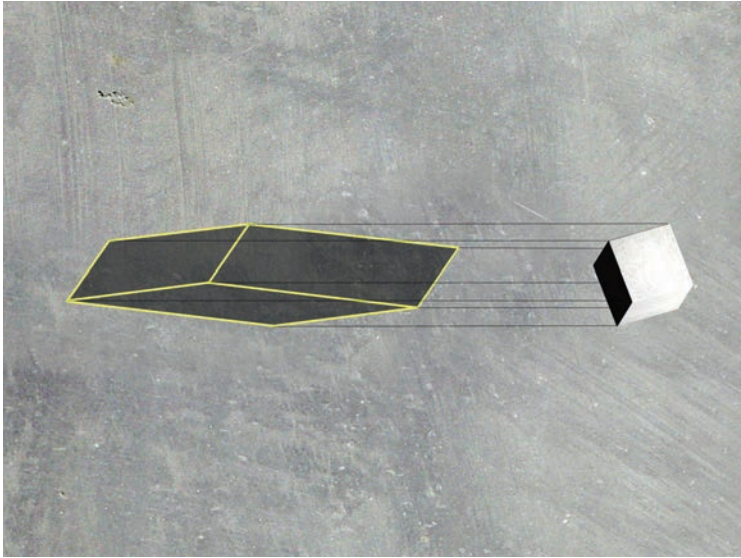
- nella prima fase si scelgono le proiezioni degli assi, rispettando i limiti di variazione dell'angolo tra due proiezioni, che deve essere maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto;

- nella seconda fase si costruiscono le unità di misura assonometriche, come conseguenza dello scorcio degli assi.

Per costruire una assonometria obliqua, invece:



135. L'ingrandimento convenzionale consente di operare più facilmente sull'assonometria ortogonale isometrica, ma produce la vista di un oggetto più grande del vero. A destra, in azzurro il cubo unitario, a sinistra in rosa, quello convenzionalmente ingrandito.



136. Anche se può sembrare assurdo, questa potrebbe essere la rigorosa proiezione obliqua di un cubo. Per rendersi conto di come ciò sia possibile, basta pensare alle ombre distese al suolo dal sole al tramonto.

- nella prima fase si scelgono liberamente le proiezioni degli assi;
- nella seconda fase si scelgono, altrettanto liberamente, le unità di misura assonometriche.

Occorre rispettare l'una o l'altra delle seguenti condizioni:

- possono coincidere le proiezioni di due degli assi, ma non di tutti gli assi; in altre parole può darsi che $x' \equiv y'$, oppure che $x' \equiv z'$, o anche che $y' \equiv z'$, ma non può darsi che $x' \equiv y' \equiv z'$;
- un solo asse e non più di uno può avere per proiezione un punto.

Peraltro, entrambe le suddette condizioni sono puramente teoriche e non hanno senso nella pratica del disegno.

Tutto ciò è dimostrato, infatti, dal seguente teorema, dovuto al filosofo e matematico tedesco Karl Pohlke: *tre segmenti complanari e incidenti in un punto comune T' , tali che non più di due di essi si sovrappongono o che non più di uno sia nullo, possono sempre essere considerati come proiezione parallela di una terna triortogonale di segmenti unitari, di origine T .*

Le conseguenze di questo teorema sul piano grafico sono notevolissime, poiché autorizzano, di fatto, a scegliere le distinte proiezioni dei tre assi e le relative unità di misura in modo del tutto arbitrario. Ad esempio, la figura estremamente allungata e deforme di un parallelepipedo, può essere considerata come proiezione di un cubo (fig. 136).

La dimostrazione classica di questo sorprendente teorema è molto complessa, tuttavia è possibile, dati i tre segmenti suddetti, ricostruire graficamente la terna triortogonale e la direzione di proiezione che li hanno prodotti.

La costruzione si ottiene con i seguenti passaggi (fig. 137):

- sono dati tre segmenti complanari, come vuole l'enunciato del teorema (in rosso, giallo e blu nella figura);
- si costruiscono i simmetrici dei segmenti dati rispetto all'origine;
- si costruiscono le ellissi che ammettono ogni coppia di segmenti come semidiametri coniugati;
- si costruisce l'ellisse che involuppa le tre ellissi come sopra costruite;
- si considera la figura così ottenuta come proiezione parallela di

una sfera, che circoscrive la terna triortogonale unitaria nello spazio;

- si ricostruisce la direzione di proiezione assonometrica, nei due modi possibili, a destra o a sinistra dell'ellisse proiezione;
- sulla retta proiettante per T' si stacca un punto qualsiasi T , origine della terna nello spazio;
- si ricostruisce la sfera e, al suo interno, la terna triortogonale unitaria.

Come si può agevolmente osservare, la ricostruzione della terna ammette due infinità di soluzioni, una per ciascuna delle due possibili direzioni di proiezione, simmetriche rispetto al piano di proiezione. Se si trascura l'orientamento destrorso o sinistrorso della terna, alle due possibili infinità suddette se ne aggiungono altre due, date dalle terne simmetriche di quelle già ricostruite.

Naturalmente la libertà assicurata dal teorema di Pohlke non può e non deve essere usata per costruire immagini dall'aspetto deforme. Può, invece, essere usata per costruire modelli che uniscano la semplicità della costruzione alla efficacia della rappresentazione. Questi modelli si raccolgono nei seguenti gruppi:

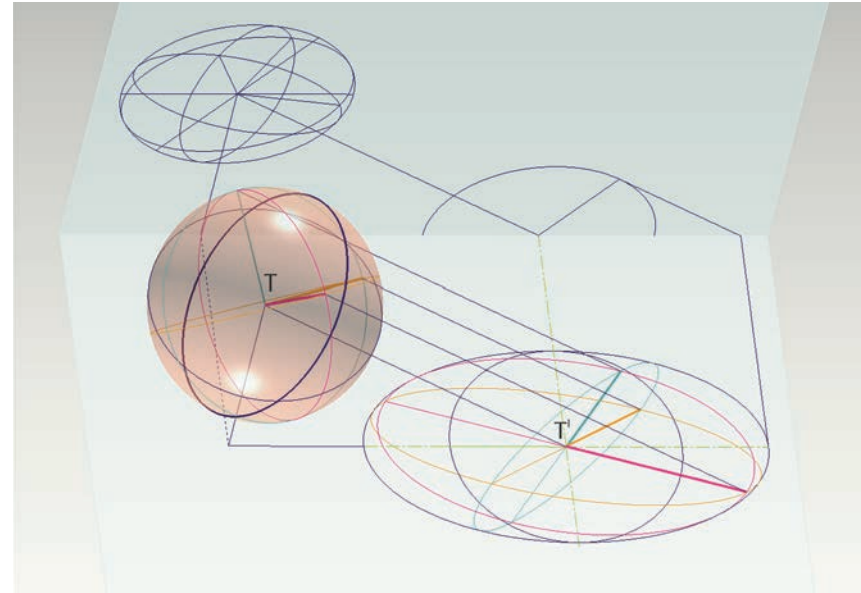
- *assonometrie militari*: nelle quali il piano di proiezione coincide con gli assi x ed y e che, perciò, conservano la vera forma della pianta;
- *assonometrie cavaliere*: nelle quali il piano di proiezione coincide con gli assi x e z , oppure con gli assi y e z , e che, perciò, conservano la vera forma degli alzati;
- *assonometrie speciali*: che mantengono sia la forma della pianta, sia quella dell'alzato.

Come avevamo accennato, esistono programmi in grado di costruire queste particolari proiezioni.

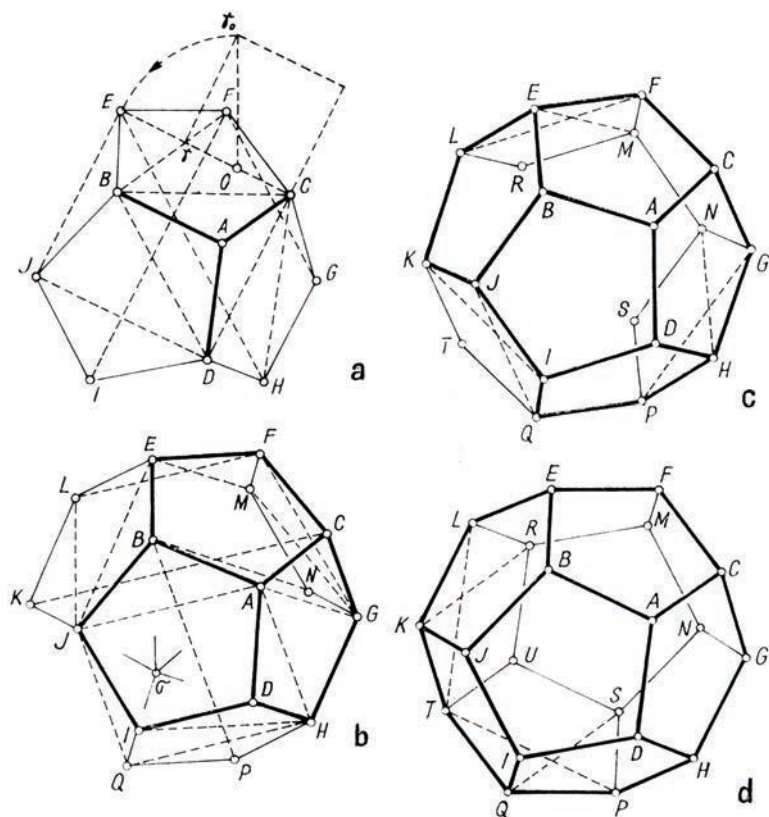
ESTENSIONE DEL TEOREMA DI POHLKE

Il teorema di Pohlke ha una interessante estensione, dovuta a Schwartz: *quattro punti, non tutti allineati, dati in un piano, possono essere sempre assunti come proiezioni dei vertici di un tetraedro di data forma.*

Ciò significa che non è necessario che i tre assi che generano la figura proiettata siano ortogonali.



137. Questa complessa costruzione dimostra la validità del teorema di Pohlke e consente di ricostruire la direzione di proiezione quando siano state assegnate, arbitrariamente, le proiezioni degli assi.



138. La costruzione di questo poliedro, dovuta a Gheorghiu e Dragomir, scaturisce dalla proiezione di soli tre spigoli, assegnati come consente l'estensione del teorema di Polke.

L'estensione del teorema ha una importante applicazione nella costruzione dei modelli grafici dei poliedri regolari, che è stata ampiamente illustrata da Gheorghiu e Dragomir (GHEORGHIU 1978, fig. 138).

Ad esempio, si possono assegnare tre segmenti **AB**, **AC**, **AD**, sul piano, cioè nel disegno, come proiezioni assonometriche oblique di tre spigoli di un dodecaedro, che è il solido regolare le cui dodici facce sono pentagoni regolari. Ciò fatto, si disegnano due rette: la prima per **B**, parallela allo spigolo **AC**, la seconda per **C**, parallela allo spigolo **AB**. Queste due rette descrivono due delle diagonali della faccia pentagonale che ha **AB** e **AC** per lati. Poiché le diagonali del pentagono si dividono reciprocamente in media ed estrema ragione, è facile ritrovare i vertici **E** e **F** del pentagono, che appartengono alle diagonali medesime: basterà applicare una delle note costruzioni della sezione aurea.

Procedendo in questo modo, si costruisce la proiezione assonometrica delle prime tre facce del dodecaedro. Queste tre facce forniscono altre tre coppie di spigoli, che permettono di completare la costruzione del solido, considerando altresì, per il controllo della accuratezza grafica, le caratteristiche simmetrie e i parallelismi degli elementi della figura.

ASSONOMETRIA MILITARE

Nella assonometria militare, gli assi **x** e **y** appartengono al quadro **e**, perciò, le figure che appartengono al piano **xy** o a piani a esso paralleli conservano la vera forma e grandezza (fig. 139). La proiezione **z'** dell'asse **z** può essere scelta liberamente. Le unità di misura assonometriche degli assi **x** e **y** sono in vera forma. Conviene, invece, assegnare l'unità di misura **u_z¹** scorcata.

Per impostare il modello grafico, si tracciano per prime le proiezioni **x¹** e **y¹** degli assi **x** e **y**; dette proiezioni sono ortogonali.

Si traccia poi la proiezione **z¹** dell'asse **z**, in modo che formi con le proiezioni degli altri assi, due angoli qualsiasi (purché non coincida con esse). Volendo, si possono anche ruotare **x¹** e **y¹**, per avere poi **z¹** parallelo al bordo verticale del foglio da disegno.

Si scelgono ora le unità di misura assonometriche: **u_x¹** e **u_y¹** sono uguali, conviene invece scegliere **u_z¹** leggermente scorcata. Ad

esempio, se la scala del modello è 1:50 e, perciò, l'unità di misura della terna è uguale a 2 cm, si prendono:

$$u'_x = 2 \text{ cm}$$

$$u'_y = 2 \text{ cm}$$

$$u'_z = 1,5 \text{ cm.}$$

La ragione di questa scelta si spiega ricostruendo la direzione di proiezione assonometrica nello spazio.

Supponiamo di aver assegnato le unità di misura assonometriche tutte eguali, per rendere più spedito il disegno.

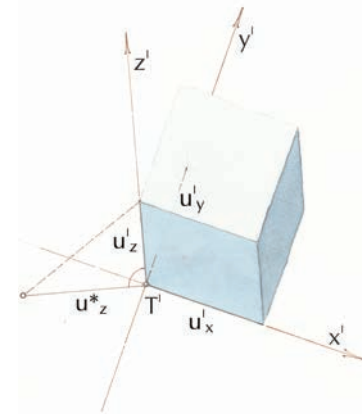
La direzione di proiezione assonometrica si può allora ricostruire applicando il seguente procedimento (fig. 140):

- si ribalta il piano proiettante l'asse z sul piano di proiezione;
- la cerniera del ribaltamento è la retta z' ;
- l'asse z oggettivo è perpendicolare al piano di proiezione e, perciò, anche alla cerniera; a ribaltamento avvenuto si porta dunque nella retta z^* , ortogonale alla cerniera;
- l'estremo U_z dell'unità di misura oggettiva u_z si porta in U^*_z sulla z^* a una distanza da T' pari all'unità di misura stessa;
- la retta $U^*_z U'_z$ è il ribaltamento della retta che proietta, nello spazio, U_z in U'_z e, perciò, fornisce la direzione di proiezione assonometrica.

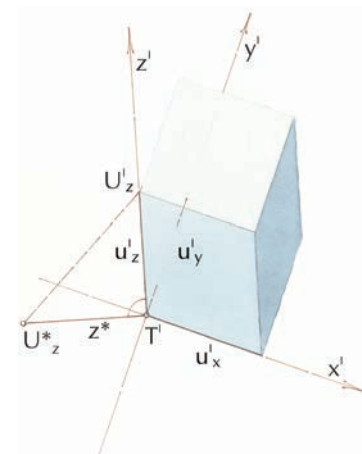
Ora, è facile constatare che l'angolo che la direzione di proiezione forma con il piano di proiezione è pari a 45° . Dunque, se si vuole che il modello grafico restituisca le proporzioni dell'oggetto reale, occorre osservare il disegno obliquamente, cercando una posizione di osservazione simile a quella del centro di proiezione. Questa tecnica di osservazione, detta *veduta vincolata*, sarà meglio discussa trattando della prospettiva.

Poiché non è certo agevole osservare il disegno di scorcio, bisogna cercare di ridurre l'inclinazione della direzione di proiezione rispetto al piano di proiezione, cosa che si ottiene, appunto, scorciando l'unità di misura u'_z .

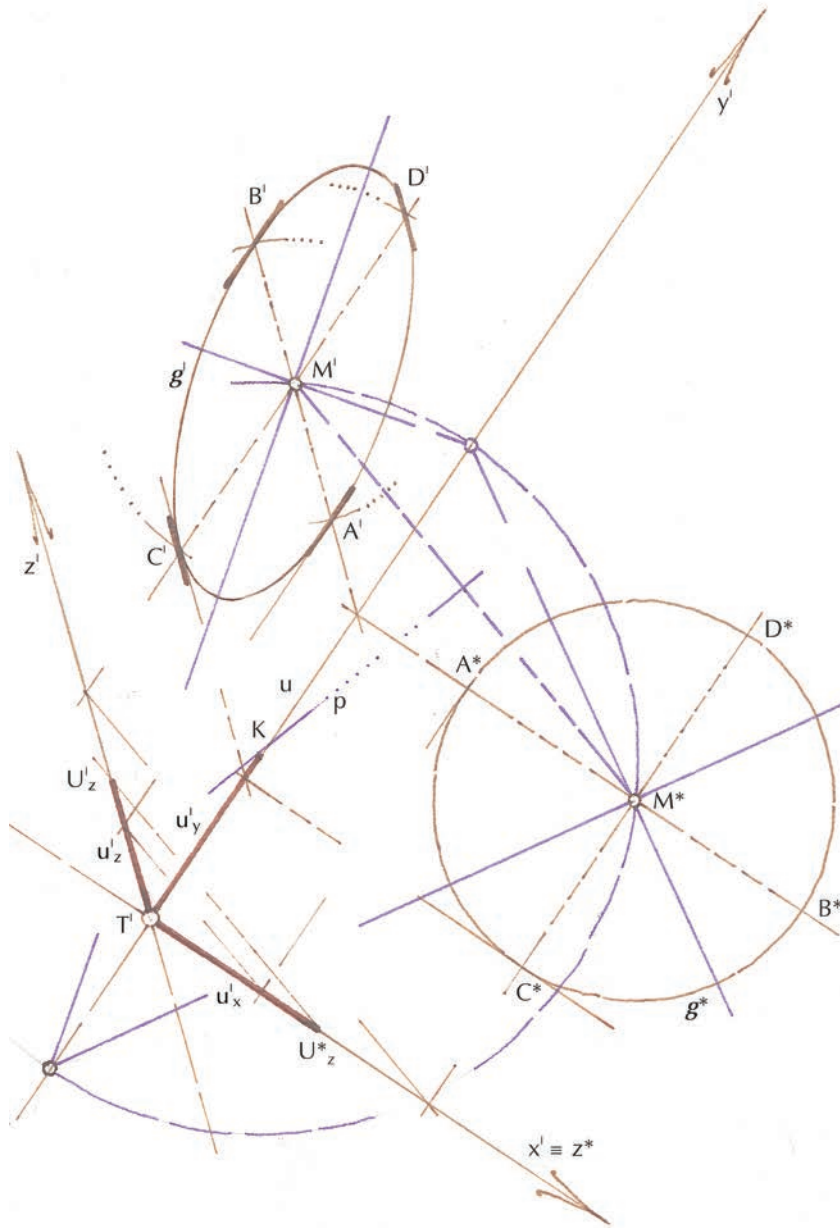
Una volta impostato il modello, si procede alla costruzione delle proiezioni dei punti dell'oggetto che si vuole rappresentare, determinando la spezzata costruttrice di ognuno. Tuttavia, se una figura piana appartiene a un piano perpendicolare al piano di



139. Scorciando la proiezione dell'asse z si ottiene una riduzione delle deformazioni apparenti.



140. Per ricostruire la direzione di proiezione dell'assonometria militare si ribalta il piano individuato dall'asse z e dalla sua proiezione z' .



141. L'assonometria obliqua di un cerchio si costruisce facilmente istituendo l'affinità che ne lega la proiezione al ribaltamento sul piano di quadro.

proiezione, se ne costruisce ancor più agevolmente la proiezione ribaltando sul piano di proiezione il piano che la contiene. Come abbiamo già veduto in più occasioni, tra un siffatto ribaltamento e la proiezione della figura data sussiste una relazione di affinità. L'affinità che si instaura tra le due figure è, in questo caso, obliqua. Ecco alcuni esempi di questa tecnica.

Data la proiezione $T'(x', y', z')$ di una terna triortogonale di riferimento e la proiezione u'_x, u'_y, u'_z delle relative unità di misura assonometriche, si vuole costruire, sulla proiezione $y'z'$ del piano yz la proiezione g' di un cerchio g di raggio r (fig. 141).

Si ribalta il piano yz sul piano di proiezione: la cerniera del ribaltamento è la retta y' ; l'asse z si porta nella retta z^* perpendicolare a x' in T' ; l'estremità U_z della unità di misura dell'asse z , si porta in U^*_z a una distanza da T' pari all'unità di misura oggettiva.

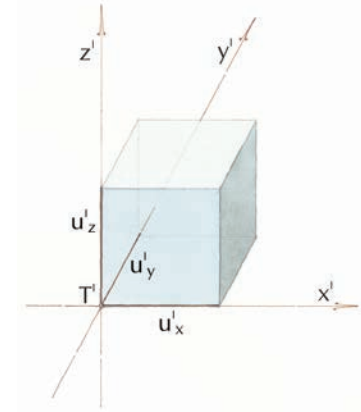
Tra la proiezione e il ribaltamento del piano yz si instaura un'affinità obliqua che ha l'asse u nella cerniera y' e il centro U^o nella direzione della retta $U'_z U^*_z$ che allinea i due punti corrispondenti U'_z proiezione, e U^*_z ribaltamento.

Perciò, tracciato il cerchio g sul ribaltamento del piano in g^* , e individuata sullo stesso una coppia A^*B^*, C^*D^* di diametri ortogonali, è immediato ritrovare le proiezioni $A'B', C'D'$ degli stessi, come diametri coniugati dell'ellisse proiezione.

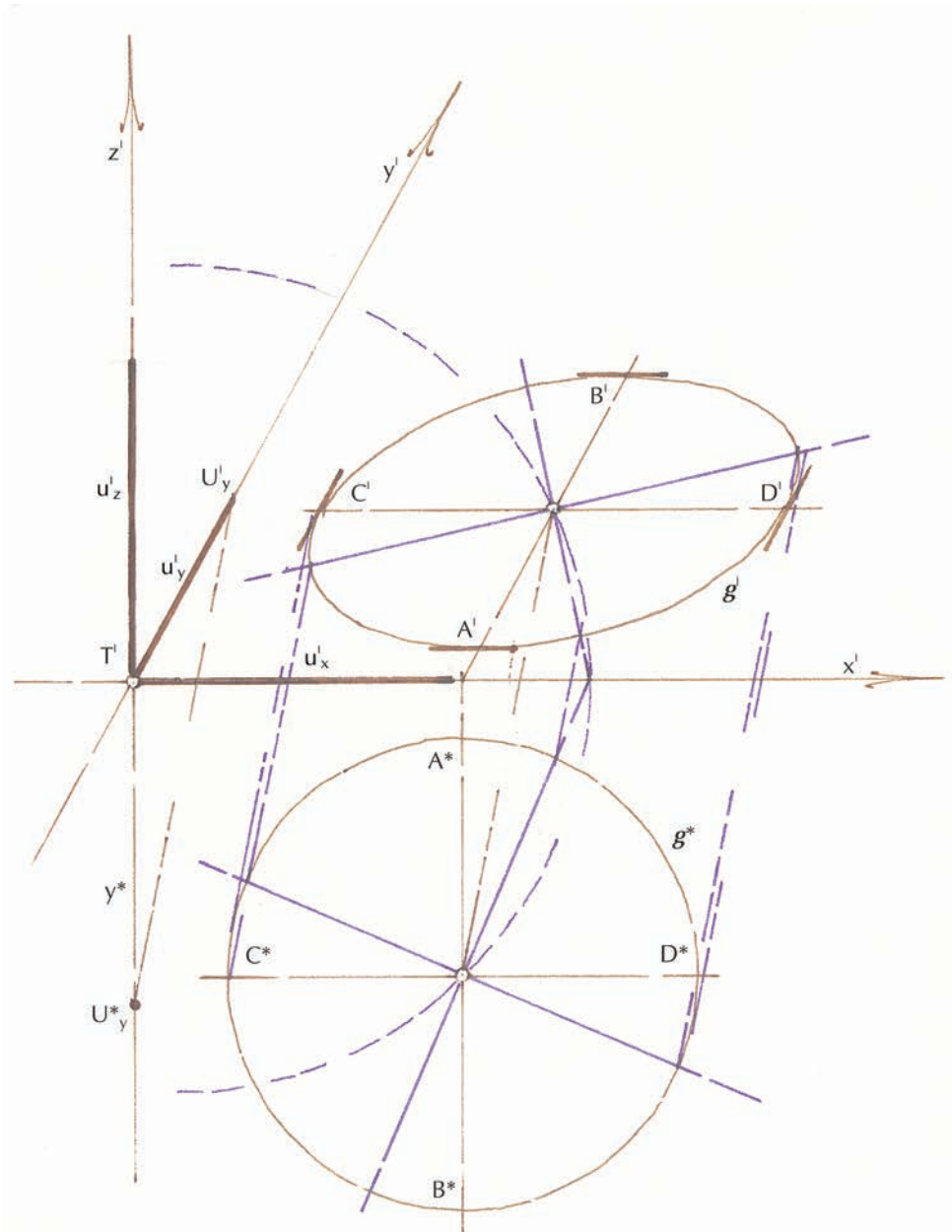
Gli assi dell'ellisse proiezione, e conseguentemente i fuochi, si trovano applicando l'algoritmo relativo, già illustrato. Basterà costruire il segmento $M'M^*$ e la perpendicolare p nel suo punto medio. Questa retta incontra l'asse u dell'affinità in un punto K . Il cerchio, che ha centro in K e raggio $KM^* = KM'$ taglia l'asse u nei punti ove si incontrano gli assi della ellisse proiezione e i corrispondenti diametri del cerchio, dato in vera forma.

ASSONOMETRIA CAVALIERA

Nella assonometria cavaliera, gli assi x e z appartengono al quadro e, perciò, le figure che appartengono al piano xz o a piani a esso paralleli conservano la vera forma e grandezza (fig. 142). La proiezione y' dell'asse y può essere scelta liberamente. Le unità di misura assonometriche degli assi x e z sono in vera forma. Conviene, invece, assegnare l'unità di misura u'_y scorciata.



142. Nell'assonometria cavaliera gli assi y e z appartengono al quadro e, di conseguenza, l'alzato si proietta in vera forma.



143. Anche nell'assonometria cavaliere conviene scorciare l'unità che misura la profondità dello spazio, al fine di ridurre le deformazioni apparenti.

Per impostare il modello grafico, si tracciano per prime le proiezioni x^l e z^l degli assi x e z ; dette proiezioni sono ortogonali.

Si traccia poi la proiezione y^l dell'asse y , in modo che formi con le proiezioni degli altri assi due angoli qualsiasi (purché non coincida con esse).

Si scelgono ora le unità di misura assonometriche: u_x^l e u_z^l sono uguali, conviene invece scegliere u_y^l leggermente scorcziata.

Per ricostruire la direzione di proiezione assonometrica, si ribalta il piano proiettante l'asse y sul piano di proiezione. La cerniera del ribaltamento è la retta y^l .

L'asse y oggettivo è perpendicolare al piano di proiezione e, perciò, anche alla cerniera: a ribaltamento avvenuto, questo asse si porta dunque nella retta y^* , ortogonale alla cerniera.

L'estremo U_y dell'unità di misura oggettiva u_y , si porta in U_y^* , sulla y^* ad una distanza da T^l pari all'unità di misura stessa.

La retta $U_y^*U_y^l$ è il ribaltamento della retta che proietta, nello spazio, U_y in U_y^l e, perciò, fornisce la direzione di proiezione assonometrica.

Data la proiezione $T^l(x^l, y^l, z^l)$ di una terna triortogonale di riferimento e la proiezione u_x^l, u_y^l, u_z^l delle relative unità di misura assonometriche, si vuole costruire, sulla proiezione $x^l y^l$ del piano xy la proiezione g^l di un cerchio g di raggio r (fig. 143).

Si ribalta il piano xy sul piano di proiezione: la cerniera del ribaltamento è la retta x^l ; l'asse y si porta nella retta y^* perpendicolare a x^l in T^l ; l'estremità U_y della unità di misura dell'asse y , si porta in U_y^* , a una distanza da T^l pari all'unità di misura oggettiva.

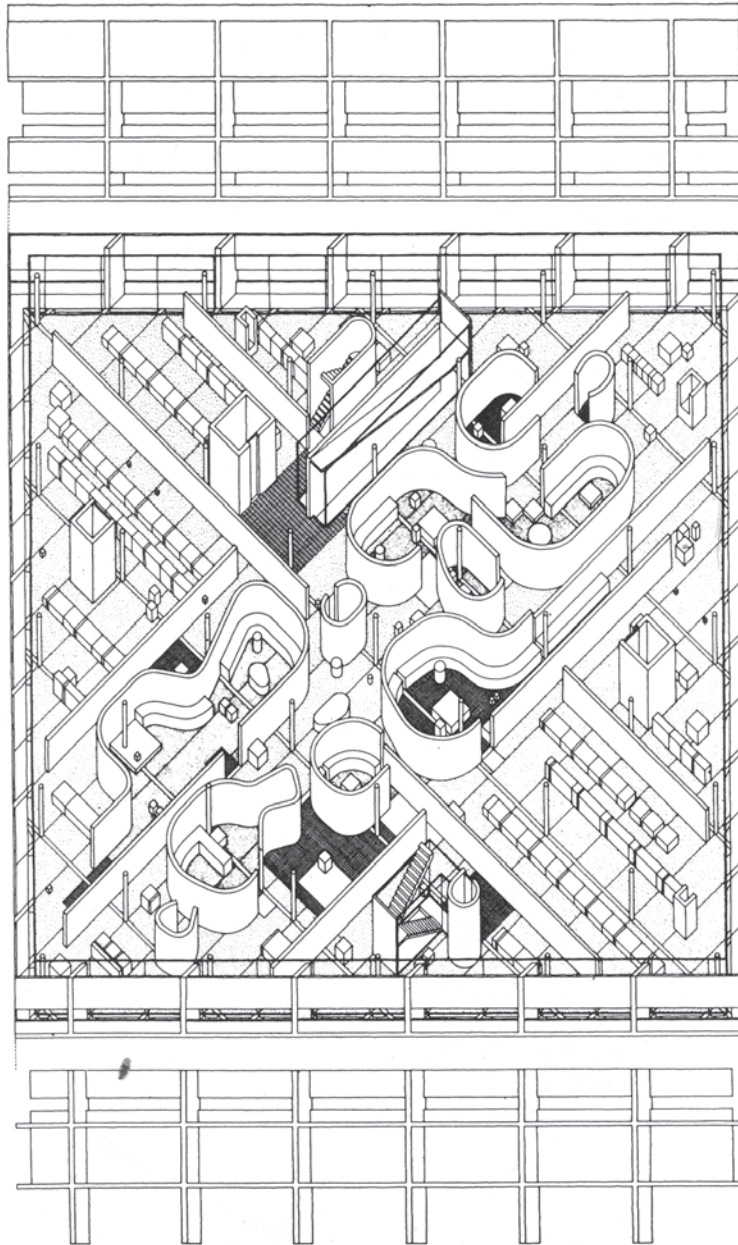
Tra la proiezione e il ribaltamento del piano xy si instaura un'affinità obliqua che ha l'asse u nella cerniera y^l e il centro U^o nella direzione della retta $U_y^l U_y^*$, che allinea i due punti corrispondenti U_y^l , proiezione, e U_y^* , ribaltamento.

Perciò, tracciato il cerchio g sul ribaltamento del piano in g^* , e individuata sullo stesso una coppia A^*B^*, C^*D^* di diametri ortogonali, è immediato ritrovare le proiezioni $A^l B^l, C^l D^l$ degli stessi, come diametri coniugati dell'ellisse proiezione.

Gli assi dell'ellisse proiezione, e conseguentemente i fuochi, si trovano applicando l'algoritmo relativo, già illustrato.



144. Per descrivere l'attacco delle volte a crociera della navata della Basilica di Costantino, Choisy si serve di una assonometria cavaliera, che conserva la vera forma del fronte.



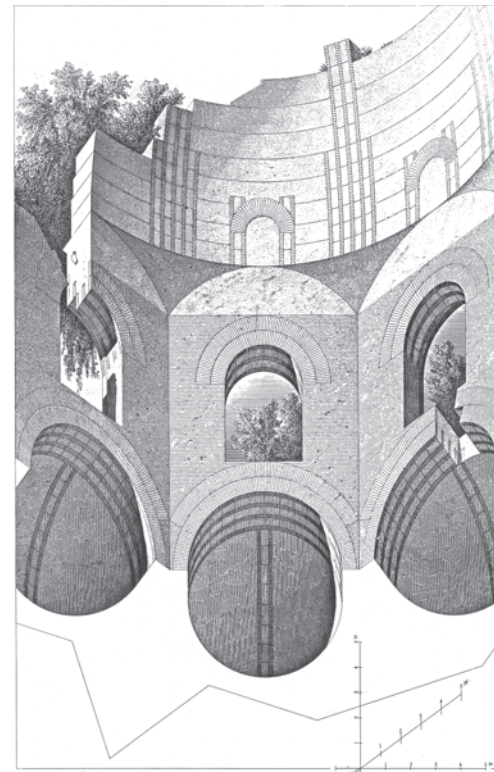
145. In questo modello grafico, John Heiduk ha volutamente impiegato l'assonometria speciale per comporre il disegno e, al tempo stesso, per mettere in evidenza la rotazione degli spazi interni rispetto all'involucro che li contiene.

ASSONOMETRIA SPECIALE

Le assonometrie speciali sono un caso particolare delle assonometrie illustrate poc'anzi. Gli assi x^1 e y^1 sono ortogonali, l'asse z^1 coincide con l'asse y^1 . Le unità di misura assonometriche sono eguali: $u^1_x = u^1_y = u^1_z$.

Si può immaginare che il piano xy coincida con il piano di proiezione e che la direzione di proiezione assonometrica sia parallela al piano yz e formi un angolo di 45° con il piano di proiezione. Questa particolare impostazione dell'assonometria obliqua ha il vantaggio di conservare in vera forma tanto la pianta, quanto il prospetto. L'immagine che ne deriva non è particolarmente esplicita, giacché sacrifica il piano yz , che appare di profilo. In compenso, si ottiene una seducente composizione del disegno, come egregiamente mostrano alcuni esempi di architetti statunitensi (fig. 145).

146. Questo modello del tempio detto di Minerva Medica, di Choisy, conserva in vera forma tanto la pianta quanto l'alzato di uno dei fronti. Si tratta, perciò, di una assonometria obliqua speciale.





147. Come testimonia Vitruvio, la più antica applicazione della prospettiva è la scenografia, l'arte di creare grandi spazi illusori nell'esigua profondità del palcoscenico. Un maestro di quest'arte fu Giuseppe Galli Bibiena, 1740.

Modelli ottenuti per proiezione da un centro: la prospettiva

Costruzione del modello prospettico frontale

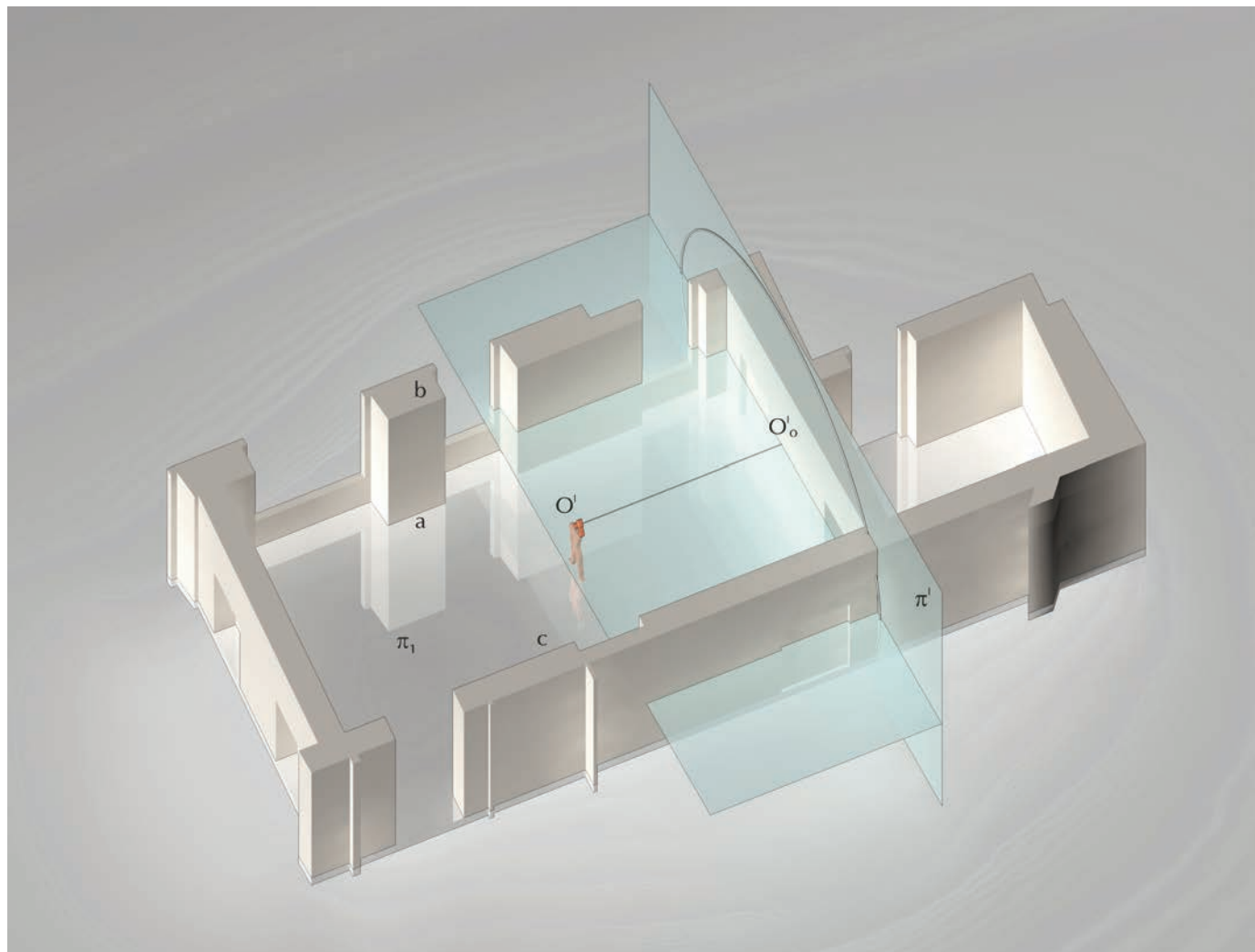
Un modello prospettico può essere impostato nei modi più vari. Soltanto l'esperienza sa suggerire, di volta in volta, la procedura migliore. Pertanto, la procedura che seguiremo è soltanto una tra le molte possibili, quella più consona a un primo approccio, per chiarezza e per semplicità. Questa procedura si applica anche ai modelli informatici, quando il software adottato prevede la possibilità di generare la vista prospettica.

La prima operazione da compiere, tutta ideale, è la costruzione del modello geometrico dello spazio che si vuole rappresentare, cioè la costruzione di un modello semplificato, nel quale la purezza e la semplicità delle forme geometriche si sostituisce alla complessità del reale. Se, ad esempio, questo spazio è l'interno nel quale ci troviamo, come può essere una stanza di impianto rettangolare, dovremo misurarne i lati e il risultato sarà un volume parallelepipedo.

La seconda operazione consiste nella riduzione in scala del modello. A questo scopo misuriamo il nostro foglio da disegno e riduciamo il lato più corto della sala applicando un fattore k di riduzione capace di trasformarlo in un segmento lungo circa la metà del lato del foglio.

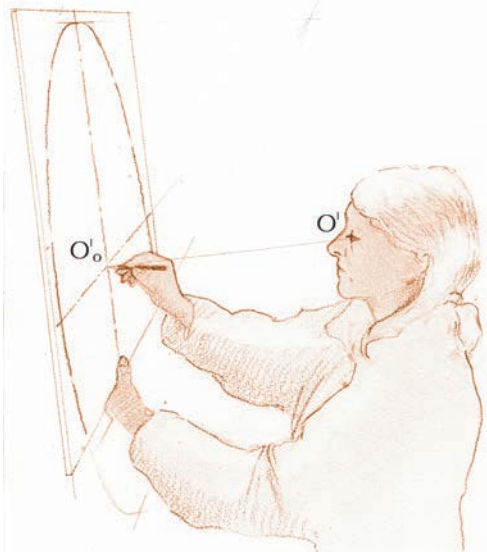
A questo punto bisogna disporre, nello spazio: il modello ridotto in scala, il quadro, cioè il foglio da disegno, e il centro di proiezione (fig. 148). Immaginiamo, dunque, di aver costruito il modello ridotto e di appoggiarne la faccia più piccola al centro del foglio da disegno: possiamo allora disegnare senza indugio i lati della parete che appoggia sul quadro. La scelta del centro di proiezione è legata allo scorcio prospettico che si vuole ottenere: scegliamo una posizione opportuna, al fine di inquadrare la parte più grande possibile del modello. Il centro di proiezione subisce la medesima

148. Prima fase dell'impostazione di una prospettiva frontale: l'oggetto della rappresentazione, idealmente ridotto nella scala del disegno e perciò privato dei dettagli superflui, viene collocato con una faccia sul piano di quadro, quindi si stabilisce la posizione dell'osservatore, cioè del centro di proiezione, sempre all'interno dello spazio che si vuole rappresentare; nei modelli informatici si segue analoga procedura, anche se non è necessario materializzare il quadro.





149. Il cerchio di distanza assume, nella prospettiva, il ruolo che è proprio del traguardo nelle macchine prospettiche, usate dal Rinascimento a tutto l'Ottocento, come quella raffigurata in alto (1834).



150. La prospettiva deve essere osservata dall'estremo del segmento perpendicolare al quadro, che ha piede nel punto principale e lunghezza eguale al raggio del cerchio di distanza.

contrazione dello spazio nel quale è contenuto e perciò le sue distanze dal pavimento, dalla parete di fronte e dalle pareti laterali, devono anche essere divise per k .

Si pone ora il problema di fissare la posizione del centro di proiezione rispetto al piano di proiezione π^l : a questo scopo conduciamo dal centro di proiezione O^l una retta perpendicolare a π^l e sia O^o il piede di detta perpendicolare, che è detto *punto principale*.

Con il compasso, tracciamo ora un cerchio che ha centro nel punto principale e raggio pari alla distanza del centro di proiezione dal quadro, misurata nello spazio del modello (questa distanza è, dunque, quella dell'osservatore dalla parete che ha di fronte, misurata nello spazio reale e ridotta in scala) (figg. 149, 150).

Il segmento O^lO^o si dice *distanza principale*.

Il cerchio così costruito si chiama *cerchio di distanza* e permette di identificare il centro di proiezione. Il centro, infatti, può essere ricostruito, in qualsiasi momento, come quel punto che si trova sulla perpendicolare al quadro, condotta nel punto principale, a una distanza pari al raggio del cerchio.

Ai fini del modello grafico, non è necessario che il cerchio di distanza sia disegnato per intero: una sua porzione è sufficiente.

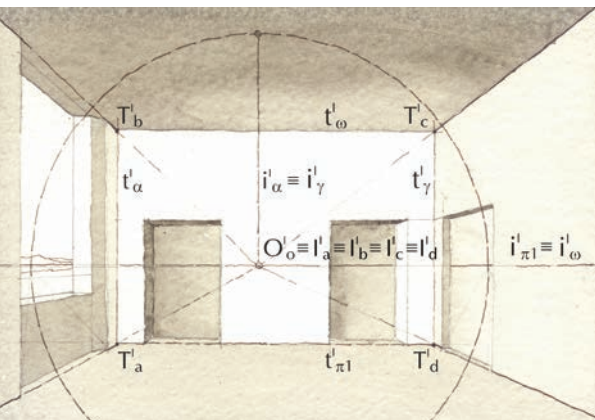
Il piano inferiore del modello, che corrisponde al pavimento della stanza da rappresentare (fig. 142) e viene in genere assunto come riferimento (per esempio nella misura delle altezze e nella disposizione dei volumi contenuti nell'ambiente), prende il nome di *piano geometrico* e si indica con il simbolo π_1 (leggi *pi greco uno*, da non confondere con π^l , leggi *pi greco primo*, che è il quadro).

Il piano proiettante e parallelo al piano geometrico prende il nome di *piano dell'orizzonte* e si indica con il simbolo π_1 (leggi *pi greco uno soprasegnato*).

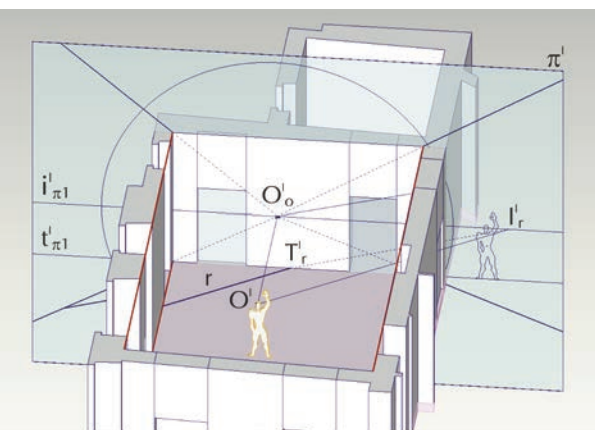
Possiamo ora proiettare il modello sul quadro.

Per far ciò consideriamo, innanzi tutto, le rette orizzontali **a, b, c, d** che delimitano le pareti laterali del modello. Queste rette sono parallele, perpendicolari al quadro e lo intersecano nei punti T^l_a , T^l_b , T^l_c , T^l_d , detti tracce (fig. 151).

Per costruire i piani proiettanti, conduciamo dal centro O^l una parallela alle rette date: questa risulta perpendicolare al quadro, co-



152. L'impostazione di una prospettiva frontale è immediata: si disegna in scala una delle pareti dell'ambiente da rappresentare e si traccia il cerchio di distanza. Le immagini delle rette perpendicolari al quadro convergono nel punto principale.



153. Data la prospettiva di una retta qualsiasi, la sua traccia e la sua fuga, si può ricostruire nello spazio la retta oggettiva che ha quella immagine: basta condurre per la traccia della retta una parallela alla retta proiettante che passa per la sua fuga.

me le rette suddette, e perciò coincide con il segmento $O'O'_o$ che misura la distanza principale. Le quattro rette **a, b, c, d** hanno dunque fuga nel punto principale O'_o ($I'_a \equiv I'_b \equiv I'_c \equiv I'_d \equiv O'_o$).

Le proiezioni **a', b', c', d'** sono dunque individuate come le quattro rette che appartengono alle tracce T'_a, T'_b, T'_c, T'_d e convergono nel punto di fuga (fig. 152).

La rappresentazione dei piani consiste nel determinare traccia e fuga di ciascuno di essi: le tracce dei piani orizzontali π_1 e ω sono le intersezioni del pavimento e del soffitto con il quadro, cioè i lati orizzontali della parte di fondo, t'_{π_1} e t'_{ω} . Le tracce dei piani verticali, α e γ , sono i lati verticali della parete di fondo, t'_{α} e t'_{γ} . Osserviamo che le tracce dei piani appartengono alle tracce delle rette che li individuano. Analogamente, le fughe dei piani appartengono alle fughe delle rette e sono parallele alle tracce, perciò: i'_{π_1} e i'_{ω} coincidono nella retta orizzontale che passa per il punto principale e costituiscono l'orizzonte, mentre i'_{α} e i'_{γ} coincidono e passano per il punto principale, ma sono verticali, come le tracce dei piani cui appartengono.

RAPPRESENTAZIONE DI UNA RETTA DEL GEOMETRALE OBLIQUA RISPETTO AL QUADRO

Il modello grafico che abbiamo costruito, può già sostenere operazioni di progetto e controllo dello spazio. Vogliamo, ad esempio, costruire una retta sul piano geometrale (il pavimento) obliqua rispetto al quadro (fig. 153).

Cominciamo col tracciarne l'immagine o proiezione direttamente nel modello grafico (fig. 154), e sia r' , che è stata disegnata in modo del tutto arbitrario. La retta r , che r' vuole rappresentare, appartiene al geometrale per costruzione e perciò ha la traccia T'_r sulla traccia t'_{π_1} del piano cui appartiene e la fuga I'_r sulla fuga i'_{π_1} del medesimo.

Ricordiamo, inoltre, che la fuga di una qualsiasi retta r si costruisce conducendo per il centro di proiezione O' una parallela r alla retta r data e determinando il punto I'_r che questa ha in comune con il quadro.

Ciò premesso, il modello restituisce la posizione esatta della retta r nello spazio. Infatti (fig. 155):

- la retta r oggettiva passa per T'_r ;
- la retta r , che è parallela a r e ne proietta la direzione, passa per I'_r e per O^i ;
- O^i si ricostruisce nello spazio davanti al disegno grazie al cerchio di distanza;
- la retta r si ricostruisce come la congiungente $O^i I'_r$;
- di conseguenza la retta r si ricostruisce come la parallela a r = $O^i I'_r$, che passa per T'_r .

Le suddette operazioni, con le giustificazioni geometriche che le accompagnano, costituiscono una procedura che chiameremo *ricostruzione della retta nello spazio*.

La ricostruzione, di una retta, di un piano o di un punto, è la riprova delle potenzialità del modello grafico, potenzialità che lo distinguono da un qualsiasi disegno di carattere soltanto intuitivo.

Nello stesso tempo, la ricostruzione è il primo passo da compiere per ogni successiva elaborazione e pertanto essa assume una importanza fondamentale nello studio della Scienza della rappresentazione.

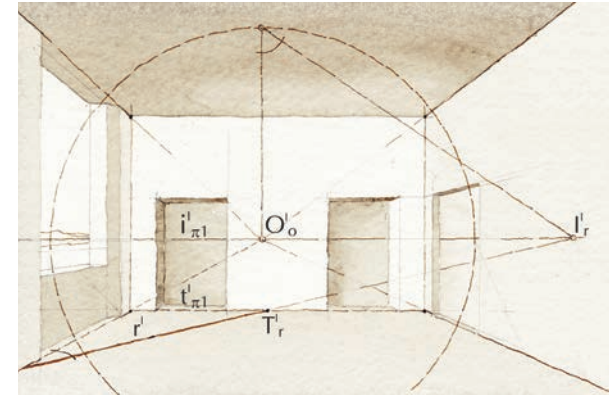
A riprova di quanto abbiamo affermato, proponiamoci ora di misurare l'angolo che la retta r forma con la retta a del modello, perpendicolare al quadro per costruzione.

Ovviamente l'angolo delle immagini delle due rette $a^i r^i$ non può essere misurato direttamente, perché subisce lo scorcio prospettico. Se, però, ricostruiamo nello spazio tanto la retta a , quanto la retta r , verifichiamo immediatamente che l'angolo formato, nel centro di proiezione O^i , dalle rette a e r , parallele alle rette oggettive, è congruente con l'angolo che vogliamo misurare. Ora, il suddetto angolo può essere misurato agevolmente, se si ruota il piano dell'orizzonte, cui appartengono a e r , fino a farlo adagiare sul quadro.

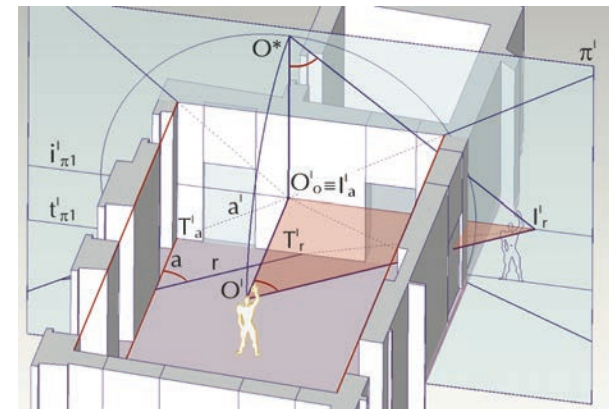
L'intersezione del piano con il quadro è la cerniera del ribaltamento.

I punti del piano descrivono, durante il ribaltamento, archi di circonferenza che appartengono a piani perpendicolari alla cerniera; inoltre, i punti del piano conservano, durante il ribaltamento, la propria distanza dalla cerniera.

154. Data la prospettiva di una retta del piano geometrale, obliqua rispetto al quadro, si può misurare l'angolo che forma con le rette perpendicolari al quadro ribaltando il piano individuato dalle rette proiettanti relative.



155. Per misurare l'angolo che la retta prima disegnata forma con un'altra retta del pavimento, basta ribaltare il piano proiettante individuato dalle due rette che passano per il centro di proiezione e per le rispettive fughe.



- si costruisce la perpendicolare alla cerniera nel punto principale;
- si trova il punto O^* in cui la perpendicolare incontra il cerchio di distanza;
- si costruiscono le rette $O^*I'_r$ e $O^*I'_a$: l'angolo che queste due rette formano in O^* è congruente con l'angolo che le rette date formano nello spazio.

INTRODUZIONE ALLA MISURA: SEGMENTI DI RETTE PERPENDICOLARI AL QUADRO

Ci proponiamo ora di costruire, sul modello grafico, l'immagine P^l - Q^l di un segmento PQ di data lunghezza oggettiva, che appartenga a una retta a , della quale è stata costruita la prospettiva a^l (T'_a , I'_a). Ci proponiamo, in breve, di *misurare* la retta a .

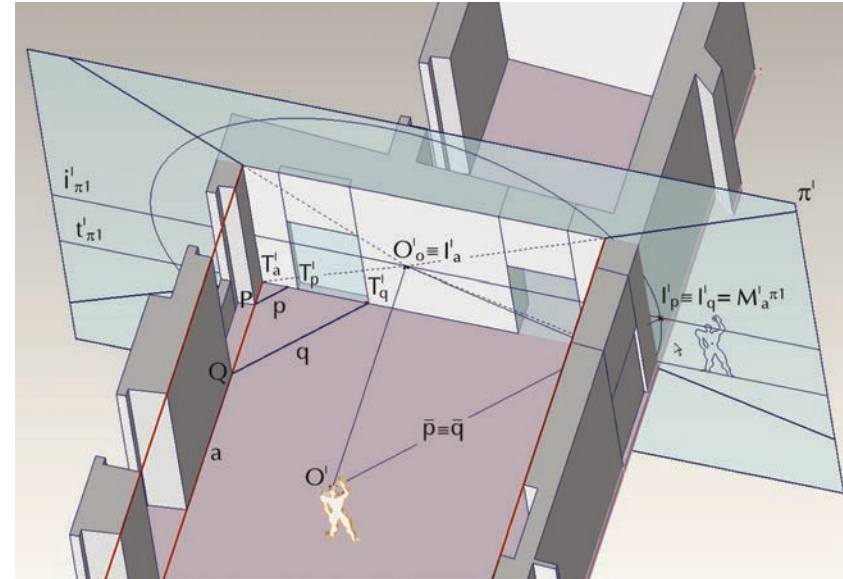
Nel modello che stiamo prendendo in esame (fig. 157), la retta a appartiene al geometrale ed è perpendicolare al quadro, ma le considerazioni che qui svilupperemo sono del tutto indipendenti da questa particolare disposizione della retta e hanno perciò validità generale.

Consideriamo due segmenti che appartengono alla retta a , ad esempio T'_aP e PQ . Nel modello, i segmenti sono ridotti alla scala $1/k$.

Vogliamo ora costruire le rette p e q del piano geometrale, che passano per i punti P e Q e staccano sulla traccia $t'_{\pi 1}$, del piano stesso, segmenti uguali a T'_aP e PQ . Per fare ciò, basta riportare sulla traccia del geometrale, a partire dalla traccia T'_a della retta a , due segmenti, uguali a quelli dati, e cioè: $T'_aT'_p = T'_aP$; $T'_pT'_q = PQ$. Gli estremi di questi segmenti (T'_p e T'_q) sono le tracce delle rette p e q , che volevamo costruire. Le stesse sono dunque individuate dai punti P e T'_p , Q e T'_q rispettivamente.

È evidente che, costruendo la prospettiva delle due rette p e q , noi avremo staccato sulla retta a^l , prospettiva di a , le immagini P^l e Q^l dei punti P e Q : infatti, essendo l'incidenza di due rette una proprietà che non varia nella proiezione (invariante proiettiva), così come la retta p incontra la retta a nel punto P , la sua proiezione p^l incontrerà la a^l in P^l ; e analogamente per la retta q e il punto relativo.

Non rimane, dunque, che costruire l'immagine prospettica delle



157. Per staccare su una retta perpendicolare al quadro un segmento di lunghezza nota, come la larghezza di una finestra, si costruiscono, nello spazio, due rette capaci di staccare, sulla traccia del piano cui appartengono, un segmento di pari lunghezza: la prospettiva di queste due rette fornisce la prospettiva del segmento considerato.

In pratica, per misurare la retta **a** nel modo che abbiamo descritto (fig. 158), si staccano sulla traccia del geometrale, a partire dalla traccia della retta da misurare, i segmenti di cui si vuole la prospettiva; si trova poi il punto di misura, riportando sulla fuga del geometrale, cioè sull'orizzonte, la distanza della fuga della retta dal centro di proiezione, che si legge con un ribaltamento; si disegnano, infine, le prospettive delle rette **p** e **q**. Le immagini **p'** e **q'** di queste rette incontrano l'immagine **a'** della retta **a** nei punti **P'** e **Q'**, che sono le immagini o proiezioni degli estremi **P** e **Q** dei due segmenti che volevamo rappresentare.

Osserviamo ora che le rette **p** e **q** possono essere costruite su uno qualsiasi degli infiniti piani che appartengono alla retta **a**, che si vuole misurare. Si potrebbero, ad esempio, tracciare sulla parete sinistra della stanza e ancora servirebbero allo scopo, staccando sulla retta data e sulla traccia del piano della parete sinistra segmenti uguali.

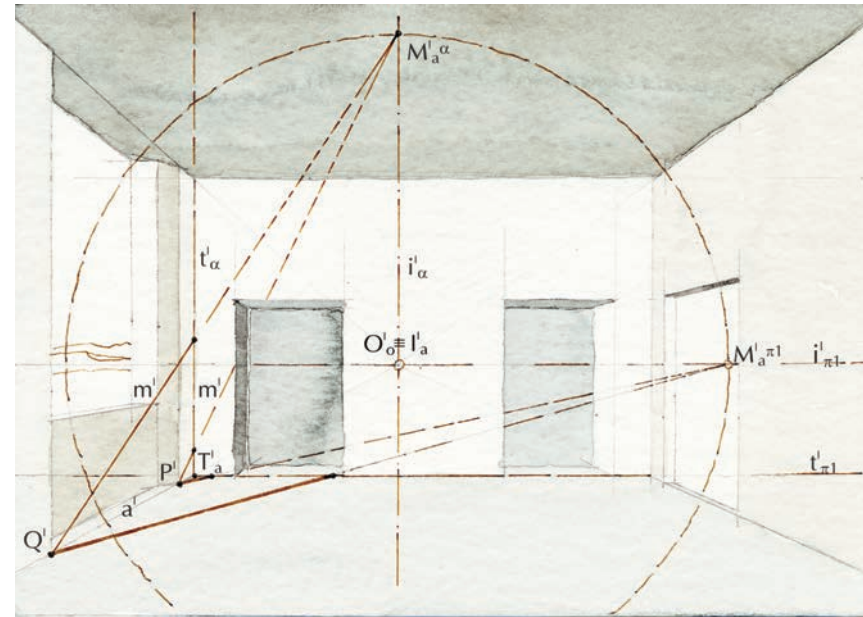
A ciascuno dei piani che appartengono alla retta corrisponde una schiera di rette, come **p** e **q**, capaci di misurarla, e il relativo punto di fuga, che è il punto di misura, sulla fuga del piano cui le rette appartengono.

Ma abbiamo prima stabilito che, nel caso particolare di una retta perpendicolare al quadro, il punto di misura appartiene al cerchio di distanza. Perciò tutti i punti del cerchio di distanza sono punti di misura delle rette perpendicolari al quadro, al variare del piano sul quale si compie l'operazione di misura.

Riassumiamo ora le operazioni di misura, che abbiamo illustrato, in una forma più generale (fig. 159).

In primo luogo, ed è importante notarlo, si costruisce un piano α , che passi per la retta **a** data: la traccia di questo piano, t'_α appartiene dunque alla traccia della retta da misurare, T'_a mentre la fuga del piano, i'_α , passa per la fuga della retta, I'_a ; la traccia e la fuga del piano sono rette parallele.

Sulla traccia del piano α si riportano, a partire dalla traccia della retta da misurare, i segmenti che si debbono staccare sulla retta oggettiva; gli estremi di questi segmenti sono le tracce delle rette usate per misurare (**m**).



159. Le rette che si usano per misurare possono essere tracciate su uno qualsiasi dei piani che passano per la retta da misurare, ad esempio su un piano verticale.

Si ribalta sul quadro il piano individuato dai punti O^l , O^l_o e I^l_a : questo ribaltamento permette, infatti, di misurare la distanza del punto di fuga della retta da misurare (I^l_a) dal centro di proiezione O^l .

Si riporta la distanza della fuga della retta dal centro di proiezione sulla fuga del piano α , staccando su quest'ultima il punto di misura M^l_a .

Si costruiscono, infine, le prospettive m^l delle rette m (rette di misura), che staccano sulla a^l le prospettive dei punti desiderati.

Costruzione del modello prospettico d'angolo

Il modello prospettico d'angolo (*prospettiva d'angolo*, un tempo detta *accidentale*) è un modello grafico nel quale appaiono scorciati entrambi i lati orizzontali dell'ambiente parallelepipedo che stiamo considerando. Gli spigoli verticali sono invece paralleli al quadro.

Per impostarlo seguiremo un criterio nuovo, più vicino alle esigenze del disegno. Nei paragrafi precedenti, infatti, abbiamo costruito la macchina prospettica e, da questa, abbiamo dedotto il modello grafico. Ora invece faremo l'opposto, costruiremo gli elementi direttamente nel modello grafico e ne ricaveremo le caratteristiche della macchina prospettica (fig. 160).

Immaginiamo associati al modello geometrico ridotto, tre assi cartesiani a due a due perpendicolari. L'asse y coincide con il lato più lungo, quello che abbiamo prima rappresentato perpendicolare al quadro, l'asse x e l'asse z appartengono, rispettivamente, al lato più corto e a uno degli spigoli verticali.

Rappresentiamo ora il centro di proiezione O^l , per mezzo del cerchio di distanza, e il piano geometrico, per mezzo della traccia $t^l_{\pi 1}$ e della fuga $i^l_{\pi 1}$. Avremo cura di disegnare il cerchio il più grande possibile, eventualmente anche tagliandone la parte inferiore. La fuga del geometrico passerà per il punto principale O^l_o , poiché il piano proiettante parallelo al geometrico, che la individua, è perpendicolare al quadro e contiene perciò la distanza principale.

Disegniamo ora, nel modo che ci sembra più idoneo allo scorcio che vogliamo ottenere, l'immagine x^l dell'asse x . Questo segno, di

per sé, suggerisce l'idea della retta ma non la rappresenta nel senso proprio del modello grafico. Per ottenere questo risultato bisogna infatti individuare la traccia e la fuga della retta.

Noi abbiamo inteso costruire l'asse x sul piano geometrico, perciò la sua traccia (T^l_x) appartiene alla traccia $t^l_{\pi 1}$ del piano e la fuga (I^l_x) alla fuga del medesimo, $i^l_{\pi 1}$. Solo la dichiarazione di questi due elementi conferisce al modello il potere di restituire la retta oggettiva x nello spazio. Infatti, la retta oggettiva può essere ricostruita applicando al suo modello la procedura, già illustrata, della ricostruzione nello spazio:

- si colloca il centro di proiezione O^l davanti al quadro, sulla perpendicolare che ha piede nel punto principale a una distanza eguale al raggio del cerchio di distanza;

- si costruisce la retta $x = O^l I^l_x$ che proietta la direzione della retta oggettiva x e, pertanto, le è parallela;

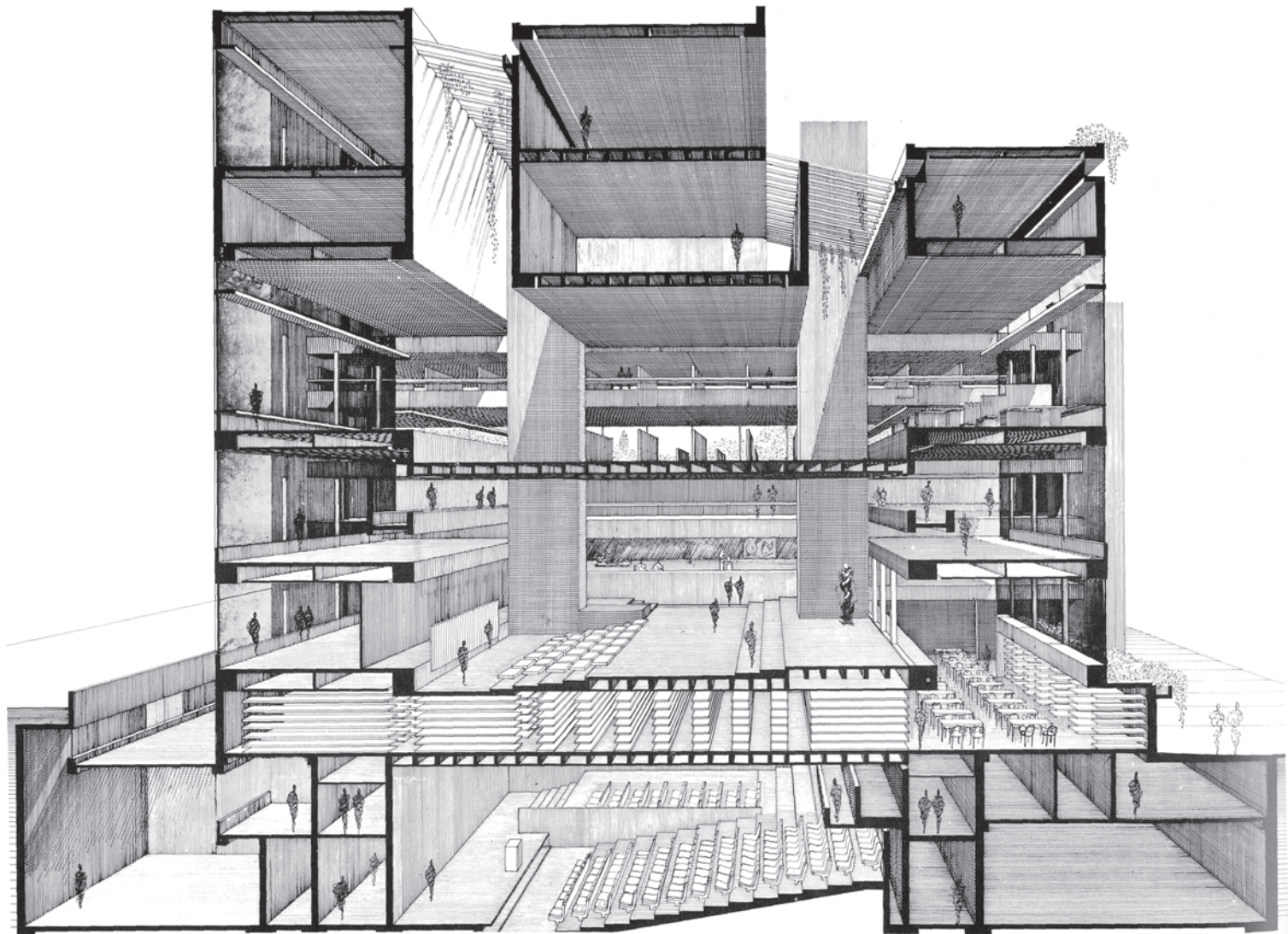
- si costruisce, nello spazio, la retta che passa per il punto T^l_x ed è parallela alla x : è questa la retta oggettiva x , che il modello grafico restituisce.

Vogliamo ora costruire la prospettiva y^l dell'asse y . Osserviamo che la retta y , proiettante la direzione di y , essendo parallela a y per costruzione, è ortogonale a x e incontra il quadro nel punto I^l_y , fuga delle rette dello spazio parallele all'asse y .

Ribaltiamo allora il piano dell'orizzonte, che contiene x e y , sul quadro, ruotandolo intorno alla cerniera $i^l_{\pi 1}$. Il centro di proiezione O^l si porta in O^* , la x si porta in $x^* = O^* I^l_x$.

Costruiamo ora, sul quadro, la perpendicolare alla retta x^* nel punto O^* : è questo il ribaltamento y^* della retta y che giace nel piano dell'orizzonte. Il punto comune alla $i^l_{\pi 1}$ e alla y^* è il punto di fuga I^l_y dell'asse y .

È chiaro che qualsiasi retta y^l la quale abbia fuga nel punto I^l_y che abbiamo costruito sarà l'immagine di una retta y dello spazio, ortogonale alla x . Potremo dunque scegliere l'immagine dell'asse y secondando le esigenze dello scorcio prospettico che vogliamo ottenere e assegnare, di conseguenza, la traccia T^l_y nel punto in cui la retta y^l prescelta incontra la traccia $t^l_{\pi 1}$ del geometrico. Gli assi x e y , che abbiamo così rappresentato, si incontrano nell'origine



161. Paul Rudolph ha sapientemente usato la sezione prospettica per illustrare l'articolazione dei suoi interni.

T del sistema di riferimento associato al modello geometrico. L'immagine z' dell'asse z appartiene dunque a T' . L'asse z è verticale: l'esperienza già fatta con le rette verticali del modello frontale e l'intuito ci portano senz'altro a disegnare z' perpendicolare all'orizzonte $i'_{\pi 1}$. Osserviamo, tuttavia, che l'asse z , per essere verticale, è parallelo al piano di quadro: per costruirne la fuga, dovremmo perciò condurre, per il centro di proiezione, una parallela a z , che risulterà anch'essa parallela al quadro e avrà in comune con esso non un punto, ma una direzione. Il punto di fuga dell'asse z , e di tutte le rette ad esso parallele, è dunque la direzione: $I'_z{}^\infty$. Ciò significa, semplicemente, che tutte le rette verticali avranno, in questo modello grafico, immagini parallele, ortogonali all'orizzonte. Consideriamo ora il piano coordinato xy : è evidente che coincide con il geometrale e , perciò, ha fuga e traccia pure coincidenti con la fuga e la traccia di quello.

Il piano xz , verticale, taglia il quadro in una retta t'_{xz} la traccia, pure verticale. Questa traccia appartiene alla traccia dell'asse z , per le note condizioni. La fuga del piano è parallela alla traccia e appartiene alla fuga della retta, passa, perciò, per I'_x .

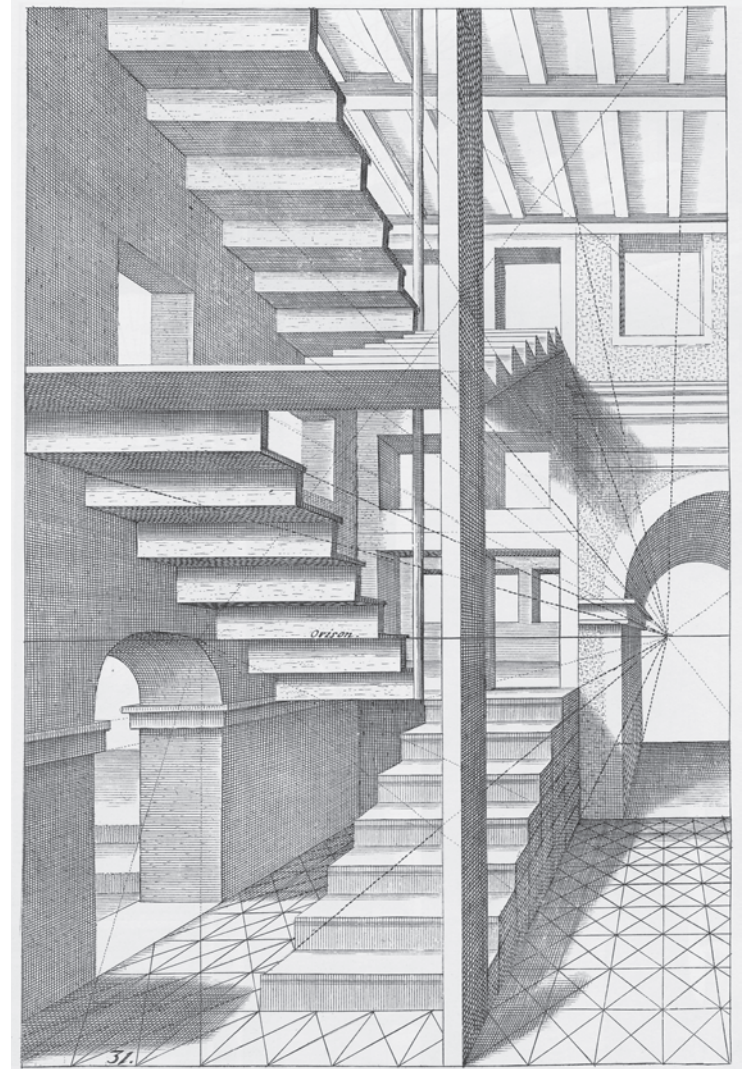
Allo stesso modo possiamo completare la rappresentazione del piano yz , con t'_{yz} e i'_{yz} entrambi verticali e appartenenti ai punti omonimi (traccia e fuga) dell'asse y .

Per completare la rappresentazione dello spazio interno, dovremo rappresentare la retta r , che si trova in quota sopra l'asse x , e la retta s , che si trova alla medesima quota, sopra l'asse y . Queste due rette individuano il piano β del soffitto.

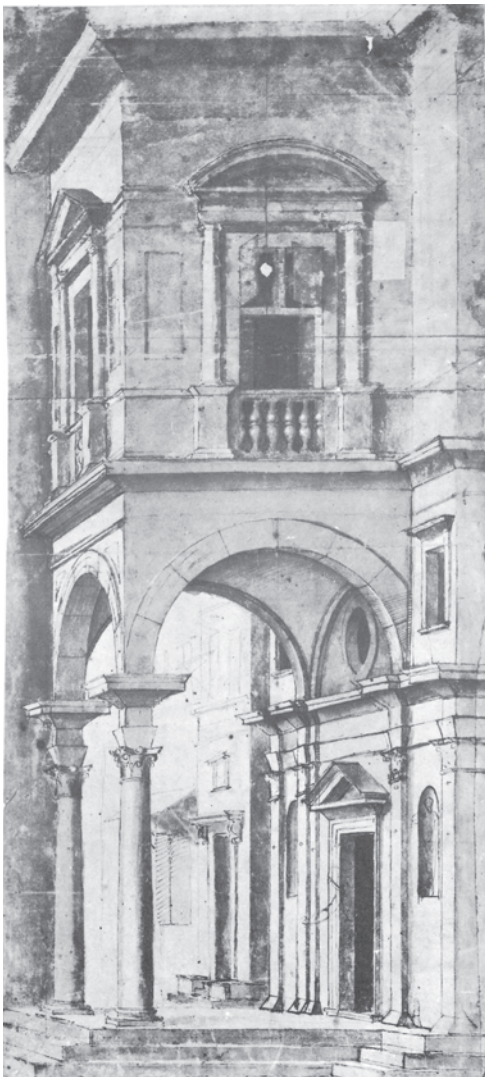
La traccia della retta r appartiene alla traccia del piano xz (parete sinistra) e dista, dalla traccia di x , in misura pari all'altezza della sala che stiamo rappresentando. Basterà, dunque, riportare questa altezza, nella scala del modello, sulla t'_{xz} per costruire il punto T'_r . La fuga della retta r è il punto $I'_r \equiv I'_x$ e, perciò, la retta r' può essere tracciata.

La r' incontra l'asse z' in un punto V' , immagine di uno dei vertici superiori dell'involucro della sala. Per questo punto V' e per I'_y si può condurre la s' , immagine della retta s .

Osserviamo che la retta s' incontra la t'_{xz} in un punto T'_s che è la



162. Jan Vredeman de Vries ottiene effetti di intensa spazialità con la semplice conoscenza degli elementi della prospettiva frontale.



163. Raffaello, Prospettiva teatrale, 1512; da notare la posizione dell'orizzonte, posto in basso, all'altezza dello sguardo di un uomo che sta per salire i gradini del portico: una scelta che conferisce realismo alla scena e slancio all'architettura.

sua traccia e che, se il disegno del modello grafico è accurato, si trova alla stessa quota del punto T'_r .

I due punti T'_r e T'_s individuano la traccia t'_β del piano del soffitto, che deve risultare parallela all'orizzonte.

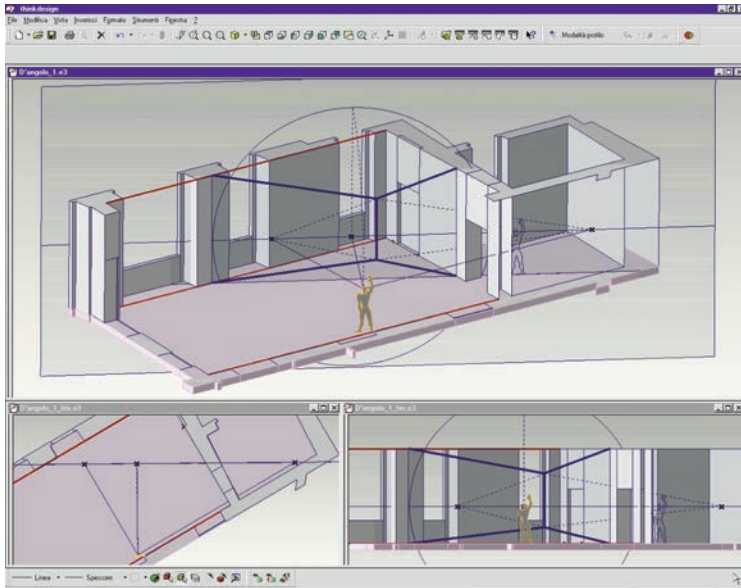
A questo punto, il rettangolo che ha per vertici le tracce delle quattro rette x , y , r e s , descrive efficacemente il quadro, che taglia obliquamente lo spazio del modello.

MISURA DELL'ASSE X

Per misurare l'asse x , come anche le altre rette rappresentate, basta applicare l'algoritmo descritto e giustificato precedentemente. In primo luogo (fig. 164) si sceglie il piano sul quale effettuare la misura; sia il piano xy .

In secondo luogo, si costruisce il punto di misura. Occorre, dunque, misurare la distanza del centro di proiezione dalla fuga della retta. Questa distanza $O'I'_x$ si misura immediatamente sul ribaltamento del piano dell'orizzonte, già effettuato, e, precisamente, nel segmento $O*I'_x$. Conviene, ora, aprire il compasso a un raggio pari alla suddetta distanza, puntarlo nella fuga della retta, I'_x , e tracciare un cerchio. È questo il luogo di tutti i punti del quadro che distano dalla fuga della retta tanto quanto quest'ultima dista dal centro di proiezione. Il punto di misura $M^l_{x^{xy}}$ appartiene dunque a questo cerchio e, poiché abbiamo deciso di utilizzare per la misura il piano xy , appartiene alla fuga di quest'ultimo. I punti che soddisfano queste condizioni sono due, in realtà; giustificheremo tra poco questo risultato, per ora ci limitiamo a utilizzare il punto, dei due, che è più facilmente accessibile.

Possiamo infine procedere alla misura. Per prima cosa costruiamo l'immagine della retta m , che passa per l'origine T , $m^l = M^l_{x^{xy}}T^l$. Questa retta taglia la traccia t^l_{xz} in un punto T^l . A partire da questo punto, riportiamo sulla traccia del piano xy le distanze dei punti che vogliamo costruire, ad esempio in P^l e Q^l e, come sempre, nella scala del modello. Tracciamo infine le rette m^l che passano per i punti così costruiti e che hanno fuga nel punto di misura: queste rette tagliano la x^l nelle prospettive P^l e Q^l dei punti che si volevano misurare.



165. Data la prospettiva d'angolo di un ambiente, completa del codice geometrico che le compete e cioè del cerchio di distanza e delle tracce e fughe delle rette rappresentate, è facile ricostruire nello spazio tutti gli elementi rappresentati e la posizione del quadro.

Le operazioni di misura di angoli e segmenti, che abbiamo appreso, e le operazioni di ricostruzione nello spazio delle rette rappresentate ci permettono ora, volendo, di ricostruire tutte le caratteristiche della macchina prospettica e le posizioni relative del quadro, del centro di proiezione e del modello geometrico, così come avevamo preannunciato (fig. 165).

Costruzione e significato del cerchio di misura

Consideriamo una retta del geometrale in posizione generica e sia $r^l = T_r^l I_r^l$ la sua rappresentazione e $M_r^l \pi^l$ il punto di misura relativo al piano geometrale.

Costruiamo il piano verticale γ , che appartiene alla retta. La traccia del piano t_γ^l appartiene, dunque, alla traccia T_r^l della retta; la fuga del piano i_γ^l , alla fuga I_r^l . Traccia e fuga sono parallele.

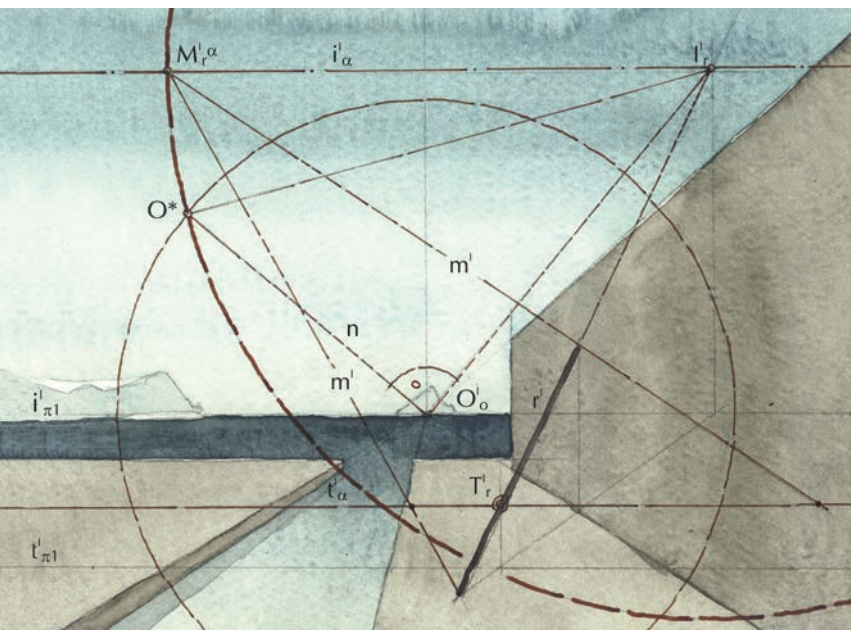
Ci proponiamo di misurare la retta r utilizzando rette m che appartengono al piano verticale γ (fig. 166).

La fuga di queste rette, cioè il punto di misura $M_r^l \gamma$, appartiene alla fuga del piano e dista, come sappiamo, dalla fuga della retta tanto quanto quest'ultima dista dal centro di proiezione O^l , nello spazio. Questa distanza è misurata dal segmento $I_r^l O^*$ che si ottiene ribaltando il piano dell'orizzonte, ovvero il piano individuato dalla retta r e dalla distanza principale $O^l O_o^l$.

Per misurare la retta r sul piano γ occorre, dunque:

- costruire il punto di misura $M_r^l \gamma$, riportando, con il compasso, la distanza $I_r^l O^*$ sulla fuga del piano;
- costruire le tracce delle rette m riportando, sulla traccia del piano t_γ^l , segmenti uguali a quelli di cui si vuole costruire la prospettiva;
- tracciare la prospettiva m^l delle rette di misura; queste rette staccano, sulla r^l , i segmenti desiderati.

Come si può constatare, la distanza del punto di misura dalla fuga della retta non è mutata, e ciò, perché i triangoli che hanno per lati, rispettivamente, la retta r , la traccia del piano γ , la retta m e la retta r , la fuga del piano γ , la retta m , sono, pur sempre, simili e perciò isosceli.



167. I punti di fuga delle rette capaci di misurare una retta qualsivoglia, perciò anche in posizione generica, costituiscono un luogo geometrico che si dice *cerchio di misura*.

Tracciamo, allora, la circonferenza che ha centro nella fuga della retta I'_r e raggio pari alla distanza $I'_r M'_r \pi^1 = I'_r O'$. Questa circonferenza è il luogo geometrico dei punti del quadro che distano dalla fuga della retta tanto quanto la fuga della retta dista dal centro di proiezione O' , nello spazio, e prende il nome di *cerchio di misura*. Quale che sia il piano utilizzato per operare la misura, il punto di misura relativo appartiene al cerchio di misura della retta misurata.

Osserviamo, infine, che il cerchio di misura taglia la fuga del piano in due punti. Infatti, due sono gli angoli che la retta da misurare forma con traccia del piano che la contiene e perciò due sono le possibili direzioni della rette di misura, secondo che taglino l'uno o l'altro dei due angoli.

Il cerchio di misura contiene perciò una doppia infinità di punti di misura della retta considerata.

Consideriamo ora una retta r in posizione generica. La sua rappresentazione è completa quando siano dati:

- il cerchio di distanza, che stabilisce la posizione del centro di proiezione rispetto al quadro π^1 ;
- la rappresentazione completa della retta, cioè la sua immagine r' , la traccia T'_r e la fuga I'_r ;
- il rapporto di riduzione del modello: $1:n$.

I suddetti elementi sono sufficienti per compiere, come segue, l'operazione di misura (fig. 167):

- si costruisce la retta $I'_r O'_o$;
- si costruisce la normale n alla retta $I'_r O'_o$ nel punto principale O'_o ;
- assumendo la retta suddetta come cerniera si ribalta il triangolo $O' I'_r O'_o$: il centro di proiezione O' si porta in O^* , nella intersezione tra il cerchio di distanza e la normale n ;
- Il segmento $O^* I'_r$ misura la distanza della fuga da O' ed è, perciò, il raggio del cerchio di misura;
- si apre il compasso a un raggio pari alla lunghezza del segmento $O^* I'_r$ e, con centro in I'_r , si traccia il cerchio di misura;
- si rappresenta un qualsiasi piano α che appartenga alla retta: t'_α appartiene alla traccia T'_r ; i'_α appartiene alla fuga I'_r ; traccia e

fuga del piano sono parallele. Si può adottare un piano qualsiasi, purché t'_α sia distinto da i'_α ; ma è evidente che l'accuratezza della costruzione sarà tanto maggiore quanto maggiore è la distanza della traccia dalla fuga del piano scelto per misurare. La fuga del piano α stacca sul cerchio di misura i due punti di misura della retta: si sceglie quello più facilmente accessibile $M'_r{}^\alpha$;

- si riportano sulla traccia del piano α i segmenti che si vogliono staccare sulla retta r , nella scala del modello;
- si costruiscono, infine, le prospettive delle rette m , per gli estremi dei segmenti suddetti, che sono le loro tracce, e per il punto di misura, che è la loro fuga. La prospettiva delle rette di misura, stacca, sulla prospettiva della retta r , le prospettive dei punti che si volevano costruire.

Soluzione dei problemi di inaccessibilità

TRACCE INACCESSIBILI

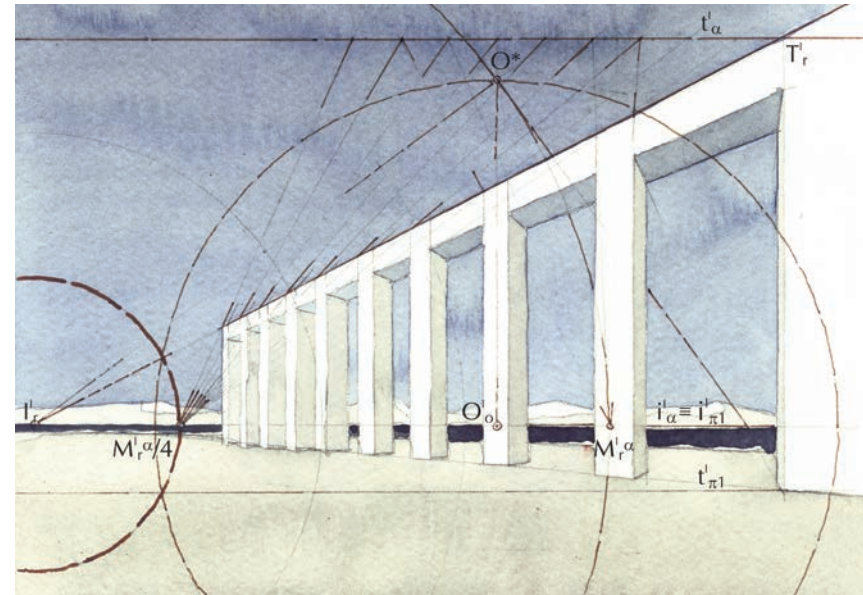
Quando si misura una retta in profondità, occorre riportare, sulla traccia del piano che ospita la misura, molti segmenti contigui. Accade sovente che il foglio non riesca a contenerli, soprattutto nella rappresentazione di spazi esterni. Questo problema è noto come *problema delle tracce inaccessibili*. Si utilizza allora un semplice espediente, detto dei *punti di misura ridotti*.

Si costruisce il cerchio di misura nel modo già detto. Con il medesimo centro, si costruisce un secondo cerchio di misura, ridotto, con un raggio pari a $1/4$ o, comunque, a una frazione semplice del primo (fig. 168).

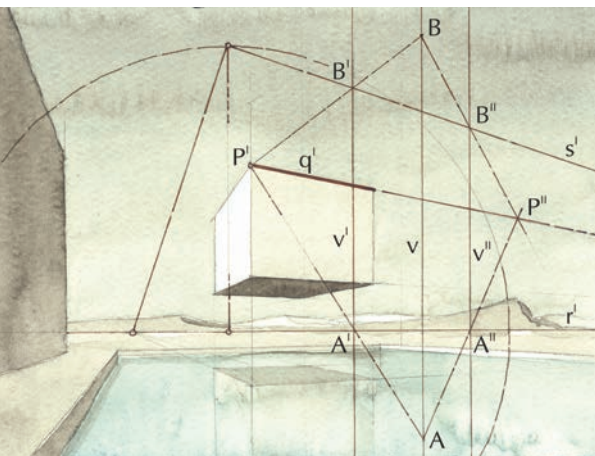
La fuga del piano prescelto per operare la misura, stacca, sul cerchio di misura ridotto il punto di misura ridotto della retta considerata, che si suole contrassegnare con il simbolo $M'/4$ (ad esempio $M'_r{}^\alpha/4$: leggi *emme primo di erre su alfa - quarti*).

Si riportano poi, sulla traccia del piano che ospita la misura, segmenti che sono ridotti in pari misura, nell'esempio $1/4$.

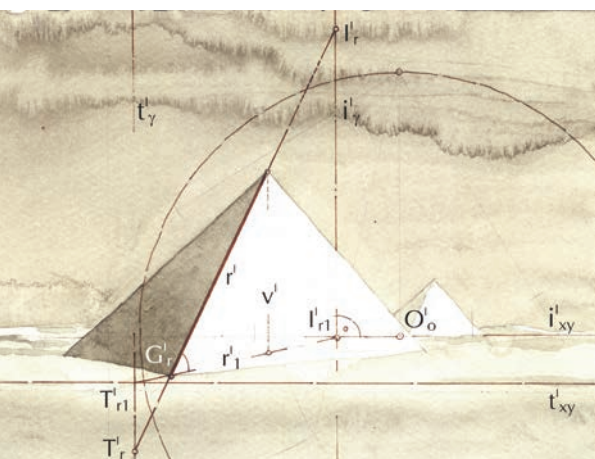
In questo modo si riesce a misurare uno spazio assai profondo.



168. Quando si debbono misurare grandi profondità, le tracce delle rette usate per la misura possono avere posizioni inaccessibili, cioè fuori del disegno. In questo caso si ricorre all'artificio dei cerchi di misura ridotti.



169. Quando la fuga di rette parallele cade fuori del disegno, si può applicare il teorema di Desargues per ottenere la necessaria convergenza anche senza disporre del punto di fuga.



170. Per costruire l'angolo di pendenza di una retta, ad esempio lo spigolo di una piramide, si costruisce il piano verticale che passa per la retta e si taglia, con questo piano, il geometrico, cioè il piano orizzontale di riferimento. La retta intersezione dei due piani è la proiezione ortogonale della retta data sul piano orizzontale.

La costruzione si giustifica, dal punto di vista geometrico, osservando che le rette di misura, come sopra costruite, hanno la proprietà di staccare, sulla retta da misurare e sulla traccia del piano che la contiene, segmenti che stanno tra loro in un noto rapporto, (nell'esempio 1:4).

FUGHE INACCESSIBILI

Un altro, frequente, problema del disegno prospettico è quello di condurre una retta a un punto di fuga inaccessibile (fig. 169).

Siano, ad esempio, r' e s' due rette che concorrono in un punto di fuga $I_r' \equiv I_s'$, inaccessibile perché situato fuori dal foglio. Se si deve condurre a quel medesimo punto di fuga una retta q' per il punto P' , assegnato, si procede come segue:

- si tagliano le due rette date, r' e s' , con tre rette parallele qualsiasi: v' , v , v'' ; la retta v' taglia r' e s' , rispettivamente, nei punti A' e B' ; la retta v'' nei punti A'' e B'' ;
 - si costruiscono le rette $P'A'$ e $P'B'$ che tagliano la retta v , rispettivamente, nei punti A e B ;
 - si costruiscono le rette AA'' e BB'' , che si incontrano nel punto P'' .
- La retta PP'' converge nel punto di fuga, inaccessibile, delle rette r' e s' .

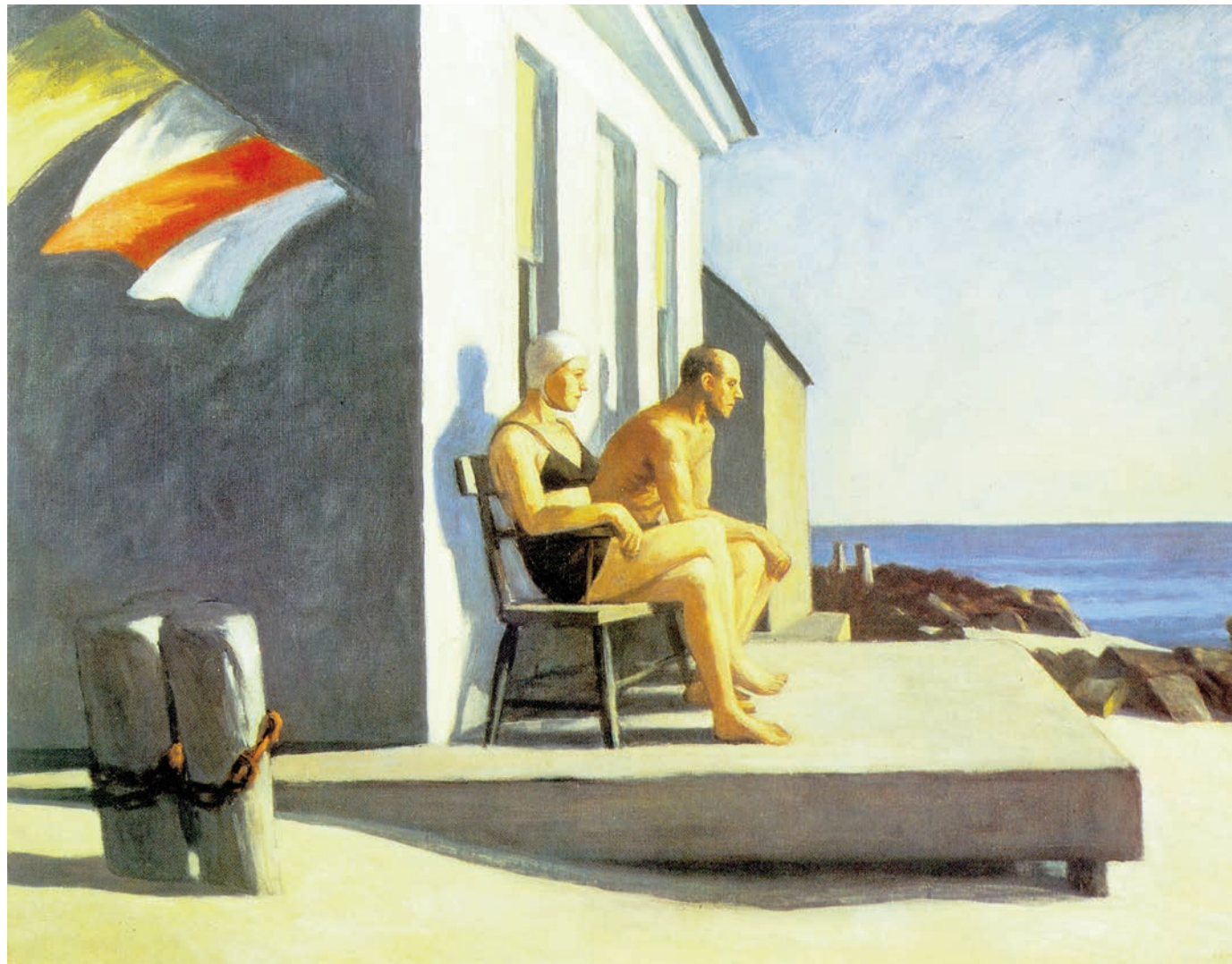
Questa semplice ed efficace costruzione applica un celebre teorema di Girard Desargues.

Costruzione e misura degli angoli

COSTRUZIONE DELL'ANGOLO DI PENDENZA DI UNA RETTA

Data una retta obliqua r qualsiasi, per costruirne l'angolo di pendenza, si proietta la retta sul piano orizzontale xy assumendo come centro di proiezione la direzione verticale (perpendicolare al piano xy). Si costruisce poi la retta r_1 , intersezione del piano proiettante verticale con il piano orizzontale e proiezione di r su xy . L'angolo cercato è quello formato da r e da r_1 (fig. 170).

Per costruire il piano proiettante, nello spazio, si conduce una retta verticale v da un punto qualsiasi di r in quota, purché distinto dal piano orizzontale: r e v individuano il piano proiettante γ .



171. Edward Hopper,
Sea watchers (1952);
lo sguardo dei due
personaggi è diretto
all'orizzonte; la contratta
prospettiva delle case
mostra a noi che
osserviamo il quadro,
quanto profondo è
questo orizzonte; come
amava ripetere Orseolo
Fasolo, la prospettiva
descrive l'infinito in
termini finiti.



172. Grande poeta della luce, Edward Hopper è anche un maestro della prospettiva che a volte, come in questo caso, diventa protagonista della sua pittura.

Nell'ambiente informatico si può costruire r_1 applicando il comando che costruisce la proiezione ortogonale di r su xy .

Nel modello prospettico, la costruzione del piano verticale γ è immediata, giacché la sua fuga (i'_γ) appartiene alla fuga della retta r (l'_r) ed è perpendicolare alla fuga dei piani orizzontali i'_{xy} .

Il punto in cui la fuga i'_γ del piano verticale incontra l'orizzonte i'_{xy} è il punto di fuga (l'_{r1}) della retta intersezione dei due piani, cioè di r_1 .

L'immagine della retta r_1 si può costruire in due modi:

- se è dato il punto G_r in cui la retta incontra il piano orizzontale, che è detto *traccia geometricale* della retta, si conduce per G'_r la retta $r'_1 = G'_r l'_{r1}$;

- se, invece, è data la traccia T'_r della retta r , si costruisce la traccia t'_γ del piano γ per T'_r e si trova il punto in cui la t'_γ incontra la traccia t'_{xy} del piano xy : è questa la traccia (T'_{r1}) della retta r_1 , che individua, con l'_{r1} , la proiezione r'_1 .

COSTRUZIONE DELL'ANGOLO DI PENDIO DI UN PIANO

Dato un piano obliquo α qualsiasi, per misurarne l'angolo di pendio, si deve, per prima cosa, costruire una sua retta di massima pendenza (fig. 173). A questo scopo:

- si costruisce una qualsiasi retta p_1 , ortogonale alla retta g_α , che α ha in comune con il piano orizzontale xy e che si dice *traccia geometricale del piano*;

- si innalza su p_1 un piano verticale γ ,

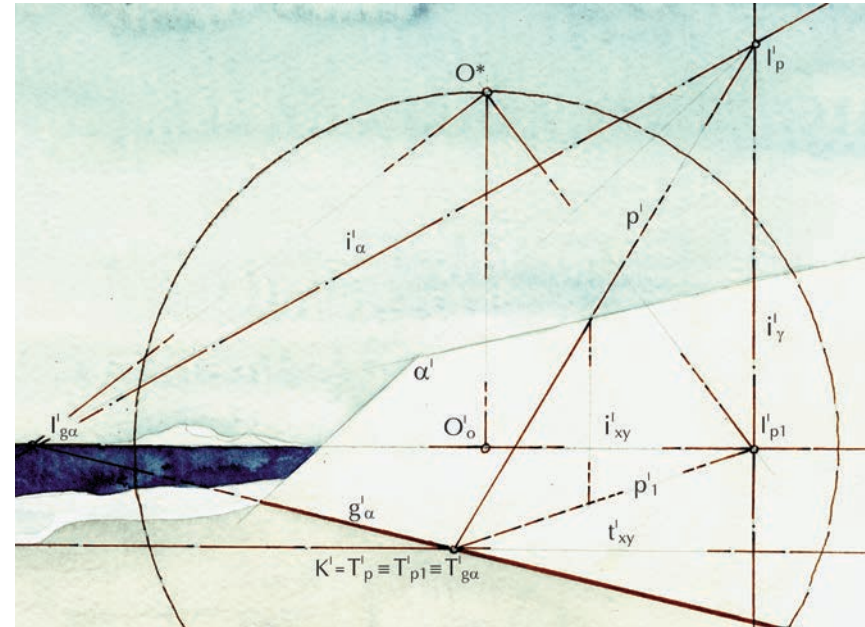
- si costruisce la retta intersezione di α e di γ , che è la retta di massima pendenza p , cercata.

L'angolo formato dalle rette p e p_1 è l'angolo richiesto.

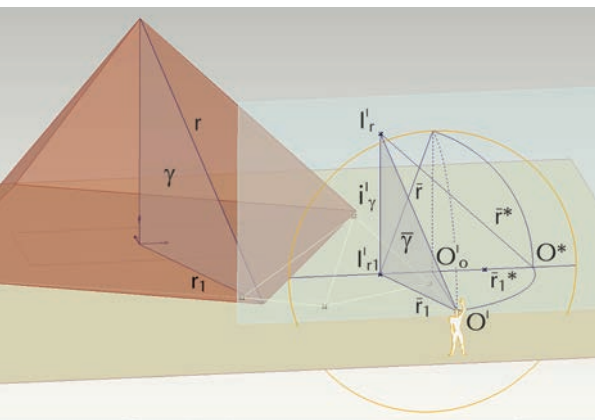
Nel modello prospettico, si procede esattamente come indicato, tracciando per prima la p_1 ortogonale alla g_α e innalzando su di essa il piano γ .

La costruzione del piano verticale γ è immediata, giacché la sua fuga (i'_γ) appartiene alla fuga della retta p_1 (l'_{p1}) ed è perpendicolare alla fuga dei piani orizzontali i'_{xy} .

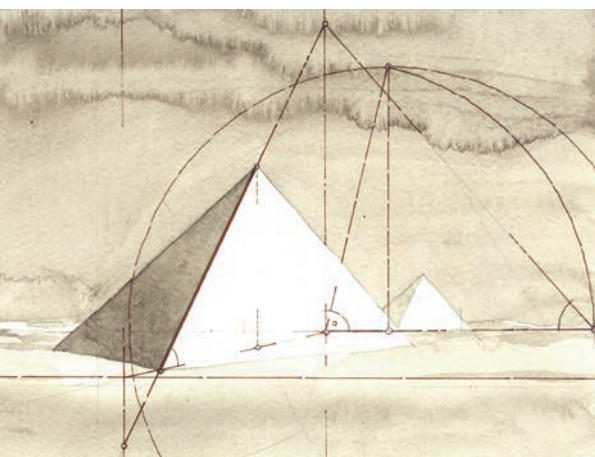
Il punto in cui la fuga i'_γ del piano verticale incontra la fuga i'_α del piano dato, è il punto di fuga l'_p della retta intersezione dei due piani, cioè di p .



173. Per costruire l'angolo di pendio di un piano dato, si taglia il piano con un altro piano, verticale e perpendicolare a una qualsiasi retta orizzontale del piano dato. Questo piano, detto *della sezione retta*, taglia il piano dato secondo una retta di massima pendenza e il piano orizzontale secondo la proiezione ortogonale di quest'ultima sul medesimo.



174. Per misurare l'angolo di pendenza di una retta generica, si ribalta sul quadro il piano proiettante parallelo al piano verticale che contiene la retta e la sua proiezione geometricale.



175. Nel modello grafico, la fuga del piano verticale è la cerniera del ribaltamento; la distanza del centro di proiezione dalla cerniera deve essere misurata con un altro ribaltamento che si dice *ausiliario*.

L'immagine p^l della retta p si costruisce semplicemente, osservando che la medesima passa per il punto K , comune al piano γ e alla retta g_α .

MISURA DELL'ANGOLO DI PENDENZA DI UNA RETTA

Per misurare l'angolo di pendenza di una retta, nel modello prospettico, si considerano le due rette r e r_1 , che proiettano le direzioni delle due rette oggettive r e r_1 , e si osserva (fig. 174):

- che sono incidenti in O^l , essendo entrambe proiettanti;
- che individuano perciò un piano proiettante, parallelo al piano γ delle rette oggettive;
- che l'angolo da esse formato è congruente con l'angolo che si vuole misurare, per costruzione.

È dunque chiaro che, ribaltando il piano γ sul piano di quadro, si potrà avere l'opportunità di osservare l'angolo in vera forma e di misurarlo.

La cerniera del ribaltamento (fig. 175) è la fuga i_γ del piano γ . Il centro di proiezione O^l descrive, nel ribaltamento del piano, un arco di circonferenza che giace in un piano perpendicolare alla cerniera, cioè, in questo caso, nel piano dell'orizzonte. Il punto O^l si porta, dunque, in un punto O^* che appartiene alla i_γ e dista dalla cerniera stessa tanto quanto il centro di proiezione O^l . La distanza in questione, misurata dal segmento $O^l i_{r1}$, si misura facilmente sul ribaltamento del piano dell'orizzonte, per riportarla poi sulla i_γ .

L'angolo cercato è dunque $r^* r_1^* = i_{r1}^* O^l i_{r1}$.

Si noti che il punto O^* , ribaltamento del centro di proiezione nel movimento del piano γ , coincide con il punto di misura della retta r_1 sul piano xy . Tale circostanza deve essere considerata del tutto accidentale, giacché il punto in questione è ottenuto con il trasferimento nello spazio del centro di proiezione O^l , mentre il punto di misura è il punto di fuga, cioè l'immagine della direzione, di un fascio di rette!

RIBALTAMENTO DI UN PIANO PROIETTANTE

È il caso di soffermarsi sulla operazione di ribaltamento che abbiamo effettuato, che è diversa da quella, già nota, che consisteva nel ribaltare piani proiettanti perpendicolari al quadro.

Possiamo allora distinguere due diversi casi nel ribaltamento di un piano proiettante:

- il caso in cui il piano proiettante è perpendicolare al quadro;
- il caso in cui il piano proiettante è obliquo rispetto al quadro.

Nel primo caso l'operazione di ribaltamento è immediata, nel secondo è mediata, infatti: nel primo caso la distanza del punto O^I dalla cerniera è nota, essendo uguale alla distanza principale, raggio del cerchio di distanza, mentre, nel secondo caso, tale distanza deve essere preventivamente misurata.

Vediamo allora i diversi procedimenti nel caso del ribaltamento immediato e in quello del ribaltamento mediato.

Ribaltamento immediato:

- si costruisce (fig. 176) per il punto principale (O^I_o) la retta perpendicolare alla cerniera; il punto O^* , ribaltamento del centro di proiezione, è il punto comune alla retta come sopra costruita e al cerchio di distanza (uno dei due, quello più facilmente accessibile, secondo il verso del ribaltamento);
- si disegnano, quindi, i ribaltamenti delle due rette proiettanti che descrivono l'angolo da misurare.

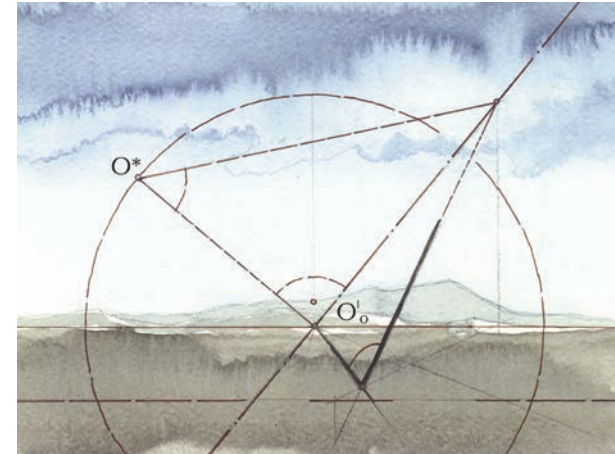
Ribaltamento mediato:

- si costruisce (fig. 177) per il punto principale (O^I_o) la retta n , perpendicolare alla cerniera, che taglia la cerniera stessa in un punto J ;
- si assume questa retta come cerniera di un ribaltamento immediato (vedi procedimento precedente) al fine di misurare la distanza $O^I J$ del centro di proiezione dalla cerniera del ribaltamento da effettuare;
- il punto O^* , ribaltamento del centro di proiezione, appartiene alla retta n e dista dal punto J quanto il centro di proiezione O^I .

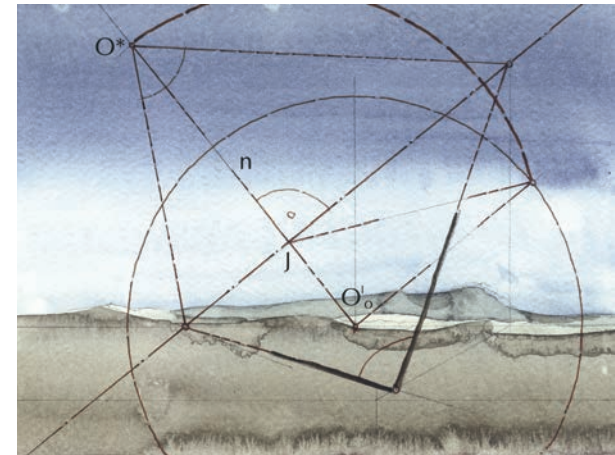
MISURA DELL'ANGOLO DI PENDIO DI UN PIANO

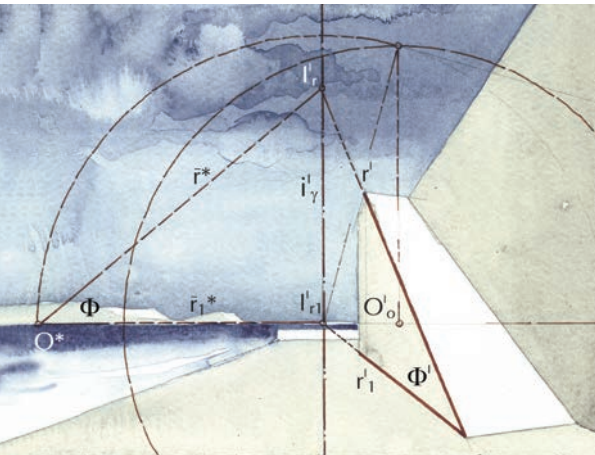
La misura dell'angolo di pendio di un piano è una diretta e semplice applicazione di quanto abbiamo visto poc'anzi: il problema, una volta costruita la retta p , e perciò anche la sua proiezione geometrica p_1 , si risolve come illustrato nei paragrafi precedenti: si ribalta, cioè, sul quadro il piano proiettante parallelo al piano oggettivo individuato dalle due rette p e p_1 .

176. Ribaltamento immediato: il piano da ribaltare è perpendicolare al quadro; la sua fuga, che è la cerniera del ribaltamento, passa per il punto principale e la distanza del centro di proiezione è già nota, perché è la distanza principale.

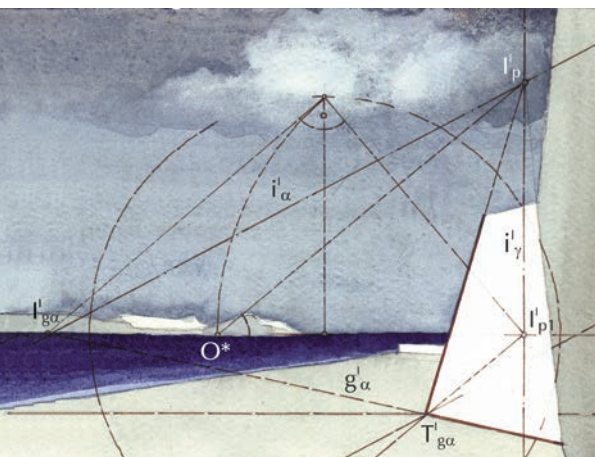


177. Ribaltamento mediato: il piano da ribaltare è in posizione generica e la sua fuga, che è la cerniera del ribaltamento, non passa per il punto principale; conseguentemente occorre misurare la distanza del centro di proiezione dalla cerniera servendosi, prima, di un piano perpendicolare al quadro.





178. Per costruire una retta di dato angolo di pendenza, si ribalta il piano verticale cui appartiene e, sul ribaltamento del piano, si costruisce l'angolo. Il lato inclinato dell'angolo, che è il ribaltamento della retta proiettante relativa, stacca sulla fuga del piano verticale la fuga della retta voluta.



179. Per costruire un piano di dato angolo di pendio e data traccia geometricale, basta costruire una sua retta di massima pendenza: la fuga del piano appartiene alla fuga della retta di massima pendenza e alla fuga della traccia geometricale.

Costruzione di rette e piani inclinati

Vogliamo ora risolvere i medesimi problemi dal punto di vista del progettista, ovvero: costruire una retta di data pendenza e un piano del quale è dato l'angolo di pendio.

COSTRUZIONE DI UNA RETTA DI DATA PENDENZA

Si vuole il modello prospettico di una qualsiasi retta r , che abbia un angolo di pendenza di Φ gradi (fig. 178). Si comincia col costruire la proiezione geometricale della retta r_1 . Si innalza poi il piano verticale γ sulla r_1 . La fuga del piano è i_γ^l perpendicolare all'orizzonte. Si ribalta ora il piano γ e, sulla retta r_1^* , a partire dal punto O^* , si costruisce la retta r^* che forma l'angolo Φ voluto. Questa retta incontra la fuga del piano i_γ^l nella fuga l_γ^l della retta voluta.

COSTRUZIONE DI UN PIANO DI DATO ANGOLO DI PENDIO

È data la traccia geometricale g_α di un piano α del quale si conosce l'angolo di pendio Ψ . Si vuole costruire il modello prospettico del piano (fig. 179).

In primo luogo si costruisce la proiezione p_1 della retta del geometricale ortogonale a g_α .

Si innalza poi su p_1 il piano verticale γ .

Si ribalta γ sul quadro e si misura l'angolo voluto, individuando così la fuga della retta p , retta di massima pendenza del piano α .

Si costruiscono infine due rette parallele alla p e due parallele alla g_α per delimitare il piano.

Si disegna la fuga del piano, che è individuata dalla l_p^l e dalla $l_{g_\alpha}^l$. Ricordiamo, infatti, che se una retta appartiene a un piano, la traccia della retta appartiene alla traccia del piano e la fuga della retta alla fuga del piano. Dunque, il piano individuato da due rette incidenti e distinte, deve avere la fuga che appartiene a entrambe le fughe delle due rette e la traccia che appartiene ad entrambe le tracce delle due rette.

Si disegna, infine, la traccia del piano, che è parallela alla fuga e passa per la traccia della g_α , retta data di α . Due rette orizzontali e due di massima pendenza delimitano il piano, in modo che sia più facile percepirlo, inserito in un paesaggio reale.

Costruzione di enti geometrici perpendicolari

Da ultimo dobbiamo esaminare la costruzione degli enti geometrici che sono reciprocamente perpendicolari.

Nel modello prospettico, il piano può essere costruito e rappresentato per mezzo di rette orizzontali e di rette di massima pendenza, ed è questo il caso più comune nel disegno di architettura; oppure può anche semplicemente essere individuato per mezzo della fuga e della traccia.

Esamineremo questo caso, generale, per primo, per poi discutere il caso particolare.

Dato dunque un piano α , per mezzo della fuga i'_α e della traccia t'_α , si vuole costruire la fuga l'_n delle normali al piano (fig. 180).

Il suddetto punto di fuga si ottiene costruendo per il centro di proiezione O^1 una retta n , parallela alle normali al piano, che ne proietta la direzione, incontrando il quadro π^1 nel punto cercato l'_n . Si tratta, dunque, di costruire, per O^1 , una retta perpendicolare al piano α , proiettante e parallelo al piano α oggettivo.

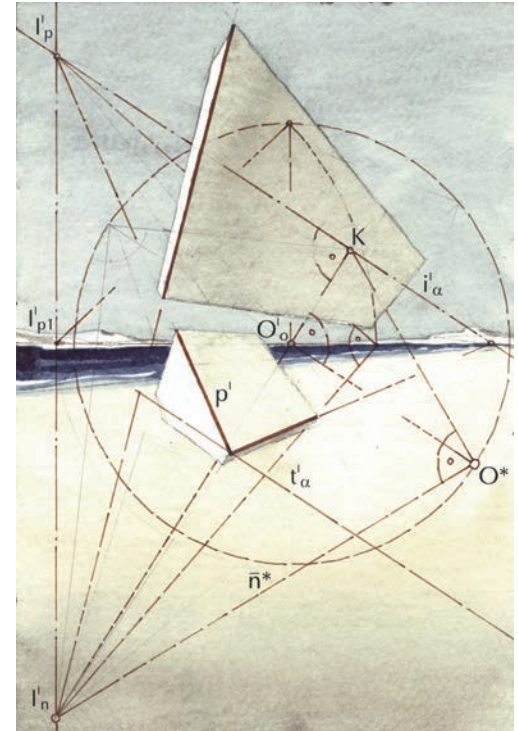
Costruiamo per O^1_o una retta ortogonale a i'_α , e sia K il piede di detta perpendicolare: il piano γ , individuato da questa retta e dal centro di proiezione O^1 , è perpendicolare alla i'_α : infatti contiene due rette ortogonali a i'_α , quella da noi costruita e la distanza principale $O^1O^1_o$, che è perpendicolare al quadro per costruzione (e perciò anche a i'_α , che è una retta del quadro).

La retta n può ora essere costruita, nel piano γ , o meglio, sul ribaltamento dello stesso. La cerniera di questo ribaltamento è la O^1_oK ; il centro di proiezione si porta in O^* , sul cerchio di distanza; la retta O^*K è il ribaltamento di una retta del piano α (precisamente l'intersezione di quest'ultimo con γ).

Perciò si traccia la retta n^* , ortogonale alla O^*K , per O^* : il punto in cui quest'ultima incontra la cerniera del ribaltamento O^1_oK è il punto di fuga l'_n che volevamo costruire.

Quando, invece, si dispone di una più completa rappresentazione del piano e si sono costruite, in particolare, le rette di massima pendenza p , il problema può essere risolto in modo più rapido. Basta infatti costruire la retta n^* nel ribaltamento del piano vertica-

180. Quando un piano inclinato è completamente rappresentato è immediato costruire la fuga delle rette perpendicolari al piano: basta condurre per il punto principale una retta ortogonale alla fuga del piano. Questa retta taglia la fuga del piano verticale nella sezione retta nel punto di fuga delle perpendicolari al piano dato.





181. Edward Hopper ha una grande sensibilità per l'architettura, che spesso ritrae in rapporto alla natura. In questa prospettiva d'angolo la visuale è dilatata ai limiti del cerchio di distanza (*Study for Pretty Penny*, 1939).

le individuato dalle rette che proiettano le direzioni di \mathbf{p} e \mathbf{p}_1 , a partire dal punto \mathbf{O}^* , il medesimo utilizzato per misurare l'angolo di pendio del piano. Anche in questo caso, però, avremo applicato il procedimento generale descritto trattando della doppia proiezione ortogonale, infatti il piano delle rette \mathbf{p} e \mathbf{p}_1 è perpendicolare al piano α assegnato, per costruzione. Abbiamo dunque costruito un piano perpendicolare al piano α e, all'interno di detto piano, abbiamo costruito la retta \mathbf{n} ortogonale alla retta \mathbf{p} comune ai due piani α e γ .

Si osservi, infine, che disponendo della fuga del piano α e della fuga del piano verticale, che contiene \mathbf{p} , la retta $\mathbf{O}'_0\mathbf{K}$ stacca il punto \mathbf{I}'_n sulla fuga suddetta. Un solo segno, in questo caso, fornisce il risultato voluto.

Costruzione della prospettiva del cerchio

La prospettiva del cerchio si può costruire semplicemente considerando il cerchio alla stregua di una qualsiasi linea grafica. Chi segue questa via si limita a costruire le proiezioni di due assi o di due corde del cerchio e delle relative tangenti negli estremi. Questa tecnica, tuttavia, conduce a buoni risultati solo a condizione di sapere, in anticipo, qual è la curva proiezione che dovrà essere tracciata. Per rispondere a questa legittima domanda, occorrono alcune semplici considerazioni.

In primo luogo, bisogna osservare che le rette che proiettano i punti del cerchio descrivono un cono e che, di conseguenza, la curva prospettiva del cerchio è l'intersezione di questo cono con il piano di quadro; è perciò una delle curve già studiate da Apollonio e che oggi si raccolgono, appunto, nella famiglia delle coniche: l'ellisse, la parabola e l'iperbole (cui bisognerebbe aggiungere il cerchio come caso particolare e la coppia di rette e il punto come coniche degeneri).

Per dire, ora, se si tratti di un'ellisse, di una parabola o di un'iperbole, bisogna prima ricordare alcune semplici proprietà di queste curve: l'ellisse è una curva chiusa i cui punti sono tutti accessibili; la parabola ha un punto a distanza indeterminata che è la direzio-

ne del suo asse; l'iperbole possiede due punti a distanza indeterminata, che sono le direzioni degli asintoti.

Infine, bisogna considerare i punti del piano π^1 che passa per il centro di proiezione ed è parallelo al quadro (fig. 182): tutti i punti di questo piano, detto *piano anteriore*, hanno per prospettiva un punto a distanza indeterminata. Infatti, se si proietta un qualsiasi punto del piano anteriore, la retta proiettante risulta parallela al quadro.

Tutto ciò premesso è facile rispondere al quesito che abbiamo posto:

- se il cerchio considerato non ha alcun punto in comune con il piano anteriore, la sua prospettiva è un'ellisse;
- se il cerchio è tangente al piano anteriore, la sua prospettiva è una parabola;
- se il cerchio è secante al piano anteriore, la sua prospettiva è un'iperbole.

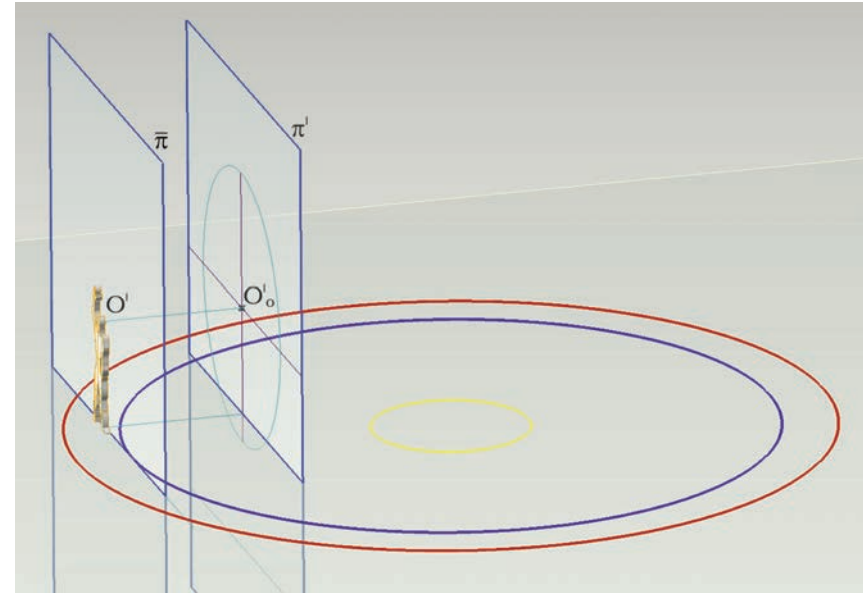
Infatti, se il cerchio non ha punti in comune con il piano anteriore, tutti i suoi punti si proiettano in punti accessibili, cioè nei punti di un'ellisse.

Se il cerchio è tangente al piano anteriore, un solo suo punto ha proiezione a distanza indeterminata, e si trasforma nella direzione dell'asse della parabola.

Infine, se il cerchio ha in comune con il piano anteriore due punti, come quando lo seca, due punti hanno proiezioni inaccessibili e si trasformano nelle direzioni degli asintoti dell'iperbole.

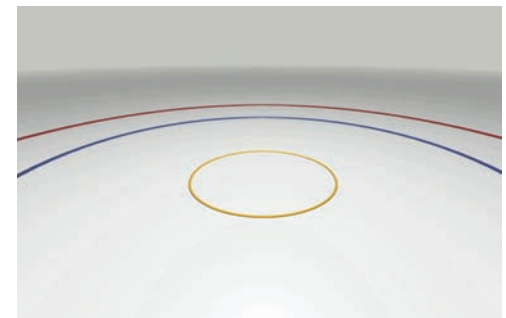
Nella pratica del disegno d'architettura è facile imbattersi in tutte queste condizioni contemporaneamente, quando ci si trovi all'interno di uno spazio a pianta centrale, come il Pantheon.

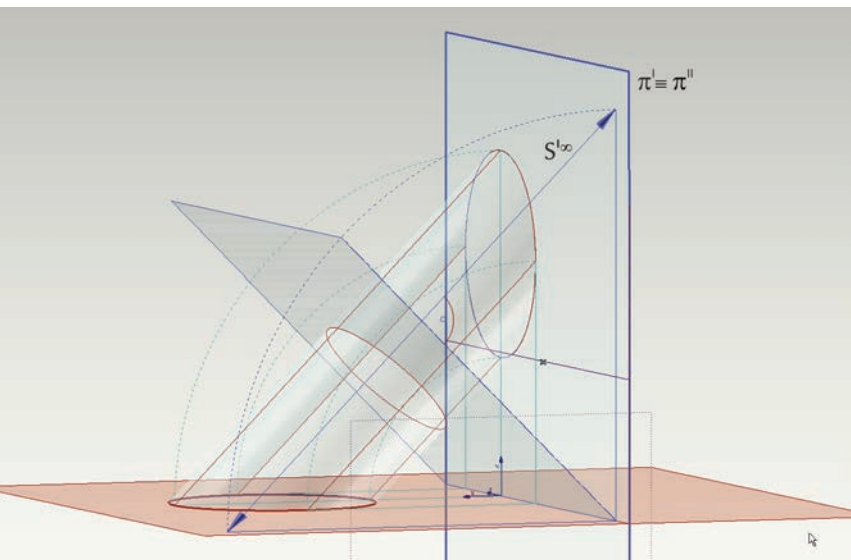
Nell'ambiente informatico, la vista prospettica viene generata automaticamente, una volta stabilito il centro di proiezione e il quadro, e conseguentemente in modo automatico sono gestite le trasformazioni proiettive del cerchio. Ad esempio (fig. 183), i tre cerchi giallo, blu e rosso, rispettivamente esterno, tangente e secante al piano anteriore, sono rappresentati con un'ellisse, una parabola e un'iperbole, esattamente come vuole la teoria che abbiamo enunciato.



182. La prospettiva di un cerchio può essere un'ellisse, una parabola o un'iperbole secondo la posizione del cerchio rispetto al piano proiettante parallelo al quadro, che si dice *piano anteriore*.

183. Quando il cerchio è esterno al piano anteriore (com'è il cerchio giallo) la sua prospettiva è un'ellisse; quando il cerchio è tangente al piano anteriore (blu) la sua prospettiva è una parabola; infine, quando il cerchio seca il piano anteriore, la sua prospettiva è un'iperbole.





184. Se ribaltiamo sul piano di quadro il piano che contiene un cerchio, è possibile istituire una omologia tra la prospettiva del cerchio e il suo ribaltamento, che risulta in vera forma. Questa omologia si dice, appunto, *omologia di ribaltamento*.

Nei modelli grafici, invece, occorre studiare la posizione di ogni cerchio rispetto al piano anteriore. A questo scopo, si costruisce la retta intersezione del piano che ospita il cerchio da studiare con il piano anteriore: chiameremo questa retta *retta anteriore*.

Bisogna ora portare il piano studiato, che comprende il cerchio e la retta anteriore, sul piano di quadro, in modo da poter operare sulle suddette figure.

COSTRUZIONE DELL'OMOLOGIA TRA PROSPETTIVA DEL CERCHIO E SUO RIBALTAMENTO

Sappiamo già che il modo più semplice di riportare un piano qualsiasi sul piano di proiezione è il ribaltamento. Abbiamo anche già osservato come, ribaltando un piano, tutti i suoi punti descrivano archi di circonferenza che giacciono in piani perpendicolari alla cerniera e come, a questi archi, si possano sostituire le relative corde. È facile constatare come queste corde siano perpendicolari al piano bisettore del diedro "spazzato" dal piano ribaltato, e come il suddetto piano bisettore sia piano di simmetria ortogonale tra la figura data e quella ribaltata (fig. 184).

È possibile, perciò, sostituire all'operazione di ribaltamento un'operazione di proiezione parallela che assume la direzione delle suddette corde come centro. Per far ciò basta considerare un secondo piano di proiezione, π'' , coincidente con π' . Questa sostituzione ha il notevole vantaggio di generare una relazione omologica tra la prospettiva e il ribaltamento delle corrispondenti figure piane.

Considereremo il caso che più frequentemente ricorre nel disegno di architettura: quello di un cerchio che appartenga al piano geometrico.

Costruiamo il piano γ proiettante e perpendicolare alla traccia del geometrico. Questo piano taglia il geometrico e il quadro secondo due rette incidenti. Si costruisce la bisettrice dell'angolo formato da queste due rette e si considera la direzione S^{p_0} che le è ortogonale, sempre all'interno di γ . Questa è la direzione desiderata, capace di proiettare le figure che appartengono al geometrico, sul quadro, in vera forma. Le figure che appartengono al geometrico saranno, perciò, proiettate da due centri diversi, il centro della

prospettiva e la direzione del ribaltamento, su due piani sovrapposti, il piano di quadro e il piano ribaltato, rispettivamente. E perciò, tra la prospettiva delle figure del geometrale e il loro ribaltamento risulta istituita una relazione omologica.

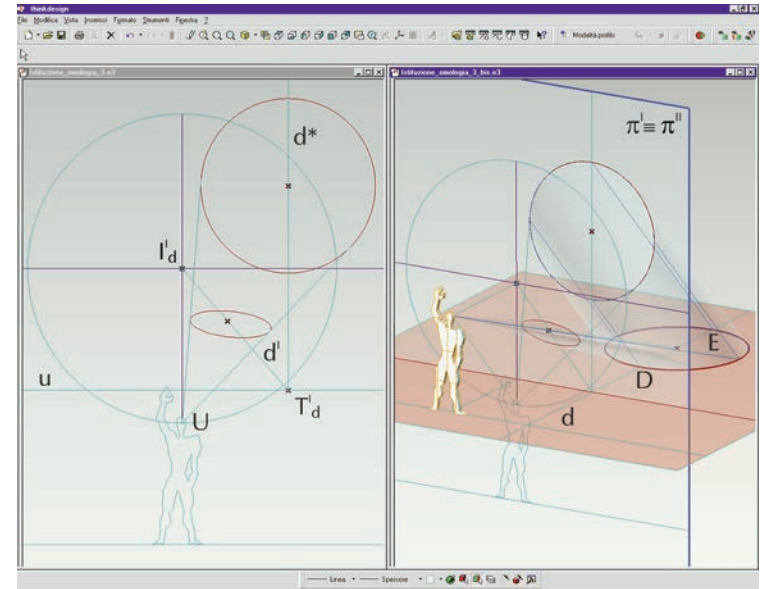
Il centro U di questa omologia, come sappiamo, è il punto in cui incontra il quadro la retta che appartiene ai due centri di proiezione, perciò la retta che passa per O^I e ha la direzione S^{p^o} . L'asse u dell'omologia è la retta che il quadro ha in comune con il piano che ospita le figure oggettive, cioè il geometrale.

Per definire completamente l'omologia, bisogna riconoscere una coppia di elementi corrispondenti. Consideriamo, allora, il diametro DE del cerchio dato (figg. 185, 186), che è perpendicolare al quadro: questo diametro appartiene ad una retta d che ha fuga, sull'orizzonte, nel punto I'_d e incontra l'asse dell'omologia nel punto T'_d . Ora, noi sappiamo che punti corrispondenti sono allineati con il centro, perciò I'_d dovrà essere allineato con I^{*d} , cioè con il ribaltamento del punto I_d . Ma noi sappiamo anche che I'_d è l'immagine di un punto a distanza indeterminata, perciò I^{*d} dovrà pure trovarsi a distanza indeterminata: ciò significa che la retta che allinea il centro dell'omologia U , il punto I'_d e il ribaltamento I^{*d} dovrà essere parallela alla retta d^* , corrispondente di d^I .

Questa considerazione, benché non sia immediata, permette di costruire una coppia di rette corrispondenti nell'omologia di ribaltamento, in un modo del tutto generale che può essere tenuto in ogni altro caso. Quando si deve operare su un piano generico, infatti, le costruzioni sopra esposte non mutano, anche se danno luogo a una diversa disposizione degli elementi dell'omologia.

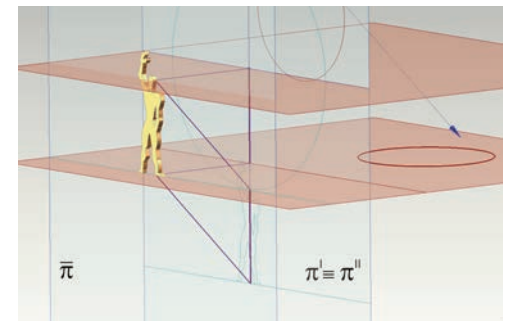
A questo punto si è in grado di riconoscere se la prospettiva del cerchio che vogliamo rappresentare sia un'ellisse, una parabola o un'iperbole. La retta anteriore è l'intersezione del piano anteriore con il piano sul quale giace il cerchio, ed è parallela, perciò, alla traccia e alla fuga di quest'ultimo. La sua proiezione sul quadro, secondo la direzione S^{p^o} , dista dalla traccia del piano che ospita le figure tanto quanto il centro U dell'omologia dista dalla fuga del medesimo piano.

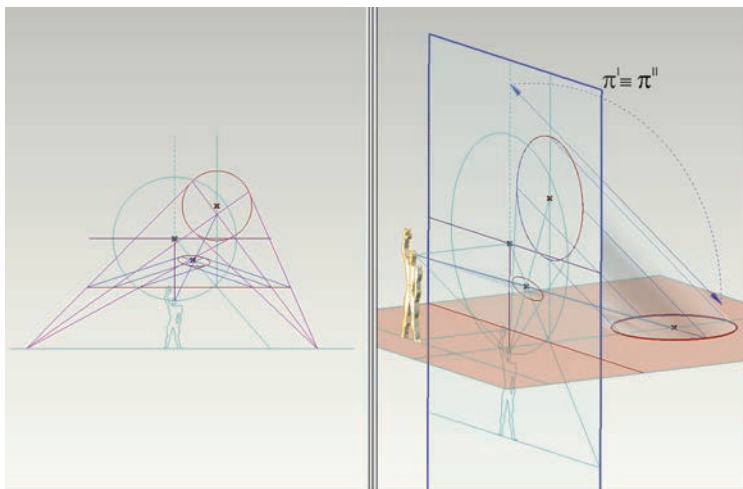
Infatti: piano di quadro e piano anteriore sono paralleli, per defini-



185. In una omologia di ribaltamento, l'asse è la traccia del piano ribaltato, il centro è il punto in cui incontra il quadro la retta che passa per il centro di proiezione della prospettiva ed è parallela alla direzione di ribaltamento. Due rette corrispondenti qualsiasi, come d^I e d^* , definiscono l'omologia.

186. Se si proietta sul quadro la retta anteriore secondo la direzione del ribaltamento, si ottiene la possibilità di studiare, sul quadro, la posizione del cerchio rispetto al piano anteriore.





187. Cerchio esterno alla retta anteriore. Si costruisce una coppia di diametri coniugati dell'ellisse proiezione, con relative tangenti alla curva negli estremi.

zione; piano del cerchio e piano che ne proietta la giacitura, generando sul quadro la fuga, sono paralleli per costruzione. Perciò la distanza tra il centro di proiezione e la fuga del piano del cerchio e la distanza tra la traccia di quest'ultimo e la retta anteriore, sono uguali. La proiezione parallela conserva l'equipollenza dei segmenti e, perciò, la distanza tra la proiezione della retta anteriore e la traccia del piano è uguale alla distanza tra il centro dell'omologia e la fuga dello stesso.

È ora possibile operare sul quadro i controlli che avevamo proposto: se la vera forma del cerchio, cioè il suo ribaltamento, risulta esterno alla proiezione della retta anteriore, la prospettiva del cerchio sarà un'ellisse, se tangente una parabola, se secante un'iperbole.

PROIEZIONE DEL CERCHIO IN UN'ELLISSE

Nel primo caso, quello in cui il cerchio si proietta in una ellisse, basta scegliere un qualsiasi punto del cerchio e la relativa tangente alla curva e costruire il punto corrispondente dell'ellisse e la corrispondente tangente. Quattro punti e quattro tangenti sono in genere sufficienti per un buon risultato.

Bisogna osservare, tuttavia, che, a differenza di quanto avviene nella proiezione parallela, in prospettiva una coppia di diametri ortogonali del cerchio si proietta in una coppia di corde dell'ellisse (e non in una coppia di diametri coniugati).

Se, per ottenere un disegno più accurato, si vuole una coppia di diametri coniugati dell'ellisse, occorre costruire una coppia di corde del cerchio, capace di generare, nella prospettiva, una coppia di diametri coniugati.

Basta ricordare allora, la più notevole proprietà dei diametri coniugati, che è quella di essere paralleli alle tangenti che la curva presenta negli estremi dell'altro diametro, il coniugato, appunto. Sapendo che i punti della retta anteriore hanno prospettive a distanza indeterminata, si deduce che rette incidenti nella retta anteriore, hanno prospettive parallele. Perciò, preso un punto qualsiasi sulla proiezione della retta anteriore (fig. 187), si conducono due tangenti al cerchio in vera forma e, per i relativi punti di contatto, si traccia una corda fino a incontrare nuovamente la proie-

zione della retta anteriore. Da questo punto si conducono ancora le tangenti e si costruisce la corda relativa, che passerà per il punto scelto inizialmente. Questa configurazione di corde e tangenti ha la proprietà di trasformarsi, nella prospettiva, in una coppia di diametri coniugati dell'ellisse proiezione del cerchio.

PROIEZIONE DEL CERCHIO IN UNA PARABOLA

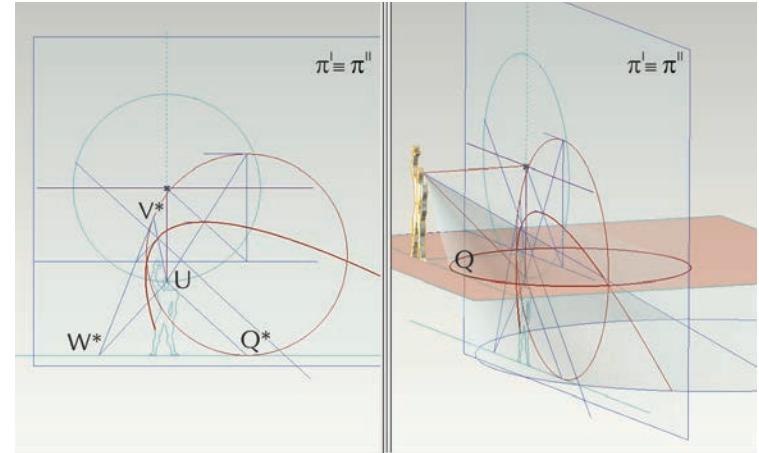
Nel secondo caso, nel quale il cerchio si proietta in una parabola, il punto Q , in cui il cerchio è tangente alla retta anteriore, si trasforma, nella prospettiva, in un punto a distanza indeterminata, che è la direzione dell'asse (fig. 188). Perciò la retta UQ^* fornisce la direzione dell'asse. Ma per tracciare effettivamente l'asse della parabola occorre un altro punto. L'asse ha in comune con la curva un punto accessibile, che è il vertice, e in questo punto la tangente alla curva è ortogonale all'asse. Costruiamo allora la retta per U , ortogonale alla UQ^* , e chiamiamo W^* il punto in cui questa retta incontra la proiezione della retta anteriore. Tutte le rette che escono da questo punto avranno, nella prospettiva, corrispondenti rette parallele tra loro e ortogonali all'asse. In particolare, la retta che esce da W^* ed è tangente al cerchio nella vera forma individua, nel punto di contatto V^* , il punto che corrisponde, nella prospettiva, al vertice della parabola. Noti l'asse e il vertice, basterà costruire altri due punti qualsiasi, con le relative tangenti, per avere un ottimo tracciamento della parabola.

PROIEZIONE DEL CERCHIO IN UN'IPERBOLE

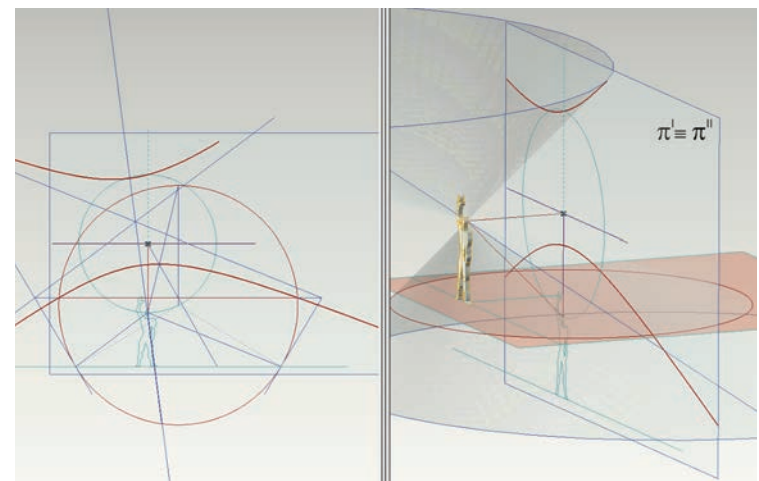
Infine, nell'ultimo caso, nel quale il cerchio si proietta in una iperbole, i due punti in cui la vera forma del cerchio incontra la proiezione della retta anteriore si trasformano, nella prospettiva, nelle direzioni degli asintoti della curva (fig. 189). Gli asintoti sono la prospettiva delle tangenti al cerchio in vera forma nei due punti suddetti, perciò incontrano queste due tangenti sull'asse dell'omologia e si possono così tracciare. Noti gli asintoti è possibile tracciare l'asse della curva e perciò, con opportuni passaggi dalla prospettiva alla vera forma, e viceversa, si trovano facilmente anche i vertici dell'iperbole, che resta così pienamente descritta.

RETTE LIMITE DELL'OMOLOGIA

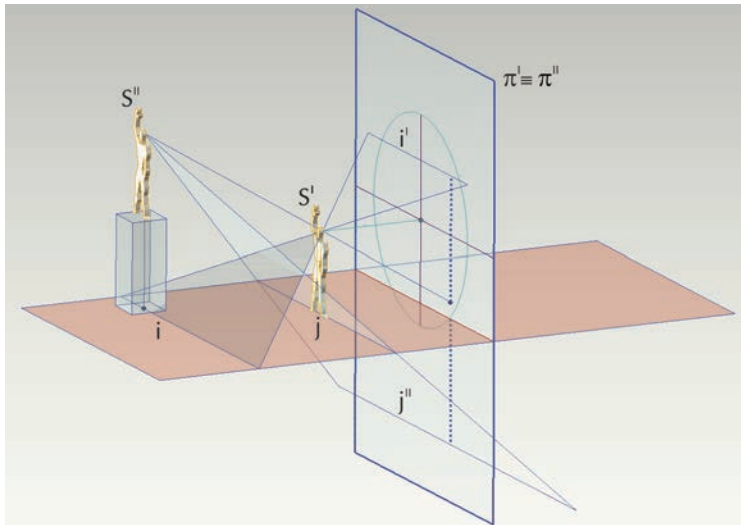
Le esperienze condotte sin qui, con la prospettiva del cerchio, ci



188. Cerchio tangente al piano anteriore. Si costruiscono: asse e vertice della parabola proiezione, più una coppia di punti con relative tangenti.



189. Cerchio secante il piano anteriore. Si costruiscono: asintoti dell'iperbole proiezione, assi e vertici della curva.



190. In una omologia, a ogni retta di un piano di proiezione corrisponde una retta del piano sovrapposto, e viceversa. Le rette che hanno, come corrispondenti, le giaciture dei due piani sovrapposti si dicono *rette limiti* dell'omologia. Queste rette si costruiscono facilmente: basta proiettare da ogni centro di proiezione la retta anteriore dell'altro.

consentono una interessante osservazione. Nella corrispondenza che lega la prospettiva e la vera forma delle figure esistono punti che si proiettano in direzioni e viceversa, ovvero punti accessibili che si proiettano in punti a distanza indeterminata, e viceversa. Nell'omologia di ribaltamento, ad esempio, i punti della fuga, nella prospettiva del piano che ospita le figure, hanno proiezioni a distanza indeterminata nella vera forma (o nel ribaltamento, se si preferisce) del piano. Viceversa, i punti della proiezione della retta anteriore, nella vera forma del piano, hanno prospettive a distanza indeterminata. In entrambi i casi questi punti appartengono a rette (nel nostro esempio, la fuga e la proiezione della retta anteriore): queste rette si dicono *rette limite* dell'omologia.

Una semplice regola consente di costruire le rette limite di una qualsiasi omologia (fig. 190): si considera uno dei due centri di proiezione, ad esempio S^I , e si trova la retta j del piano che ospita le figure, i cui punti hanno, da S^I su π^I , proiezione a distanza indeterminata (è quella che abbiamo chiamato *retta anteriore*). Ciò fatto si proietta la retta j da S^{II} su π^{II} , cioè sul piano di quadro sovrapposto a π^I e relativo al centro S^{II} ; il risultato di questa proiezione j^{II} è una delle due *rette limite* dell'omologia. L'altra si trova ripetendo le medesime considerazioni, ma a partire dal secondo centro di proiezione.

Conclusione

Se teniamo conto del profondo mutamento che è intervenuto, nel corso degli ultimi anni, nei contenuti e nelle tecniche dell'insegnamento universitario, e più ancora, del mutamento che è intervenuto nelle tecniche di rappresentazione, è inevitabile porre una domanda: *cui prodest?* A chi può tornare utile, e in che modo, la teoria cui abbiamo accennato in questi paragrafi dedicati alla prospettiva del cerchio?

Non certo all'architetto, che dispone oggi di strumenti capaci di disegnare in tempo reale la perfetta prospettiva di un cerchio, senza che egli debba riconoscere, in quella curva elegante, una ellisse, una parabola o un'iperbole.

Non certo all'artista, che può servirsi del proprio intuito, sempre che abbia necessità di disegnare una prospettiva.

Non certo al matematico, che cerca una sintesi e una astrazione di ben altro livello.

E allora perché dedicare tempo e risorse della mente, per studiare le relazioni proiettive dell'omologia di ribaltamento?

Ho due risposte a questa domanda.

La prima riguarda la padronanza delle tecniche di modellazione. Un conto è saper costruire una prospettiva, con la matita o con il calcolo, un conto è farlo consapevolmente, ottenendo esattamente il risultato voluto e non un risultato qualsiasi, generato più o meno a caso. Ora, è palese, non si può avere la padronanza della prospettiva del cerchio se non si conoscono gli effetti della proiezione centrale su questa figura.

La seconda risposta riguarda i modellatori informatici. Io attendo grandi sviluppi della Scienza della rappresentazione, dovuti alla sinergia dei due ambienti di lavoro, quello grafico e quello informatico. Con l'avvento dei computer il potere euristico del disegno, cioè il potere di suggerire nuove scoperte, è aumentato a dismisura. La facilità con cui i modellatori permettono di assimilare concetti che non sono certo di immediata comprensione è una ottima prova di questa sinergia. Per questa ragione

io credo, anche, che se Orseolo Fasolo avesse potuto vedere queste potenzialità della tecnologia informatica, l'avrebbe fatta sua, per proseguire la ricerca cui ha dedicato tutta la sua attività di studioso. Tutte le considerazioni sin qui esposte, relativamente alla prospettiva del cerchio, sono la sintetica trascrizione del saggio di Orseolo Fasolo *L'omologia di ribaltamento restituita alle sue origini prospettiche e applicata alla prospettiva del cerchio*, (FASOLO 1984).

Parte Terza

I modelli di linee e superfici



Linee speciali: spirali, volute, eliche

Spirali

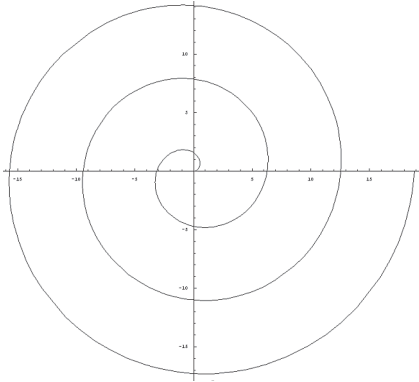
Sul piano si possono tracciare vari tipi di spirali (VACCARO 1970), noi prenderemo in esame solamente quelle più interessanti per l'architettura: la spirale di Archimede, la spirale logaritmica e la spirale iperbolica.

La *spirale d'Archimede* (fig. 191) è la curva descritta da un punto che si allontana uniformemente lungo una semiretta mentre questa uniformemente ruota intorno all'origine O . L'equazione di questa curva, in coordinate polari, è: $\rho = c^{\theta}$, dove c è una costante positiva.

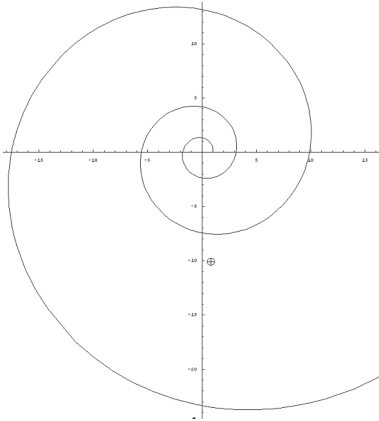
Nell'esempio qui riportato ρ varia tra 0 e 6π , compiendo tre giri. La spirale di Archimede nasce nell'origine O e la distanza tra le sue spire è costante.

La *spirale logaritmica* (fig. 192) è la curva descritta dall'equazione: $\rho = c^{\theta}$, dove c è una costante positiva. La spirale logaritmica non passa per l'origine, ma tende ad avvicinarsi al punto O , senza mai raggiungerlo. Per questo motivo, O si dice *punto asintotico* della curva. La distanza tra le spire aumenta con l'allontanarsi della curva dal suo punto asintotico. La spirale logaritmica gode di una notevole proprietà, che ne caratterizza la forma: la tangente in un punto generico P della curva forma un angolo costante con il raggio vettore (OP).

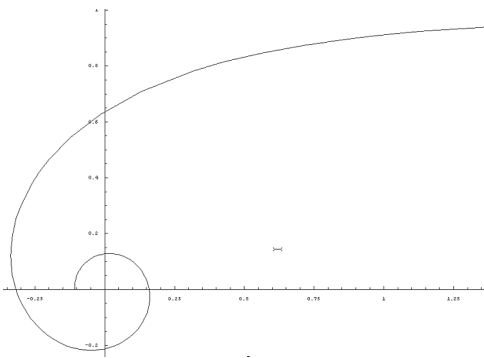
La *spirale iperbolica* (fig. 193) è la curva descritta dall'equazione: $\rho = c/\theta$, dove c è una costante positiva. Anche in questo caso la curva si avvicina all'origine O senza mai raggiungerla e perciò O si dice *punto asintotico* della spirale. La distanza tra le spire aumenta, con l'allontanarsi della curva dal suo punto asintotico, in modo più repentino, rispetto a quanto accade nella spirale logaritmica, e la curva tende a rettificarsi parallelamente all'asse polare, come si può osservare nella figura.



191. La spirale di Archimede ha costante la distanza tra le spire.



192. La spirale logaritmica ha costante l'angolo che la tangente in un punto forma con il raggio vettore.



193. La spirale iperbolica si apre con grande rapidità.

Volute

Le spirali trovano, nell'architettura classica, una importante applicazione alla voluta dell'ordine ionico. Esamineremo, qui di seguito, le costruzioni dettate dai trattatisti.

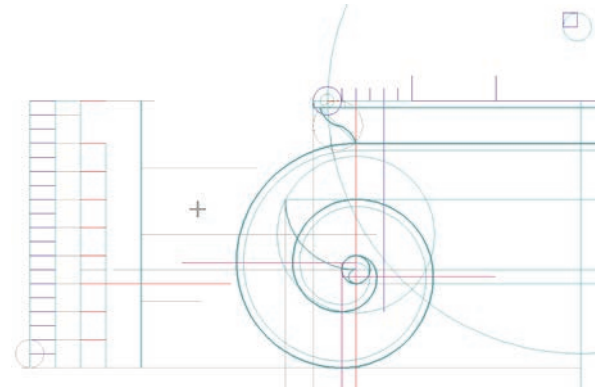
Vitruvio (I secolo a.C.) si limita a una descrizione sintetica, rimandando esplicitamente a un disegno, collocato alla fine del terzo libro del suo trattato e andato perduto con tutti gli altri, che precisava forma e rapporti.

Tra tutte le interpretazioni del testo vitruviano date nel corso dei secoli, quella più recente, di Decio Gioseffi, sembra la più attendibile (GIOSEFFI 1980). Gioseffi legge il testo in chiave operazionista e propone di costruire la voluta applicando il procedimento per la costruzione approssimata di una spirale d'Archimede (fig. 194). Si tratta di disegnare, innanzi tutto, un quadrato che abbia per lato il raggio dell'occhio, cioè del bottone che si trova al centro della voluta. Per stabilire la lunghezza di questo segmento, si divide l'altezza del capitello in nove parti e mezza. Il diametro dell'occhio è una di queste parti, il raggio è la metà. Questo quadrato deve essere collocato con un lato adiacente al cateto, dalla parte esterna, e con il centro sull'asse orizzontale dell'occhio. Facciamo riferimento alla voluta di sinistra, conviene allora numerare i vertici del quadrato in senso antiorario, cominciando da quello più alto, posto sul cateto. Si punta allora il compasso sul punto **1** e, con raggio pari alla distanza tra detto punto e il vertice inferiore dell'abaco, si traccia un quarto di cerchio; quindi si punta il compasso sul punto **2**, e si disegna il secondo quarto, per procedere così fino a quando la voluta si richiude sull'occhio nel quadrante interno, sotto l'abaco. Questo tracciamento ha il vantaggio di rispettare in tutto il testo di Vitruvio, senza nulla aggiungervi, fatta eccezione per il quadrato che definisce i centri di curvatura.

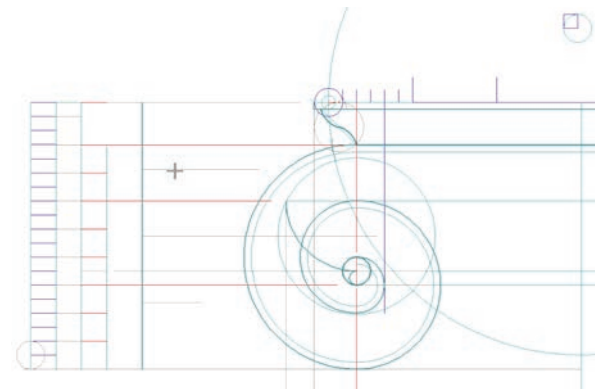
Alberti (1485) semplifica il tracciato di Vitruvio (fig. 195), utilizzando soltanto due centri: gli estremi del diametro verticale dell'occhio. Ne risulta una spirale di due soli giri che sembra inclinarsi verso l'interno.

Cesariano (1521) riprende l'interpretazione di Alberti (fig. 196) ma

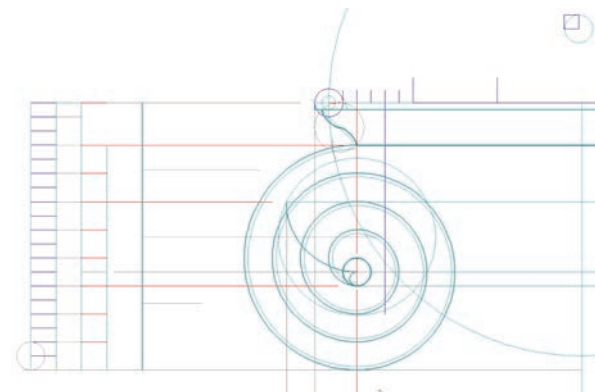
194. La costruzione della voluta ionica descritta da Vitruvio, secondo Decio Gioseffi.

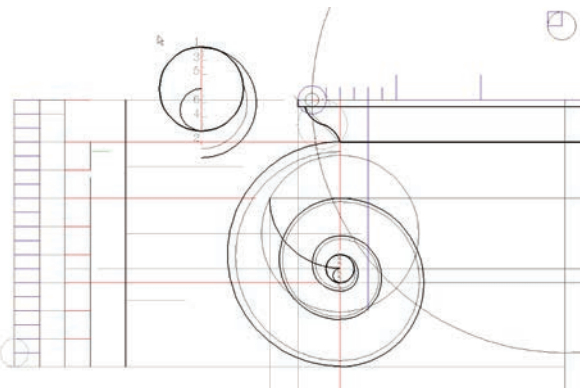


195. La costruzione della voluta secondo Leon Battista Alberti.

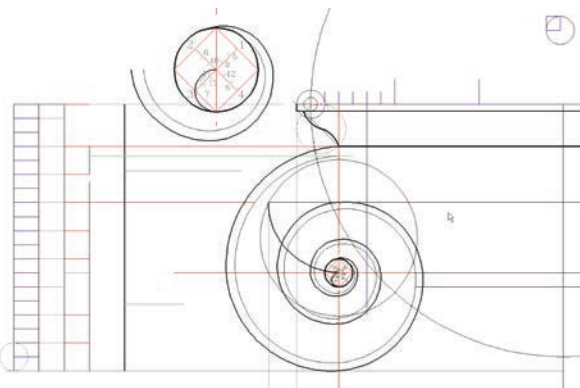


196. La costruzione della voluta secondo Cesare Cesariano.

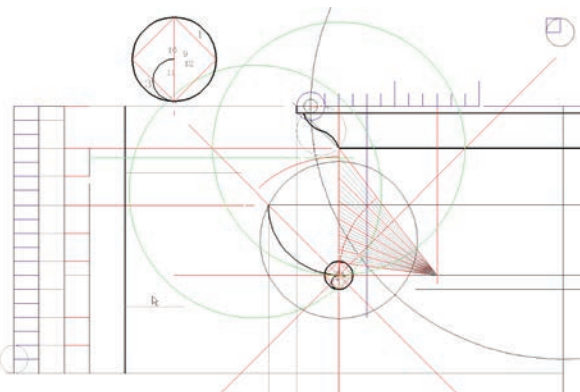




197. La costruzione della voluta secondo Sebastiano Serlio.



198. La costruzione della voluta secondo Pietro Cataneo.



199. La seconda costruzione della voluta proposta da Giacomo Barozzi da Vignola: prima fase, la divisione del cateto.

utilizza come centri l'estremo superiore del diametro verticale e il centro stesso dell'occhio: il risultato è una spirale che evolve per tre giri e mezzo, ma trasgredisce la regola di Vitruvio, chiudendosi sull'occhio nel quadrante inferiore, anziché in quello superiore.

Serlio (1537) conferma il tracciamento per semicerchi dei suoi predecessori, ma introduce sei centri di curvatura (fig. 197), tutti interni all'occhio, al fine di restringere gradualmente la distanza tra le spire, come si osserva prevalentemente nei capitelli antichi. La numerazione dei centri di curvatura nella figura della pagina 160 del trattato serliano è sbagliata e deve intendersi come è riportata nel nostro disegno. Per quanto riguarda il tracciamento del listello, Serlio indica altri due centri compresi, rispettivamente, tra il primo e il terzo e tra il secondo e il quarto, ma avverte che alla teoria deve accompagnarsi l'esperienza, il che significa che la posizione esatta di questi centri è lasciata a chi disegna: noi li abbiamo collocati nel terzo più esterno dei due intervalli.

Cataneo (1554) perfeziona ulteriormente il disegno di Serlio, accompagnando l'espedito necessario alla variazione della distanza dalle spire con il tracciamento in singole azioni di un quarto di circonferenza, voluto da Vitruvio. Ne derivano dodici centri di curvatura che sono disposti sugli assi di un quadrato inscritto nell'occhio, a intervalli di un sesto dell'asse, come mostra la figura (fig. 198). Come si può notare, i centri di archi successivi non sono allineati con il punto di saldatura, ma la discontinuità che ne consegue è impercettibile e, comunque, destinata a essere riassorbita nelle inevitabili irregolarità della realizzazione del manufatto. Per quanto riguarda, poi, il disegno dell'altro bordo del listello, Cataneo suggerisce di spostare appena il compasso all'interno di ciascun centro; nel nostro disegno questi altri dodici centri distano dai rispettivi centri principali un ottavo dell'intervallo che li separa. La spirale si avvolge su se stessa per tre giri completi.

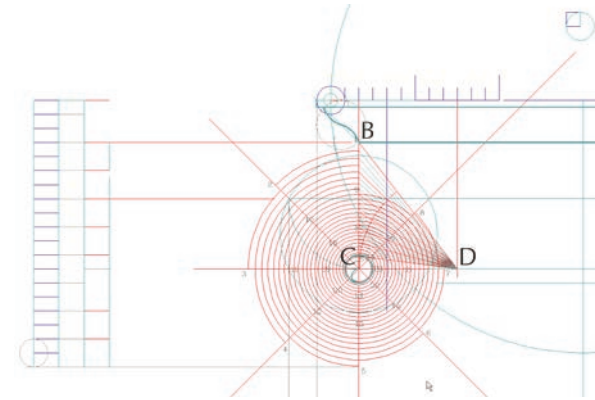
Vignola (1562) propone due procedimenti molto diversi, che conducono, però, a risultati assai simili: il primo è quello stesso di Cataneo, descritto, in verità in modo assai sommario, come se si trattasse, appunto, di cosa nota. Il secondo (fig. 199) muove da un'idea del tutto nuova, che è quella di discretizzare la curva, determinan-

do prima i punti per i quali si vuole che passi, per poi individuare i necessari centri di curvatura. A questo scopo si divide lo spazio occupato dalla voluta in otto parti, tracciando le bisettrici degli assi dell'occhio.

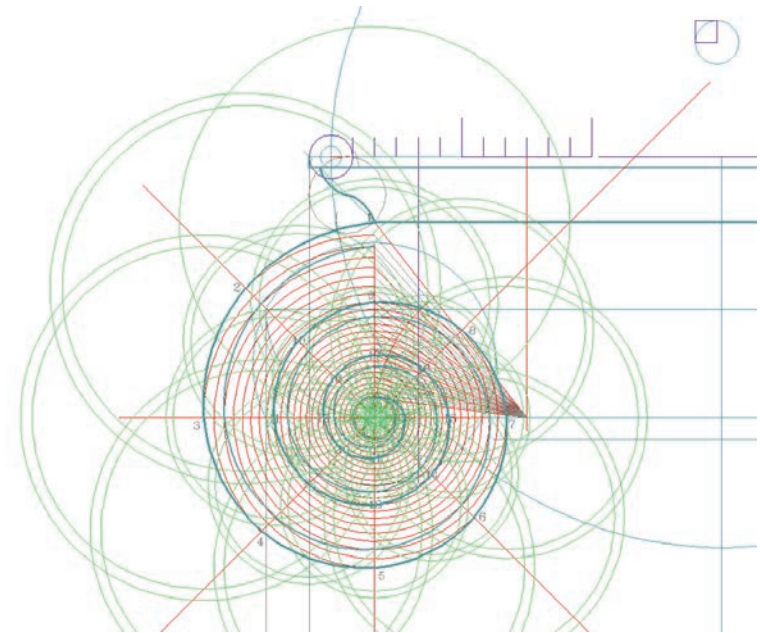
La costruzione si inizia (fig. 200) con un triangolo rettangolo (BCD) i cui cateti misurano le distanze del centro dell'occhio dal punto più alto e dal punto più basso della voluta, vale a dire quattro parti e mezza e tre parti e mezza della divisione vitruviana del modulo. Si punta il compasso nel punto D e si traccia un arco dal punto C all'ipotenusa. L'arco viene poi diviso in sette parti uguali. Occorre notare, a questo punto, che la divisione di un arco in sette parti non è possibile con la riga e il compasso e richiede l'uso di una curva ausiliaria come la quadratrice di Dinostrato; per questa ragione, il tracciamento di Vignola è approssimato e la figura, che viene in genere riportata nelle edizioni del suo trattato, contiene un piccolo errore: la prima divisione dell'arco in basso, infatti, che il trattatista disegna tangente all'occhio, risulta, in realtà, secante. Ciò fatto, si dividono ancora le sei parti sopra l'occhio in quattro parti ciascuna, ottenendo un totale di ventiquattro parti. Si tracciano quindi i raggi dell'arco, che passano per le divisioni suddette, fino a incontrare il cateto BC e si numerano i punti di intersezione da 1 a 25 , scendendo da B verso C . Il segmento $1C$ rappresenta la distanza della voluta, dal centro, nel punto di inizio; il segmento $2C$ la distanza al primo ottavo; il segmento $3C$ la distanza al secondo ottavo e così via, fino al segmento $24C$ che misura la distanza della curva all'ultimo ottavo, prima che si saldi all'occhio, nel punto 25 .

Il principio di degradazione delle distanze, che qui Vignola affida al cerchio di centro D , è ripreso dalla geometria di Dürer (DÜRER 1535) e, come la costruzione dell'entasi, ha radici prospettiche. Una volta individuati i punti che definiscono l'andamento della curva, si tratta di disegnarla con il compasso e, a questo scopo, è necessario individuare i centri di curvatura di ogni ottavo della spirale (fig. 201). Si tracciano, perciò, due cerchi, che hanno, rispettivamente, centro nel punto di inizio e nel punto di arresto dell'ottavo di curva considerato e raggio pari alla distanza del punto di inizio dal centro; il punto di intersezione di questi cerchi, che si trova

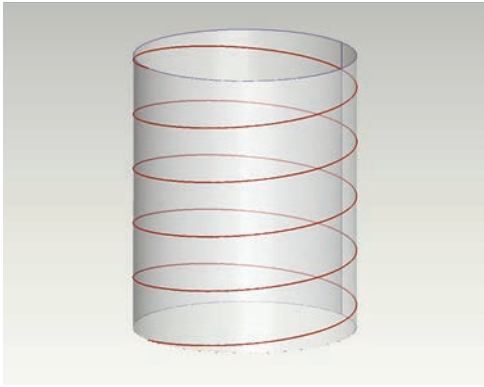
200. Seconda fase:
l'individuazione dei due
estremi di ogni ottavo
di curva e il tracciamento
del primo arco.



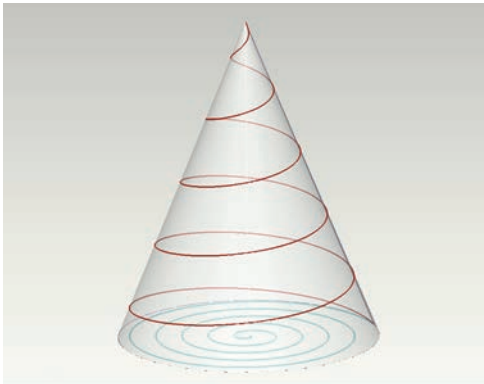
+



201. Terza fase:
il completamento della
costruzione; i cerchi
verdi individuano i
centri di curvatura.



202. Un punto che percorre la generatrice di un cilindro, mentre questa ruota intorno all'asse, descrive un'elica cilindrica, curva che sale sulla superficie del cilindro con pendenza costante.



203. Un punto che percorre la generatrice di un cono, mentre questa ruota intorno all'asse, descrive una spirale conica: questa curva non ha pendenza costante e sale tanto più rapidamente quanto più si avvicina al vertice del cono, che infine raggiunge.

all'interno dell'occhio, è il centro desiderato.

La complessità di questa costruzione ne decretò l'insuccesso e tanto Daniele Barbaro (1567), quanto Andrea Palladio (1570) tornarono, in sostanza, ai dodici centri del tracciato di Cataneo.

Le curve delle volute sono approssimazioni delle spirali, ottenute combinando archi di cerchio. Comunque, alla spirale archimedeica, cui sembra rifarsi Vitruvio, si succedono nel tempo spirali sempre più simili alla spirale logaritmica, forse per la sua affinità con le forme naturali.

Eliche

Curve simili alle spirali possono essere anche costruite nello spazio. Prendono, in generale, il nome di *eliche*.

L'*elica cilindrica* (fig. 202) è la curva descritta da un punto che scorre uniformemente lungo la generatrice di un cilindro circolare retto, mentre questa ruota uniformemente intorno all'asse. La regolarità del movimento fa sì che la curva incontri le generatrici del cilindro sempre con il medesimo angolo. La distanza tra le spire, che si dice *passo*, è costante. Se si sviluppa il cilindro, l'elica che lo avvolge si trasforma in una retta.

Curve simili all'elica cilindrica possono anche essere tracciate su un cono circolare retto, ma occorre distinguere: la curva descritta da un punto che scorre uniformemente lungo una generatrice del cono, mentre questa ruota uniformemente intorno all'asse, è una *spirale conica*; la curva che incontra tutte le generatrici del cono con un angolo costante è invece un'*elica conica* o, anche, una *losodromia conica*. Queste due curve, che, se costruite sul cilindro, coincidono, hanno invece aspetti e proprietà molto diverse quando sono costruite sul cono.

La *spirale conica* (fig. 203), generata dal movimento uniforme di un punto lungo una direttrice che ruota intorno all'asse, come si è detto, passa per il vertice del cono. La distanza tra le sue spire è costante. La pendenza della curva aumenta invece a mano a mano che questa si avvicina al vertice del cono, com'è facile intendere, poiché varia il rapporto tra la distanza percorsa lungo la direttrice

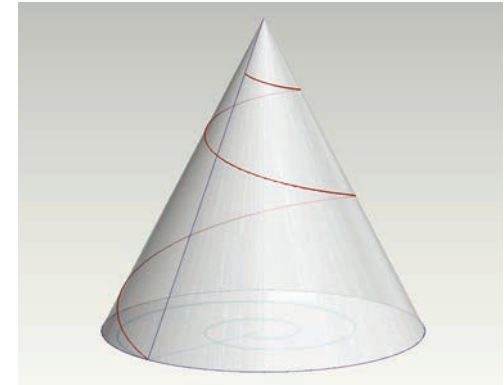
– che diventa sempre più piccola – e la distanza percorsa lungo la generatrice, che è sempre la stessa. La proiezione ortogonale della spirale conica sul piano cui appartiene la direttrice del cono è una spirale di Archimede.

La spirale conica può essere facilmente descritta analiticamente mediante le equazioni parametriche: $x = \text{Cos}(t)$, $y = \text{Sen}(t)$, $z = t$.

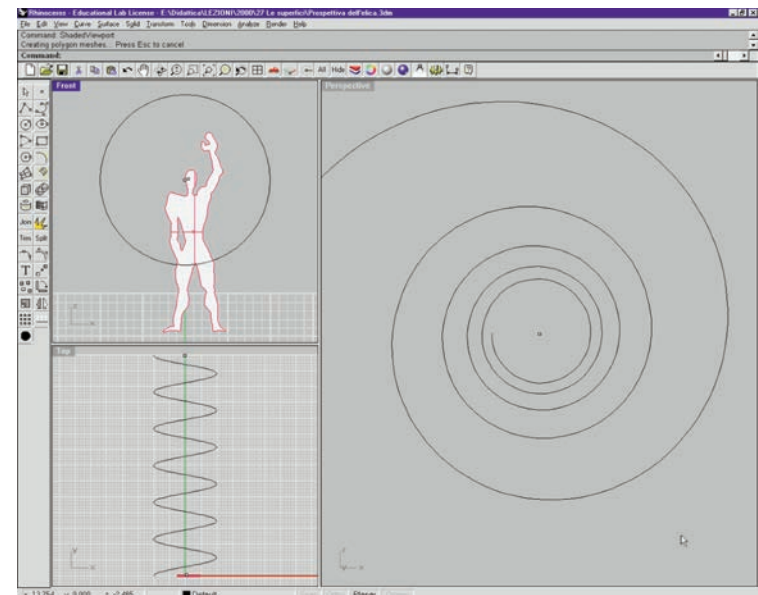
L'*elica conica* (fig. 204) è, come abbiamo detto, la curva che incontra le generatrici del cono con angolo costante. Questa curva si avvicina indefinitamente al vertice del cono, senza mai raggiungerlo: il vertice è dunque il punto asintotico della curva. La pendenza della curva è costante; caratteristica, questa, che la rende adatta alle applicazioni in architettura. La proiezione ortogonale di questa elica sul piano cui appartiene la direttrice del cono è una spirale logaritmica.

La maggior parte dei modellatori CAD costruiscono la spirale conica, mentre non sono in grado di costruire l'*elica conica*. Il modello qui riportato è stato realizzato generando la curva per via analitica.

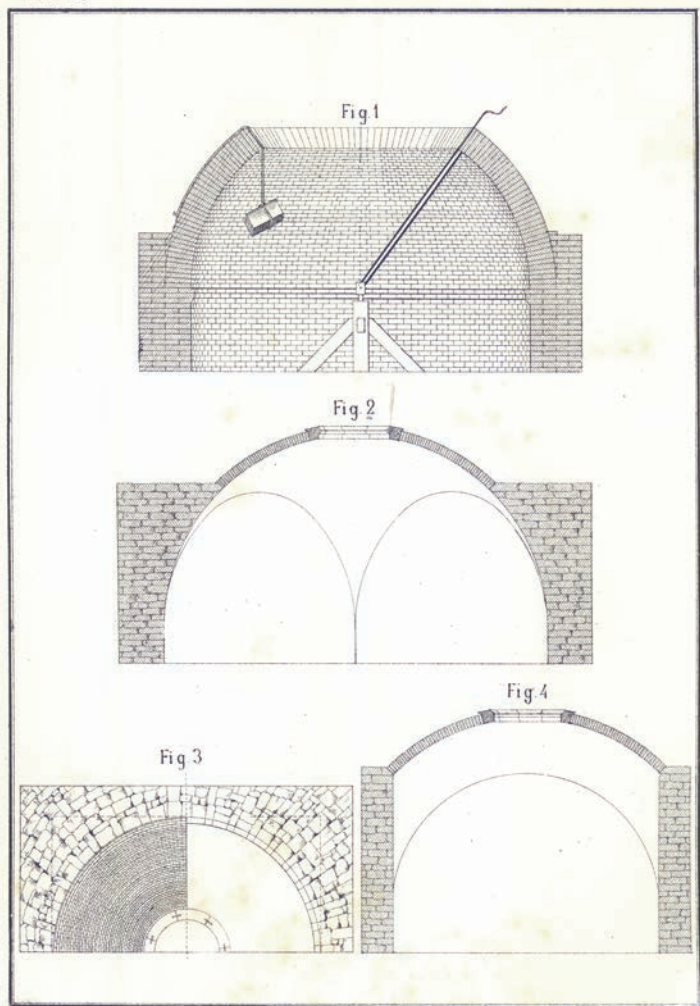
L'*elica cilindrica*, se proiettata ortogonalmente sul piano cui appartiene la base del cilindro, genera un cerchio, nel quale si confondono tutte le sue spire; com'è facile intuire, poiché la generatrici del cilindro sono, in questo caso, rette proiettanti. È interessante, invece, osservare la curva da un punto situato sull'asse del cilindro, un po' come accade quando guardiamo una scala a chiocciola dal basso (fig. 205). Ebbene, la curva che si ottiene proiettando l'*elica cilindrica* da un punto situato sull'asse del cilindro, su un piano di quadro perpendicolare all'asse stesso, è una *spirale iperbolica*, come osserva e dimostra Bompiani (BOMPIANI 1928, pp. 100 sgg.).



204. La curva che sale sulla superficie del cono con pendenza costante è l'*elica conica*: questa curva non raggiunge mai il vertice.



205. La prospettiva dell'*elica cilindrica*, vista da un punto dell'asse, è una *spirale iperbolica*.



Breymann 1

Casa Editrice Dott. FRANCESCO VALLARDI

206. Costruzione di una cupola per mezzo della randa. Da Gustav Adolf Breymann, *Costruzioni in pietra e strutture murali*, Milano, 1885.

Superfici e loro sezioni piane

Le superfici possono essere descritte e classificate in molti modi, ma il metodo più antico, e vicino alle esigenze dell'architetto, è senz'altro quello che le definisce come *luoghi geometrici*, cioè come l'insieme dei punti dello spazio che soddisfano date condizioni. Infatti, un luogo geometrico può essere materializzato, in cantiere, per mezzo di semplici dispositivi. Ad esempio la sfera, luogo geometrico dei punti equidistanti da un centro, si può materializzare, nella costruzione di una cupola, per mezzo di un'asta, detta *randa*, incernierata su un perno nel centro del piano di imposta (fig. 206).

Più in generale, le superfici possono essere generate dal movimento, uniforme o non uniforme, nello spazio, di qualsiasi linea detta *generatrice*, che scorre su un'altra linea guida, detta *direttrice*. Così, la nostra sfera si può anche generare con il movimento uniforme di un semicerchio (*meridiano*) che scorre su un cerchio (*equatore*) in un piano che passa per il centro di quest'ultimo.

Se il moto della generatrice sulla direttrice è uniforme, per ogni punto della superficie finita passano due linee congruenti, rispettivamente, con la generatrice e con la direttrice. Se il moto non è uniforme le generatrici e le direttrici della superficie saranno legate da una più complessa relazione. In ogni caso, ogni superficie si può considerare come un insieme di infinite generatrici e direttrici. Generatrici e direttrici possono anche scambiare i propri ruoli. Ad esempio, un cilindro rotondo è il luogo geometrico dei punti descritti da una retta che scorre su una circonferenza, mantenendosi perpendicolare al piano di quest'ultima, ma è anche il luogo geometrico dei punti dello spazio descritti da una circonferenza che trasla, con il piano che le appartiene, lungo una retta perpendicolare al piano stesso.

Converrà, nel seguito, utilizzare il simbolo u per indicare le generatrici e il simbolo v per indicare le direttrici. Questi simboli permettono di uniformare lo studio delle superfici nell'ambiente grafico e nell'ambiente informatico.

I modellatori, infatti, descrivono le superfici servendosi di una rappresentazione parametrica nella quale le coordinate x, y, z della su-

perficie dipendono da due parametri denominati, appunto, **u** e **v**. Si dicono *isoparametriche* le linee della superficie luogo geometrico dei punti che hanno uguale il valore del parametro. Ad esempio, se si lascia variare **u**, mantenendo **v** costante, si ottiene una generatrice e, al contrario, una direttrice.

I modellatori permettono di definire il numero delle linee isoparametriche che si vogliono visualizzare o costruire sulla superficie.

Da ultimo bisogna segnalare la possibilità di costruire superfici governate da più di una direttrice: è il caso delle rigate, delle quali si parlerà tra poco, che hanno tre direttrici, e delle NURBS, che ne ammettono più di una.

Classificazione delle superfici

Anche se la descrizione informatica delle superfici, cui abbiamo fatto cenno, consente di descriverle tutte con un solo algoritmo, è utile raggruppare le superfici in alcune classi, desunte dall'uso.

Il primo gruppo è quello delle *superfici primitive* e comprende semplicemente le superfici di uso più frequente. Queste superfici possono essere generate, nei modellatori, con un solo comando e vengono anche utilizzate come materia prima di ulteriori elaborazioni (da qui il loro nome). Sono superfici primitive:

- la *sfera*, utilizzata prevalentemente nelle cupole e nelle absidi, nonché come copertura delle nicchie cilindriche;
- il *cilindro rotondo*, usato nelle absidi e nelle nicchie con l'asse verticale, nelle volte a botte a tutto sesto, con l'asse orizzontale;
- il *cilindro obliquo*, usato nelle volte a botte oblique e in quelle rampanti, che frequentemente ricoprono le scale;
- il *cono*, usato nelle volte coniche e nelle cosiddette prospettive solide come la galleria di Palazzo Spada, di Borromini, o l'abside di San Satiro, di Bramante.

Il secondo gruppo è quello delle *superfici di rivoluzione*, che si ottengono facendo scorrere la generatrice su un cerchio in un piano passante per il centro, ovvero facendo ruotare la linea generatrice intorno a una retta; esso comprende:

- l'*ellissoide rotondo*, utilizzato prevalentemente nell'estradosso

delle cupole; l'ellissoide può essere considerato un caso particolare della sfera (una sua trasformazione) ed è generato dalla rotazione di una ellisse intorno ad un suo asse;

- le *superfici di rivoluzione modanate*, che sono impiegate negli ordini antichi e classici come, in generale, nella decorazione, e sono il luogo geometrico dei punti descritti da una linea grafica o da una linea composita che ruota intorno a un asse; esempi di queste superfici sono le volte anulari, come quella che copre il primo ambulacro del Colosseo, il fusto delle colonne e i balaustri, nonché i vasi.

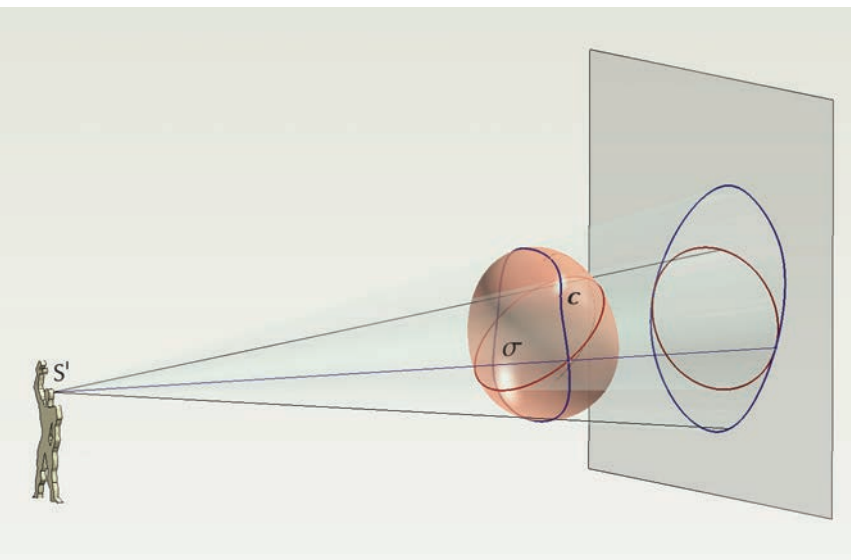
Nel terzo gruppo vi sono le *modanature*, utilizzate in tutta l'architettura antica, classica e moderna; le modanature sono il luogo geometrico dei punti descritti da una linea detta *modano* (generatrice) che trasla lungo una retta (direttrice); il modano è, in genere, una linea mista, composta di archi di cerchio e segmenti di retta.

Il quarto gruppo comprende le *superfici rigate*, usate, nell'architettura classica e fino all'Ottocento, nel taglio delle pietre nonché nell'architettura moderna, nelle grandi coperture (vedi Le Corbusier, Tange, ecc.); sono, in generale, le superfici luogo geometrico delle rette (generatrici) che si appoggiano a tre linee sghembe date (direttrici); in particolare, le tre linee date possono essere rette, nel qual caso si ottengono l'*iperboloide a una falda* e il *paraboloide iperbolico*.

Il quinto gruppo è quello delle *superfici di rototraslazione* usate in meccanica ma anche in architettura, per le scale a chiocciola.

Il sesto gruppo è quello delle *superfici NURBS*. Raccogliamo in questo gruppo un vasto repertorio di superfici che possono essere facilmente costruite nell'ambiente informatico e che richiederebbero invece un impegnativo e difficile lavoro nell'ambiente grafico. Si tratta di generalizzazioni delle superfici precedenti, come, ad esempio, superfici di traslazione nelle quali la generatrice modifica le proprie dimensioni o la propria forma durante la traslazione.

Alle superfici classificate in questi gruppi principali si aggiungono: le *superfici organiche*, derivate dallo studio di forme naturali, i *poliedri* e le *superfici mesh*, che sono poliedri irregolari di grande complessità ottenuti per mezzo di elaborazioni elettroniche.



207. Il contorno apparente di una superficie dipende dalla posizione dell'osservatore.

Rappresentazione delle superfici

Quando si rappresenta una superficie, non è possibile prendere in considerazione tutti i suoi punti, né tutte le linee che le appartengono. Occorre, perciò, trasformare la superficie in un insieme discreto di linee: quelle che meglio si prestano a descriverla.

Queste linee notevoli sono:

- le *direttrici* e le *generatrici*, vale a dire le isoparametriche dell'ambiente informatico delle quali si è detto;
- le *sezioni* o i bordi che, eventualmente, delimitano la superficie;
- il *contorno apparente*, del quale si parlerà tra poco.

Bisogna, però, riconoscere che la rappresentazione più efficace delle superfici è quella che tiene conto degli effetti della luce, cioè del chiaroscuro. Le tecniche relative alla resa grafica del chiaroscuro sono argomento della quarta parte di questo libro. Nei programmi di modellazione la resa del chiaroscuro è, invece, automatica e si ottiene ordinando al software di presentare un vista *shaded*.

Shading è, appunto, l'algoritmo che costruisce il chiaroscuro calcolando, punto per punto, il grado di intensità luminosa della superficie.

CONTORNO APPARENTE

Il contorno apparente di una superficie è il limite che separa visivamente la superficie dallo spazio circostante. Questa particolare linea, può essere piana o sghemba o mista (costituita, cioè di segmenti di rette e di curve).

Il contorno apparente dipende dal centro di proiezione, cioè varia al variare di quest'ultimo (fig. 207).

Nei programmi di modellazione la costruzione del contorno apparente, rispetto al centro di proiezione impiegato nella vista, è automatica. Ma è anche possibile, e molto utile per varie applicazioni, costruire il contorno apparente di una superficie rispetto a un centro di proiezione qualsiasi.

Da un punto di vista squisitamente geometrico il contorno apparente si definisce come il luogo geometrico dei punti di contatto delle rette proiettanti tangenti alla superficie.

Perciò, data una superficie σ e un centro di proiezione S^l , per costruire il contorno apparente c della superficie σ , rispetto a S^l , si conducono per S^l tutte le rette tangenti alla superficie e si considera l'insieme dei relativi punti di contatto.

Il contorno apparente non è importante solo perché delimita visivamente la superficie, ma anche per la relazione geometrica che lo lega alle proiezioni delle altre linee che appartengono alla superficie. In particolare, il *teorema del contorno apparente* afferma che (fig. 208): se una qualsiasi altra linea l , che appartenga a una superficie continua, incontra in un punto P il contorno apparente c della superficie rispetto a un centro di proiezione S^l , allora la proiezione l' , da S^l sul piano π^l , della suddetta linea, sarà tangente alla proiezione c' del contorno apparente nel punto P' , proiezione di P ; se, al contrario, la linea l non ha punti in comune con il contorno apparente, allora la sua proiezione l' sarà tutta contenuta all'interno della proiezione c' del contorno medesimo.

Per dimostrare il teorema, consideriamo una superficie continua σ qualsiasi, un centro di proiezione S^l e un piano di proiezione π^l . Sia c il contorno apparente di σ rispetto a S^l , costruito come sopra si è detto e l una linea qualsiasi, che appartiene alla superficie e incontra c in punto P .

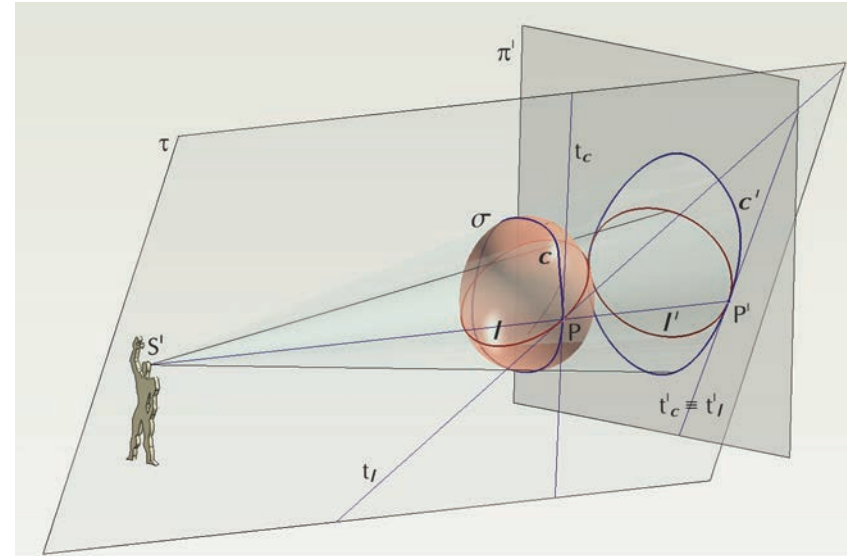
Il piano τ , tangente alla superficie nel punto P , è individuato dalle due rette t_c e t_l tangenti alle linee l e c in P .

Il piano τ contiene tutte le tangenti alla superficie nel punto P , dunque anche la retta proiettante S^lP , giacché P , punto del contorno apparente c , è stato costruito come punto di contatto della suddetta retta proiettante con la superficie σ .

Sul piano di proiezione, la linea c si proietta in c' , la linea l in l' , il punto P in P' , il piano τ , essendo proiettante, si proietta in nella retta t' nella quale si confondono le proiezioni di tutte le rette del piano e perciò anche delle tangenti t_c e t_l ; dunque $t' \equiv t'_c \equiv t'_l$.

Le proiezioni t'_c e t'_l delle due linee ammettono, dunque, in P' tangenti coincidenti e sono, perciò, l'una tangente all'altra.

Se invece la linea l non ha punti in comune con c allora la sua proiezione è tutta interna a c' perché non esistono punti della superficie la cui proiezione non sia compresa all'interno di c' .



208. Se una linea, che appartiene alla superficie, ne incontra il contorno apparente in un punto P , la proiezione di quella linea è tangente alla proiezione del contorno apparente nella proiezione, P' , di P .

Superfici primitive

Sfera

Le generatrici e le direttrici della sfera, cioè le sue curve isoparametriche, assumono una denominazione particolare che deriva dalla geografia. Si chiamano infatti:

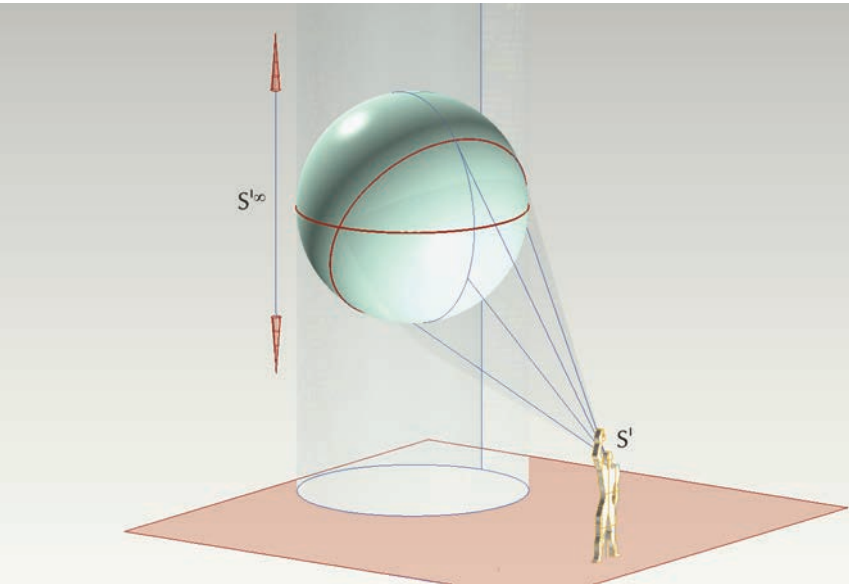
- *meridiani*, le generatrici;
- *equatore*, la direttrice;
- *paralleli*, i cerchi minori, contenuti in piani orizzontali, descritti dai punti di un meridiano durante la rotazione;
- *poli* i due punti comuni ai meridiani.

Si dicono, infine, *cerchi massimi*, le circonferenze contenute in piani che passano per il centro della sfera, il cui raggio è uguale, perciò, al raggio della sfera.

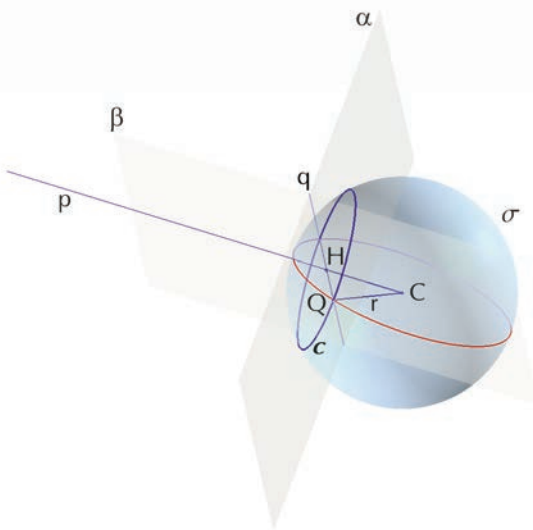
Ricordiamo (fig. 209) che qualsiasi sezione piana di una sfera è un cerchio e che il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto qualsiasi S , esterno, alla sfera, è un cerchio, minore se è un punto accessibile (S'), massimo se è a distanza indeterminata (S^{∞}).

La rappresentazione della sfera si ottiene, dunque, rappresentando le linee notevoli che le appartengono e che abbiamo sopra ricordato. Poiché queste linee sono tutte cerchi, il problema si riduce a quello, già noto, della proiezione parallela del cerchio.

Le suddette proprietà della sfera sono descritte da alcune proposizioni della geometria elementare, che è opportuno ricordare prima di procedere oltre. Una superficie sferica divide i punti dello spazio in tre insiemi: i punti esterni, i punti interni e i punti che appartengono alla superficie. Se un piano passa per il centro della sfera, i punti della superficie, che appartengono al piano, sono, per definizione, equidistanti dal centro e, dunque, costituiscono una circonferenza di raggio uguale al raggio della sfera (*cerchio massimo*). Data una sfera σ e un piano α , conduciamo per il centro C della sfera la retta p , perpendicolare al piano nel punto H ; se il segmento CH è maggiore del raggio r della sfera, la sfera e il piano



209. Il contorno apparente di una sfera, rispetto a un osservatore, è un cerchio minore, mentre il contorno apparente in una proiezione parallela è un cerchio massimo.



210. Ogni sezione piana della sfera è un cerchio, come dimostra Euclide.

non hanno punti in comune; se il segmento CH è uguale al raggio, la sfera e il piano hanno in comune solo il punto H e il piano è tangente la sfera.

Supponiamo ora (fig. 210) che il segmento CH sia più piccolo del raggio: il piano α , allora, seziona la sfera in un insieme di punti c . Qualsiasi piano β , condotto per la retta CH , taglia la sfera secondo un cerchio massimo e il piano α secondo una retta q , perpendicolare alla retta p in H . Questa retta incontra l'insieme dei punti c nel punto Q che appartiene al cerchio massimo intersezione di β con la sfera. Si osservi ora che il triangolo CHQ è uguale quale che sia il piano β , infatti è, in ogni caso rettangolo in H , ha l'ipotenusa uguale al raggio r della sfera e un cateto uguale al segmento CH ; dunque, quale che sia il piano β , come sopra costruito, il segmento HQ , distanza del punto Q dal punto H , sarà di lunghezza costante, il che significa che la sezione della sfera σ , con il piano α , dà luogo a un cerchio, il cui centro H appartiene alla perpendicolare condotta al piano dal centro C della sfera.

COSTRUZIONE DELLA SFERA IN DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE

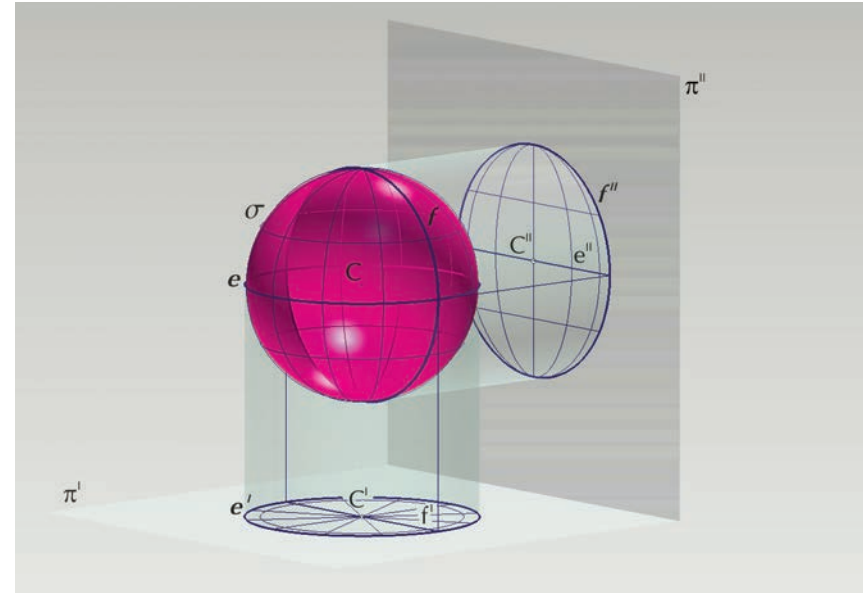
Immaginiamo la sfera σ , di centro C e di raggio r , posta al di sopra del primo piano di proiezione e davanti al secondo (fig. 211).

Il centro C si proietta in C' e C'' .

Le rette che escono dal primo centro di proiezione e sono tangenti alla sfera individuano il contorno apparente della superficie, rispetto al primo centro di proiezione: si tratta dell'equatore e , contenuto nel piano orizzontale ω . Dal momento che appartiene a un piano parallelo al primo piano di proiezione, l'equatore si proietta su π^1 in vera forma, sicché la sua prima proiezione e' è un cerchio di raggio r .

Analoghe considerazioni permettono di costruire il contorno apparente f della sfera rispetto al secondo centro di proiezione e la sua proiezione f'' , che è un cerchio di centro C'' e raggio r .

Si noti, ora, che il contorno apparente e , per essere contenuto in un piano orizzontale, si proietta su π'' nel diametro orizzontale e'' del cerchio f'' . Analogamente, il contorno apparente f , per essere contenuto in un piano frontale, si proietta su π^1 nel diametro f' del cerchio e' , parallelo alla linea di terra. La rappresentazione può es-



211. Nelle proiezioni ortogonali della sfera si possono controllare i contorni apparenti relativi alle due diverse direzioni di proiezione.

ve tangenti negli estremi. Si noti infine che i tre cerchi massimi, dei quali abbiamo parlato, incontrano il contorno apparente c della sfera e, pertanto, le loro proiezioni debbono essere tangenti alla proiezione c' del suddetto contorno.

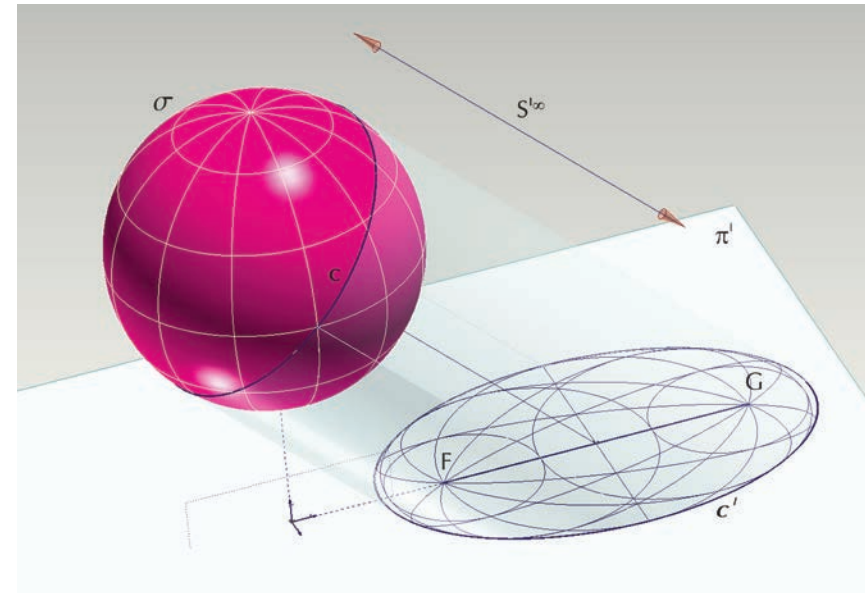
COSTRUZIONE DELLA SFERA IN ASSONOMETRIA OBLIQUA

Nella assonometria obliqua, le rette proiettanti che involuppano la sfera sono oblique rispetto al piano di proiezione e individuano pertanto un contorno apparente che è un cerchio massimo obliquo rispetto al piano di proiezione. Ciò significa che la proiezione c' del contorno apparente della sfera non è un cerchio, come nell'assonometria ortogonale, ma un'ellisse. Nella proiezione, tutti i diametri del cerchio c della sfera subiscono uno scorcio, tranne quello che è parallelo al piano di proiezione, che si conserva in vera forma.

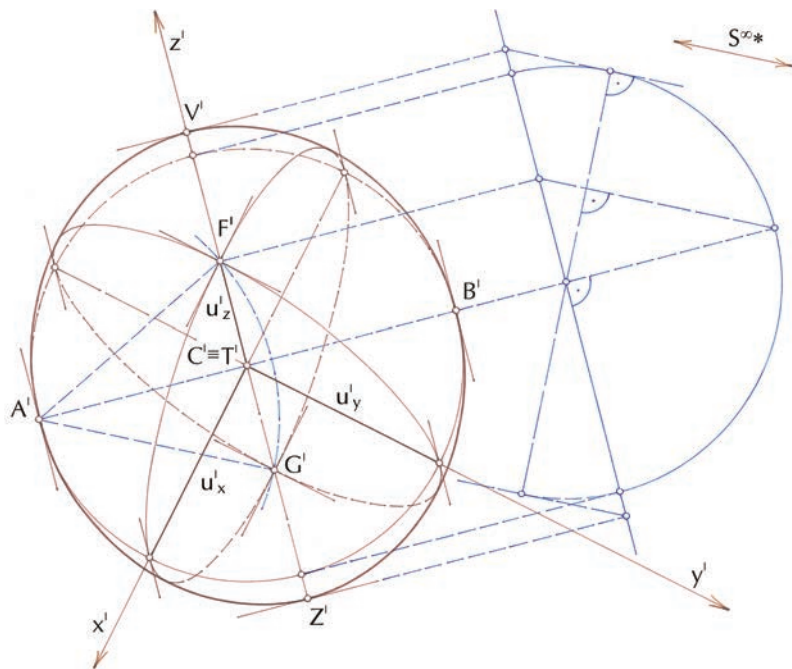
La proiezione del contorno apparente di una sfera possiede una notevole proprietà dimostrata dal teorema di Dandelin Quetelet: *i fuochi dell'ellisse proiezione del contorno apparente di una sfera, rispetto a un data direzione di proiezione, sono le proiezioni degli estremi del diametro della sfera che è perpendicolare al piano di proiezione* (fig. 213).

Infatti, quando si proietta una sfera, le rette proiettanti tangenti alla superficie descrivono un cilindro nel quale la sfera è inscritta. Il piano di quadro seziona obliquamente il cilindro, come nella nota costruzione di Dandelin. Una traslazione della sfera lungo la direzione di proiezione non altera il risultato della proiezione, perciò è lecito traslare la sfera σ fino ad appoggiarla al piano di proiezione π^l : essa lo toccherà in un punto F .

Questo punto di contatto appartiene al raggio CF della sfera, perpendicolare al piano π^l . Traslando ancora la sfera, sulla faccia opposta di π^l , si trova un secondo punto di contatto G . Questi due punti sono dunque i fuochi dell'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera (come dimostra Dandelin) ma sono anche gli estremi del diametro della sfera perpendicolare al quadro, a meno di una traslazione che può essere trascurata (come osserva ancora Quetelet).



213. Nell'assonometria obliqua la proiezione del contorno apparente della sfera è un'ellisse. Il teorema di Quetelet afferma che i fuochi di questa ellisse sono le proiezioni degli estremi del diametro della sfera che è perpendicolare al piano di quadro.



214. L'assonometria obliqua della sfera si costruisce rapidamente applicando il teorema di Dandelin Quetelet.

COSTRUZIONE DELLA SFERA IN ASSONOMETRIA MILITARE

Vogliamo ora rappresentare la sfera σ in una assonometria militare, individuata per mezzo delle proiezioni $T'(x', y', z')$ degli assi e delle unità di misura $u'_x = u'_y > u'_z$. Il centro della sfera coincide con l'origine T degli assi (fig. 214).

Sulla proiezione z' dell'asse z , si misura il raggio della sfera, servendosi dell'unità di misura assonometrica u'_z .

Il punto F' , proiezione dell'estremo di questo raggio, è uno dei fuochi dell'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera.

La retta $C'F'$ appartiene all'asse maggiore. Il secondo fuoco, G' , è il simmetrico di F' rispetto al centro C' . L'asse minore $A'B'$, dell'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera, passa per il centro C' , è ortogonale all'asse maggiore ed è uguale al diametro della sfera stessa.

Si costruiscono ora i vertici V' e Z' dell'ellisse, ricordando che la distanza degli estremi dell'asse minore dai fuochi è pari al semiasse maggiore. Si apre dunque il compasso al raggio $F'A'$, si punta in C' e si staccano sulla $F'G'$, da una parte e dall'altra del centro C' , due segmenti $C'V'$ e $C'Z'$ di lunghezza $F'A'$: i punti V' e Z' , sono i vertici dell'ellisse cercata. Una volta costruiti gli assi e i fuochi, l'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera si può tracciare con il filo o con il compasso ellittico.

Si costruiscono, infine, le proiezioni dei meridiani e dei paralleli: i primi, per mezzo di coppie di diametri coniugati, i secondi con il compasso, poiché si proiettano in vera forma. A questo scopo è anche utile il ribaltamento del piano perpendicolare a π' che proietta il centro della sfera e della relativa sezione.

Coerentemente con il teorema del contorno apparente, le proiezioni di meridiani e paralleli sono tangenti all'ellisse proiezione del contorno apparente, nei punti che sono proiezione di oggetti punti di intersezione tra il contorno apparente e il circolo di volta in volta considerato.

COSTRUZIONE DELLA SFERA IN PROSPETTIVA

Il teorema di Dandelin Quetelet si estende, con alcune precisazioni, anche al caso della prospettiva (fig. 215).

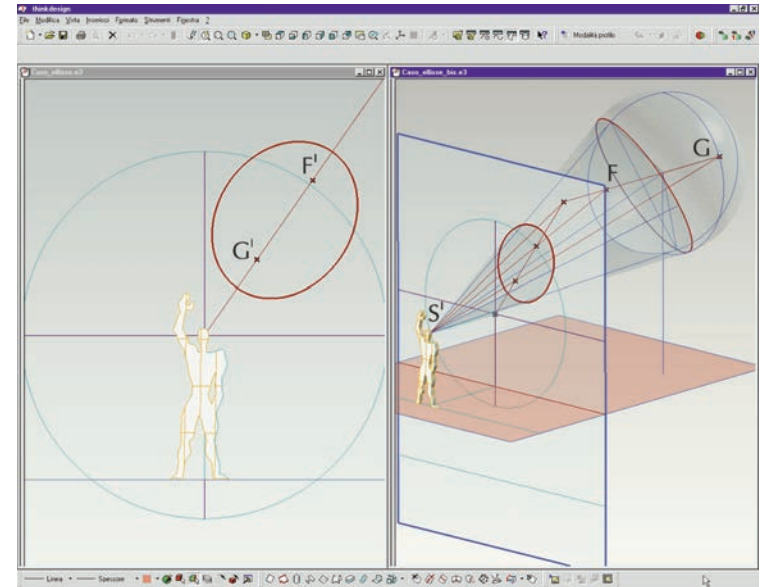
Bisogna innanzi tutto ricordare che Dandelin ha anche dimostra-

to, in generale, la più importante proprietà focale dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole servendosi di un cono circolare retto. Un piano seziona il cono e produce un'ellisse se incontra tutte le generatrici del cono, una parabola se è parallelo a una sola generatrice e incontra tutte le altre, un'iperbole se è parallelo a due generatrici e incontra tutte le altre. Questi tre casi corrispondono alle tre situazioni già esaminate trattando della prospettiva del cerchio (*Parte seconda. Costruzione della prospettiva del cerchio*). Nei tre casi, Dandelin inscrive due sfere nel cono in modo che siano tangenti al piano di sezione e dimostra che i punti di contatto di queste sfere con il piano di sezione sono i fuochi della conica considerata (naturalmente nel caso della parabola uno dei fuochi è improprio).

Quando si proietta una sfera da un centro proprio, le rette proiettanti tangenti alla superficie ne individuano il contorno apparente, che è un cerchio minore (cioè non massimo), appartenente a un piano perpendicolare alla retta proiettante che passa per il centro della sfera stessa. Le rette proiettanti descrivono dunque un cono circolare retto, e la prospettiva del contorno apparente della sfera è la sezione di questo cono fatta con il piano di quadro. Si possono perciò configurare tre situazioni, che corrispondono a quelle esaminate trattando della prospettiva del cerchio, a seconda che il contorno apparente della sfera sia esterno, tangente o secante il piano anteriore: nel primo caso la proiezione del contorno apparente, perciò la prospettiva della sfera, sarà una ellisse, nel secondo una parabola, nel terzo un'iperbole. In ogni caso, però, i fuochi della curva saranno le prospettive degli estremi del diametro della sfera perpendicolare al quadro (Teorema di Dandelin Quetelet).

Per dimostrare l'asserto e verificare l'efficacia applicativa del teorema, esamineremo il caso più comune, quello in cui il contorno apparente della sfera è esterno al piano anteriore, e la sua prospettiva è, dunque, un'ellisse.

Se la sfera è tangente il piano di quadro, è immediato stabilire, per il teorema di Dandelin, che il punto di contatto è uno dei fuochi dell'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera. D'altronde questo punto di contatto è uno degli estremi del diametro



215. Il teorema di Dandelin Quetelet si applica anche alla prospettiva della sfera. Nel caso in cui la proiezione del contorno apparente è un'ellisse, i fuochi sono le proiezioni degli estremi del diametro della sfera che è perpendicolare al quadro.

della sfera che è perpendicolare al piano di quadro, come appunto afferma Queetelet. Ora è sufficiente traslare la sfera lungo la retta proiettante che passa per il suo centro e , contemporaneamente, variarne il diametro in modo che sia sempre inscritta nel cono proiettante generato in origine; si osserva che:

- le proiezioni dei contorni apparenti di tutte le sfere inscritte nel medesimo cono proiettante coincidono;
- le proiezioni dei diametri perpendicolari al quadro, di tutte le sfere inscritte nel cono proiettante coincidono;
- coincidono di conseguenza le proiezioni degli estremi dei suddetti diametri, con le proiezioni degli estremi del diametro perpendicolare al quadro della sfera considerata, sia essa o no tangente al piano di quadro.

Poiché tra le infinite sfere che si possono inscrivere nel cono proiettante, vi sono anche le due tangenti il piano di quadro, costruite da Dandelin, è dimostrato che le proiezioni degli estremi del diametro perpendicolare al quadro, d'una qualsivoglia delle suddette sfere, sono i fuochi dell'ellisse contorno apparente cercata.

Ciò premesso, assegniamo la prospettiva C' del centro di una sfera σ e la misura del raggio r (fig. 216). Poiché, come abbiamo già detto la prospettiva di un punto non è sufficiente a rappresentarlo senza ambiguità, assegniamo altresì la prospettiva C'_1 della proiezione geometrica C_1 del punto C . Disegniamo, innanzi tutto, la prospettiva p^1 della retta che passa per C ed è perpendicolare al quadro: essa avrà fuga I'_p coincidente con il punto principale O'_o . Costruiamo ora il piano verticale γ , che contiene la retta p : esso taglia il geometrico nella retta p_1 che passa per C_1 ; questa incontra la traccia del geometrico nel punto T'_{p1} che appartiene alla traccia, verticale, t'_γ del piano; la fuga i'_γ le è parallela e appartiene a $I'_p \equiv I'_{p1} \equiv O'_o$. Il piano γ permette di misurare il diametro della sfera che appartiene alla retta p , sopra costruita; ci si serve, allo scopo, di uno dei punti di distanza appartenenti alla fuga i'_γ del piano stesso. Le proiezioni degli estremi del diametro sono i fuochi dell'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera, come si è detto. Si tratta ora di misurare la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellis-

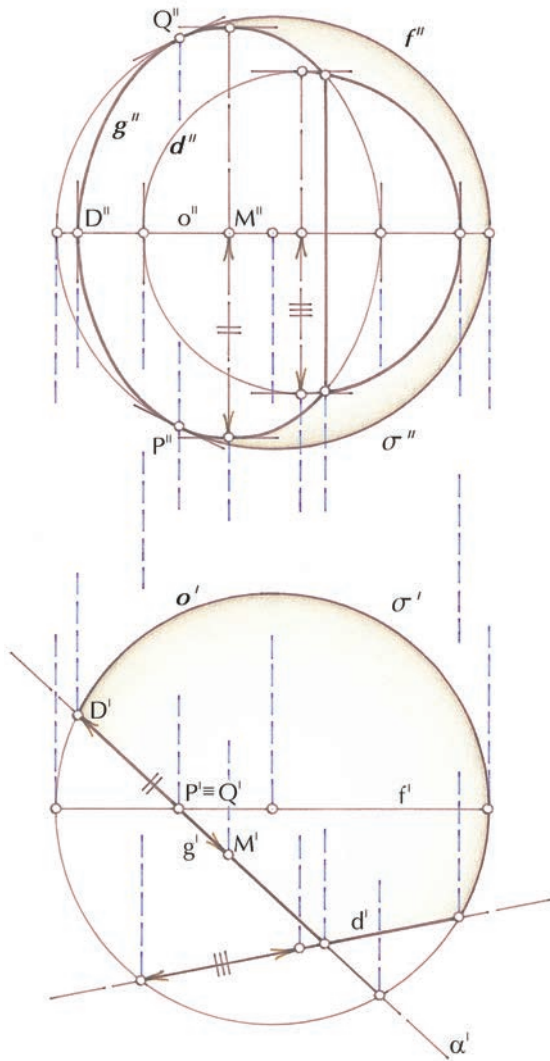
se. A questo scopo, costruiamo il piano proiettante che passa per la retta p . Esso taglia il quadro nella retta $T'_p O'_o$ e la sfera secondo un cerchio massimo m . Ribaltiamo ora sul quadro il piano così costruito e con esso: il centro di proiezione O , che si porta in O^* ; la retta p , che si porta in p^* , e il cerchio m , che si porta in m^* . Sul ribaltamento del piano si possono condurre le due tangenti al cerchio m^* , che permettono di individuare i vertici V_1 e V_2 dell'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera, ovvero gli estremi dell'asse maggiore. Ciò fatto, si stacca il punto medio M del segmento $V_1 V_2$ e si disegna la retta, a esso ortogonale, alla quale appartiene l'asse minore. Gli estremi dell'asse minore si trovano puntando il compasso in uno dei vertici, con apertura pari al semiasse maggiore, e ciò per le ragioni illustrate nei capitoli precedenti.

A questo punto, l'ellisse proiezione del contorno apparente della sfera può essere tracciata con il filo, con il compasso ellittico o anche, in modo discreto, applicando una delle note costruzioni. Tuttavia si deve osservare che, come negli altri modelli della sfera già costruiti, il disegno non è sufficientemente espressivo se non si rappresentano altri cerchi della superficie, come l'equatore e , almeno, i meridiani rispettivamente contenuti nel piano γ , verticale e perpendicolare al quadro, e nel piano parallelo al piano di quadro (quest'ultimo si tratterà, dunque, con il compasso). La solida guida, costituita dalla proiezione del contorno apparente, permette di disegnare la prospettiva di questi cerchi, ritrovandone pochi punti e tangenti (gli estremi dei diametri, che si proiettano in corde dell'ellisse), senza altre considerazioni.

Sezioni piane della sfera

SEZIONE DELLA SFERA IN DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE

Abbiamo già ricordato che la sezione piana di una sfera è sempre un cerchio. Dunque la doppia proiezione ortogonale della sezione piana di una sfera è costituita, in generale, da due ellissi, che possono essere disegnate costruendone diametri coniugati e assi. Piuttosto, occorrerà stabilire se la sezione considerata incontra o



217. La costruzione di sezioni della sfera con piani verticali è comune nel disegno delle volte.

no il contorno apparente della sfera rispetto al primo e al secondo centro di proiezione. Se vi sono punti in comune, l'ellisse proiezione della sezione risulterà tangente alla proiezione del contorno apparente della sfera, nel caso contrario essa sarà contenuta all'interno della proiezione del contorno apparente, senza toccarlo. Consideriamo una sfera σ , tagliata da due piani verticali α e β (fig. 217). Poiché i due piani sono proiettanti in prima, i segmenti g' e d' , intercetti dalla prima proiezione della sfera sulle prime proiezioni dei piani, rappresentano la prima proiezione delle sezioni cercate.

Il diametro f' , frontale, del cerchio o' , che è proiezione del contorno apparente o della sfera rispetto alla prima direzione di proiezione, rappresenta la prima proiezione del contorno apparente f della sfera rispetto alla seconda direzione di proiezione. È evidente, perciò, che la sezione contenuta nel piano verticale α ha due punti in comune con detto contorno apparente, le cui prime proiezioni coincidono in $P' \equiv Q'$, le cui seconde proiezioni P'' e Q'' si trovano sulla retta di richiamo e sulla seconda proiezione f'' del suddetto contorno apparente. Questi due punti, P'' e Q'' , sono dunque punti di tangenza con f'' dell'ellisse g'' , seconda proiezione della sezione g della sfera con α . Al contrario, la sezione d non ha punti in comune con il contorno apparente f e dunque la sua seconda proiezione d'' sarà tutta interna alla proiezione f'' del contorno. Ciò premesso, si possono costruire gli assi delle ellissi g'' e d'' , seconde proiezioni delle sezioni studiate.

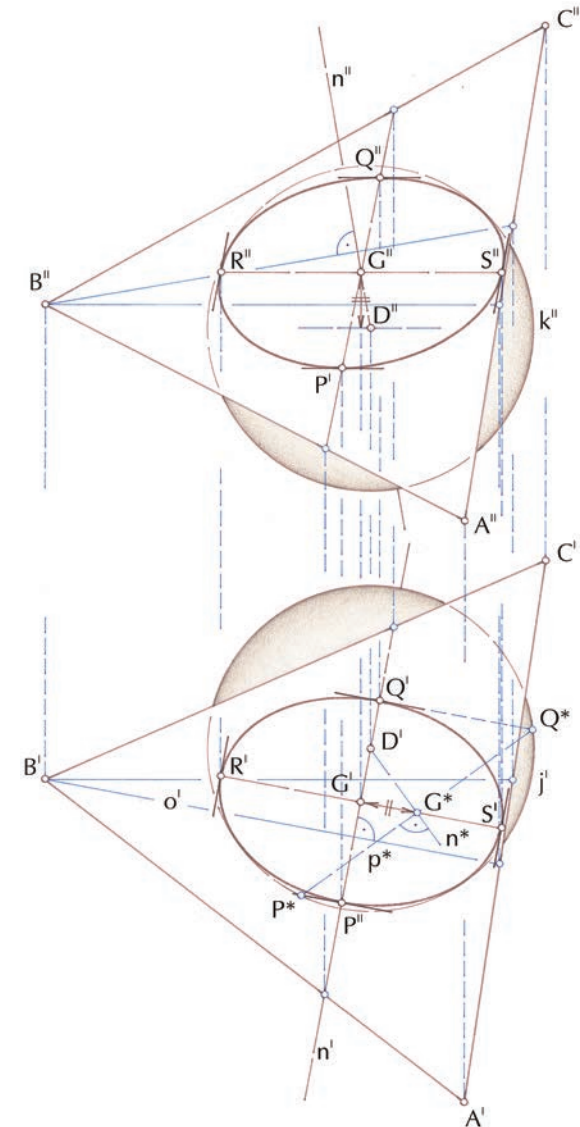
Quanto alla sezione g del piano α : la prima proiezione del centro della sezione è il punto medio M' del segmento g' , la seconda proiezione M'' si trova sulla linea di richiamo, alla stessa quota del centro C della sfera. Il diametro verticale del cerchio g , sezione, è parallelo al piano di quadro e dunque si proietta in vera forma; la sua misura è quella del diametro orizzontale del medesimo cerchio, che si legge direttamente sulla prima proiezione, nel segmento $M'D'$. Detto diametro si proietta nell'asse maggiore dell'ellisse cercata. L'asse minore passa per M'' , è orizzontale e i suoi estremi si costruiscono tracciando le linee di richiamo per gli estremi della prima proiezione.

Analogamente si procede per la sezione *d*. Il tracciamento può essere continuo o discreto, come di consueto.

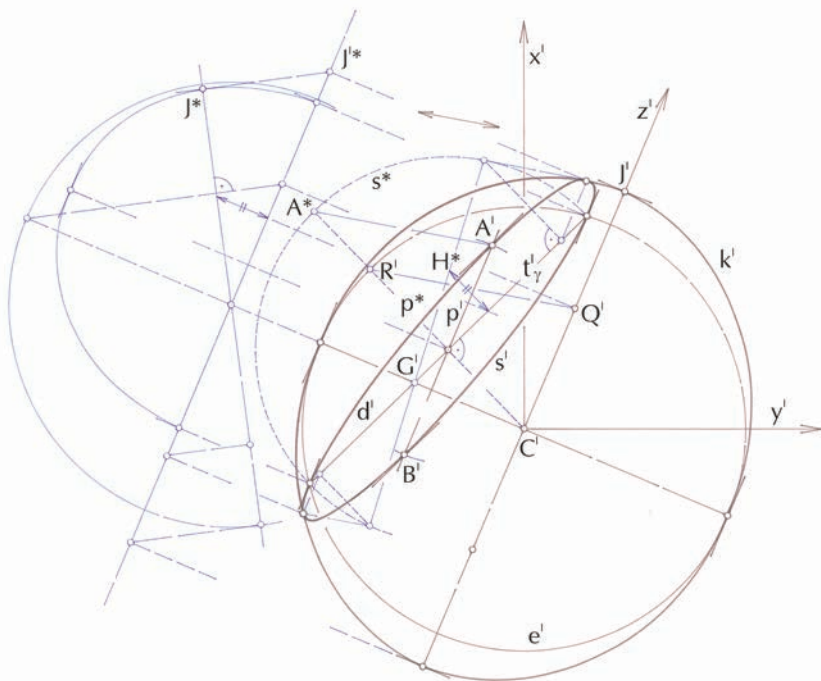
Consideriamo ora il caso di un piano di sezione in posizione generica. La sfera è rappresentata dalle proiezioni j' e k'' dei contorni apparenti j e k rispetto alla prima e alla seconda direzione di proiezione. Il piano è rappresentato mediante i tre punti **A**, **B** e **C**, non allineati.

Il cerchio, che si ottiene sezionando una sfera con un qualsiasi piano, ha il centro sul raggio \mathbf{n} della sfera perpendicolare al piano di sezione. L'asserto può essere dimostrato con semplici considerazioni di geometria elementare, tuttavia è evidente se si assume la perpendicolare al piano di sezione, che passa per il centro della sfera, come asse di rotazione della semicirconferenza che descrive la sfera: in tal caso il punto della generatrice che appartiene al piano di sezione descrive il cerchio risultato della sezione.

Ciò premesso, il problema può essere risolto come segue (fig. 218). Si costruisce, innanzi tutto la retta \mathbf{n} , perpendicolare al piano di sezione \mathbf{ABC} e appartenente al centro **D** della sfera; la prima proiezione, \mathbf{n}' , di questa retta è ortogonale alla prima proiezione di una retta orizzontale del piano, la seconda proiezione, \mathbf{n}'' , è ortogonale alla seconda proiezione di una retta frontale. Si determina, quindi, il punto **G**, intersezione della retta \mathbf{n} con il piano \mathbf{ABC} ; questo punto è, come si è detto, il centro del cerchio risultato della sezione. Ciò fatto, si ribalta il piano proiettante in prima la retta \mathbf{n} , facendo cerniera sulla orizzontale che passa per il centro **D** della sfera, in modo da disporlo parallelo al primo piano di proiezione. In questo ribaltamento, il centro **G** del cerchio sezione si porta in \mathbf{G}^* , sulla perpendicolare in \mathbf{G}' alla \mathbf{n}' , a una distanza eguale alla differenza di quota dei punti **G** e **D**, differenza che si misura in seconda proiezione; il punto **D**, centro della sfera, appartiene alla cerniera e perciò non subisce spostamenti; la retta $\mathbf{G}^*\mathbf{D}'$ rappresenta, dunque, il ribaltamento \mathbf{n}^* della retta \mathbf{n} , perpendicolare al piano di sezione, come sopra costruita. Sul ribaltamento del piano proiettante si traccia ora il ribaltamento del cerchio massimo della sfera che gli appartiene: esso coincide, evidentemente, con la prima proiezione del contorno apparente della sfera rispetto alla pri-



218. Qui la sfera è sezionata con un piano in posizione generica.



219. La costruzione della sezione piana della sfera nel modello grafico dell'assonometria obliqua.

ma direzione di proiezione. Ancora sul ribaltamento del piano proiettante, si disegna, infine, la perpendicolare alla retta n^* , che rappresenta il ribaltamento p^* della retta p intersezione del piano proiettante con il piano della sezione. Tale retta incontra il ribaltamento del cerchio massimo nei punti P^* e Q^* . Il segmento P^*Q^* è uguale al diametro del cerchio sezione cercato, mentre i punti P^* e Q^* sono i ribaltamenti di due punti P e Q della sezione cercata.

Si osservi ora che la retta $p = PQ$ è una retta di massima pendenza del piano di sezione, perché il piano proiettante in prima, che la genera, è perpendicolare alla orizzontale o e, dunque, i punti P e Q sono, rispettivamente, il punto più basso e il punto più alto della curva cercata. Conseguentemente le proiezioni P^l e Q^l dei due punti, cui si perviene immediatamente "raddrizzando" il piano, sono gli estremi dell'asse minore dell'ellisse prima proiezione del cerchio sezione. L'asse maggiore R^lS^l passa per il punto G^l , è ortogonale all'asse minore e misura quanto il diametro P^*Q^* del cerchio sezione. A questo punto il problema è completamente ricondotto alla rappresentazione del cerchio.

SEZIONE DELLA SFERA IN ASSONOMETRIA OBLIQUA

In assonometria, la sfera di centro C è rappresentata dall'equatore e , che si considera appartenere al piano di quadro, dalle proiezioni P^l e Q^l dei poli e dalla proiezione k^l del contorno apparente rispetto alla direzione di proiezione assonometrica (fig. 219). Un piano verticale γ seziona la sfera: t^l_γ è la sua traccia assonometrica, che, essendo nota la giacitura, da sola lo rappresenta. Il piano γ taglia la sfera in un cerchio il cui diametro d è la corda che il piano stesso stacca sull'equatore e della sfera. Ribaltando il piano di sezione sul piano di proiezione assonometrica, si può dunque disegnare la circonferenza sezione in vera forma s^* e, su di essa, il ribaltamento A^* del punto più alto; A^* , evidentemente, si trova sul ribaltamento p^* della retta p , perpendicolare al quadro e condotta nel centro della circonferenza sezione, della quale si può anche disegnare la proiezione assonometrica p^l .

Ci si chiede, ora, quale sia la proiezione assonometrica A^l del punto A .

Vi sono almeno due modi per determinare A^l .

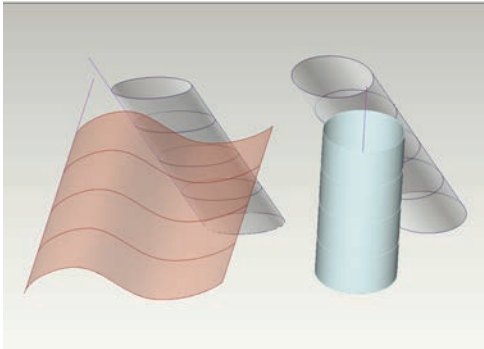
Il primo consiste nel costruire la scala assonometrica dell'asse z , che possiamo considerare coincidente con CQ . Se assumiamo il raggio r della sfera come unità di misura, il rapporto di riduzione dell'asse z' , proiezione assonometrica di z , sarà dato da r/CQ' .

Il secondo modo, più diretto, consiste nel considerare la corda dell'arco di cerchio descritto dal punto A nell'operazione di ribaltamento e nel costruire una corda che le sia parallela. Ora la corda A^*A appartiene a un piano perpendicolare alla cerniera del ribaltamento, che è la traccia assonometrica del piano di sezione γ , e stacca sulla retta p e sul suo ribaltamento p^* due segmenti uguali (perciò forma con il quadro un angolo di $\pi/4$). Se, dunque, si costruisce un piano per il centro C della sfera, parallelo al piano della corda A^*A e, perciò, con traccia assonometrica parallela alla p^* , questo stacca sull'equatore un punto R che dista da C tanto quanto il polo Q , che pure gli appartiene. Dunque la retta RQ è parallela alla corda A^*A che si vuole costruire e, perciò, la proiezione $A'A^*$ della corda A^*A è parallela alla proiezione $R'Q'$ della retta RQ . Nota la proiezione A' del punto più alto della curva, la proiezione della sezione può essere senz'altro tracciata. Infatti, costruita l'immagine B' dell'estremo opposto del diametro verticale che passa per A , si dispone di una coppia di diametri coniugati dell'ellisse proiezione; inoltre, tra l'ellisse proiezione e il ribaltamento della circonferenza sezione intercede una affinità obliqua che ha come asse la traccia assonometrica del piano di sezione, come centro la direzione della retta $A'A^*$, e come coppia di elementi corrispondenti, le proiezioni assonometriche e i ribaltamenti di vari elementi noti, come i punti A' e A^* .

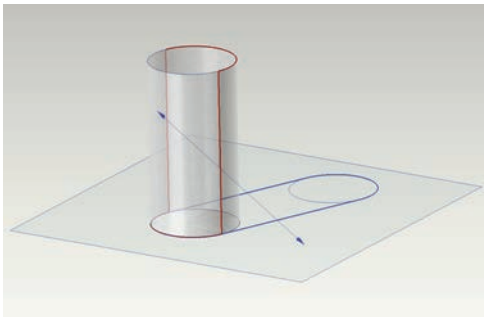
Il problema, tuttavia, non è del tutto risolto. Occorre, infatti, ricercare i punti (se esistono) in cui l'ellisse proiezione della sezione tocca la proiezione del contorno apparente della sfera. A questo scopo, consideriamo un piano di proiezione ausiliario, verticale e parallelo alla direzione di proiezione assonometrica. Su questo piano proiettiamo tutti gli elementi costruiti sin qui (ivi compresa, dunque, la circonferenza sezione); ribaltiamo, infine, il piano, sul piano di proiezione assonometrica. Orbene, il piano nel quale giace il contorno apparente della sfera è perpendicolare alla direzio-

ne di proiezione assonometrica e perciò è proiettante rispetto al piano ausiliario come sopra costruito. Ciò significa che il contorno apparente della sfera si proietta, sul piano ausiliario, in un diametro della circonferenza che rappresenta la sfera, diametro che può essere facilmente costruito per mezzo del centro C e di un qualsiasi punto H , la cui quota si misura sul ribaltamento s^* della sezione, sopra descritto. La proiezione ausiliaria della circonferenza sezione può avere o non avere punti in comune con questo diametro. Se non li ha, vuol dire che la sezione non incontra il contorno apparente della sfera rispetto alla direzione di proiezione assonometrica e che, perciò, la sua proiezione assonometrica è tutta interna alla proiezione assonometrica del contorno apparente; se, viceversa, questi punti esistono, allora la sezione incontra il contorno apparente e, conseguentemente, la sua proiezione è tangente alla proiezione del contorno apparente, nella proiezione dei punti in comune. Il ribaltamento del piano ausiliario consente, a un tempo, il controllo della situazione e la determinazione dei punti di contatto dell'ellisse proiezione e della proiezione del contorno apparente della sfera. Infatti, se J è uno di tali punti, basterà tracciare, sul piano ausiliario, la retta proiettante $J^*J'^*$, per ritornare, con linea di richiamo, al punto di contatto J' .

La costruzione che abbiamo esposto, di grande utilità nel disegno delle volte, è tuttavia assoggettata al tracciamento della ellisse proiezione della sezione sul piano ausiliario. Vi è un modo per ovviare a questo inconveniente: basta costruire la retta g , intersezione del piano che contiene il contorno apparente, con il piano di sezione; se questa retta incontra il contorno apparente, allora i punti che ha in comune con esso, sono i punti cercati (questa interessante osservazione si deve a un mio studente: Andrea Tucci). Graficamente il problema si riduce a individuare due punti della retta stessa. Il primo è dato dall'intersezione G della traccia del piano di sezione con il diametro dell'equatore perpendicolare alla proiezione assonometrica dell'asse z : tale diametro, infatti, appartiene al piano che contiene il contorno apparente. Il secondo punto, H , si sceglie ad arbitrio sulla proiezione ausiliaria sopra costruita e la sua quota si riporta sul ribaltamento del piano di sezio-



220. In generale, il cilindro è descritto da una retta che trasla lungo una curva o ruota intorno a un'asse.



221. Il contorno apparente di un solido cilindrico in rosso, rispetto a una data direzione di proiezione e la sua proiezione sul quadro in blu. In questo caso il contorno apparente è una linea mista.

ne, in H^* . Ciò permette di individuare con esattezza, sempre sul ribaltamento del piano di sezione, tanto la retta intersezione cercata (del piano medesimo con il piano del contorno apparente) quanto gli eventuali punti di incontro con il contorno apparente, che si proiettano, come sappiamo, nei punti di tangenza della proiezione della sezione con la proiezione del contorno apparente.

La costruzione è di grande utilità, anche quando si vuole, semplicemente, arricchire la rappresentazione con un certo numero di meridiani, come abbiamo consigliato.

Cilindro

Un cilindro è, in generale, la superficie descritta da una retta che trasla nello spazio, appoggiandosi a una linea piana qualsivoglia. La retta è una generatrice del cilindro, la linea-guida una sua direttrice (fig. 220). Questa ampia definizione si specializza in alcuni casi particolari: se la direttrice è una conica il cilindro si dice *quadrico*; se la direttrice è una circonferenza, il cilindro si dice *circolare obliquo*, e se la direttrice è una circonferenza che giace in un piano perpendicolare alle generatrici, il cilindro si dice *rotondo* o, anche, *circolare retto*.

Durante il movimento della generatrice, tutti i suoi punti descrivono linee congruenti alla direttrice e che appartengono a piani paralleli al piano che contiene la direttrice medesima. Perciò, se si seziona un cilindro con un qualsiasi piano parallelo alla direttrice, si ottiene una linea che è sovrapponibile alla direttrice stessa.

Ad esempio, se si seziona un cilindro circolare retto con un piano parallelo alla base, si ottiene una circonferenza.

I cilindri che più frequentemente ricorrono in architettura sono, senz'altro, i cilindri circolari, retti e obliqui, ma sono impiegati anche cilindri a direttrice ellittica o parabolica. Il cilindro circolare retto conforma l'intradosso delle volte a botte, nonché i tamburi che sovrastano le cupole; quello obliquo conforma l'intradosso delle volte a botte cosiddette "a sbieco" e delle volte a botte rampanti (per la copertura delle scale).

COSTRUZIONE DEL CILINDRO IN DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE

Sebbene il cilindro si debba intendere di lunghezza indeterminata, come la retta che l'ha generato, nelle applicazioni se ne considera sempre un segmento, terminato agli estremi da due direttrici. Il contorno apparente di un cilindro è, dunque, una linea mista (fig. 221), costituita, salvo casi particolari, da una coppia di generatrici e da due porzioni delle direttrici che lo delimitano. Questi elementi lo descrivono in genere con sufficiente chiarezza nelle rappresentazioni.

Se il cilindro rotondo ha l'asse verticale, il contorno apparente p , rispetto alla prima direzione di proiezione, è rappresentato dal fascio delle generatrici, giacché sono esse stesse rette proiettanti; il contorno apparente s , rispetto alla seconda direzione di proiezione, è invece costituito dalle due generatrici f e g , che appartengono al piano frontale φ che passa per l'asse a del cilindro, e dalle due direttrici circolari d ed e che si trovano su piani proiettanti in seconda e vengono viste, perciò, di profilo.

Il contorno apparente p si proietta dunque su π^I in una circonferenza, che descrive in vera forma e grandezza la direttrice del cilindro; il contorno apparente s si proietta invece su π^{II} in una coppia di rette verticali parallele, proiezioni delle due generatrici di contorno apparente, e in una coppia di segmenti di lunghezza pari al diametro della direttrice, che rappresentano il profilo delle due direttrici terminali.

Consideriamo ora il caso di un cilindro posto in posizione generica.

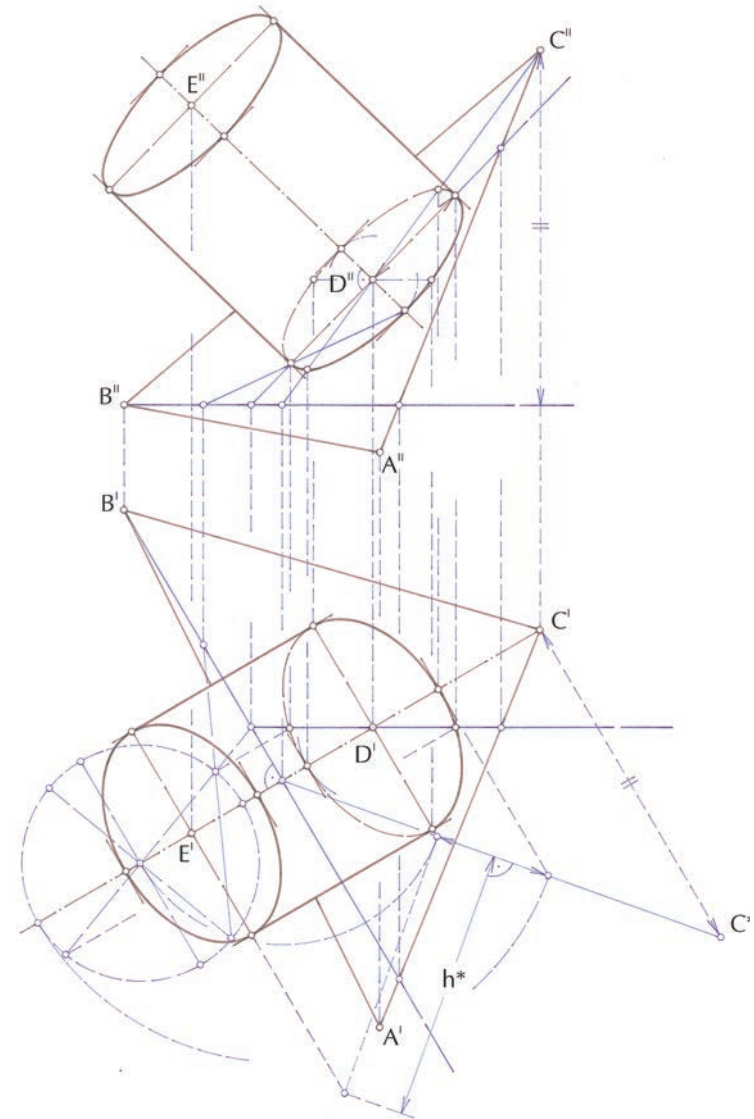
Il piano è assegnato nella forma tecnica, mediante la proiezione di tre suoi punti A , B e C ; del cilindro, circolare retto, è data l'altezza h e il raggio r della direttrice. La direttrice appartiene al piano; in altre parole, il cilindro è appoggiato sul piano ABC .

Per costruire le proiezioni di un cilindro in posizione generica si procede come segue (fig. 222).

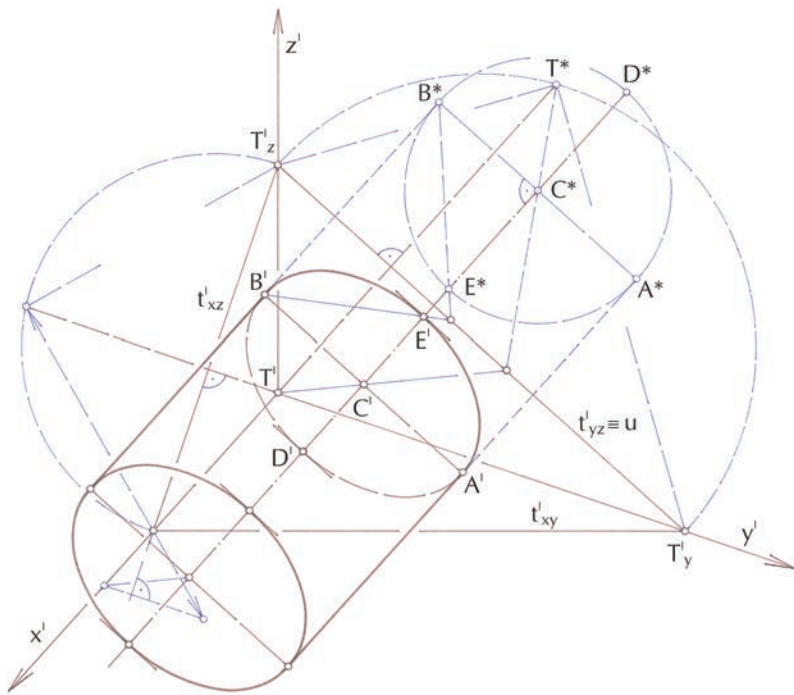
Si rappresenta, innanzi tutto, la direttrice circolare.

Si rappresenta poi l'asse del cilindro, che è, per definizione, perpendicolare alla direttrice e perciò al piano ABC .

Si stacca sull'asse un segmento DE di lunghezza h , a partire dal



222. Il modello grafico della doppia proiezione ortogonale di un cilindro in posizione generica.



223. Nel disegno di architettura il cilindro è disposto frequentemente con l'asse orizzontale, come nel disegno delle volte e delle coperture; questo modello è un'assonometria ortogonale.

centro **D** della direttrice, il secondo estremo, **E**, di questo segmento, è il centro della direttrice che delimita il cilindro superiormente. Si disegnano ora le proiezioni delle generatrici di contorno apparente rispetto alla prima e alla seconda direzione di proiezione; dette proiezioni sono, rispettivamente, parallele alle omonime proiezioni dell'asse, nonché tangenti alla prima e alla seconda proiezione della direttrice tracciata sul piano **ABC**.

Si disegnano infine le proiezioni della direttrice superiore, applicando ancora quanto precedentemente illustrato, ma tenendo anche presenti le nuove condizioni di tangenza: le proiezioni della direttrice debbono, infatti, essere tangenti alle omonime proiezioni delle generatrici di contorno apparente.

Gli assi maggiori delle ellissi proiezioni della direttrice appartengono, rispettivamente, alla prima proiezione della orizzontale per il centro della direttrice e alla seconda proiezione della frontale; gli estremi di detti assi sono anche i punti di contatto delle proiezioni delle generatrici di contorno apparente con le rispettive proiezioni della direttrice.

Si osservi che le proiezioni omonime delle due direttrici, che delimitano il cilindro, sono legate da una particolare affinità di centro e asse impropri, sono legati, cioè, da una *traslazione*. Il che discende, ancora una volta, dalla generazione del cilindro come solido di rivoluzione. La relazione di traslazione può essere sfruttata costruendo, una sola volta, il tracciato dell'ellisse proiezione e riproducendolo tal quale per la proiezione della direttrice opposta.

COSTRUZIONE DEL CILINDRO IN ASSONOMETRIA ORTOGONALE

Nella assonometria ortogonale, in genere l'asse del cilindro è parallelo a uno degli assi coordinati o con esso coincidente (fig. 223). La direttrice è circolare. Sono assegnate le misure del raggio **r** e dell'altezza **h**.

Si costruisce per prima la direttrice. A questo scopo, nel modello grafico, è bene utilizzare l'affinità che intercede tra la proiezione e il ribaltamento dei piani coordinati. Se, ad esempio, la direttrice appartiene al piano **yz**, l'affinità è determinata dall'asse $u \equiv t'_{yz}$ dal centro U^∞ , direzione ortogonale all'asse, e dalla coppia di punti corrispondenti **T'** e **T***, proiezione e ribaltamento dell'origine **T**.

Assegnato il centro C^* della direttrice sul ribaltamento del piano yz si passa alla sua immagine C' costruendo la retta T^*C^* e la sua corrispondente $T'C'$, che la incontra sull'asse u .

Si osserva ora che il diametro della circonferenza direttrice, che si proietta in vera forma, è quello delimitato dagli estremi A e B , parallelo al quadro, perciò parallelo alla traccia t'_{yz} ; si tracciano, dunque, sul ribaltamento di yz il diametro AB e il diametro DE , ortogonali, che si proiettano negli assi dell'ellisse proiezione assonometrica della direttrice. Applicando ancora la relazione di affinità ortogonale si costruiscono gli assi $A'B'$ e $D'E'$ e le relative tangenti, che permettono un sicuro tracciamento dell'ellisse, sia discreto che continuo.

L'altezza h del cilindro si misura sull'asse x , perpendicolare al piano yz . La proiezione della direttrice superiore si ottiene con una traslazione. Si tracciano infine le proiezioni delle generatrici di contorno apparente. Si noti che i punti di contatto delle direttrici con le generatrici di contorno apparente si trovano sui diametri, delle direttrici, che sono paralleli al quadro, sicché le proiezioni delle generatrici di contorno apparente incontrano le ellissi proiezioni delle direttrici negli estremi dell'asse maggiore, come A' e B' .

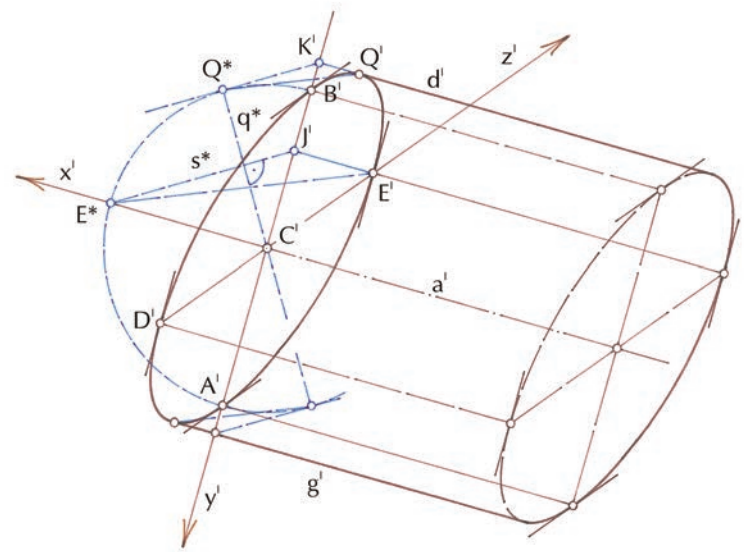
COSTRUZIONE DEL CILINDRO IN ASSONOMETRIA OBLIQUA

Anche nell'assonometria obliqua, converrà disporre il cilindro, rotondo, con l'asse orizzontale e coincidente con l'asse coordinato x ; la direttrice apparirà dunque al piano yz e il suo centro C coinciderà con l'origine degli assi coordinati (fig. 224).

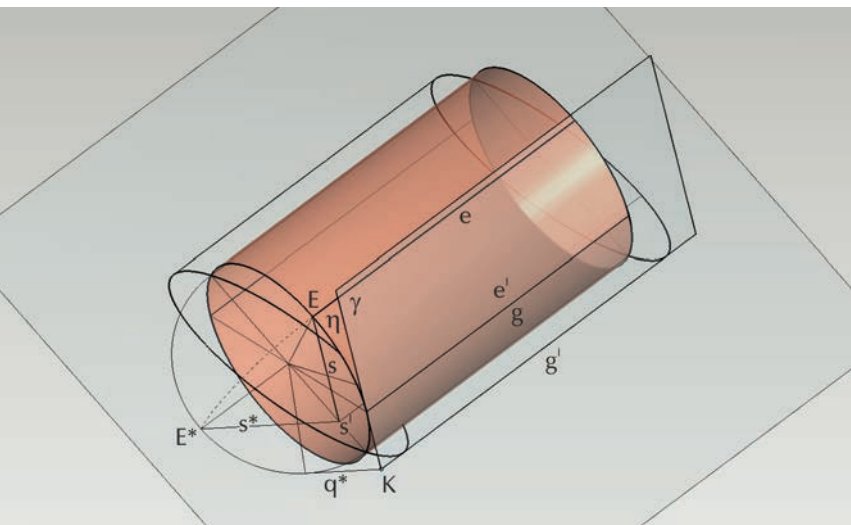
Il piano di proiezione π^l coincide con il piano xy (assonometria militare).

Dopo aver riportato sull'asse y il diametro della direttrice, nella scala del disegno, e averne così costruito la proiezione $A'B'$, si può scegliere ad arbitrio (per il teorema di Pohlke) lo scorcio $D'C'E'$ del diametro che gli è coniugato, cioè la proiezione del diametro verticale della direttrice, ortogonale ad AB .

Queste scelte immediate consentono di tracciare l'ellisse proiezione della direttrice del cilindro e, subito dopo, di disegnare le proiezioni delle generatrici di contorno apparente che risultano parallele alla proiezione a' dell'asse a e tangenti all'ellisse.



224. L'assonometria obliqua del cilindro.



225. Il ribaltamento del profilo del cilindro sul piano di quadro consente di determinare la proiezione della generatrice di contorno apparente e di tracciare, perciò, la proiezione del profilo tangente alla proiezione della generatrice.

Tuttavia, se si segue quest'ordine, peraltro intuitivo, il tracciamento delle proiezioni delle generatrici di contorno apparente è subordinato al tracciamento dell'ellisse, mentre dovrebbe piuttosto essere il contrario, e cioè l'ellisse dovrebbe trovare nelle proiezioni delle generatrici di contorno apparente due condizioni di tangenza da rispettare. Proponiamoci dunque di ottenere tali condizioni, prima ancora di disegnare l'ellisse.

Si consideri la giacitura dei due piani γ e δ , proiettanti e tangenti al cilindro, che lo toccano lungo le generatrici di contorno apparente g e d : essa contiene la direzione di proiezione assonometrica e la direzione dell'asse del cilindro, parallelo alle generatrici (fig. 225). Qualsiasi piano che contenga queste due direzioni è parallelo ai piani proiettanti tangenti al cilindro. In particolare, il piano η che passa per il punto E , estremo del diametro della direttrice perpendicolare al piano di proiezione π^l , per la generatrice relativa e , nonché per la direzione di proiezione, ha la giacitura dei piani tangenti. Esso taglia il piano della direttrice secondo una retta s la cui proiezione s^l è un punto che appartiene alla proiezione e^l della retta e .

Ribaltando il piano della direttrice, il punto E si porta in E^* e la retta s in s^* . È dunque possibile disegnare, sul piano ribaltato, una retta q^* , parallela alla s^* , che rappresenta l'intersezione, con il piano della direttrice, di uno dei due piani γ e δ proiettanti e tangenti al cilindro.

Tra la proiezione assonometrica della direttrice e il suo ribaltamento intercede una affinità obliqua di asse u e centro nella direzione della retta $E'E^*$.

La retta q^* , come sopra costruita, incontra l'asse u di detta affinità in un punto K , per il quale passa la g^l , proiezione di una delle generatrici di contorno apparente cercate.

Si noti infine che il punto Q^* , contatto della retta q^* con il ribaltamento della direttrice, corrisponde, nell'affinità, al punto di contatto Q^l tra la proiezione della direttrice stessa e la proiezione delle generatrici di contorno apparente.

La costruzione può essere ripetuta senza eccezioni per costruire la proiezione della seconda generatrice di contorno apparente,

che, però, si può determinare più semplicemente come simmetrica della prima rispetto all'asse del cilindro.

Riassumendo:

- si traccia il semicerchio di centro C' e raggio CB' ;
 - si prolunga l'asse del cilindro fino a incontrare il semicerchio nel punto E^* ;
 - si conduce per E' una parallela all'asse, fino ad staccare sul diametro $A'B'$ il punto J' ;
 - si traccia la retta E^*J' ;
 - si costruisce il raggio $C'D'$ del semicerchio ortogonale alla E^*J' ;
 - per l'estremo di tale raggio, si conduce ancora una retta ortogonale che incontra il prolungamento del diametro $A'B'$ nel punto K' .
- La proiezione d' della generatrice di contorno apparente del cilindro, passa per il punto K' così determinato.

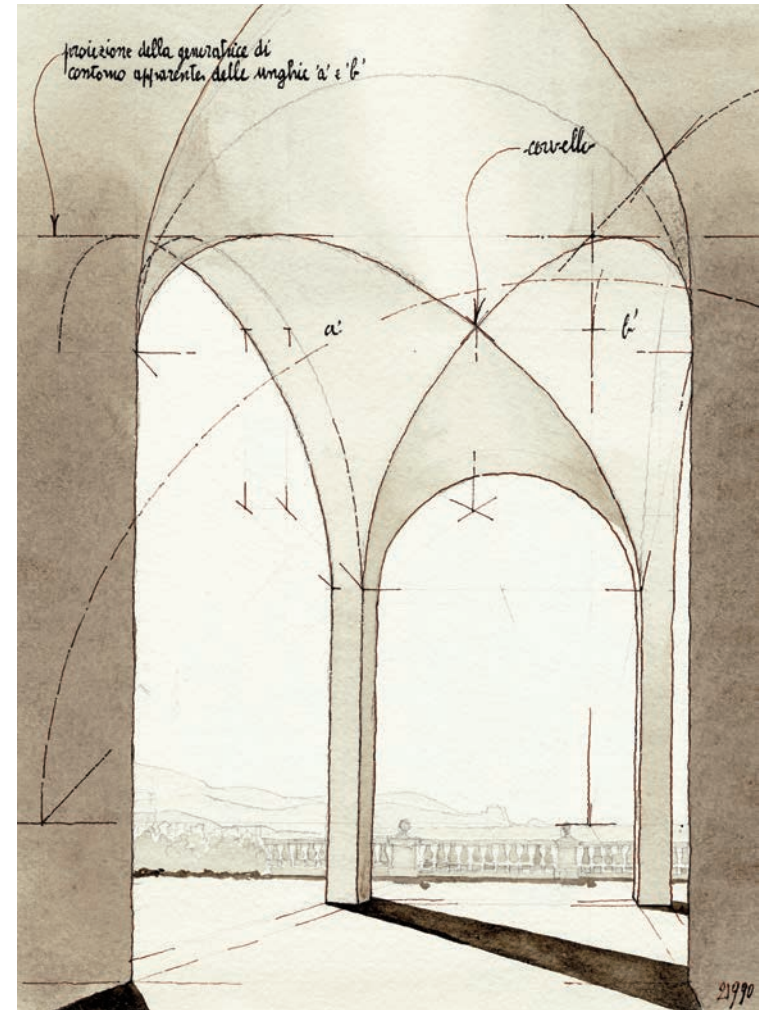
Costruite le proiezioni delle generatrici di contorno apparente, il disegno dell'ellisse proiezione della direttrice risulterà di gran lunga più affidabile. La rappresentazione può essere completata misurando sull'asse l'altezza h del solido e disegnando, per traslazione, la direttrice che termina il cilindro.

Sezioni piane del cilindro

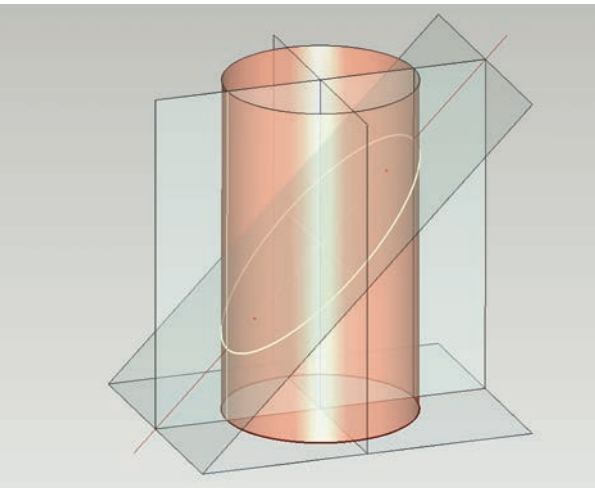
La sezione piana di un cilindro rotondo è una ellisse oppure una circonferenza, nel caso particolare in cui il piano di sezione è parallelo al piano della direttrice. Se il piano di sezione è parallelo all'asse, esso comprende due generatrici ed è parallelo a tutte le altre. Se, invece, non è parallelo all'asse, il piano di sezione incontra sempre tutte le generatrici del cilindro e, perciò, anche quelle di contorno apparente.

Se si prende in considerazione l'ellisse sezione come una proiezione della direttrice fatta sul piano di sezione, assumendo come centro la direzione dell'asse, si vede che, per costruire una coppia di diametri coniugati dell'ellisse sezione, è sufficiente tagliare il piano di sezione con una qualsiasi coppia di piani perpendicolari, passanti per l'asse.

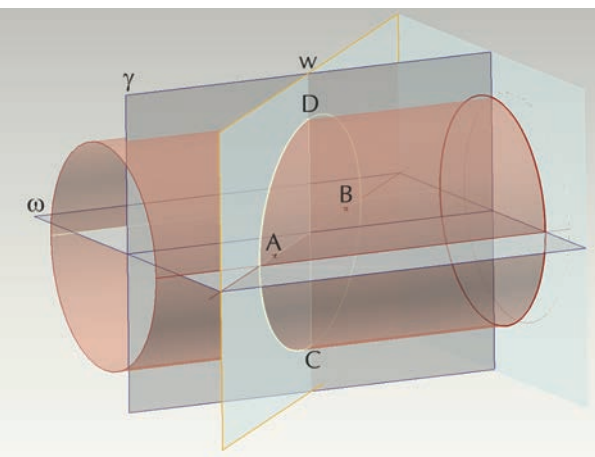
Tra le infinite coppie di piani perpendicolari che passano per l'as-



226. Una delle più notevoli applicazioni della sezione piana del cilindro è quella che riguarda i modelli delle volte a crociera.



227. Un cilindro rotondo è sezionato da un piano obliquo: i piani che passano per l'asse e sono, rispettivamente, perpendicolare e parallelo alla retta intersezione del piano di sezione con il piano della direttrice, intersecano il piano di sezione lungo gli assi dell'ellisse sezione.



228. Sezione piana più comune nel disegno di architettura. Il cilindro rotondo ha l'asse orizzontale ed è sezionato da un piano obliquo, verticale. È il caso precedente, dove il modello è semplicemente ruotato di un angolo retto intorno a un asse orizzontale.

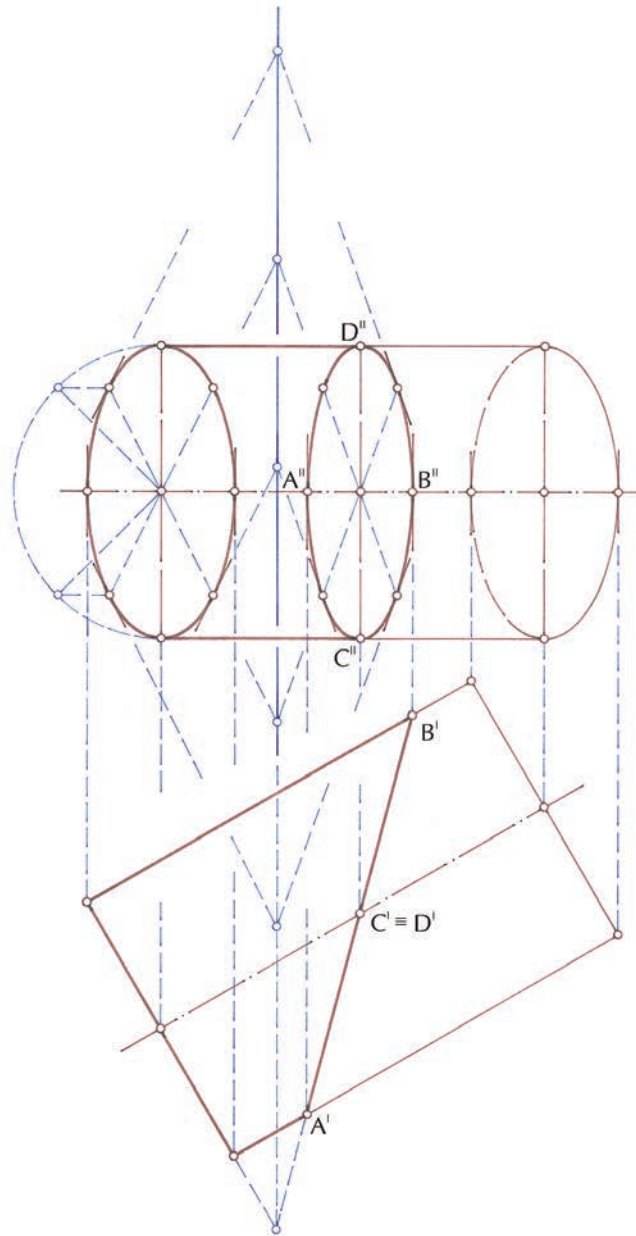
se, una comprende i piani rispettivamente parallelo e perpendicolare alla retta intersezione del piano di sezione e del piano della direttrice; questa coppia particolare individua, sul piano di sezione, gli assi dell'ellisse sezione del cilindro (fig. 227).

SEZIONE DEL CILINDRO IN DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE

Supponiamo il cilindro appoggiato con una generatrice al primo piano di proiezione (fig. 228): un qualsiasi piano proiettante in prima, che non sia parallelo alle generatrici, lo taglierà, allora, secondo una ellisse, che si proietterà, in prima, in un segmento della prima proiezione del piano di sezione e in seconda in un'altra ellisse. Consideriamo ora due piani: uno ω orizzontale e l'altro γ verticale, passanti per l'asse del cilindro; consideriamo, altresì, la retta verticale w intersezione del piano di sezione, con il piano cui appartiene la direttrice g del cilindro. I due piani ω e γ sono, rispettivamente, perpendicolare e parallelo alla retta w e tagliano dunque il piano di sezione negli assi dell'ellisse sezione. Detti assi sono dunque, l'uno, il maggiore, orizzontale (AB), l'altro, il minore, verticale (CD). Il primo si proietta in vera grandezza sul primo piano di proiezione, il secondo sul secondo (fig. 229).

La seconda proiezione dell'ellisse sezione si costruisce dunque immediatamente: dalle prime proiezioni A' e B' dell'asse maggiore si risale, con linee di richiamo, alle seconde proiezioni A'' e B'' , che appartengono alla seconda proiezione del piano ω ; dalle prime proiezioni, coincidenti, $C' \equiv D'$ dell'asse minore si risale, con linea di richiamo, alle seconde proiezioni C'' e D'' , che appartengono, rispettivamente, alla seconda proiezione della generatrice più bassa del cilindro (quella che sta sul primo piano di proiezione) e alla seconda proiezione di quella più alta.

Si noti che dette generatrici sono anche le generatrici di contorno apparente del cilindro rispetto alla seconda direzione di proiezione, così come le generatrici che passano per A e B sono quelle di contorno apparente rispetto alla prima direzione di proiezione. La posizione particolare degli assi AB e CD , rispettivamente orizzontale e verticale, fa sì che anche le loro seconde proiezioni $A''B''$ e $C''D''$ siano ortogonali: si tratta, dunque, degli assi dell'ellisse seconda proiezione. I punti C'' e D'' sono anche punti di contatto



229. Sezione piana di un cilindro ad asse orizzontale, nel modello grafico della doppia proiezione ortogonale.

dell'ellisse seconda proiezione con la proiezione del contorno apparente del cilindro.

Dobbiamo infine osservare che, nell'esempio che abbiamo proposto, gli assi dell'ellisse sezione oggettiva e gli assi dell'ellisse proiezione si scambiano, per così dire, i ruoli: l'asse maggiore della sezione, infatti, subisce, in seconda proiezione, uno scorcio che lo trasforma nell'asse minore dell'ellisse proiezione. Ci si chiede allora: è possibile che lo scorcio dell'asse maggiore dell'ellisse sezione sia tale da proiettarlo, in seconda, in un segmento lungo quanto il diametro della direttrice? In tal caso, è evidente, l'ellisse seconda proiezione avrebbe gli assi di uguale lunghezza e sarebbe, perciò, una circonferenza. È facile riscontare che ciò avviene quando il piano di sezione biseca l'angolo formato dall'asse del cilindro con la seconda direzione di proiezione.

Consideriamo ora il caso di un piano di sezione in posizione generica.

Il cilindro rotondo è posto con l'asse a verticale e la direttrice g sul primo piano di proiezione. Il piano di sezione, in posizione generica, è assegnato per mezzo di una retta orizzontale AB e di un terzo punto C , distinto da AB (fig. 230).

Procediamo, direttamente, con la ricerca degli assi dell'ellisse sezione: essi si ottengono, come abbiamo appena spiegato, intersecando il piano di sezione ABC con una coppia di piani perpendicolari ω e γ , appartenenti all'asse del cilindro e rispettivamente parallelo e perpendicolare alla retta intersezione s del piano di sezione e del piano della direttrice. Occorrerebbe dunque, a prima vista, costruire detta retta intersezione; in realtà, per costruire i due piani basta osservare che ogni retta orizzontale del piano ABC , e perciò anche la retta AB , è parallela alla retta s .

Per costruire γ è dunque sufficiente tracciare la retta g^I , ortogonale alla $A'B'$ e appartenente alla proiezione a^I dell'asse.

Si noti che γ è un piano proiettante e, perciò, tutte le sue rette hanno la prima proiezione che coincide con la g^I ; fra queste rette vi è anche la retta di massima pendenza p del piano di sezione ABC , la cui seconda proiezione, p^II , si costruisce immediatamente per mezzo dei punti G e H .

La retta p incontra il cilindro nei punti L e M , estremi dell'asse maggiore dell'ellisse sezione. La superficie del cilindro è proiettante, dunque questi punti hanno le prime proiezioni L^I e M^I su g^I ; alle seconde proiezioni si risale con linee di richiamo.

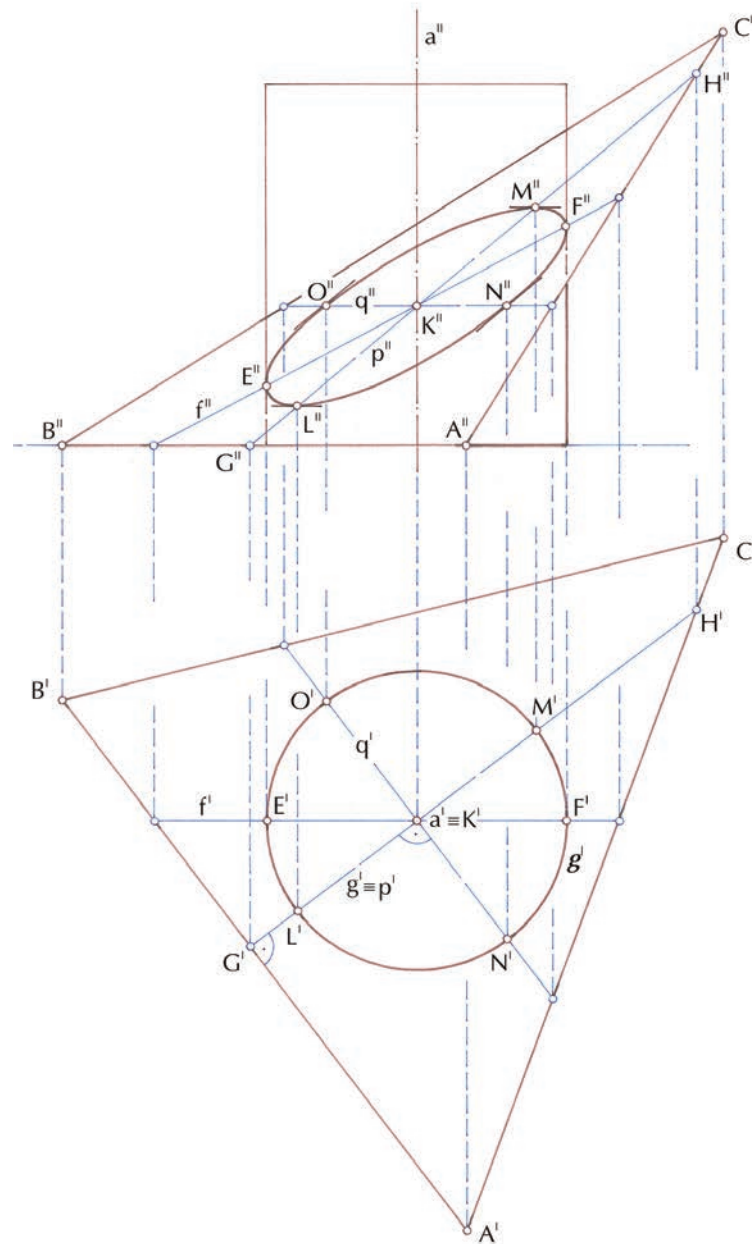
Poiché appartiene al piano γ , che passa per l'asse, la retta p lo incontra in un punto K che è il centro dell'ellisse sezione. Per questo punto passa la retta q che si ottiene tagliando il piano ABC con il piano ω ; essa è, per costruzione, parallela alla retta AB e, perciò, orizzontale: dunque la sua prima proiezione q^I è parallela alla retta $A'B'$, mentre la sua seconda proiezione q^II è parallela alla linea di terra e passa per la seconda proiezione del centro K .

La retta q incontra la superficie del cilindro nei punti N (N^I , N^II) e O (O^I , O^II), che sono gli estremi dell'asse minore dell'ellisse sezione. Gli assi così costruiti si proiettano in prima in una coppia di diametri ortogonali della circonferenza g^I , in seconda in una coppia di diametri coniugati dell'ellisse seconda proiezione della sezione, ellisse che dunque si potrebbe disegnare aiutati dalle tangenti negli estremi. Bisogna tuttavia ricordare che la curva sezione incontra le due generatrici di contorno apparente del cilindro rispetto alla seconda direzione di proiezione e che, pertanto, l'ellisse seconda proiezione deve essere tangente alla seconda proiezione delle generatrici medesime.

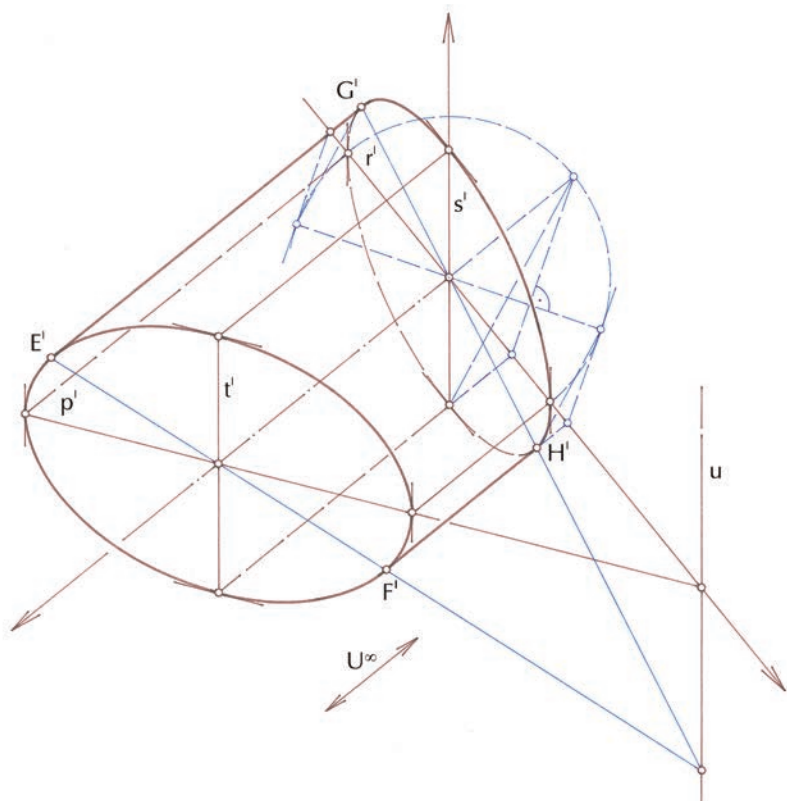
Per determinare i punti E e F , nei quali avviene il contatto, basta costruire il piano frontale che passa per l'asse del cilindro; esso taglia la superficie del cilindro nelle due generatrici di contorno apparente e il piano di sezione secondo una retta frontale f : i punti comuni alla f e alle generatrici suddette sono i punti di contatto cercati.

SEZIONE DEL CILINDRO IN ASSONOMETRIA OBLIQUA

Nella assonometria obliqua, rappresentato il cilindro come abbiamo già fatto, sezioniamolo con il piano verticale γ , obliquo rispetto all'asse. Sulla base delle osservazioni già fatte circa la prospettiva che lega la direttrice e la sezione del cilindro, possiamo affermare che tra la proiezione assonometrica della sezione da costruire e la proiezione assonometrica della direttrice intercede un'affinità obliqua che ha l'asse u nella proiezione della retta intersezio-



230. Sezione del cilindro rotondo con un piano in posizione generica, nel modello grafico della doppia proiezione ortogonale.



231. Sezione del cilindro rotondo con un piano in posizione generica, nel modello assonometrico obliquo.

ne del piano della direttrice medesima con il piano di sezione e centro U^∞ nella direzione della proiezione dell'asse del cilindro (fig. 231). Ciò detto, si costruisce immediatamente la coppia p' , t' di diametri coniugati della proiezione della sezione che corrisponde alla coppia r' , s' di diametri coniugati della proiezione della direttrice, già rappresentata. Si noti che vi è corrispondenza anche tra i punti di contatto E' , F' e G' , H' delle due curve con le proiezioni delle generatrici di contorno apparente e ciò perché queste ultime non mutano, quale che sia il piano di sezione considerato.

Cono

Il cilindro può essere considerato un caso particolare del cono, precisamente un cono che ha per vertice una direzione. Il cilindro, infatti, è generato dal movimento di una retta che si appoggia a una direttrice e si mantiene parallela a un'altra retta, l'asse, sicché le generatrici e l'asse hanno in comune la direzione.

Il cono, invece, è generato dal movimento di una retta che si appoggia a una direttrice, ed è incidente un'altra retta, l'asse, sicché le generatrici e l'asse hanno in comune il punto che è detto *vertice*. Pertanto, tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato per il cilindro possono, con qualche doverosa precisazione, essere estese al cono.

La definizione generale del cono si specializza in alcuni casi particolari: se la direttrice è una conica, il cono si dice *quadrico*; se la direttrice è una circonferenza, il cono si dice *circolare obliquo*, e se la direttrice è una circonferenza che giace in un piano perpendicolare all'asse, il cono si dice *rotondo* o, anche, *circolare retto* (fig. 232).

Durante il movimento della generatrice, tutti i suoi punti descrivono, nei piani che sono paralleli al piano in cui giace, linee simili alla direttrice stessa. Perciò, se si seziona un cono con un qualsiasi piano parallelo alla direttrice, si ottiene una linea che è simile alla direttrice. Ad esempio, se si seziona un cono circolare retto con un piano parallelo alla base, si ottiene una circonferenza.

I cono che più frequentemente ricorrono in architettura sono,

senz'altro, i coni circolari, retti e obliqui, ma sono impiegati anche coni a direttrice ellittica. Il cono circolare retto conforma l'intradosso degli archi strombati, cioè di quegli archi che ricoprono aperture che si allargano verso l'interno per consentire alla luce di penetrare nell'ambiente più profondamente, oppure, al contrario, che si allargano verso l'esterno, come si vede spesso nell'architettura militare. Conici sono anche gli intradossi delle volte che simulano, con sapiente gioco prospettico, una profondità maggiore del vero, come avviene, ad esempio, nella Galleria di Palazzo Spada a Roma e nell'abside della Chiesa di San Satiro, a Milano.

COSTRUZIONE DEL CONO IN DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE

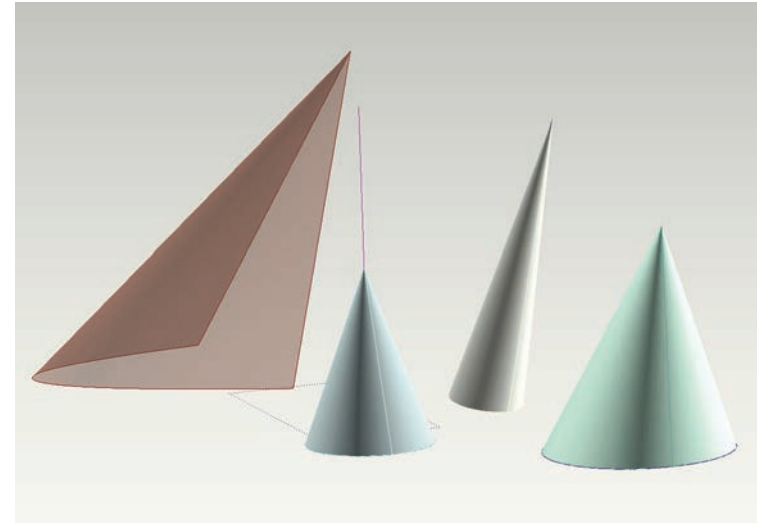
Sebbene il cono si debba intendere indeterminatamente esteso, come la retta che l'ha generato, e a due falde, nelle applicazioni se ne considera sempre un segmento, terminato, a un estremo, dal vertice, e all'altro da una direttrice. Il contorno apparente di un cilindro è, dunque, una linea mista, costituita, salvo casi particolari, da una coppia di generatrici e da una parte della direttrice che lo delimita. Questi elementi lo descrivono in genere con sufficiente chiarezza nelle rappresentazioni.

Cominciamo occupandoci di un cono rotondo con l'asse verticale, perciò perpendicolare al primo piano di proiezione. In tal caso, il contorno apparente p , rispetto alla prima direzione di proiezione, è rappresentato dalla base, che è anche la direttrice, giacché solo se si considera il cono delimitato da una base è possibile costruire rette proiettanti in prima che lo lambiscano. La proiezione del contorno apparente, rispetto alla prima direzione di proiezione, è, dunque, un cerchio p' , che descrive in vera forma e grandezza la direttrice del cono.

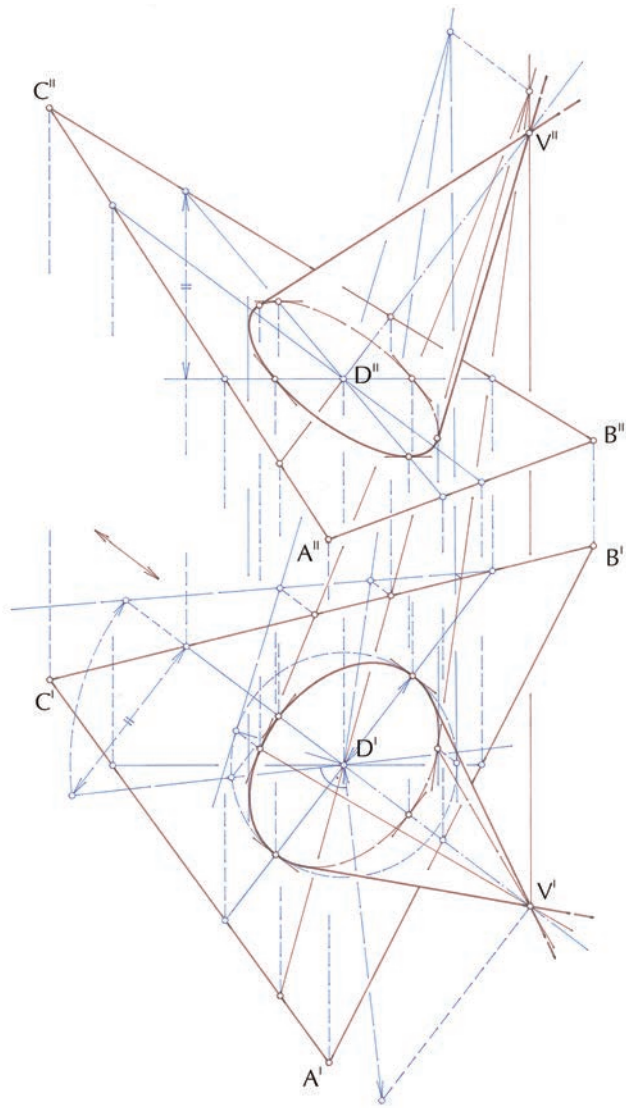
La proiezione del contorno apparente, rispetto alla seconda direzione di proiezione, è invece costituito da una coppia di rette, f^{II} , g^{II} , proiezioni delle due generatrici di contorno apparente, e in un segmento di lunghezza pari al diametro della direttrice, che rappresenta il profilo della base.

Supponiamo ora che il cono sia in posizione generica, appoggiato con la base su un piano obliquo ABC .

Il problema si riconduce ad una sequenza di operazioni già note (fig. 233):



232. Genesi geometrica del cono.



233. Cono rotondo, in posizione generica, nel modello della doppia proiezione ortogonale.

- si costruisce, innanzi tutto, la direttrice circolare;
- si costruisce poi l'asse del cono, che è, per definizione, perpendicolare alla direttrice e perciò al piano ABC ;
- si stacca sull'asse un segmento di lunghezza h , a partire dal centro D della direttrice: il secondo estremo, V , di questo segmento è il vertice del cono;
- si costruiscono ora le generatrici del cono, le cui proiezioni passano per le omonime proiezioni del vertice e per i punti della direttrice. In particolare, le proiezioni delle generatrici di contorno apparente, rispetto alla prima e alla seconda direzione di proiezione, sono, rispettivamente, le tangenti condotte dalla proiezione del vertice alla omonima proiezione della direttrice sul piano ABC ; si noti che questa operazione è equivalente a quella già eseguita per l'analogia rappresentazione del cilindro, con l'unica differenza rappresentata, in quel caso, dal vertice improprio e, dunque, dal parallelismo delle proiezioni delle due direttrici.

COSTRUZIONE DEL CONO IN ASSONOMETRIA ORTOGONALE

Nella assonometria ortogonale, supporremo l'asse del cono rotondo parallelo a uno degli assi coordinati o coincidente, giacché questa è la posizione che il cono assume, in genere, in architettura. La direttrice è circolare. Sono assegnate le misure del raggio r e dell'altezza h (fig. 234).

Si rappresenta la direttrice, utilizzando l'affinità che intercede tra la proiezione e il ribaltamento dei piani coordinati. Se, ad esempio, la direttrice appartiene al piano xy , l'affinità è determinata dalla retta $u = t'_{xy}$ dal centro U° , direzione ortogonale all'asse, e dalla coppia di punti corrispondenti T^1, T^* , proiezione e ribaltamento dell'origine T . Assegnato il centro C^* della direttrice (qui coincidente con T^*) sul ribaltamento del piano xy resta individuata la sua proiezione assonometrica $C^1 \equiv T^1$. Si osserva ora che il diametro della circonferenza direttrice, che si proietta in vera forma, è quello AB parallelo al quadro, perciò parallelo alla traccia t'_{xy} ; si tracciano, dunque, sul ribaltamento di xy il diametro A^*B^* e il diametro D^*E^* , ortogonali, che si proiettano negli assi dell'ellisse proiezione assonometrica della direttrice. Applicando ancora la relazione di affinità ortogonale si costruiscono gli assi A^1B^1 e D^1E^1 e le relative

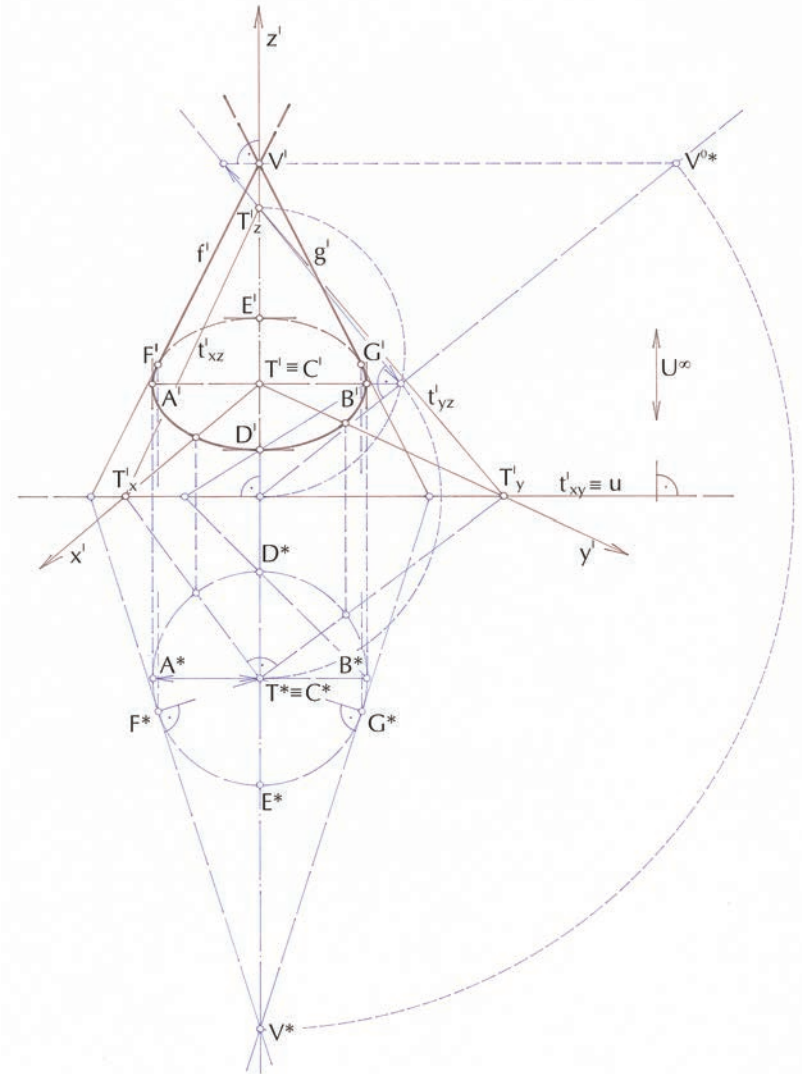
tangenti, che permettono un sicuro tracciamento dell'ellisse, sia come linea grafica che usando il filo. L'altezza h del cilindro si misura sull'asse z , perpendicolare al piano xy , per mezzo della relativa unità di misura assonometrica. L'estremo superiore V del segmento così costruito è il vertice del cono, comune a tutte le generatrici; pertanto, per disegnare la proiezione di quelle di contorno apparente basta condurre per V le tangenti alla proiezione della direttrice.

Si noti che i punti di contatto della direttrice con le generatrici di contorno apparente non appartengono al diametro parallelo al quadro. Questa circostanza ci induce a una breve riflessione.

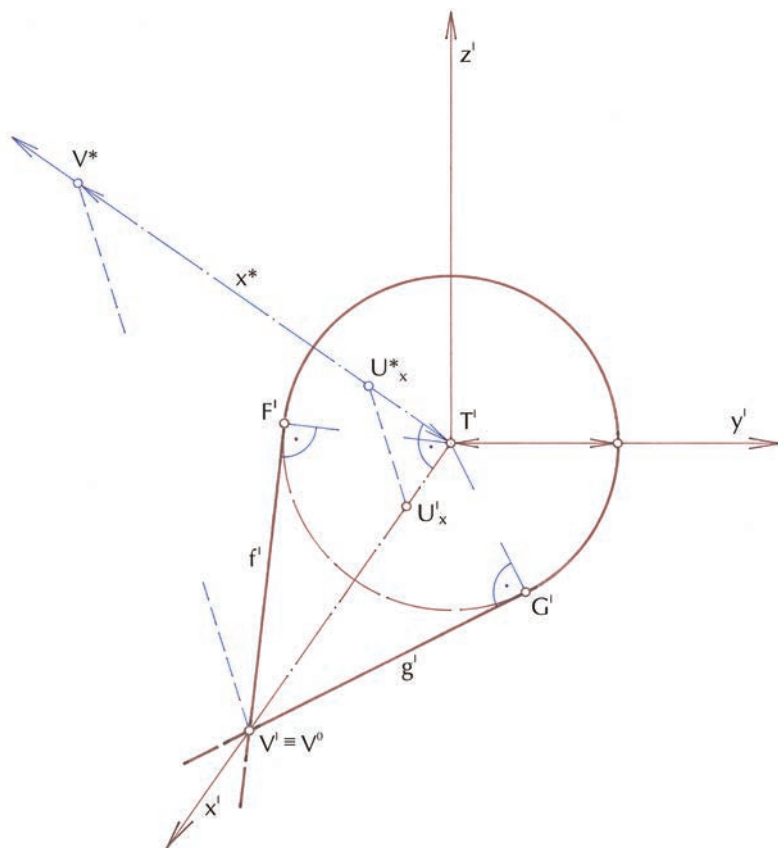
Consideriamo il cono disposto nello spazio così come lo abbiamo rappresentato, e cioè su un piano obliquo rispetto al piano di quadro $\pi^!$. Ricordiamo che la direzione di proiezione è perpendicolare a $\pi^!$. Costruiamo ora i due piani proiettanti γ e φ , che toccano il cono lungo le generatrici di contorno apparente, g e f : essi appartengono al vertice V , perché contengono ognuno una generatrice, che passa appunto per V , e appartengono anche, per costruzione, al punto $V^!$, proiezione di V . Dunque la retta $VV^!$ è la retta intersezione dei due piani. Detta retta incontra il piano della direttrice nel punto V^0 , perciò le rette intersezione dei due piani γ e φ con il piano della direttrice passano per V^0 e sono tangenti la direttrice medesima. Dunque, per costruire le due generatrici di contorno apparente del cono, g e f , rispetto alla direzione di proiezione assegnata, basterà condurre per il vertice una retta proiettante, determinarne l'intersezione V^0 con il piano della direttrice e condurre per V^0 le tangenti alla direttrice medesima nei punti di contatto G e F : le rette cercate sono VG e VF .

Questa costruzione si estende a tutti i modelli e può essere applicata anche al cilindro, considerandone il vertice improprio.

Vogliamo ora costruire i punti di contatto F e G e, conseguentemente, le loro proiezioni $F^!$ e $G^!$. Consideriamo, innanzi tutto, il ribaltamento del piano proiettante che passa per l'asse z , che è poi anche l'asse del cono. Sul ribaltamento di questo piano è possibile tracciare la retta proiettante per V , cioè la $V^!V^0$, ortogonale alla cerniera, e determinare così il ribaltamento V^{0*} del punto V^0 . Ciò



234. Cono rotondo nell'assonometria ortogonale.



235. Cono rotondo nell'assonometria obliqua.

fatto si può riportare V^0 sul ribaltamento del piano xy , in V^* , e tracciare, sempre sul piano della direttrice ribaltato, le due tangenti alla direttrice medesima, determinando i punti F^* e G^* , dai quali si risale, per affinità, alle proiezioni F^1 e G^1 .

COSTRUZIONE DEL CONO IN ASSONOMETRIA OBLIQUA

In assonometria obliqua, per esaminare il caso sopra accennato delle strombature, disporremo il cono, rotondo, con l'asse orizzontale e coincidente con l'asse coordinato x ; dunque la direttrice apparterrà al piano yz , e il suo centro C coinciderà con l'origine degli assi coordinati (fig. 235).

Il piano di quadro coincide con il piano yz (assonometria cavaliere). Si disegna perciò la direttrice in vera forma, utilizzando il compasso. La proiezione V^1 del vertice, si trova sulla proiezione assonometrica dell'asse x . Per determinarla si può far uso della scala assonometrica o di un ribaltamento del relativo piano proiettante, indifferentemente. Si osservi che in questo modello il punto V^1 coincide con il punto V^0 e, per conseguenza, la costruzione dei punti di contatto F e G , suddetti, è immediata.

Sezioni piane del cono

Sezionando con un piano un cono circolare obliquo, si possono ottenere le curve che Apollonio ha denominato *ellipse*, *parabola* e *iperbole*, nonché, in alcuni casi particolari, la circonferenza o due rette o anche un solo punto.

Per stabilire quale sia il risultato della sezione, si costruisce un piano γ , appartenente al vertice del cono, parallelo al piano di sezione σ e la sua retta intersezione r con il piano della direttrice circolare.

Possono allora darsi tre casi principali (fig. 236):

- la retta r è esterna alla direttrice;
- la retta r è tangente alla direttrice;
- la retta r è secante la direttrice.

Nel primo caso, il piano di sezione σ_1 incontra tutte le generatrici del cono in punti propri e produce, perciò, una curva priva di punti impropri (o direzioni), cioè, in generale, un'ellisse.

Nel secondo caso, il piano di sezione σ_2 è parallelo a una generatrice \mathbf{g} del cono: precisamente quella che appartiene al piano γ_2 , che risulta tangente alla superficie. La curva sezione contiene, perciò, una direzione, quella della retta \mathbf{g} , ed è una parabola. La direzione che appartiene alla parabola è quella dell'asse.

Nel terzo caso il piano σ_3 è parallelo a due generatrici del cono: precisamente \mathbf{q} e \mathbf{k} , appartenenti al piano γ_3 , che risulta secante la superficie. La curva sezione contiene, perciò, due direzioni, quelle di \mathbf{q} e \mathbf{k} , ed è un'iperbole. Le direzioni che appartengono all'iperbole sono quelle degli asintoti.

Si debbono infine considerare alcuni casi particolari:

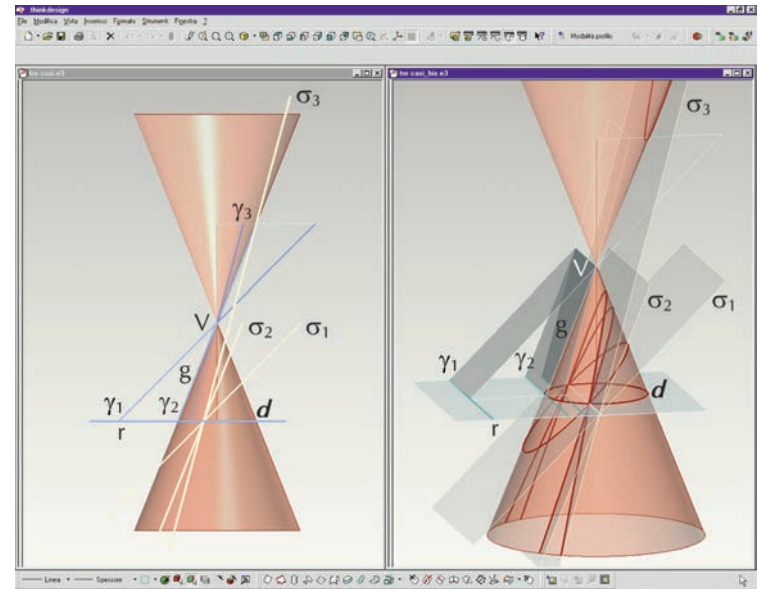
- il piano γ è parallelo al piano della direttrice, allora anche σ è parallelo al piano della direttrice e perciò la curva sezione è simile alla direttrice; è, dunque, una circonferenza;
- il piano γ e il piano σ coincidono e sono entrambi tangenti alla direttrice, allora entrambi passano per il vertice e dunque la curva sezione è costituita da due rette coincidenti, appartenenti al vertice \mathbf{V} ; si dice, questa, una *conica degenera*;
- il piano γ e il piano σ coincidono e secano la direttrice, allora entrambi passano per il vertice e dunque la curva sezione è costituita da due rette distinte, incidenti nel vertice \mathbf{V} ; si dice, questa, una *conica degenera*;
- il piano γ e il piano σ coincidono e sono esterni alla direttrice, allora entrambi passano per il vertice ed è questo l'unico punto che hanno in comune con la superficie; dunque la curva sezione è un punto; si dice, anche questa, una *conica degenera*.

Traffando, dunque, della sezione piana del cono, dovremo considerare separatamente i tre casi principali.

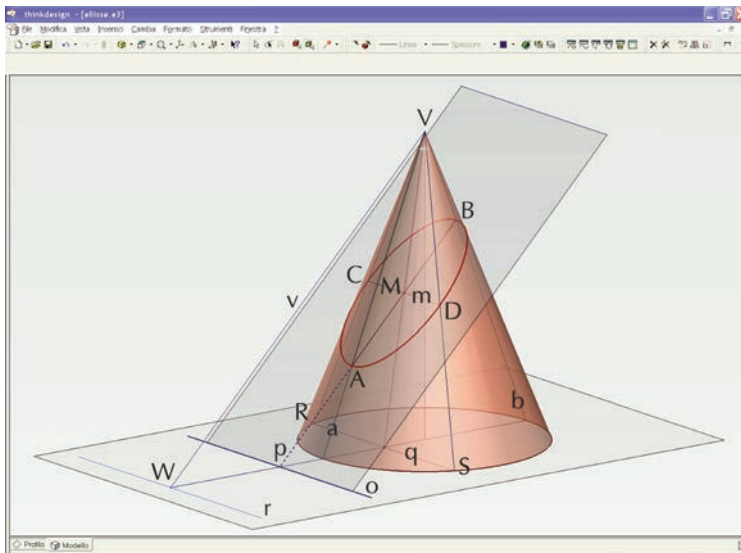
L'ELLISSE SEZIONE DEL CONO

Cominceremo dal caso in cui la sezione è un'ellisse. Il cono è circolare retto, disposto con l'asse verticale. Il piano di sezione è assegnato per mezzo della orizzontale \mathbf{o} , che appartiene al medesimo piano che ospita la direttrice, e della retta di massima pendenza \mathbf{p} .

Si costruisce (fig. 237) la retta \mathbf{v} , parallela alla \mathbf{p} , per il vertice del cono, e si determina il punto \mathbf{W} nel quale essa incontra il piano della



236. I tre casi tipici della sezione piana del cono.



237. Costruzione dell'ellisse sezione di un cono.

direttrice. Per questo punto passa la retta r , costruita come abbiamo visto nel paragrafo precedente, che risulta esterna alla direttrice: la curva sezione sarà dunque un'ellisse ed ellissi, in generale, saranno le sue proiezioni, prima e seconda.

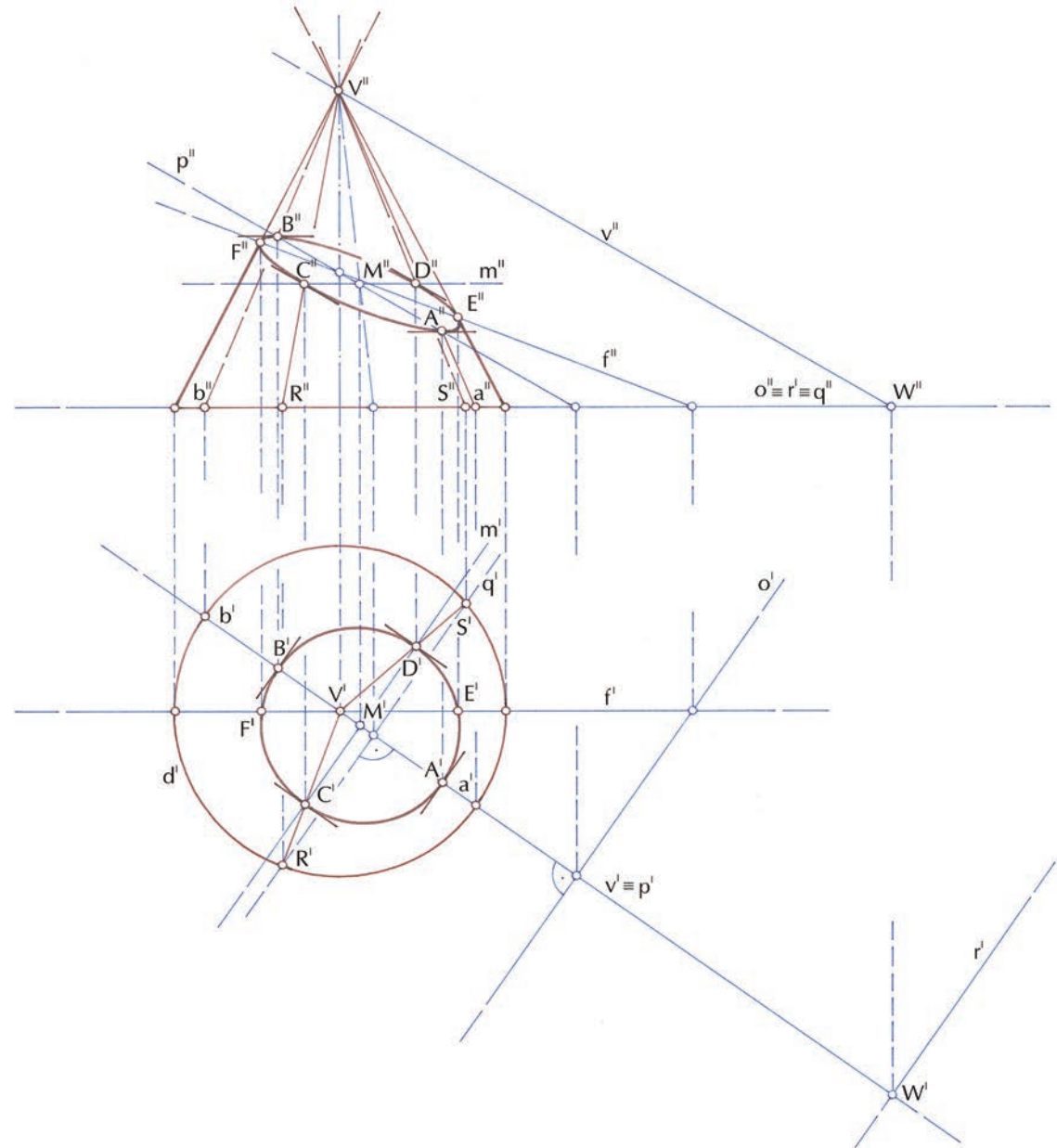
Si costruiscono ora il punto più alto e il punto più basso della curva: essi appartengono alla retta di massima pendenza del piano di sezione, che incontra l'asse del cono; per costruire questa retta ci si serve, com'è noto, di un piano verticale e perpendicolare alla retta o , che taglia il cono secondo due generatrici a e b : i punti A e B , comuni a dette generatrici e alla retta di massima pendenza, sono i punti cercati.

Le tangenti alla curva, in questi due punti, sono orizzontali e, perciò, ortogonali al segmento AB . Il segmento AB è dunque uno degli assi dell'ellisse sezione, precisamente l'asse maggiore.

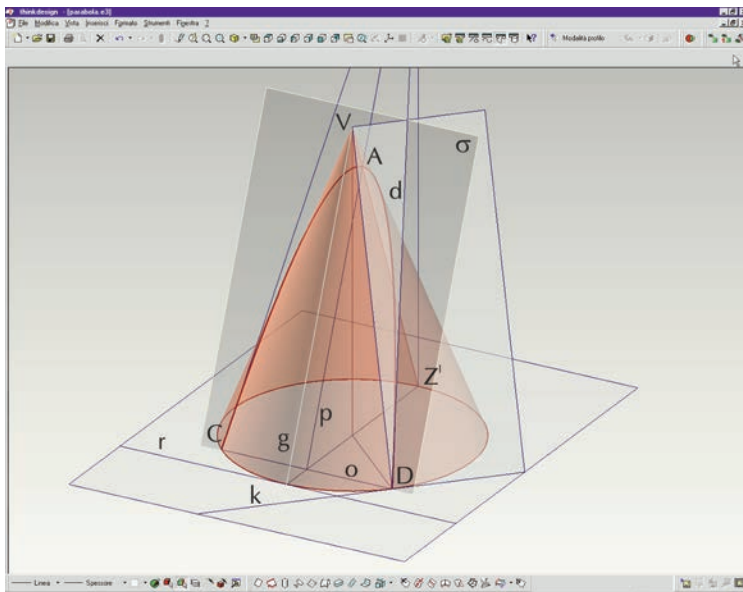
Per costruire l'asse minore, si individua il punto medio M di AB e si conduce per esso una retta orizzontale m , ricercandone le intersezioni C e D con la superficie del cono; dette intersezioni sono gli estremi dell'asse minore. Per individuarle, basta considerare il piano Vm e la sua retta orizzontale q , intersezione del piano stesso con il piano della direttrice: i punti R e S , comuni a detta retta e alla direttrice del cono, individuano le due generatrici c e d alle quali appartengono i punti C e D , cercati.

Le tangenti alla curva in C e D sono parallele all'asse AB .

Tutte le considerazioni che abbiamo esposte nello spazio, si traducono facilmente (nell'ordine delle operazioni) nella seconda e nella prima proiezione dell'ellisse sezione (fig. 238). Occorre, tuttavia, aggiungere le osservazioni relative al contorno apparente. Il contorno apparente del cono rispetto alla seconda direzione di proiezione è costituito dalle due generatrici che appartengono al piano frontale che passa per il vertice V . Questo piano taglia il piano di sezione secondo una retta f , che incontra le generatrici di contorno apparente in E e F , punti contatto della curva sezione con il contorno apparente stesso e, perciò, punti la cui seconda proiezione appartiene alla seconda proiezione della curva. Quanto al contorno apparente rispetto alla prima direzione di proiezione, si vede subito che, volendo considerare la superficie finita e



238. Sezione piana del cono, nel caso sia un'ellisse, nel modello grafico della doppia proiezione ortogonale.



239. Costruzione della parabola sezione di un cono

compresa tra la base e il vertice, il contorno stesso è la direttrice del cono; la curva sezione non ha alcun punto in comune con detta direttrice: dunque la sua prima proiezione è tutta compresa entro la prima proiezione della direttrice.

LA PARABOLA SEZIONE DEL CONO

Esaminiamo ora il caso in cui la retta r , come sopra costruita, è tangente alla direttrice e la curva sezione è, per conseguenza, una parabola (figg. 239, 240).

Si determina il punto più alto della curva, A , che, come nel caso precedente, si trova sulla p , retta di massima pendenza del piano di sezione, incidente l'asse del cono.

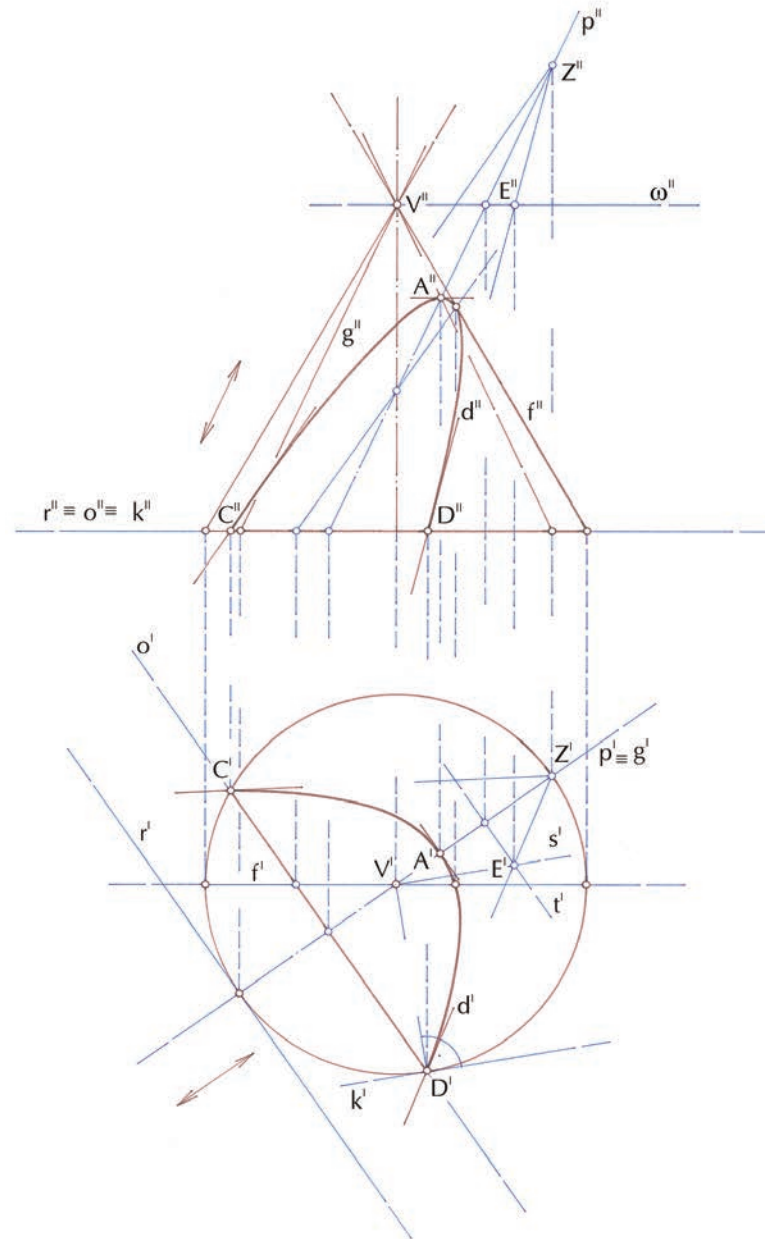
Questa retta è parallela alla g , generatrice di contatto della superficie con il piano γ , appartenente al vertice V e parallelo al piano di sezione σ . Dunque la retta p e la generatrice g del cono hanno in comune la direzione, perciò p è l'asse della parabola sezione.

Due altri punti della curva sono C e D , comuni alla retta o e alla direttrice. Le tangenti alla curva in questi due punti si costruiscono ricordando che, in generale, la tangente alla sezione piana di una superficie è la retta intersezione del piano di sezione con il piano tangente alla superficie medesima, in quel punto. Perciò, condotta, ad esempio, la tangente k alla direttrice nel punto D , si costruisce il piano Vk e se ne trova la retta intersezione d con il piano di sezione, retta che è la tangente cercata.

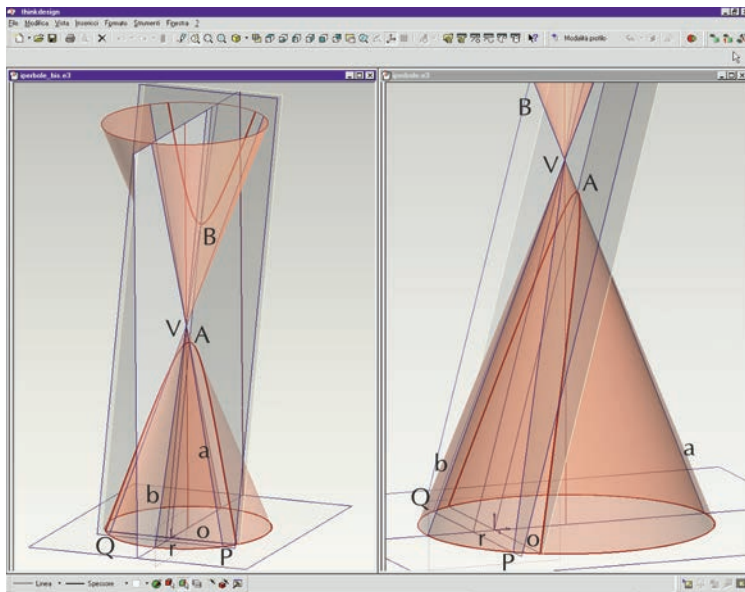
La d può essere costruita con l'ausilio di due orizzontali di medesima quota, appartenenti, rispettivamente, ai due piani. Ad esempio, se si tagliano il piano di sezione σ e il piano tangente al cono in D con il piano orizzontale ω , che appartiene al vertice V , si ottengono, rispettivamente, le rette s e t ; queste rette si incontrano nel punto E , che appartiene alla tangente cercata e che, con il punto D , la individua.

Una costruzione ancor più spedita delle tangenti nei punti C e D si ottiene ricordando che esse debbono incontrarsi nel punto Z , che appartiene all'asse della parabola e ha la prima proiezione Z' appartenente alla direttrice.

I punti di contatto con il contorno apparente rispetto alla seconda direzione di proiezione si costruiscono, come nel caso preceden-



240. Sezione piana del cono, nel caso sia una parabola, nel modello grafico della doppia proiezione ortogonale.



241. Costruzione dell'iperbole sezione di un cono.

te, per mezzo di una retta frontale f del piano di sezione.

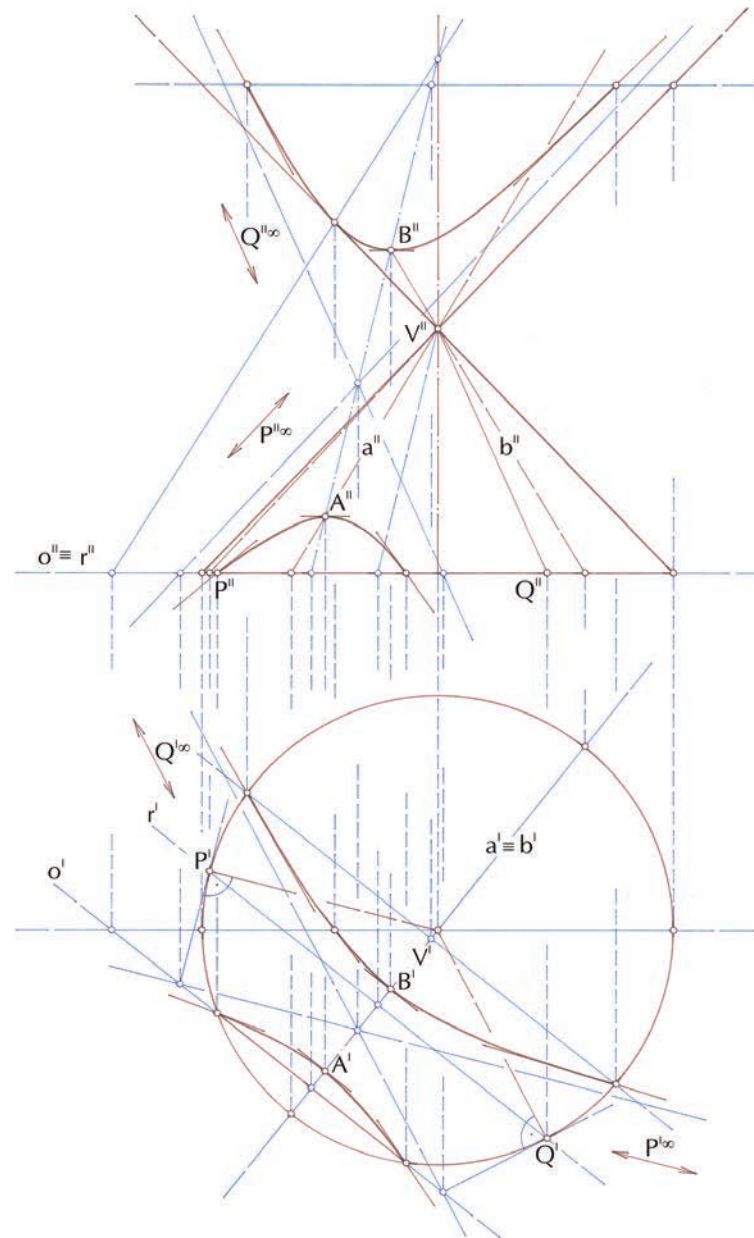
L'IPERBOLE SEZIONE DEL CONO

Esaminiamo, da ultimo, il caso in cui la retta r seca la direttrice del cono e la sezione è di conseguenza un'iperbole (figg. 241, 242).

Con l'ausilio del piano della sezione retta del diedro formato dal primo piano di proiezione e dal piano di sezione, appartenente all'asse del cono, si costruisce il punto più alto del primo ramo della curva A , nonché il punto più basso B del secondo ramo. Il piano suddetto, infatti, taglia il cono secondo due generatrici a e b , che hanno in comune con la retta di massima pendenza del piano di sezione, incidente l'asse del cono, rispettivamente, i punti A e B .

Si considerano poi i punti comuni alla retta o e alla direttrice, con relative tangenti; nonché i punti di contatto della curva con il contorno apparente rispetto alla prima direzione di proiezione.

Si costruisce il piano parallelo al piano di sezione che appartiene al vertice del cono: questo piano taglia la direttrice nei punti P e Q . Il piano di sezione è parallelo a due generatrici del cono, precisamente la VP e la VQ . Di conseguenza la curva sezione ammette due punti impropri, che sono le direzioni delle rette VP e VQ , nonché le direzioni degli asintoti dell'iperbole, P^∞ e Q^∞ .



242. Sezione piana del cono, nel caso sia un'iperbole, nel modello grafico della doppia proiezione ortogonale.

Superfici di rivoluzione

Come abbiamo detto, le superfici di rivoluzione sono generate da una linea grafica che ruota intorno a una retta, detta asse di rivoluzione. Tutti i punti della linea descrivono, dunque, circonferenze che giacciono in piani perpendicolari all'asse di rivoluzione.

Appartengono a questa famiglia, dunque, le superfici tornite, come, ad esempio, i balaustri (fig. 243); ma anche le superfici ottenute con la *randa*, come l'intradosso delle cupole. I fusti delle colonne sono, in genere, formati da rocchi scolpiti uno a uno, ma sono comunque assimilabili a una superficie di rivoluzione.

Le superfici di rivoluzione si costruiscono descrivendone: l'asse, un congruo numero di direttrici e il contorno apparente. In alcuni casi, come per le cupole, conviene aggiungere alcune generatrici.

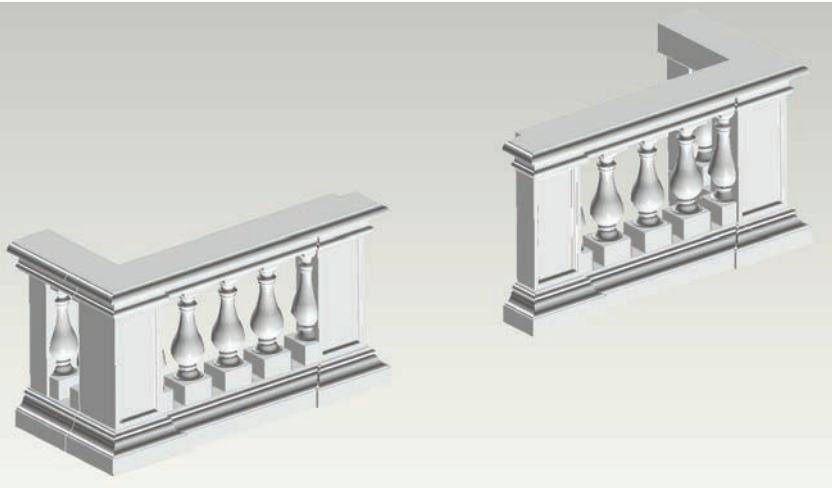
Se la superficie, di un vaso ad esempio (fig. 244), ha una direttrice sul primo piano di proiezione (o su un piano a esso parallelo), la costruzione è immediata: infatti l'asse di rivoluzione **a** risulta verticale e le direttrici si proiettano in circonferenze in prima proiezione, in segmenti di retta, in seconda proiezione. Quanto alle generatrici, appaiono in vera forma quelle, come **g**, che appartengono al piano frontale che passa per l'asse di rivoluzione. Si osservi che sulla generatrice si possono individuare alcuni punti notevoli per posizione e anche un flesso **F**, cioè un punto singolare. Diremo, in genere, *notevoli*, le direttrici che passano per questi punti.

Per semplificare ulteriormente il problema supponiamo anche che il secondo piano di proiezione passi per l'asse di rivoluzione: si osservano allora alcune importanti conseguenze geometriche della generazione rotatoria della superficie.

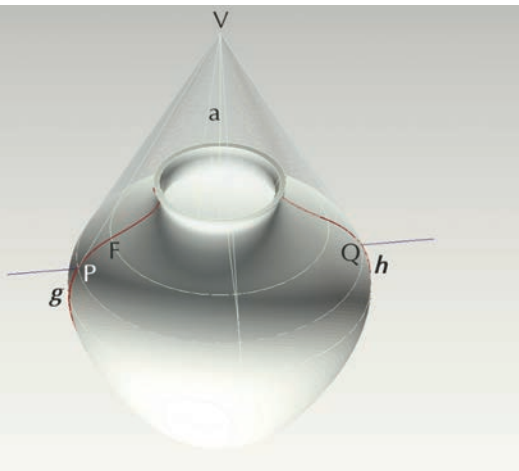
Tra le due generatrici di contorno apparente, **g** e **h**, che stanno sul medesimo piano e perciò sono ruotate di un angolo piatto l'una rispetto all'altra, intercede una simmetria ortogonale che ha per asse l'asse di rivoluzione della superficie.

Quando la direzione di proiezione è normale all'asse di rivoluzione, esiste, in generale, una generatrice di contorno apparente.

Le tangenti alle generatrici in punti, come **P** e **Q**, che appartengo-



243. Una balaustrata rinascimentale nel modello di Fabrizio Forniti, rilevato nella chiesa di San Salvatore in Lauro, a Roma.



244. Le superfici di rotazione godono di molte proprietà che ne semplificano la costruzione.

no a un medesimo piano perpendicolare all'asse di rivoluzione, si incontrano sull'asse medesimo; esse descrivono un cono che ha il vertice V nel punto di incidenza ed è tangente alla superficie di rivoluzione. Il luogo dei punti di contatto di questo cono con la superficie è, anch'essa, una direttrice (detta *direttrice di contatto*).

Date due qualsiasi direttrici, esse individuano un cono coassiale alla superficie. Le direttrici sono perciò prospettive l'una dell'altra. Nella prima proiezione questa prospettiva si trasforma in una omotetia diretta.

Queste proprietà, non coinvolgendo gli aspetti metrici, sono invarianti per proiezione e dunque possono essere utilizzate anche in situazioni diverse da quella che abbiamo esaminato.

Costruzione di una superficie di rivoluzione

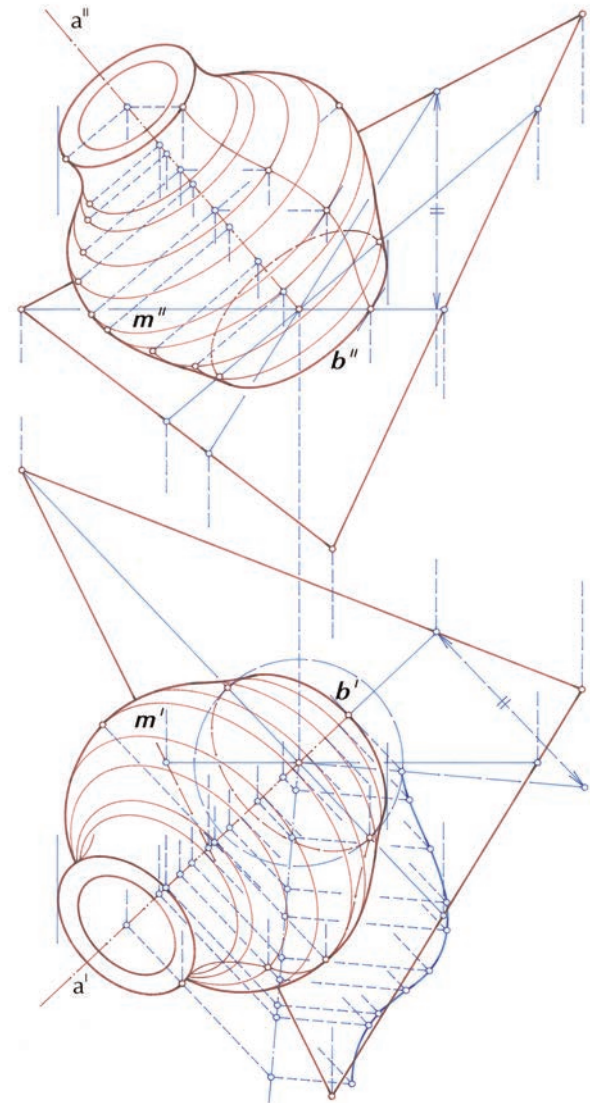
Supponiamo di voler costruire la superficie del vaso preso come esempio in posizione generica, cioè con le direttrici su piani paralleli a un piano obliquo qualsiasi (fig. 245).

Si rappresenta, innanzi tutto, una prima direttrice, ad esempio la base b del vaso. Si costruisce poi la perpendicolare nel centro della base, cioè l'asse di rivoluzione a della superficie.

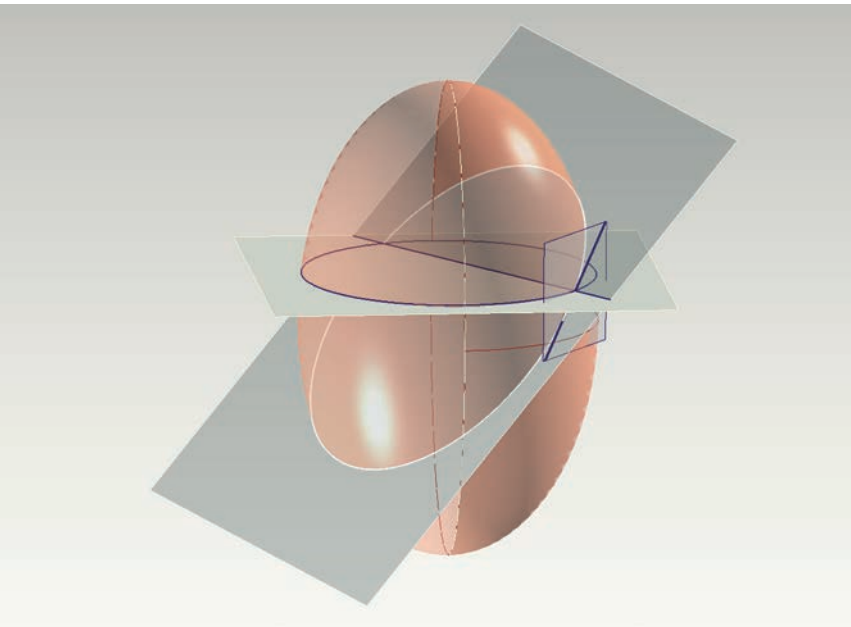
Si disegnano quindi le proiezioni delle direttrici notevoli della superficie, come quella di diametro massimo m , sfruttando l'omotetia che nasce dalla prospettiva sopra rilevata; volendo, si disegnano le proiezioni delle generatrici, sfruttando tanto le relazioni di affinità, obliqua e ortogonale, che intercedono tra quelle opposte, tanto le proprietà delle tangenti.

Si disegnano, infine, le proiezioni dei contorni apparenti come inviluppo delle ellissi, proiezioni omonime delle direttrici.

Volendo determinare i contorni apparenti con esattezza, e quindi le loro proiezioni, si deve considerare una schiera di coni tangenti alla superficie e, per ognuno di essi, determinare il contorno apparente rispetto alla prima o alla seconda direzione di proiezione, nel modo già descritto: i punti comuni alle generatrici di contorno apparente del cono di volta in volta considerato e alle direttrici di contatto, sono punti del contorno apparente della superficie di rivoluzione.



245. Modello grafico di una superficie di rotazione.



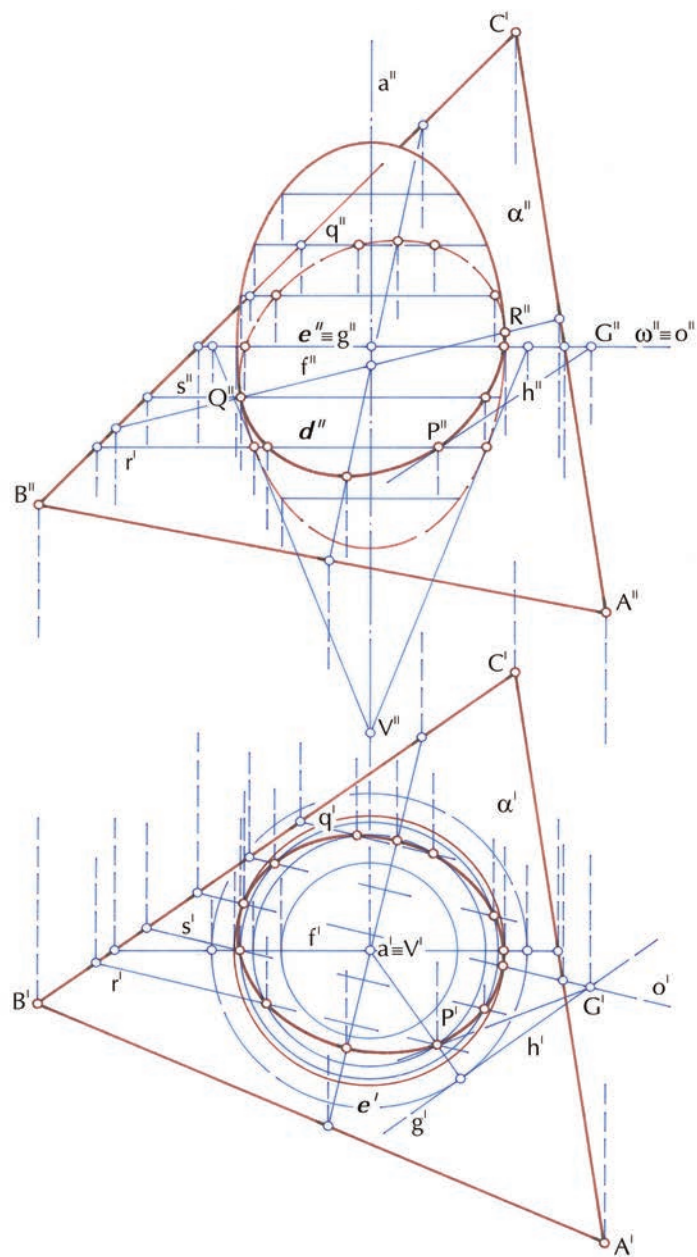
246. Criterio generale per la costruzione della sezione piana di una superficie di rotazione, applicato a un ellissoide rotondo.

Sezioni piane delle superfici di rivoluzione

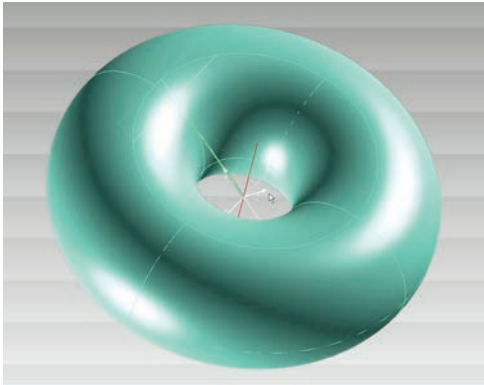
La sezione piana di una superficie di rivoluzione si costruisce applicando il criterio generale che abbiamo esposto nell'esordio delle nostre considerazioni: una schiera di piani paralleli e perpendicolari all'asse di rivoluzione ha la proprietà di tagliare la superficie secondo circonferenze, il piano di sezione secondo rette. I punti comuni alla circonferenza e alla retta contenute in ciascun piano sono, se esistono, punti della curva sezione cercata. Le tangenti alla curva nei punti suddetti si costruiscono come rette intersezione del piano tangente alla superficie in quel punto con il piano di sezione (fig. 246).

Ad esempio, è data la doppia proiezione ortogonale di un ellissoide rotondo, sezionato obliquamente dal piano $\alpha = ABC$ (fig. 247). I piani perpendicolari all'asse a , già utilizzati per la costruzione delle direttrici, tagliano il piano di sezione secondo le rette $r, s \dots q$. Ciascuna di queste rette ha due punti in comune con la circonferenza che le è complanare, che sono punti della curva cercata. La tangente in un punto qualsiasi P della curva si costruisce considerando il cono, di direttrice d e vertice V , tangente alla superficie nel punto medesimo, quindi il piano tangente al cono e le intersezioni e e g del cono stesso e del suo piano tangente con un qualsivoglia piano orizzontale, ad esempio il piano ω che appartiene al centro dell'ellissoide: il punto G , comune alla retta g e alla complanare retta o del piano di sezione, appartiene alla tangente h cercata e, insieme al punto di contatto, la individua.

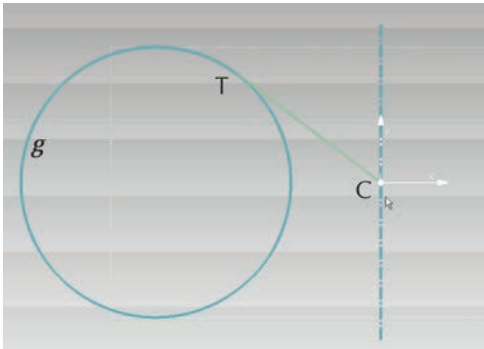
Naturalmente si può osservare che, nel caso proposto, la sezione piana dà luogo a una ellisse, che dunque si può anche costruire ricercandone i diametri coniugati o gli assi. Tale particolarità rende anche possibile la determinazione esatta dei punti di contatto comuni alla curva e ai contorni apparenti relativi ai due centri di proiezione. Il contorno apparente della superficie rispetto alla seconda direzione di proiezione è l'ellisse generatrice che appartiene al piano frontale passante per l'asse. Il medesimo piano frontale taglia il piano di sezione secondo una retta f . I punti Q e RQ , comuni a detta retta e al contorno apparente, sono i punti in cui la



247. Modello grafico della sezione piana di una superficie di rotazione.



248. La sezione piana del toro, effettuata con un piano bitangente, dà luogo a coppie di circonferenze intersecatesi. Questa interessante proprietà del toro fu trovata empiricamente da Yvon Villarceau (1848).



249. Sezione che consente di costruire il toro, come superficie di rivoluzione, e, contestualmente, uno dei piani bitangenti.

curva sezione incontra il contorno stesso. La seconda proiezione della curva sezione sarà dunque tangente alla seconda proiezione del contorno apparente nella seconda proiezione dei punti **Q** e **R**, che si costruisce immediatamente con l'ausilio della f^l .

Si procede analogamente per la prima proiezione.

SEZIONE DEL TORO

La più importante delle superfici di rivoluzione è il *toro*.

Il toro è la superficie generata dalla rivoluzione di una circonferenza intorno a una retta complanare e distinta dal centro della circonferenza stessa. La forma più comune, simile a una ciambella, è quella in cui l'asse di rivoluzione è esterno alla circonferenza.

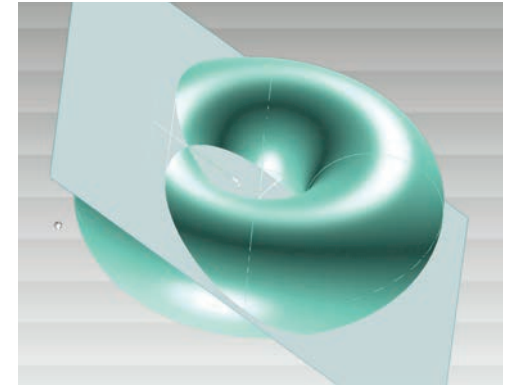
Si comprende, senza bisogno di dimostrazioni, che la superficie dà luogo a sezioni circolari quando è tagliata con piani passanti per l'asse – le sezioni, in questo caso, sono le generatrici della superficie – o con piani perpendicolari all'asse – le sezioni, in questo caso, sono le direttrici della superficie. Questi due casi fondamentali ammettono infinite soluzioni.

Yvon Villarceau (1813-1883) ha dimostrato, intorno alla metà dell'Ottocento, che un'altra serie infinita di sezioni circolari si ottengono tagliando il toro con i piani che ne attraversano la cavità centrale e sono tangenti alla superficie in due punti distinti (detti piani bitangenti). Secondo Gino Loria (1862-1954), che cita un biografo di Villarceau, questa interessante proprietà, anche se dimostrata analiticamente anni più tardi, fu prima trovata empiricamente, semplicemente disegnando la sezione (LORIA 1921). È, questa, una bella testimonianza del potere euristico della geometria.

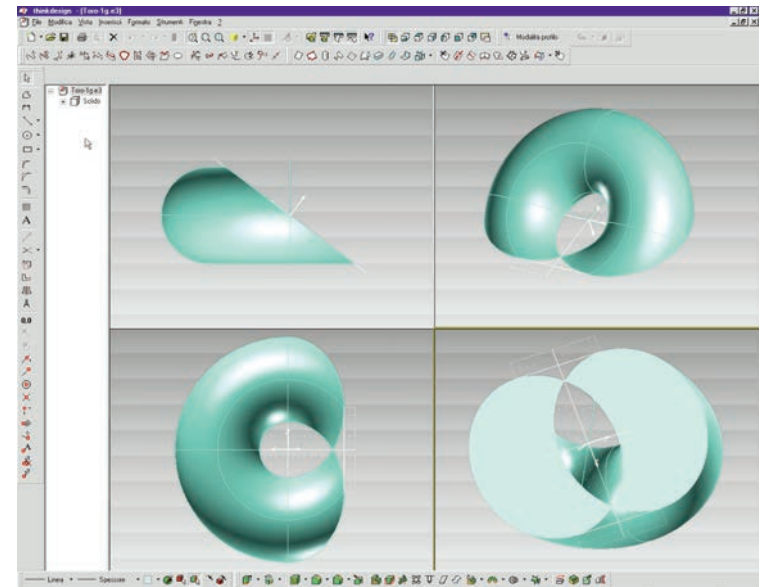
Realizzeremo l'esperienza di Villarceau servendoci del modello informatico (fig. 248).

Il toro si può costruire immediatamente, essendo compreso tra le primitive tridimensionali dei principali programmi di modellazione. Conviene, però, generarlo come solido di rivoluzione. A questo scopo (fig. 249), disponiamo il piano di costruzione verticale e costruiamo su di esso una circonferenza *g* (generatrice) e un segmento pure verticale ed esterno al cerchio che servirà da asse di rivoluzione. Il piede **C** della perpendicolare condotta dal centro della generatrice all'asse sarà il centro del toro. Da questo punto

conduciamo una tangente **CT** alla circonferenza, che servirà per sostenere il piano di sezione. Il toro può essere costruito immediatamente. Ciò fatto, si dispone il piano di costruzione in modo che l'asse **x** appartenga alla retta **CT** e gli si impone una rotazione pari all'angolo retto intorno al medesimo asse. In questo modo il piano di costruzione risulta bitangente al toro e può ospitare il piano di sezione (fig. 250). Non rimane ora che realizzare il taglio. Si ottengono due curve intersecatesi (fig. 251) che il software stesso riconosce come circonferenze, indicandone il raggio e il centro. Il solido così ottenuto ha il curioso aspetto che è qui illustrato, ma che molto meglio può essere compreso esplorando il modello tridimensionale.

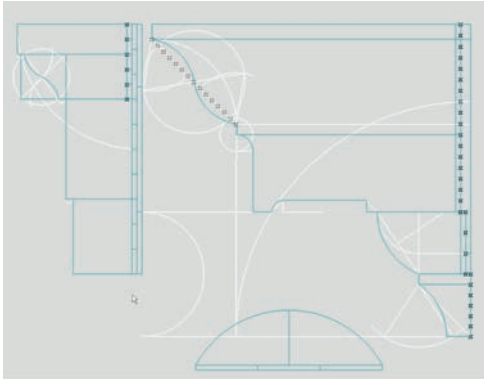


250. Toro completo e il piano bitangente.

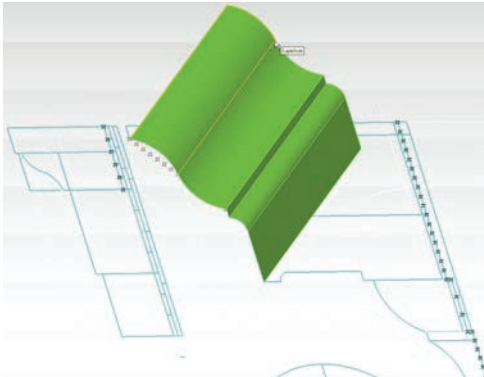


251. Il modello informatico consente di riconoscere, nella intersezione del toro con il piano bitangente, due circonferenze intrecciate.

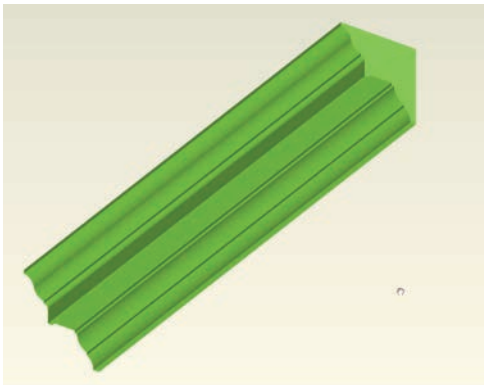
Modanature o superfici di traslazione



252. La costruzione delle modanature o superfici estruse è la più semplice e frequente delle operazioni di modellazione. Questo è un portale descritto da Palladio.



253. L'estrusione del modano (traslazione nel linguaggio geometrico) è l'equivalente informatico dell'operazione del lapicida che controlla il suo lavoro facendo scorrere una sagoma di legno sulla pietra.

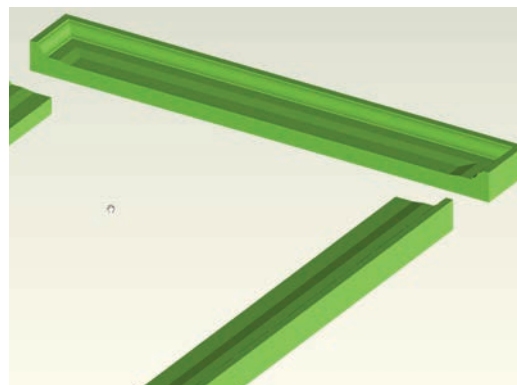


254. Solido che deriva dal modano.

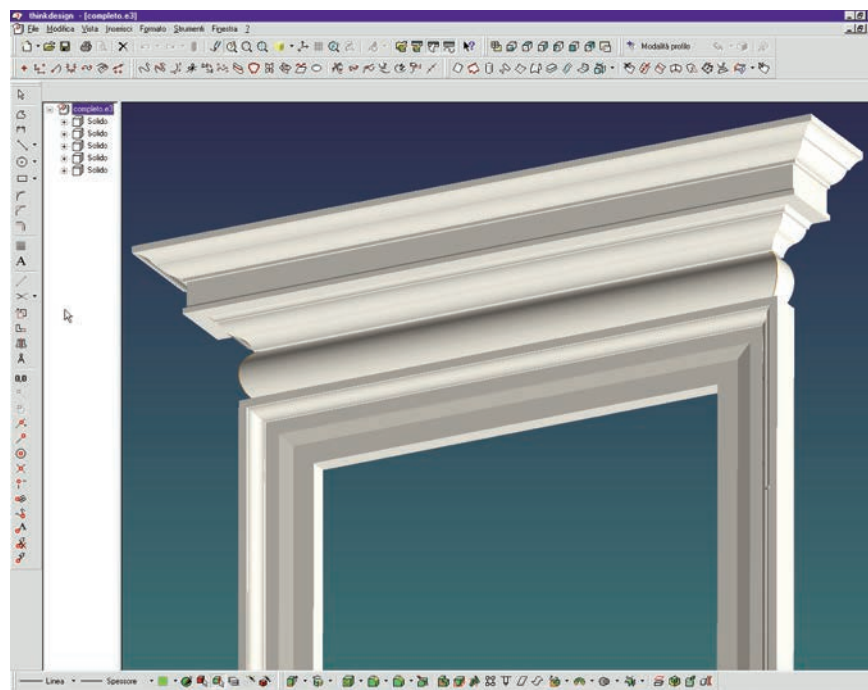
Abbiamo così definito quelle superfici che sono generate dalla traslazione di una linea generatrice, anche mista, lungo una direttrice rettilinea. Distinguiamo, innanzi tutto, le modanature rette da quelle oblique. Diremo rette le modanature le cui generatrici appartengono a piani perpendicolari alla direttrice, oblique le altre. Le generatrici di queste superfici sono tutte, evidentemente, legate da una prospettiva parallela, cioè da una prospettiva che ha centro nella direzione della direttrice rettilinea. Detta prospettiva si trasforma, in proiezione, in una traslazione, se il centro è improprio, in una omologia se è proprio. La costruzione del modello informatico di una modanatura o, anche, di una intera cornice, è operazione semplicissima, grazie al comando di estrusione, che, a partire da un qualsiasi profilo, costruisce la superficie (o il solido) generato per traslazione del profilo medesimo lungo una retta. Anche le elaborazioni successive, come la costruzione delle ugnature, sono agevolate dalla disponibilità di comandi per il taglio e la rimozione di parti in eccesso (figg. 252, 253, 254, 255, 256).

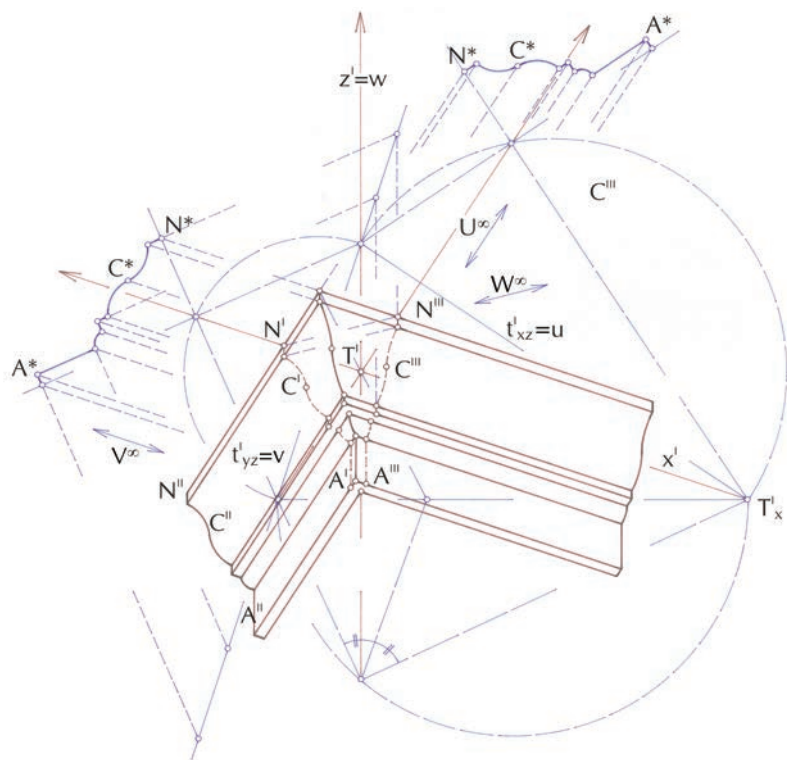
Nel caso delle cornici rette, la proiezione parallela, per esempio assonometrica, della cornice si può costruire applicando una affinità e una, o più, traslazioni. Ad esempio, l'affinità, di asse $t'_{xz} = u$ e centro U^o , che intercede tra la proiezione assonometrica del piano xz e il suo ribaltamento sul quadro consente una costruzione accurata, per punti e per tangenti, della proiezione assonometrica della prima generatrice, mentre le altre generatrici si ottengono trasladando la prima lungo l'asse x^l . La traslazione può essere eseguita con il compasso, riportando la costante di traslazione, cioè i segmenti descritti dai punti notevoli della generatrice, nella riduzione della scala assonometrica, lungo le rispettive direttrici, ad esempio da A^l ad A^{ll} , da B^l a B^{ll} e così via. A proposito di tale traslazione bisogna riferire un procedimento grafico, usato anche da Guarino Guarini e dagli stereotomisti in genere, che consiste nel

255. Le tre parti della cornice: l'architrave con le sue ugnature e i piedritti.



256. Portale completo.





257. Relazione di affinità che intercede tra la proiezione e la vera forma di un profilo nei modelli grafici ottenuti per proiezione parallela.

costruire una sagoma della proiezione della prima generatrice (per esempio di cartone o di compensato leggero), da utilizzare per replicare la proiezione della generatrice nelle traslazioni successive.

Nel caso delle cornici oblique le operazioni sono le stesse, ma la traslazione avviene lungo la proiezione assonometrica della direttrice d^I .

Costruzione dell'ugnatore

Un problema che molto comunemente si incontra nel disegno delle cornici è la costruzione dell'ugnatore, ovvero della soluzione di continuità che permette alla cornice di risvoltare lo spigolo di una struttura, sia concavo che convesso (fig. 257). Si tratta allora di costruire la proiezione della linea intersezione della cornice con il tratto successivo della medesima. Di norma si procede sezionando la cornice da risvoltare con il piano bisettore del diedro formato dai due piani ai quali la cornice aderisce. La sezione, che costituisce la ricercata soluzione di continuità, è ancora legata alla generatrice da una prospettiva. Dunque, in una rappresentazione ad esempio assonometrica, si potrà costruire facilmente l'affinità che lega la proiezione della sezione alla proiezione della generatrice. Cominciamo, ad esempio, col costruire, nel modo già visto, la proiezione assonometrica del profilo $A^I B^I C^I \dots N^I$ che appartiene al piano xz : ci serviremo, allo scopo, dell'affinità ortogonale di asse $t^I_{xz} = u$ e centro U^I , tracciando prima la vera forma del profilo $A^* B^* C^* \dots N^*$ e da questa ritornando alla proiezione assonometrica. Potremo poi fare altrettanto per la proiezione del profilo che appartiene al piano yz , utilizzando, questa volta, l'affinità ortogonale di asse $t^I_{yz} = v$ e centro V^I che fa corrispondere i punti della vera forma $A^*, B^*, C^* \dots N^*$ ai punti $A^III, B^III, C^III \dots N^III$ della proiezione voluta, ma potremo, altresì, sfruttare l'affinità obliqua di asse $z^I = w$ e centro W^I che lega le due proiezioni. La proiezione dell'ugnatore, a sua volta, è legata alle proiezioni dei due profili da due affinità oblique che hanno entrambe per asse $z^I = w$ e come centri le proiezioni delle direzioni di traslazione, ovvero le direzioni degli assi x^I e y^I .

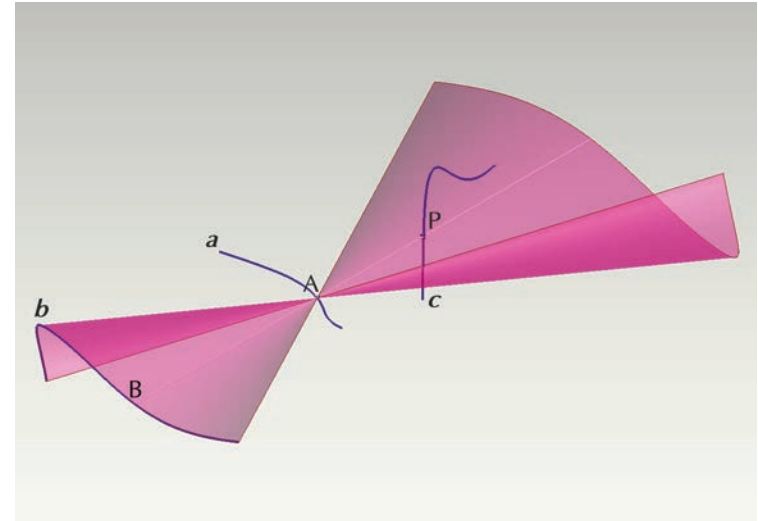
Superfici rigate

Le superfici che oggi chiamiamo *rigate* (il termine, *réglées*, è di Hachette; HACHETTE 1828) debbono il loro nome alla notevole caratteristica di ammettere sempre la possibilità di appoggiare su di esse, in tutta la sua lunghezza, una riga; perciò, in termini geometrici, si può sempre ritrovare su di esse almeno una famiglia di rette. Tale caratteristica è stata, in passato, assai utile nel lavoro di modellazione dei conci di pietra destinati alle volte, poiché la loro prima sbazzatura avveniva con la guida di incisioni rettilinee; ma è ancora di grande interesse perché grandi coperture a volta possono essere realizzate mettendo in tensione cavi di acciaio.

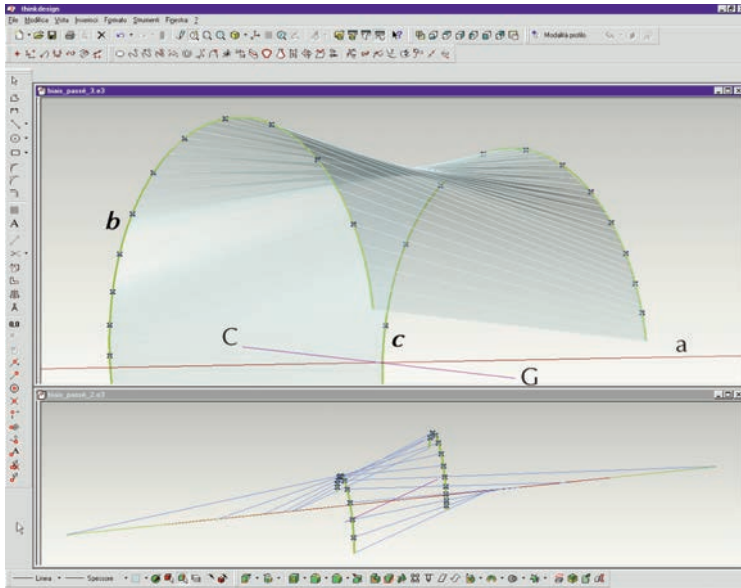
Costruzione di una superficie rigata

La costruzione di una superficie rigata è un problema del tutto generale, già discusso da Monge in una memoria del 1777 (MONGE 1777), che dà luogo a un'ampia serie di superfici dalle caratteristiche e dalle forme più varie.

In generale, date tre direttrici curve e sghembe (a , b , c), indefinitamente estese nello spazio, e assunto sulla prima un qualsiasi punto A , resta individuato il cono che ha il punto A come vertice e la seconda curva, b , come direttrice (fig. 258); questo cono stacca sulla terza curva, c , un punto P . La retta AP è una generatrice della superficie che si vuole costruire, infatti: si appoggia alla prima curva a , nel punto A , per costruzione; si appoggia alla seconda curva b , nel punto B , perché è una generatrice del cono Ab ; si appoggia alla terza curva c , nel punto P , ancora per costruzione. Facendo variare il punto A sulla prima curva, si ottengono quante generatrici si vogliono e si genera così la superficie. Bisogna notare che la curva c può incontrare il cono Ac in un punto P , in più di un punto o in nessun punto: in quest'ultimo caso la superficie non esiste in corrispondenza di P , ma può esistere in corrispondenza ad altri punti di c . Occorre, perciò, studiare di volta in volta il dominio. Nel modello grafico, per esempio in assonometria, conviene asse-



258. Le superfici rigate sono formate dall'insieme delle rette che si appoggiano a tre linee curve assegnate nello spazio.



259. Il *biais passé* o volta a sbieco è una rigata. Le direttrici di questo cilindroide sono due cerchi e una retta.

gnare le tre curve sui piani di proiezione e procedere come si è detto: le tre curve si possono considerare come tracce assonometriche della rigata che si sta costruendo e nulla è tolto alla generalità della concezione geometrica.

CASI PARTICOLARI

Vediamo ora come la costruzione che abbiamo esposto si specializza in alcuni casi particolari.

- Quando le direttrici della superficie sono due curve b e c e una retta a : si ottiene un *cilindroide generico*.

Dati due cerchi b e c contenuti in piani paralleli, ma tali che la congiungente i due centri C e G non sia perpendicolare ai due piani, e una retta a che passa per il punto medio del segmento CG ed è, invece, perpendicolare ai due piani (fig. 259), si ottiene la superficie d'intradosso della *volta a sbieco* (*biais passé*).

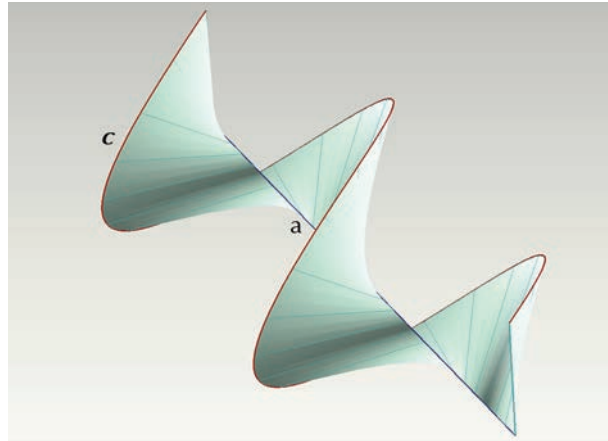
Data come prima direttrice un'elica cilindrica c e come direttrice retta il suo asse, le rette generatrici che si muovono, appoggiandosi all'elica e all'asse di rivoluzione, senza variare l'angolo che formano con l'asse medesimo (non retto) descrivono una *vite a filetto triangolare* (fig. 260); si può dimostrare, e si intuisce facilmente, che le rette in questione si appoggiano, altresì, a un cerchio b^∞ contenuto in un piano posto a distanza indeterminata (detto *piano improprio*) e costituito dalle direzioni delle generatrici, condizione, questa, che equivale alla suddetta invarianza dell'angolo formato con l'asse, e che denuncia la presenza della terza direttrice.

- Quando le direttrici della superficie sono due curve b e c e una retta a^∞ , a distanza indeterminata (fig. 261), tutte le generatrici sono parallele a un medesimo piano, dal momento che le loro direzioni appartengono alla medesima giacitura: si ottiene allora un *cilindroide a piano direttore*.

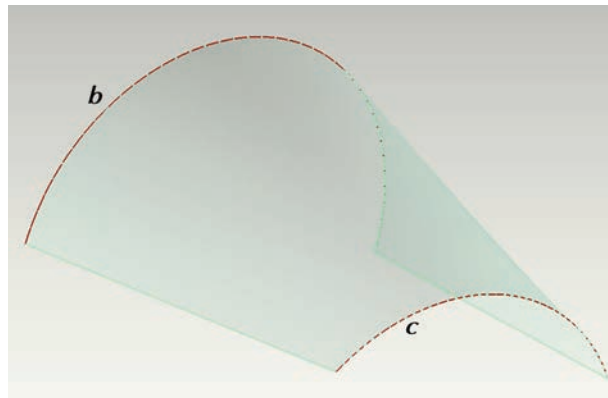
- Quando le direttrici della superficie sono una curva c e due rette sghembe a e b si ottiene il *conoide generico*.

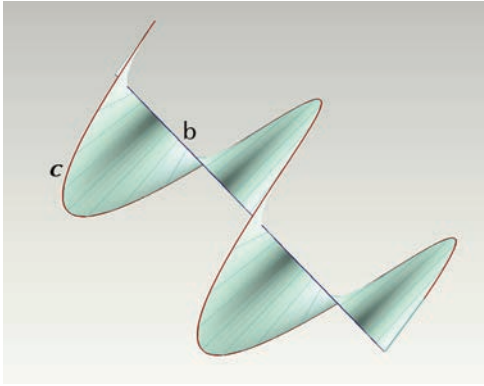
- Quando le direttrici della superficie sono una curva c , una retta accessibile b e una posta a distanza indeterminata a^∞ si ottiene il *conoide a piano direttore*. Ad esempio, le rette che si appoggiano a un'elica cilindrica c , al suo asse di rivoluzione b , e sono perpen-

260. Nella vite a filetto triangolare le tre direttrici della rigata sono l'elica, il suo asse e un cerchio posto su un piano a distanza indeterminata, il cosiddetto *piano improprio*.

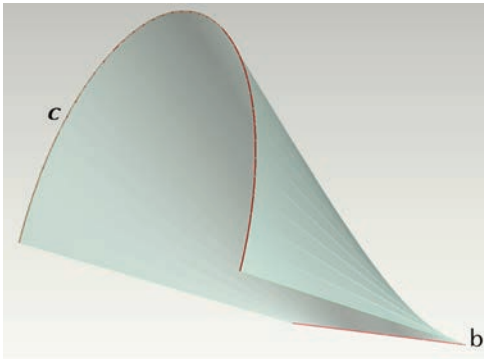


261. Nel cilindroide a piano direttore le tre direttrici della rigata sono due cerchi e una retta posta a distanza indeterminata cioè una giacitura.

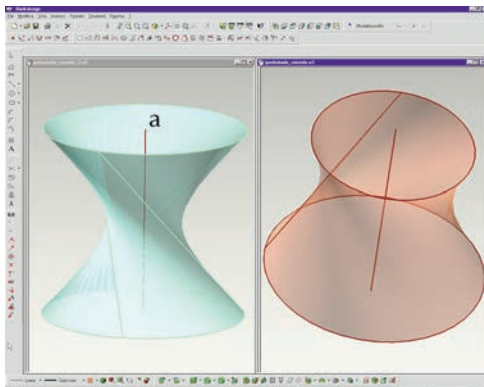




262. Nella vite a filetto rettangolare le tre direttrici della rigata sono un'elica, il suo asse e la giacitura, cioè la retta a distanza indeterminata, del piano perpendicolare all'asse.



263. Nel cono le tre direttrici della rigata sono un cerchio, una retta parallela al piano su cui giace il cerchio e una giacitura.



264. Nell'iperboloide le tre direttrici sono tre rette sghembe.

dicolari all'asse medesimo, il che equivale a dire che si appoggiano alla giacitura del piano perpendicolare all'asse, descrivono la superficie nota come *elicoide conoide retto* o *vite a filetto rettangolare* (fig. 262). Ancora, le rette che si appoggiano a una circonferenza c , a una retta b parallela al piano della medesima circonferenza e a una retta a^∞ , posta a distanza indeterminata (in genere la giacitura perpendicolare al piano della circonferenza), generano il cosiddetto *cono a cuneo* (fig. 263).

- Quando le direttrici della superficie sono una curva c e due rette a^∞ e b^∞ , entrambe a distanza indeterminata, le generatrici della superficie debbono, evidentemente, appartenere alla direzione D^∞ comune alle due rette, debbono, in altre parole, essere parallele: si ottiene allora il *cilindro generico*; se la direttrice curva, in particolare, è una conica si ottiene il *cilindro quadratico*.

- Quando le direttrici della superficie sono una curva c e due rette a e b , proprie e complanari, le generatrici della superficie debbono, evidentemente, appartenere al punto D comune alle due rette, sia esso proprio o improprio: si ottiene allora il *cono generico*, se le due rette sono incidenti; il *cilindro generico*, se le due rette sono parallele; se la direttrice curva, in particolare, è una conica si ottengono il *cono* e il *cilindro quadratico*.

- Quando le direttrici della superficie sono tre rette sghembe a , b e c si ottiene l'*iperboloide* a una falda.

Iperboloide rotondo

Consideriamo ora tre rette sghembe r , s , q ottenute facendo assumere tre posizioni successive a una medesima retta che ruota intorno a un asse a . Le tre rette individuano una superficie rigata, che, per costruzione, è anche una superficie di rivoluzione, si tratta, in particolare, dell'*iperboloide rotondo* (figg. 264, 265).

Le sezioni dell'iperboloide sono, in generale, coniche, come quelle di una qualsiasi rigata a direttrici rettilinee. In particolare:

- se il piano di sezione incontra tutte le generatrici dell'iperboloide in punti accessibili, la sezione è un'ellisse;
- se il piano di sezione è perpendicolare all'asse di rivoluzione,

la sezione è un cerchio;

- se il piano di sezione è parallelo a una sola generatrice, e perciò ha con essa in comune la direzione, la sezione è una parabola; quando un piano siffatto passa per il centro dell'iperboloide, la parabola degenera in una coppia di rette;

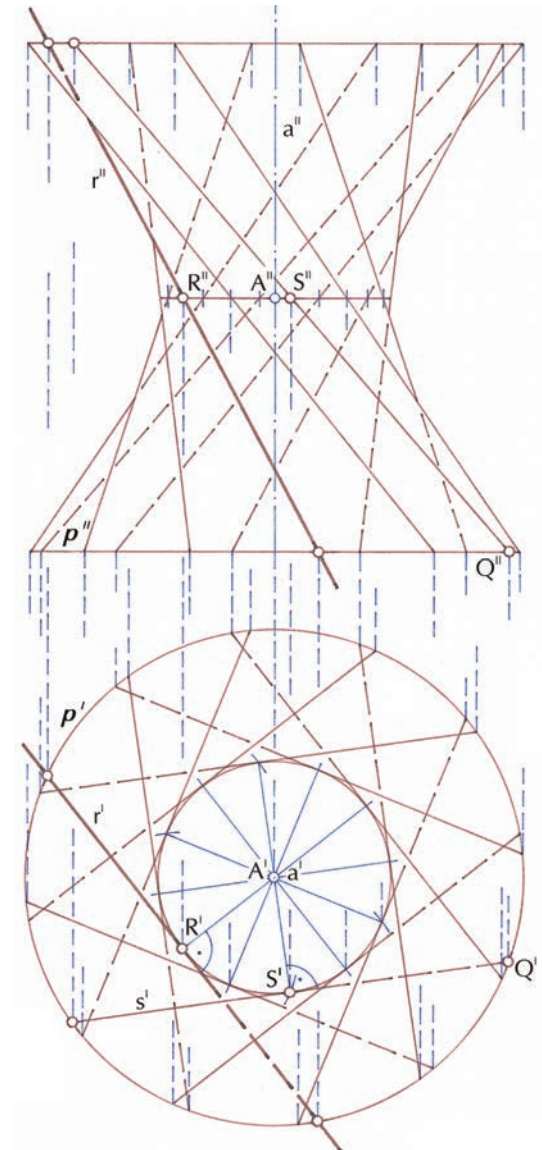
- se il piano di sezione è parallelo a due generatrici, e perciò ha con esse in comune le rispettive direzioni, la sezione è un'iperbole; in particolare, si trovano in questa condizione i piani che appartengono all'asse di rivoluzione dell'iperboloide.

Di conseguenza è un'iperbole, in particolare, anche il contorno apparente, rispetto al secondo piano di proiezione, di un iperboloide il cui asse di rivoluzione sia parallelo al piano di proiezione stesso.

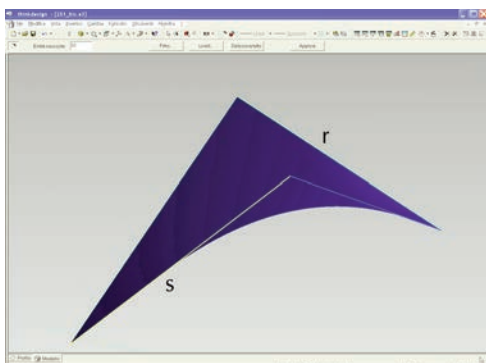
Costruiamo questa superficie utilizzando la doppia proiezione ortogonale: se è assegnato l'asse a e una qualsiasi generatrice r , si determina, innanzi tutto, il parallelo di minor diametro, detto anche *gola*, che ha per raggio il segmento RA intercetto da r e da a sulla loro retta di minima distanza; questa retta è l'intersezione di due piani, l'uno condotto per r e perpendicolare ad a , l'altro condotto per a e perpendicolare a r e risulta, pertanto, perpendicolare tanto a r quanto ad a . In questo caso, la retta in questione è orizzontale e la sua costruzione è perciò immediata e così anche il tracciamento della prima e seconda proiezione della gola, ovvero della circonferenza g .

Per costruire rapidamente altre generatrici, conviene disegnare le proiezioni p' , p'' di un qualsiasi altro parallelo p quindi, assegnata la prima proiezione s' di una qualsivoglia generatrice, come tangente alla prima proiezione della gola nel punto S' , basterà trovare il punto Q' nel quale detta retta seca la prima proiezione del parallelo, per ritornare, con linee di richiamo, alle seconde proiezioni S'' e Q'' dei due punti S e Q che individuano la generatrice s . Costruendo un congruo numero di generatrici la proiezione del contorno apparente della superficie, rispetto alla seconda proiezione, risulta per involuppo.

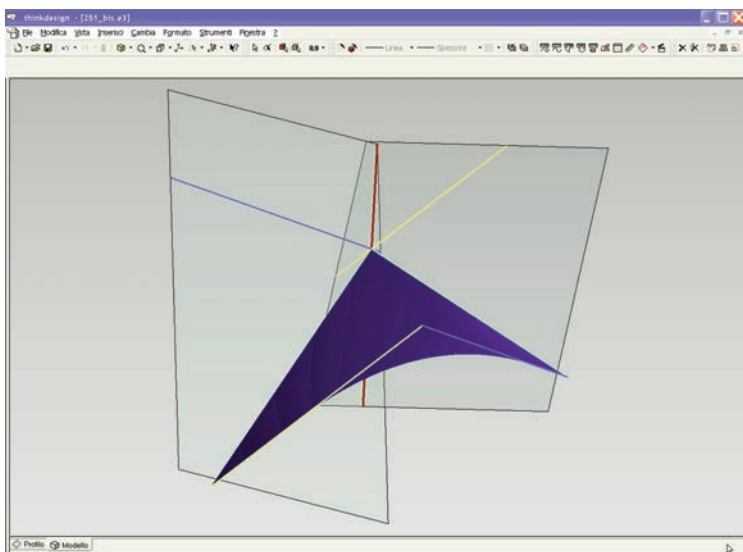
La medesima costruzione, nel modello informatico, è del tutto automatica, basta costruire l'iperboloide come una qualsiasi superficie di rivoluzione.



265. L'iperboloide rotondo è stato usato, ad esempio, da Le Corbusier nel palazzo del parlamento a Chandigarh.



266. Nel paraboloide iperbolico le tre direttrici della rigata sono due rette sghembe e una giacitura.



267. La retta intersezione dei piani direttori del paraboloide iperbolico fornisce la direzione dell'asse della superficie.

Paraboloide iperbolico

Quando tra le tre rette sghembe, che costituiscono le direttrici della superficie rigata, una è a distanza indeterminata e perciò è una giacitura (o retta impropria), la rigata prende il nome di *paraboloide iperbolico* (fig. 266).

In questa rigata le generatrici si appoggiano alle due rette accessibili e sono parallele alla giacitura che rappresenta la terza direttrice. In altre parole, esse sono tutte parallele a un piano, che viene detto *piano direttore*, della superficie.

Perciò, date due rette sghembe r e s ed una giacitura q^{∞} , ovvero un piano direttore ϑ che abbia la giacitura assegnata, si ottengono le generatrici della superficie semplicemente sezionando le due rette r e s con una schiera di piani paralleli al piano direttore. Ogni piano taglia le direttrici r e s in due punti generici R^n e S^n che individuano la generatrice R^nS^n . I punti omonimi R^n e S^n sono equidistanti, sulle rispettive rette. Perciò, la rigata si può anche costruire dividendo in parti eguali le due rette r e s date e unendo i punti così ottenuti.

Consideriamo ora due generatrici qualunque e assumiamole come direttrici, ripetendo le operazioni descritte poc'anzi: si dimostra, e si verifica immediatamente, che questa costruzione dà luogo a un secondo paraboloide che si confonde con il primo. Dunque, direttrici e generatrici del paraboloide iperbolico possono scambiarsi i rispettivi ruoli.

I programmi di modellazione dispongono di un comando che genera automaticamente questo tipo di rigata. Il modellatore costruisce la superficie, dal tipico andamento a sella, e la visualizza immediatamente.

Ma qual è la schiera delle rette che tessono la superficie? O, in altre parole, se volessimo appoggiare una riga alla superficie in modo che la tocchi in ogni suo punto, come vuole il nome coniato da Hachette, come dovremo disporla?

Per rispondere a questa domanda, basta costruire il piano individuato da una delle rette date (r o s) e dalla direzione dell'altra (fig. 267). Perciò, facciamo passare per un punto qualsiasi di r una retta

t , parallela alla retta s . Le rette r e t individuano il piano direttore τ della rigata, cioè un piano che ha la giacitura q^∞ , terza direttrice della rigata. E infatti, se tagliamo la superficie con una schiera di piani paralleli al piano direttore τ , otteniamo una schiera di rette generatrici.

La costruzione si spiega ricordando il possibile scambio di ruoli tra direttrici e generatrici. Poiché ciò è possibile, è anche evidente che le direttrici r e s , considerate come generatrici, debbono appoggiarsi a una retta a distanza indeterminata, che non può essere altro che quella individuata dalle due loro direzioni.

Scambiando i ruoli delle generatrici e delle direttrici è anche possibile costruire, nel modo già indicato, un secondo piano direttore. La retta v , intersezione dei due piani direttori delle due schiere di generatrici del paraboloido, fornisce la direzione dell'asse della superficie.

Ora, la conoscenza della direzione dell'asse del paraboloido è di fondamentale importanza, poiché permette di controllare le sezioni piane della superficie e di generarla in modo assai più pratico ed efficiente.

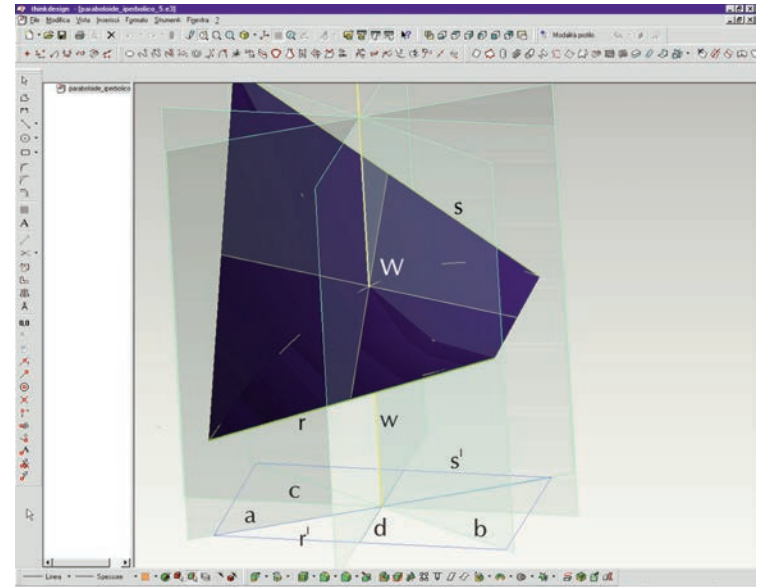
Costruiamo, innanzi tutto, un piano perpendicolare all'asse e proiettiamo su di esso le rette r e s , secondo la direzione dell'asse (fig. 268): le proiezioni di r e s risulteranno i lati opposti di un parallelogramma che ha, nell'altra coppia di lati, le proiezioni delle generatrici che passano per gli estremi di r ed s .

Costruiamo ora le diagonali a , b e gli assi c , d di questo parallelogramma: queste rette si incontrano tutte nel punto C , centro del parallelogramma. Per C conduciamo una retta w , parallela alla retta v , intersezione dei due piani direttori: è questo l'asse della superficie, che la incontra nel vertice W .

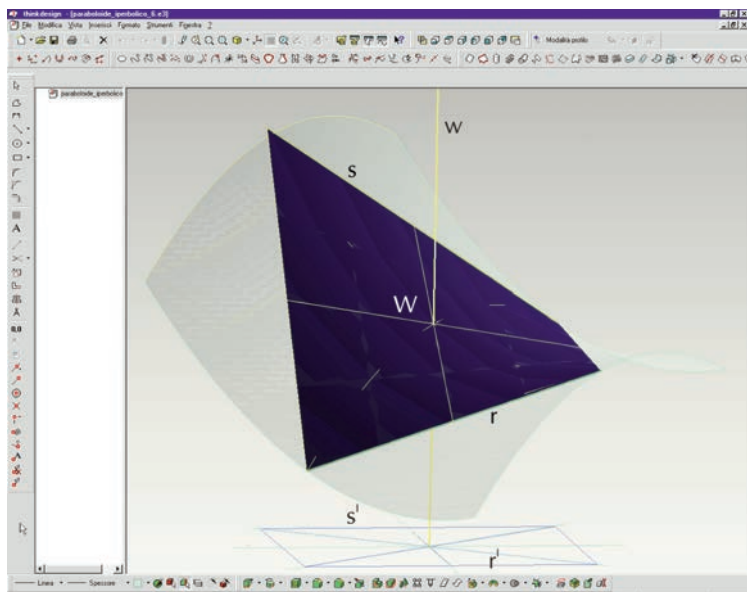
Ogni piano parallelo a questo asse, seziona la superficie secondo parabole o secondo parabole degenerate in rette.

In particolare:

- i piani che passano per le diagonali a e b del parallelogramma, tagliano la superficie secondo due parabole dette principali;
- i piani che passano per gli assi c e d del parallelogramma sezionano la superficie secondo due rette incidenti nel vertice W ;



268. Dato un paraboloido iperbolico, generato assumendo come direttrici due rette sghembe e una giacitura, è possibile costruirne, l'asse, il vertice e le parabole principali.



269. Le parabole direttrici generano l'iperboloide completo, scorrendo l'una sull'altra.

- i piani paralleli all'asse e a uno dei lati del parallelogramma, risultano paralleli a uno dei piani direttori e sezionano la superficie secondo rette generatrici.

Ogni altra sezione piana del parabolide iperbolico, effettuata con piani non paralleli all'asse, dà luogo a un'iperbole (GHEORGHIU 1978); il piano tangente nel vertice **W**, in particolare, seziona la superficie secondo una coppia di rette, che possono essere considerate una degenerazione dell'iperbole.

Infine (fig. 269), traslando le due parabole principali l'una sull'altra, si ottiene ancora la medesima superficie. Questa è la via da seguire quando si vogliono costruire falde molto estese.

Elicoide rigato

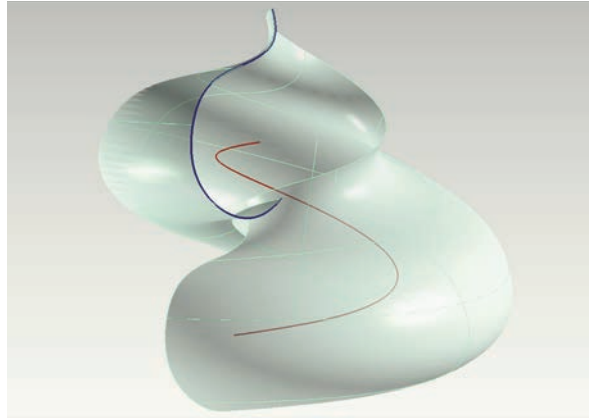
L'elica, linea sghemba che abbiamo già incontrato, può essere utilizzata come direttrice nella costruzione di molte importanti superfici d'uso comune: si pensi alla filettatura delle viti e alle coperture e agli intradossi delle scale a chiocciola.

L'elica, come è noto, nasce da un movimento di rivoluzione associato a una traslazione. Se a questo movimento di un punto, si salda una linea, si ottiene un elicoide generico, non rigato (fig. 270).

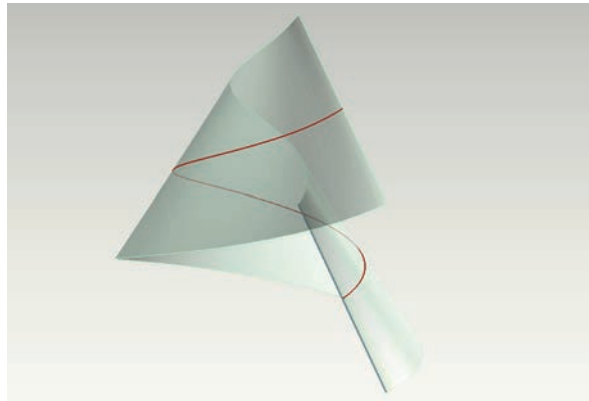
Allo studio di queste superfici, quali il serpentino e la vite di Saint Gilles, è dedicato il paragrafo sulle superfici di rototraslazione, ma è bene inserire qui l'esame di una particolare famiglia di elicoidi: quelli che si ottengono assumendo come generatrice una retta. Un elicoide siffatto si dice *elicoide rigato* (fig. 271). Alla genesi che abbiamo già descritto si può aggiungere quella che ammette tre direttrici, che sono altrettante eliche descritte da tre punti qualsiasi della generatrice. Se la retta generatrice è sghemba, rispetto all'asse, l'elicoide si dice *aperto*. Se, invece, la generatrice si appoggia all'asse, elicoide si dice *chiuso*. Infine, il particolare elicoide che si ottiene assumendo come generatrice la tangente all'elica, si dice *svilupabile* giacché può essere sviluppato (fig. 272).

Tutte queste superfici possono essere generate automaticamente da un modellatore; alcuni, anzi, dispongono di una apposito comando. I modelli grafici si costruiscono, invece, rappresentando

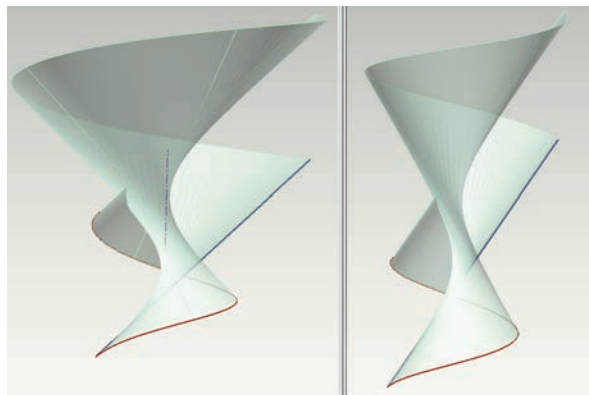
270. Elicoide generico.

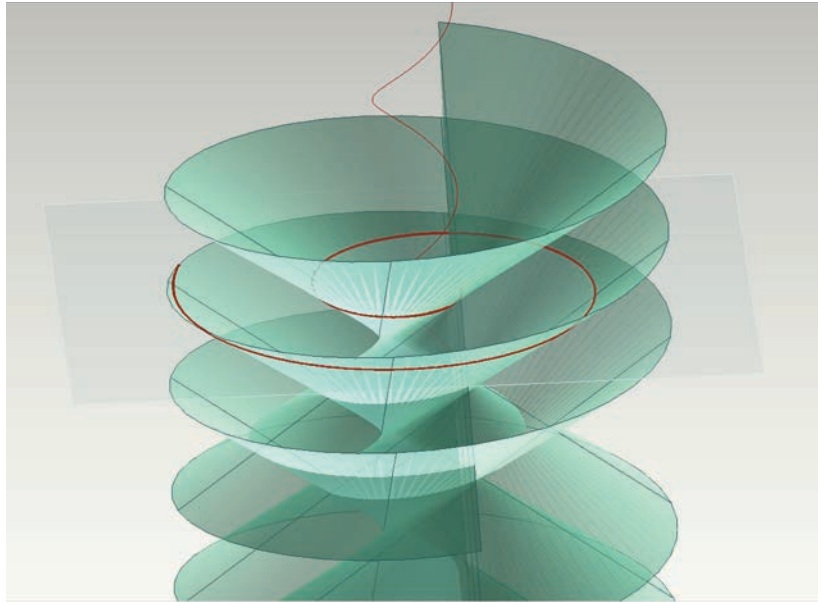


271. L'elicoide generato da una retta è rigato. Si possono anche assumere, quali direttrici di questa rigata, tre le eliche distinte descritte da una generatrice nel moto di rototraslazione.

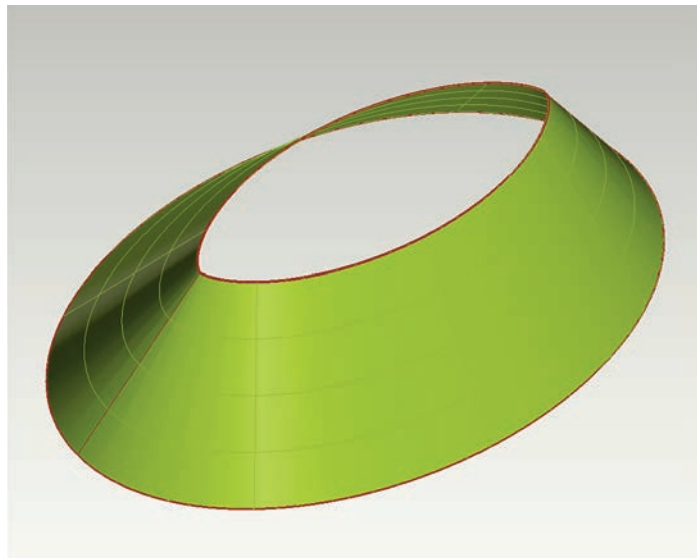


272. L'elicoide generato da una tangente all'elica direttrice è sviluppabile.





273. Le sezioni piane normali all'asse dell'elicoide sviluppabile sono evolute del cerchio.

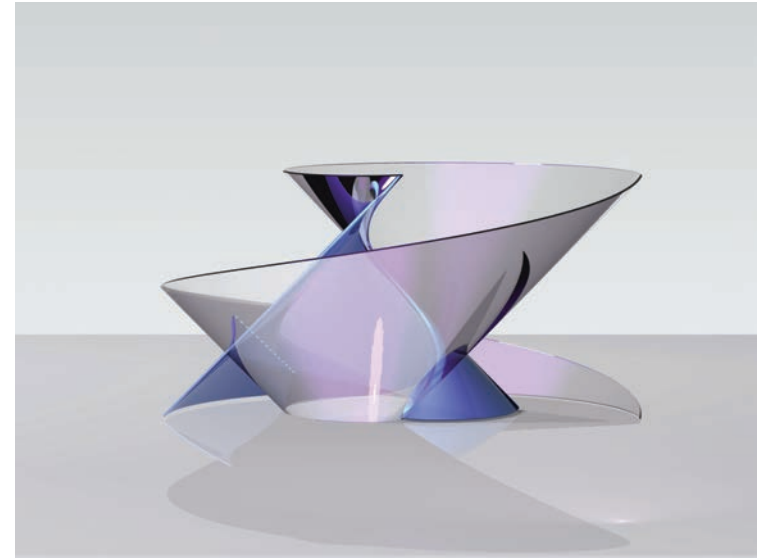


274. Le scarpate di una strada in curva sono rigate a pendenza costante.

un certo numero di generatrici e grazie alla conoscenza di alcune proprietà. Notevole, a questo riguardo, è una proprietà dell'elicoide sviluppabile: le sue sezioni piane ottenute con piani perpendicolari all'asse sono *evolvente* del cerchio (fig. 273). Immaginiamo di avvolgere un filo intorno a un cerchio, di fissare a un capo del filo una matita e di svolgere poi il filo lasciando un segno sulla carta: questo segno descriverà l'evolvente del cerchio dato (che si dice *evoluta*). A seconda del punto di partenza, si potranno descrivere infinite altre evolventi. La sezione piana dell'elicoide sviluppabile, di cui stiamo parlando, è dunque una evolvente del cerchio proiezione ortogonale dell'elica direttrice sul piano di sezione.

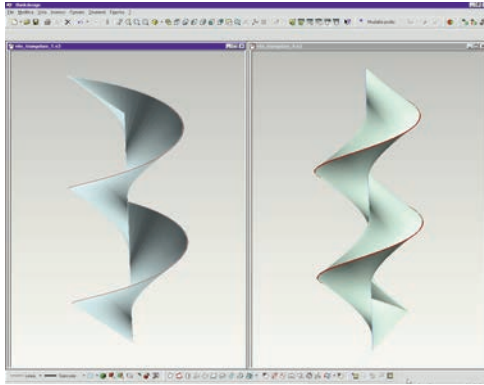
Superfici a pendenza uniforme

L'elicoide sviluppabile ha una frequente applicazione nella costruzione delle strade. Infatti, quando una strada descrive una curva ad arco di cerchio e, contemporaneamente, sale, i suoi cigli sono eliche e le scarpate elicoidi sviluppabili. Le linee di livello di questi elicoidi, cioè le linee luogo geometrico dei punti che hanno eguale quota, sono evolventi del cerchio. L'interesse per questo genere di applicazioni ha portato a classificare un altro tipo di superficie rigata: quella detta a *pendenza uniforme* (fig. 274). Si tratta di una superficie i cui piani tangenti hanno tutti la medesima pendenza. Immaginiamo, ad esempio, di avere realizzato un riporto di terreno su un profilo ellittico e di voler modellare la scarpata secondo una pendenza costante: la superficie sarà la rigata generata da una retta, che, ruota lungo il profilo, in un piano sempre normale allo stesso, mantenendo inalterato il proprio angolo di pendenza. Anche in questo caso, il paziente lavoro del disegnatore, che dovrebbe rappresentare la superficie disegnando un certo numero di generatrici, è superato dalla potenza del modellatore informatico che genera la superficie con un solo comando.

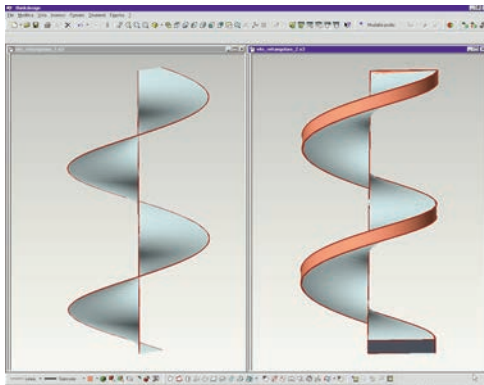


275. Elicoide descritto da L.L. Vallée (*Traité de la Géométrie Descriptive*, Parigi, 1819).

Superfici di rototraslazione



276. Le viti vere e proprie si ottengono componendo superfici elicoidali.



277. Vite a filetto rettangolare.

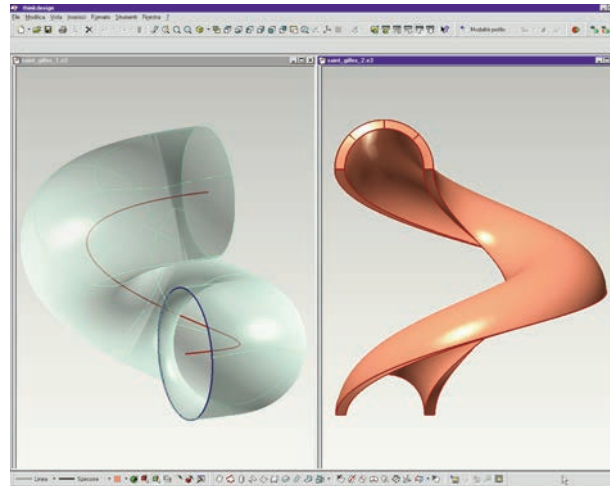
Le superfici di rototraslazione sono generate dal movimento di una linea che ruota intorno a un asse e trasla nella sua direzione. Come abbiamo già visto, se questa linea è curva, la superficie è un elicoide generico, se è retta è, in particolare, una rigata. Esistono tuttavia alcune superfici di rototraslazione che meritano di essere trattate a parte e sono le viti, il serpentino e la colonna torsa.

La vite a filetto triangolare è un elicoide chiuso, generato da una retta che si appoggia all'asse con un angolo qualsiasi. La superficie descrive l'impanatura di una vite, perciò si rappresenta, per solito, con due falde egualmente inclinate, ma in senso opposto l'una rispetto all'altra (fig. 276).

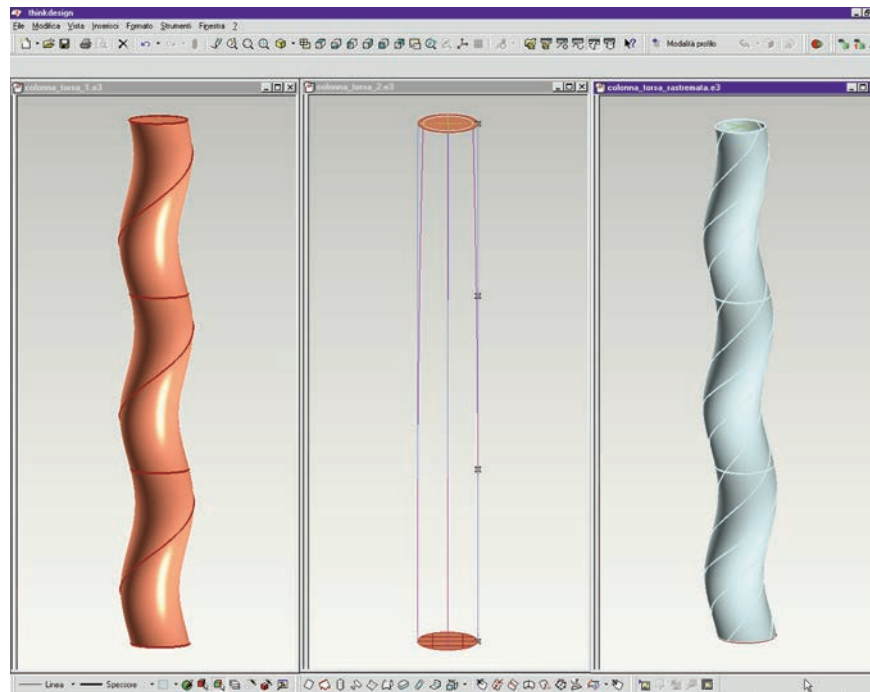
Di derivazione meccanica è anche la vite a filetto rettangolare, generata da una retta perpendicolare all'asse. Anche in questo caso, per meglio apprezzare la natura della superficie, conviene rappresentarne due falde chiuse da un bordo, cioè rappresentare il solido che ne deriva (fig. 277). In architettura, oltre alle viti a filetto, si utilizza, nelle coperture, anche il serpentino o vite di Saint Gilles (fig. 278). Si tratta di una superficie di rototraslazione ottenuta assumendo come generatrice un cerchio che giace nel piano dell'asse.

Infine, occorre citare la colonna torsa, impiegata nell'architettura barocca. Qui la generatrice, che è ancora un cerchio, giace in un piano perpendicolare all'asse di rototraslazione (fig. 279). Bisogna osservare, però, che il fusto della colonna torsa tipica dell'architettura barocca è ingentilito dall'entasi, che lo rastrema al sommoscapo. Questa particolare conformazione si può ottenere, nell'ambiente informatico, modellando la superficie con idonei comandi. Nel modello grafici, invece, occorre disegnare un gran numero di generatrici, modificandone il diametro in conformità con la rastreazione del fusto della colonna.

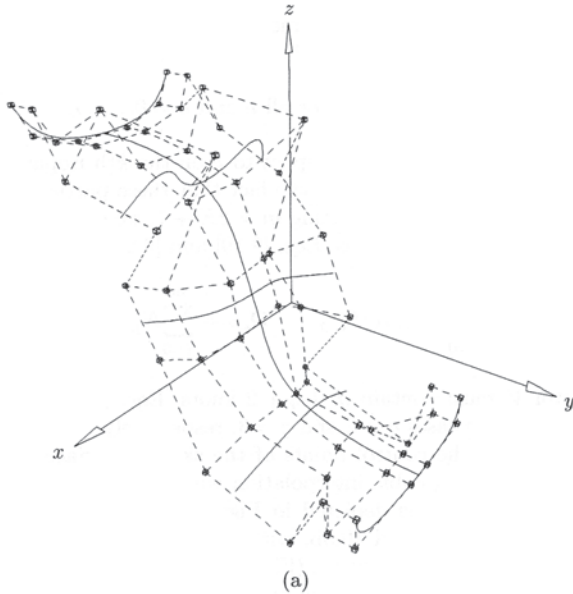
278. Il serpentino, o vite di Saint-Gilles è copertura caratteristica di rampe elicoidali. La generatrice è un cerchio o anche una ellisse che appartiene al piano dell'asse.



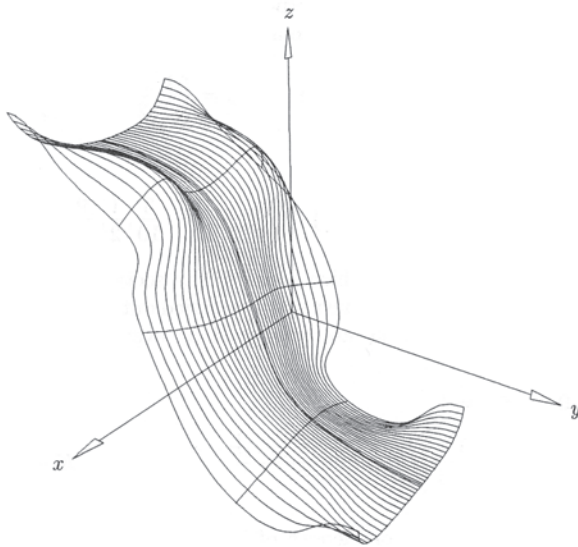
279. La colonna torsa è una superficie di rototraslazione, generata da un cerchio che appartiene a un piano perpendicolare all'asse.



Superfici NURBS



(a)



(b)

280. Struttura di una superficie NURBS; da Les Piegl, Wayne Tiller, *The NURBS Book*, Berlino, 1995.

L'acronimo NURBS (*Non Uniform Rational B-spline*) indica una potente descrizione matematica di linee e superfici, ultima e più recente evoluzione delle *spline*, delle quali si è già parlato. Questa descrizione è di tipo parametrico, fornisce, cioè, le coordinate dei punti della superficie al variare di due parametri detti u e v .

Se si tiene v costante, la matematica delle NURBS descrive una generatrice della superficie; se si tiene u costante, una direttrice.

La matematica delle NURBS offre i seguenti vantaggi:

- consente di descrivere in modo omogeneo sia le classiche forme di derivazione analitica e proiettiva, come coniche e quadriche, sia le forme libere come quelle di uno scafo o le superfici della carrozzeria di un'automobile;

- le descrizioni NURBS comprendono, come casi particolari, le descrizioni basate su altre basi matematiche, come le *B-splines* (PIEGL 1995).

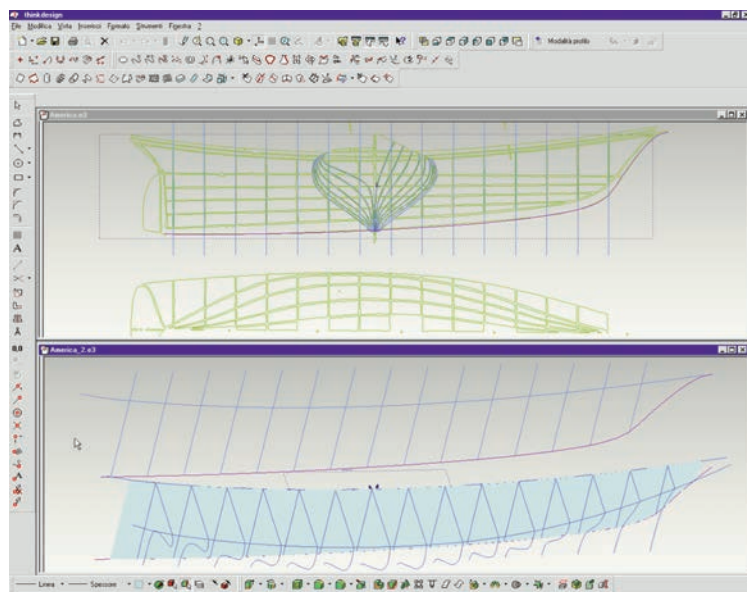
Da un punto di vista sintetico, le superfici NURBS raccolgono in una unica famiglia, composta di vari algoritmi, tutte le superfici che sono state descritte sin qui e ne aggiungono altre, che sarebbe ben difficile rappresentare e modificare servendosi di modelli grafici, ma che possono essere facilmente ed esattamente controllate in un modello informatico.

Ad esempio, è certamente possibile rappresentare graficamente una superficie generata dal movimento di una linea, generatrice, su un'altra linea, anche curva, che funge da direttrice. Ma sarebbe possibile tenere conto anche di una seconda direttrice e modificare progressivamente le dimensioni o la forma della generatrice, durante la sua traslazione lungo le direttrici? Probabilmente no, altrimenti, io credo, si troverebbe traccia di queste forme anche nella ricca trattatistica degli ultimi due secoli, che invece le ignora.

Le superfici di interpolazione rappresentano dunque una generalizzazione delle superfici luogo geometrico trattate dalla geometria classica e si prestano a numerose importanti nuove applicazioni, come anche allo studio delle proprietà delle superfici tradizionali.



281. Un interno del Guggenheim Museum a Bilbao di F.O. Gehry. La modellazione informatica delle superfici ha consentito il controllo accurato e la realizzazione, in architettura, di forme scultoree prima impensabili.



282. Sezioni e linee d'acqua dello scafo della goletta America, che vinse, per prima, la celebre coppa che oggi porta il suo nome.

Superfici NURBS complesse

Daremo ora una breve descrizione delle superfici NURBS più complesse, trascurando gli algoritmi relativi alle superfici già trattate, come le superfici di rivoluzione e le rigate.

SUPERFICI SKINNED O $S(u)$

Le *skinned* o $S(u)$ sono le superfici che descrivono gli scafi delle imbarcazioni, le ali degli aeroplani e alcune parti delle carrozzerie delle automobili. Si chiamano anche *lofting*, nome derivato dalla tecnica usata per disegnare in grandezza reale e poi realizzare navi e aerei (fig. 282).

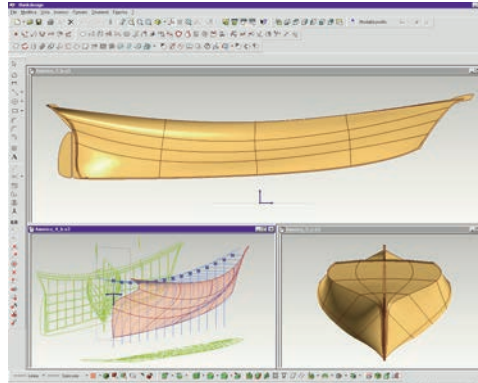
Queste superfici sono descritte da una serie, quanto si vuole numerosa, di sezioni trasversali u , che corrispondono alle centine nelle strutture suddette. Per realizzare un *lofting*, quindi, bisogna per prima cosa disporre nello spazio, su una schiera di piani paralleli, le curve generatrici. L'algoritmo provvede poi a interpolare queste curve generando una schiera di direttrici v e intessendo la superficie.

Non è indispensabile, ma, se si vuole ottenere un risultato affidabile, è bene che i punti di controllo dei profili u siano distribuiti in modo omogeneo, tale, cioè, da assecondare la successiva interpolazione. Ad esempio, dati i piani di costruzione di un veliero (la goletta America, che, nel 1851, vinse la prima celebre coppa che porta il suo nome), si comincia col ricostruire le sezioni di metà dello scafo, da prua a poppa (figg. 283, 284, 285). Si prepara poi una intelaiatura di piani verticali, perpendicolari all'asse longitudinale dello scafo e egualmente distanziati sulla chiglia dell'imbarcazione. Su questi piani si trasferiscono le sezioni e si ritoccano i punti di controllo, in modo che si susseguano da una sezione all'altra senza salti bruschi, che finirebbero per provocare anomalie nella superficie, disturbandone la continuità.

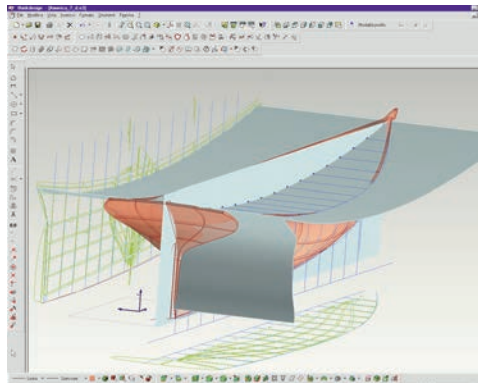
SUPERFICI SWEEP

Le *swept* sono superfici di traslazione generalizzate, nelle quali una qualsiasi generatrice viene fatta scorrere su una qualsiasi direttrice, anche sghemba. È anche possibile trasformare omoteticamente la generatrice durante la traslazione.

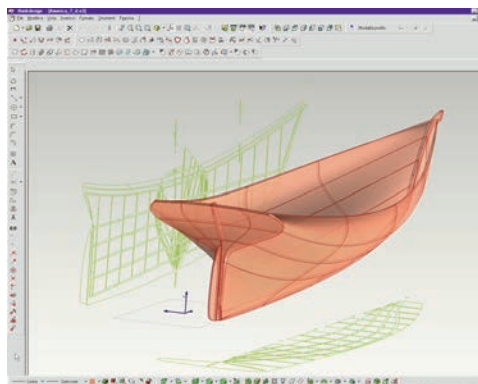
283. Lo scafo è stato modellato con due superfici *loft*, simmetriche rispetto all'asse longitudinale.

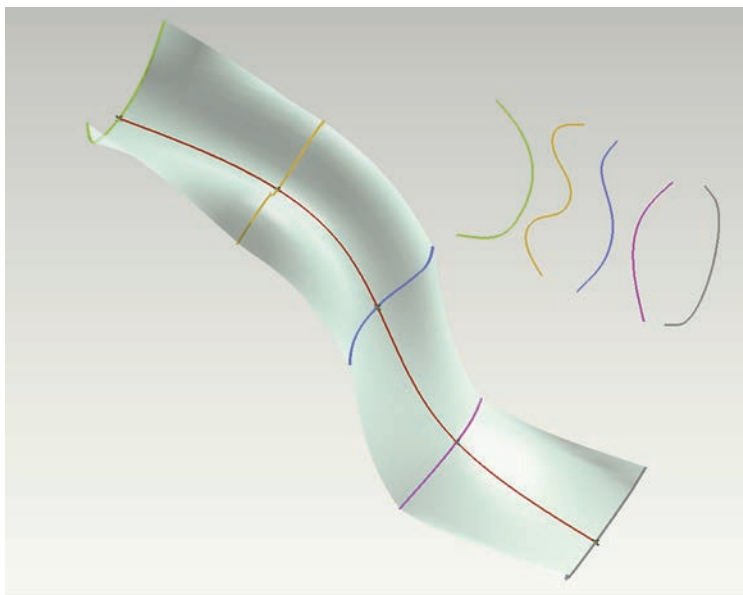


284. Superfici sulle quali è impostato lo scafo: il piano di simmetria, il piano di imposta del ponte e dello specchio di poppa.



285. Le superfici *skinned* o *loft* sono ampiamente usate nel disegno industriale e, recentemente, anche in architettura.





286. Superficie *spined*: una generatrice scorre lungo una direttrice, la *spine*, mantenendosi in ogni punto nel piano perpendicolare alla curva e in ogni punto mutando forma. Si costruisce assegnando alcune di queste forme, le altre sono desunte per interpolazione.

SUPERFICI SPINED

Le *spined* sono sostenute da una direttrice principale, detta *spine*, cui si appoggiano le generatrici che possono avere forme diverse (*spine* è la colonna vertebrale). Le generatrici debbono appartenere a piani perpendicolari alla *spine* (fig. 286). Alcuni modellatori offrono, perciò, strumenti idonei a semplificare la costruzione della struttura.

SUPERFICI DI INTERPOLAZIONE BIDIREZIONALE O $S(u, v)$

Le *superfici di interpolazione bidirezionale* (fig. 287) o $S(u, v)$ vengono generate interpolando due schiere di generatrici u e direttrici v , che possono scambiare i propri ruoli. Le curve u e v debbono intersecarsi reciprocamente, per formare una maglia il più possibile regolare.

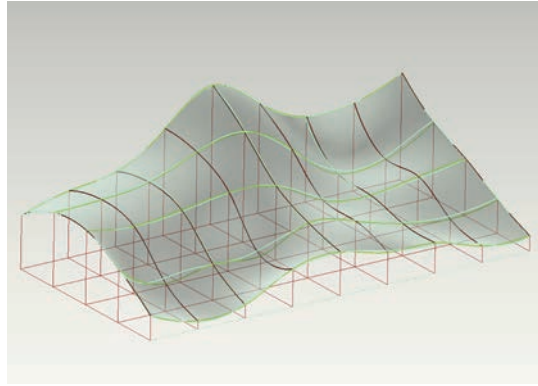
SUPERFICI DI COONS

Le *superfici di Coons* sono quelle che vengono generate dall'omonimo algoritmo. Questo procedimento interpola quattro curve contigue (fig. 288). Se queste curve sono bordi di altre superfici, viene mantenuta la continuità delle tangenti, perciò la superficie si salda perfettamente a quelle limitrofe.

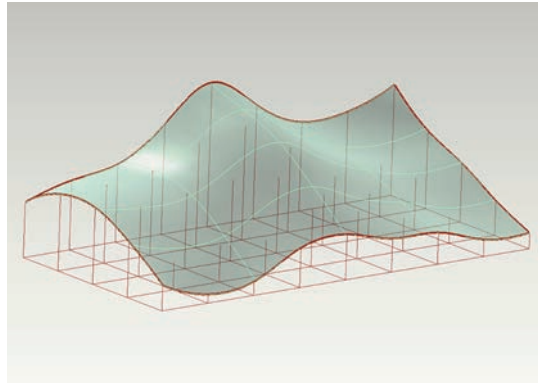
SUPERFICI PROPORZIONALI

Le *superfici proporzionali*, infine, rappresentano la massima generalizzazione della generazione ottenuta facendo scorrere una curva su un'altra. Qui le direttrici possono essere due, come pure le generatrici, una alla partenza e una all'arrivo (fig. 289). La prima generatrice viene tralata sulle altre due e contemporaneamente deformata gradualmente in modo che, all'arrivo, si confonda con la seconda direttrice.

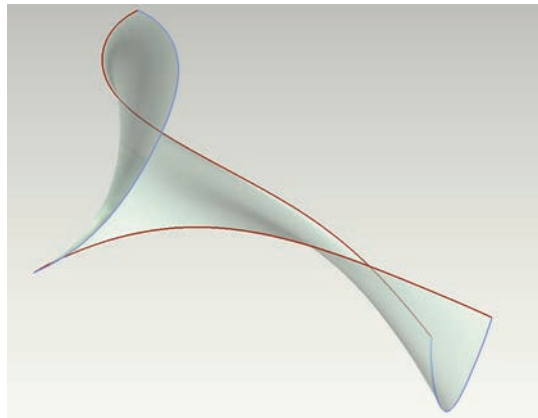
287. Superficie di interpolazione bidirezionale: le direttrici e le generatrici debbono incontrarsi in punti che descrivono, sulla superficie, una maglia semiregolare.

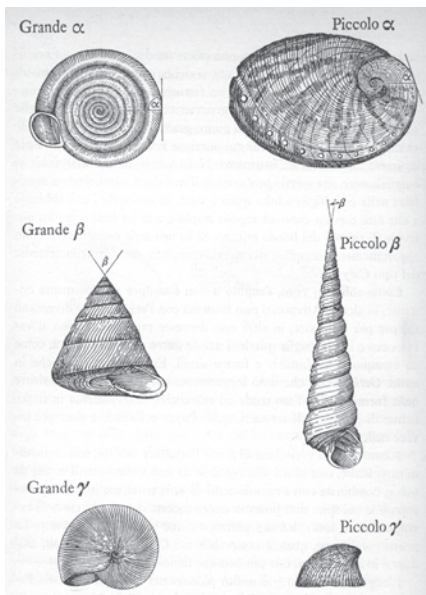


288. Superficie di Coons, ottenuta interpolando quattro linee contigue nello spazio.



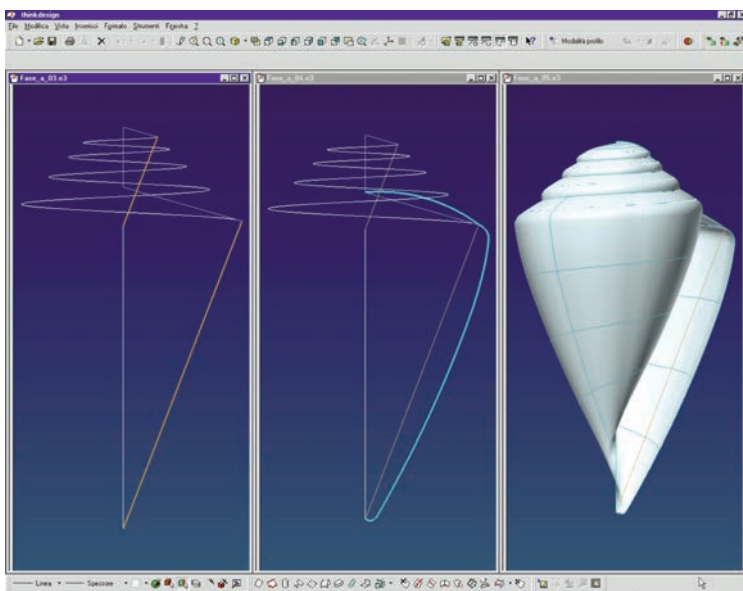
289. Superficie proporzionale: possiede due direttrici e due generatrici.





290. Illustrazione tratta da *Crescita e forma*, uno studio di D'Arcy Wentworth Thompson del 1917, dedicato alla geometria delle forme naturali.

291. Le tre fasi della modellazione NURBS di una conchiglia: costruzione della omotetia tra le generatrici, costruzione delle generatrici, generazione della superficie proporzionale e dello spessore del solido.



Superfici organiche

Vogliamo ora utilizzare le conoscenze acquisite per costruire il modello di una complessa forma naturale: quella di una conchiglia.

Si deve a uno studioso inglese vissuto a cavallo tra Ottocento e Novecento, D'Arcy Wentworth Thompson, il primo studio sulla geometria delle forme naturali. Questo lavoro, edito per la prima volta nel 1917, è stato pubblicato in lingua italiana, in un'edizione ridotta curata da John Tyler Bonner, nel 1969 con il titolo *Crescita e Forma* (fig. 290). L'opera di Thompson è notevole perché, a differenza di molti altri scritti sull'argomento, non si limita a riscontrare la regolarità geometrica di certe forme naturali, ma la giustifica con il processo di crescita dell'organismo studiato e le condizioni dell'ambiente nel quale vive.

Semplificando le teorie di Thompson, possiamo dire che l'accrescimento delle conchiglie marine segue la curvatura delle spirali logaritmiche e delle eliche coniche, sicché è possibile imitare una di queste forme utilizzando le curve appena studiate.

A questo scopo, cominciamo col costruire un'elica conica, intorno a un asse verticale.

Se si vuole costruire il modello di una particolare conchiglia, occorre misurare, sulla stessa, i parametri dell'elica e cioè: il raggio di una direttrice del cono circoscritto, la distanza della direttrice dal vertice (cioè l'altezza del cono) e l'angolo con cui la curva, che è una lossodromia del cono, incontra una delle generatrici. Io mi sono servito di un piccolo calibro, per prendere queste misure.

L'elica che si vede nella figura è stata modellata analiticamente ma si possono anche usare i comandi per la costruzione di curve e superfici attraverso l'immissione di equazioni parametriche, di cui molti modellatori dispongono.

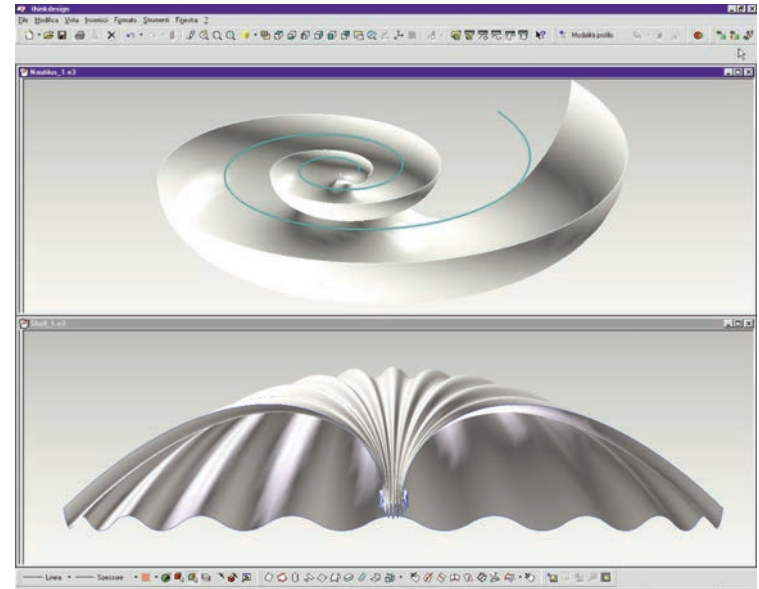
Ciò fatto, si rileva la sezione generatrice della conchiglia che si può leggere nel suo ultimo strato di accrescimento, evitando così di distruggerla. La sezione si riporta in corrispondenza dell'elica direttrice (fig. 291).

L'algoritmo NURBS, come abbiamo visto, consente di generare la superficie descritta da una curva (generatrice) che scorre lungo due direttrici, modificandosi in rapporto alla distanza delle due curve. Perciò, conviene tagliare l'asse in modo che la sezione generatrice possa mantenere le sue proporzioni durante lo scorrimento lungo le direttrici. Ciò si ottiene, semplicemente, con le due rette parallele che, nella figura, sono colorate in blu scuro.

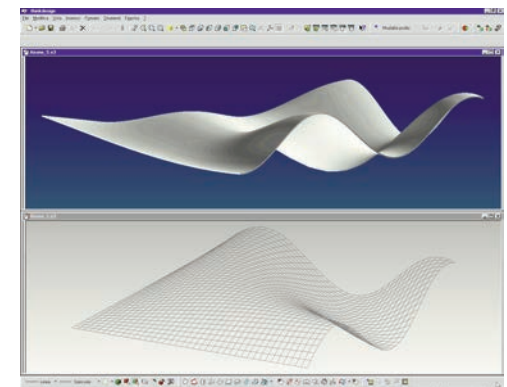
La relazione che intercede tra due generatrici complanari della conchiglia, che sono l'una l'ingrandimento dell'altra, è una *omotetia*, cioè un caso particolare di omologia.

Utilizzando la medesima tecnica e variando solo i parametri delle direttrici e la loro reciproca giacitura è possibile ottenere una grande varietà di forme, molte delle quali interessanti anche per l'architettura e il design (fig. 292).

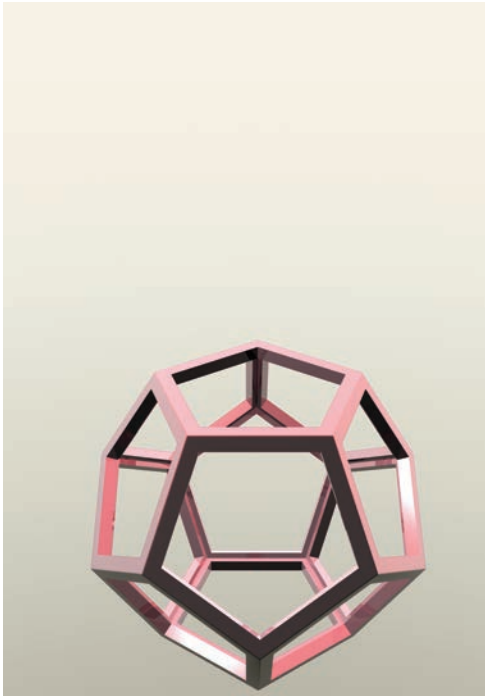
I modellatori informatici consentono anche una applicazione che non trova luogo nei modelli grafici: la costruzione delle superfici per via analitica. È possibile generare queste superfici servendosi di comandi che ne accettano le equazioni parametriche o, anche, servendosi di software dedicati come il celebre *Mathematica* (per l'equazione della curva vedi LORIA 1925, volume II, pp. 146 sgg.). Ad esempio (fig. 293), la semplice equazione $z = \text{Sen}(xy)$ costruisce la superficie ondulata riprodotta in figura.



292. Variando la forma delle direttrici e delle generatrici si ottengono i modelli di molte altre superfici organiche.



293. Elegante forma, che potrebbe essere utilizzata per una grande copertura, generata analiticamente.



294. La “quinta combinazione” di Euclide: il dodecaedro.

Superfici poliedriche

Superfici poliedriche regolari

Restava una quinta combinazione, e Dio se ne giovò per decorare l'universo (Platone, Timeo, 55).

I poliedri regolari sono quelli che si possono costruire confinando lo spazio con poligoni regolari contigui. Sono cinque e sono noti con il nome di *solidi platonici*, perché citati, da Platone, appunto, nel dialogo *Timeo*.

Nell'armonia del mondo Platone riconosce una forma generatrice: il triangolo; e fra tutti i triangoli, ne ritiene due più fecondi degli altri: il primo è il rettangolo isoscele; il secondo, è pure rettangolo, ma con l'ipotenusa doppia del cateto minore.

Componendo quattro triangoli del primo tipo si genera il quadrato, componendo sei triangoli del secondo tipo si genera il triangolo equilatero e queste figure generano, a loro volta, le forme elementari della terra, del fuoco, dell'aria, dell'acqua.

Infatti sei quadrati formano il cubo (o esaedro) che è la terra, in quanto “la più immobile” tra le forme solide; quattro triangoli equilateri formano il tetraedro, che è il fuoco; otto formano l'ottaedro che è l'aria; venti l'icosaedro che è l'acqua. E come gli elementi naturali si dissolvono gli uni negli altri, così le loro forme geometriche, per esser generate dall'unica matrice del triangolo, si trasformano e si dissolvono le une nelle altre.

Resta, tuttavia, una quinta possibilità di comporre una forma solida regolare e perfetta ed è data dal pentagono: dodici di queste figure costituiscono le facce del dodecaedro. È opinione corrente che Platone abbia voluto riconoscere in questa forma “la quint'essenza”, cioè l'etere, lo spirito; tuttavia nel dialogo non se ne fa cenno e si allude invece al dodecaedro come al modello della bellezza del creato.

Vi sono due modi per costruire i solidi platonici: il primo, elementare ma efficace, consiste nel ritagliare le facce in un cartone leggero, lasciando delle alette per poterle unire. Incollando le facce

le une alle altre i solidi prendono forma spontaneamente.

E questa via, volendo, si può seguire anche nella modellazione informatica, simulando il processo che ho descritto, benché non sia certo la procedura più agevole.

Se si vuole, però, avere il controllo della forma di questi solidi, occorre conoscere alcune loro proprietà e queste sono già ampiamente descritte da Euclide.

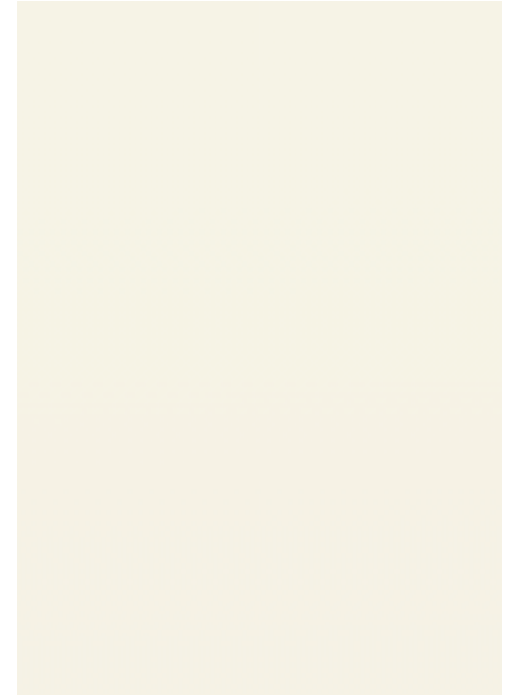
Platone scrive intorno al 360 a.C., Euclide, si crede, circa sessant'anni più tardi.

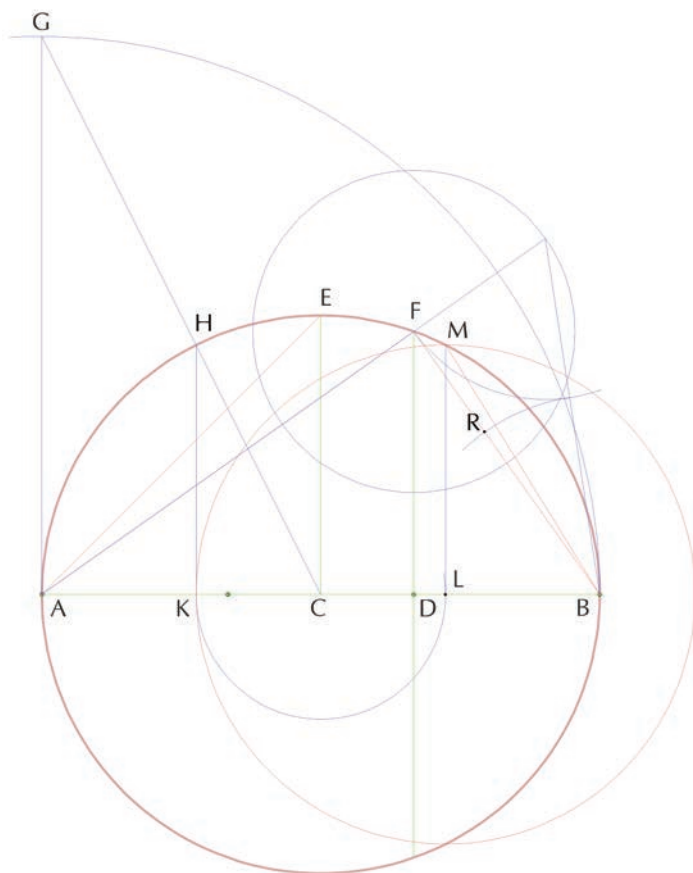
Le cinque figure, figure geometriche per eccellenza e cioè i cinque poliedri regolari, occupano l'ultima proposizione dei suoi *Elementi* (proposizione XVIII): "Trovare gli spigoli delle cinque figure e paragonarli tra loro". Un commiato festoso, scrive Attilio Frajese (EUCLIDE, nota 11, p. 1032), "quasi un'esaltazione dei risultati raggiunti, che viene effettuata mediante una sintesi finale".

In primo luogo Euclide stabilisce che non possono essere costruite altre figure solide regolari oltre a quella citate. Infatti la somma degli angoli compresi tra gli spigoli d'un angolo solido deve essere minore di quattro retti, giacché se è uguale le facce del solido si distendono su un piano, se è maggiore l'angolo è concavo e non convesso, come si presuppone. Consideriamo ora i poligoni regolari, cioè equilateri ed equiangoli, che costituiscono le facce del poliedro regolare. La più semplice è il triangolo equilatero, i cui angoli misurano sessanta gradi. Si possono perciò saldare tre, quattro o cinque di questi triangoli a formare l'angolo solido d'un tetraedro, d'un ottaedro e di un icosaedro; ma se si tenta di saldare sei di queste figure, ecco che la somma degli angoli è pari a quattro retti, cioè le figure si distendono in un piano. Per quanto riguarda il quadrato è chiaro che se ne potranno saldare non meno e non più di tre, dando luogo all'angolo solido dell'esaedro. Infine non meno e non più di tre pentagoni possono essere uniti per dare luogo all'angolo solido del dodecaedro.

I cinque poliedri regolari si possono tutti inscrivere in una sfera e circoscrivere a una sfera. Cioè: si può sempre costruire una sfera che passi per tutti i vertici di un poliedro regolare e abbia centro nel centro del solido; si può anche costruire una seconda sfera,

295. L'icosaedro vacuo.
In questa forma, tramite modelli di legno, i solidi platonici sono stati studiati dagli artisti del Rinascimento.





296. Via seguita da Euclide per costruire il lato dei cinque solidi platonici a partire da un cerchio massimo della sfera che li circoscrive.

concentrica, che è tangente a tutte le facce del solido e le tocca nel centro di ogni faccia.

Se immaginiamo i cinque solidi platonici inscritti in una medesima sfera, possiamo paragonare lo spigolo di ognuno al raggio della sfera e al suo cerchio massimo. Perciò tracciamo un cerchio di centro **C** e raggio **CA** e sia un cerchio massimo, ovvero una sezione centrale della sfera (fig. 296).

Sul diametro **AB** si prende $AD = 2DB$, in modo, cioè, che **D** stacchi i due terzi di **AB** (a destra di **A**). Si costruiscono ora le perpendicolari al diametro **AB** su **C** e **D** fino a intersecare la circonferenza nei punti **E** e **F**, rispettivamente.

Euclide dimostra che il segmento **AF** è lo spigolo del tetraedro, **FB** è lo spigolo dell'esaedro, **EB** è lo spigolo dell'ottaedro, mentre la media ragione, **BR**, di **FB** è lo spigolo del dodecaedro. Infine, si costruisce la perpendicolare in **A** al diametro **AB** e su di essa si riporta la misura del diametro in **AG**. Si traccia la retta **GC** e per il punto **H**, intersezione di questa con la circonferenza, si abbassa la perpendicolare ad **AB** in **K**. Si riporta ora **KC** dalla parte opposta di **C**, sempre su **AB** e sia **L** l'estremo del segmento così costruito. Euclide alza da **L** la perpendicolare ad **AB** fino a intersecare la circonferenza in **M** e dimostra che:

- **KL** è il raggio del cerchio "su cui si sia descritto un icosaedro", cioè il raggio del cerchio circoscritto al pentagono formato da cinque spigoli complanari dell'icosaedro;
- **AK = LB** sono il lato di un decagono regolare inscritto nel cerchio suddetto;
- **MB** è lo spigolo dell'icosaedro.

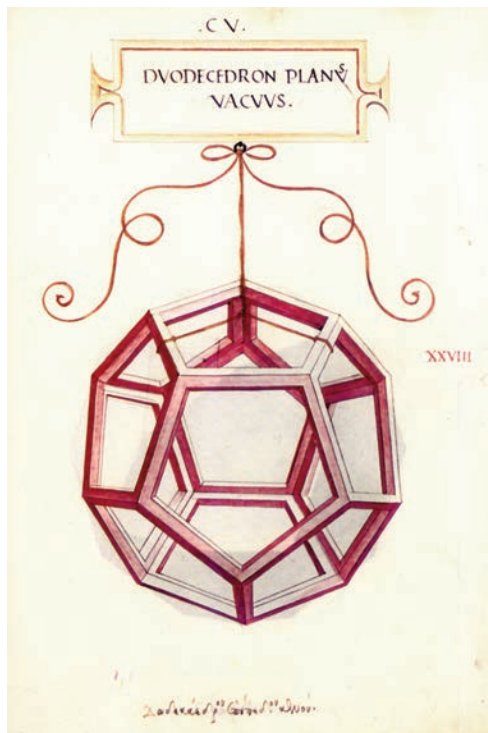
Queste relazioni sono indispensabili nella costruzione geometrica dei solidi platonici.

Ma prima di abbandonare il prezioso disegno di Euclide, conviene riconoscervi ancora alcune relazioni, che sono state peraltro utilizzate nel corso della dimostrazione:

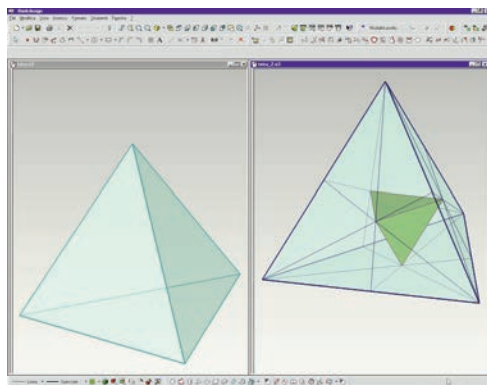
- **HK** è il doppio di **KC**, giacché **GA** è, per costruzione, il doppio di **CA**;
- **KL** e **AK** sono, rispettivamente, il lato di un esagono e di un decagono inscritti nel medesimo cerchio: sono dunque media ed



297. In questo ritratto di Luca Pacioli, opera di Jacopo de' Barbari (1495), compare alle spalle del matematico studioso della 'divina proporzione' un solido di cristallo (rombicubottaedro), che è stato ricostruito nel modello in primo piano. L'acqua contenuta nel cristallo permette, evidentemente, di studiare la sezione piana del poliedro.



298. Uno dei disegni, che ci sono pervenuti, copia dell'originale leonardesco. Si noti che, quando la costruzione si fa troppo complessa per usare un modello assonometrico intuitivo, come nel caso dell'esaedro, Leonardo copia un modello ligneo. Basta confrontare la dimensione della faccia anteriore del dodecaedro qui rappresentato, con quella della faccia posteriore, per rendersi conto che si tratta di una prospettiva.



299. I centri di ogni faccia del tetraedro sono i vertici di un secondo tetraedro, inscritto nel primo.

estrema ragione di un segmento che è il raggio di quel cerchio (EUCLIDE, proposizione XIII, 9).

PROPRIETÀ GEOMETRICHE ELEMENTARI DEI SOLIDI PLATONICI

I solidi platonici godono di numerose proprietà geometriche elementari che li legano l'uno all'altro in un prezioso gioco di corrispondenze. Tali relazioni sono state descritte da Luca Pacioli (1445-1517) nel suo celebre trattato *De divina proporzione* le cui illustrazioni originali pare si debbano a Leonardo (fig. 298).

Alcune delle osservazioni di Luca, sono utilissime, oltre che interessanti dal punto di vista geometrico e perciò le ricordiamo.

La *prima osservazione* si potrebbe chiamare "delle corde".

Si costruiscono i segmenti che hanno per estremi i centri di facce contigue del poliedro.

Consideriamo il tetraedro e per il centro d'ogni faccia, che è insieme ortocentro, baricentro e incentro del triangolo equilatero, conduciamo le rette che passano per i centri delle facce contigue (fig. 299): i segmenti così costruiti sono gli spigoli d'un secondo tetraedro, inscritto nel primo.

Prendiamo ora l'esaedro, o cubo, e procediamo nello stesso modo (fig. 300): i segmenti così costruiti sono gli spigoli d'un ottaedro, inscritto nell'esaedro. Consideriamo allora l'ottaedro e ripetiamo la costruzione: il risultato è di nuovo un esaedro.

Prendiamo allora il dodecaedro e uniamo il centro d'ogni faccia pentagonale con il centro di quelle contigue (fig. 301): nel solido s'inscrive un icosaedro. Ripetiamo la costruzione nell'icosaedro: nel suo interno si inscrive un dodecaedro.

Si usa dire che l'esaedro e l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro, sono, rispettivamente, reciproci o "duali".

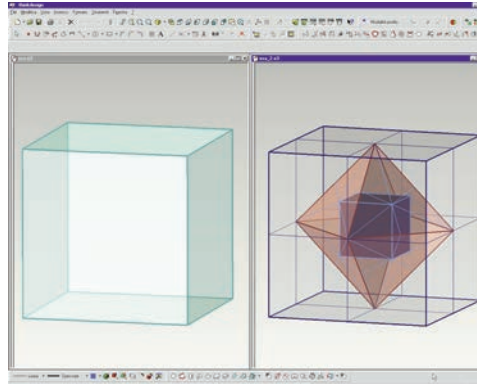
Il tetraedro è reciproco o duale di se stesso.

La *seconda osservazione* si potrebbe chiamare "delle diagonali".

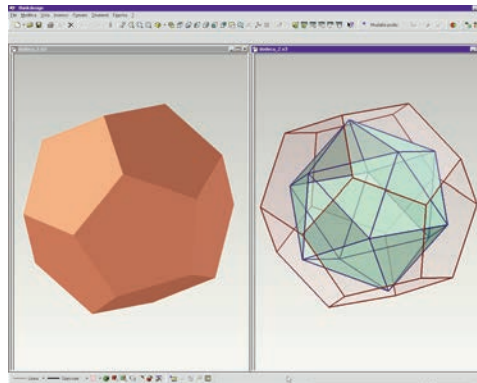
Costruiamo sulle facce dell'esaedro, cioè del cubo, le diagonali contigue (fig. 302): esse sono gli spigoli di due tetraedri inscritti nel solido e intrecciati. I loro spigoli complanari si intersecano, al centro delle facce dell'esaedro, in punti che sono i vertici dell'ottaedro inscritto.

Costruiamo sulle facce del dodecaedro le diagonali contigue esse

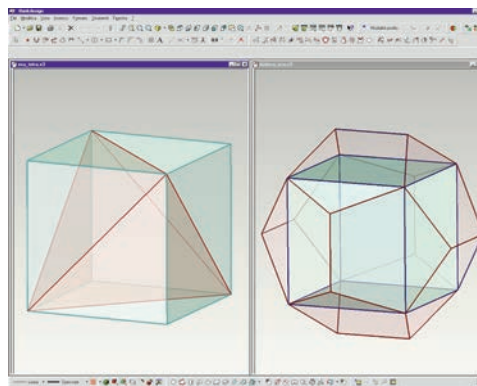
300. I centri di ogni faccia dell'esaedro sono i vertici di un ottaedro, e viceversa.

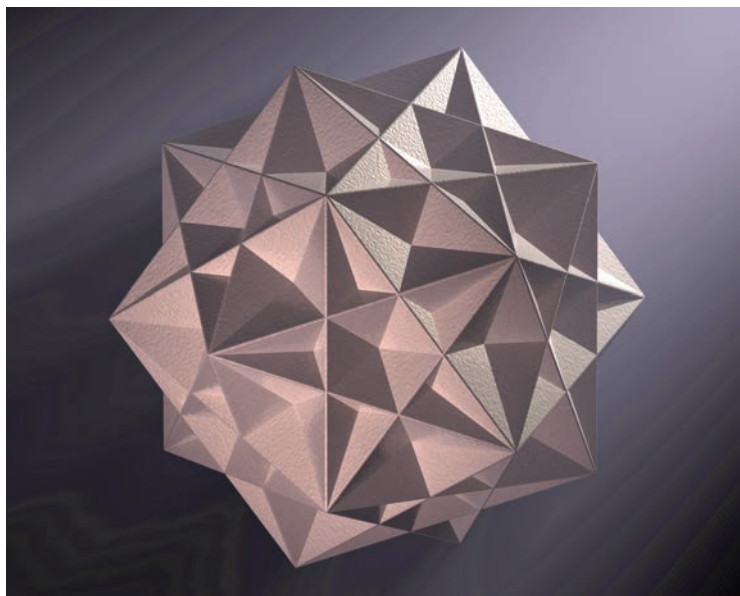


301. I centri di ogni faccia del dodecaedro sono i vertici di un icosaedro, e viceversa.

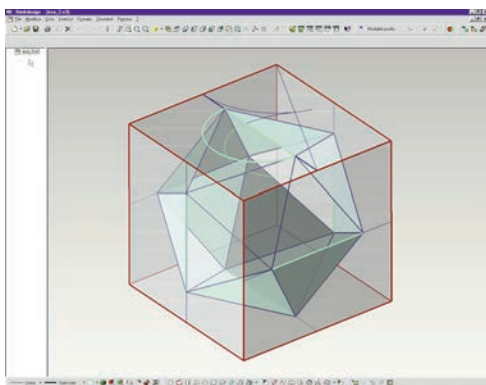


302. Le diagonali contigue di un esaedro sono gli spigoli di un tetraedro, quelle di un dodecaedro sono gli spigoli di cinque esaedri penetrati.





303. Solido generato dalla compenetrazione dei cinque esaedri inscritti nel dodecaedro.



304. La sezione aurea delle mediane delle facce dell'esaedro fornisce i vertici di due icosaedri inscritti.

sono gli spigoli di cinque esaedri inscritti nel solido e intrecciati (figg. 302, 303).

La *terza osservazione* si potrebbe chiamare “della sezione aurea”. Sulle mediane delle facce quadrate dell'esaedro, o cubo, centriamo un segmento di lunghezza pari alla media ragione del lato dell'esaedro stesso, quindi completiamo la costruzione unendo gli estremi dei segmenti riportati su ogni mediana (fig. 304): all'interno dell'esaedro nascono due icosaedri inscritti nel solido e intrecciati.

Ai fini della costruzione e della rappresentazione dell'icosaedro e del dodecaedro, oltre alle osservazioni di Pacioli, sono anche notevoli i seguenti rapporti, analizzati da Gino Fano (FANO 1914).

Se si dispone il dodecaedro con una delle facce distesa sopra il primo piano di proiezione, le prime proiezioni dei vertici si dispongono, per la simmetria del solido, su due cerchi di raggio r e R (figg. 305, 306). Il primo cerchio è circoscritto ai vertici della faccia appoggiata sul primo piano di proiezione. Il lato d del decagono inscritto nel cerchio è la media ragione del raggio r . Il raggio del secondo cerchio risulta uguale a $r + d$.

I cerchi suddetti sono la proiezione dei quattro cerchi sui quali, nello spazio, si distribuiscono i vertici del dodecaedro, con simmetria pentagonale. Questi quattro cerchi appartengono a piani che hanno le seguenti quote: il primo, quota nulla, poiché, come si è detto, appartiene al piano di proiezione; il secondo quota r ; il terzo quota $r + d$; il quarto, per simmetria, quota $r + d + r$. Questi rapporti sono sufficienti tanto per la rappresentazione grafica del solido, quanto per la sua rapida costruzione nell'ambiente di modellazione.

Per l'icosaedro si può procedere in modo analogo. Disponendo il solido con una diagonale perpendicolare al piano di proiezione, in modo che poggi su quest'ultimo con un solo vertice, le prime proiezioni degli altri vertici si dispongono come segue (fig. 307): dieci, a intervalli eguali, su un cerchio di raggio r ; uno, quello opposto al vertice più basso, nel centro del cerchio. Il raggio r del cerchio è legato al lato d del decagono descritto dalle prime proiezioni dei vertici dalla proporzione aurea. Nello spazio,

alle dieci proiezioni di questi vertici corrispondono due gruppi di cinque vertici disposti su piani che hanno, rispettivamente, quota **d** e quota **d + r**. Il vertice più alto è simmetrico del più basso e ha quota **d + r + d**.

Come nel caso precedente, questi rapporti sono sufficienti tanto per la rappresentazione grafica del solido, quanto per la sua costruzione nell'ambiente di modellazione.

La strategia che abbiamo esaminata e che consiste nello studiare le quote dei vertici rispetto al piano orizzontale di riferimento è anche quella che permette di costruire con facilità gli altri tre solidi. Nel tetraedro, infatti, basta ricavare la quota dell'unico vertice opposto alla base, ribaltando il piano proiettante in prima uno degli spigoli del solido: poiché è nota la lunghezza del lato e la retta sulla quale si dispone il vertice ignoto a ribaltamento avvenuto, è immediato ricavare l'altezza. Nell'esaedro la quota dei quattro vertici opposti alla base è uguale al lato. Per l'ottaedro, infine, basta disporre il solido con un diametro verticale, per osservare che la quota del vertice opposto a quello appartenente al piano di proiezione è uguale al diametro della sfera circoscritta, mentre gli altri vertici si dispongono su un piano orizzontale, che ha per quota il raggio, appartenendo al centro della sfera.

Superfici poliedriche tronche e stellate

Dai solidi platonici possono essere derivati infiniti altri solidi applicando e combinando tra loro due semplici operazioni:

- il troncamento degli spigoli sulla superficie di una sfera concentrica a quella circoscritta ma di raggio minore;

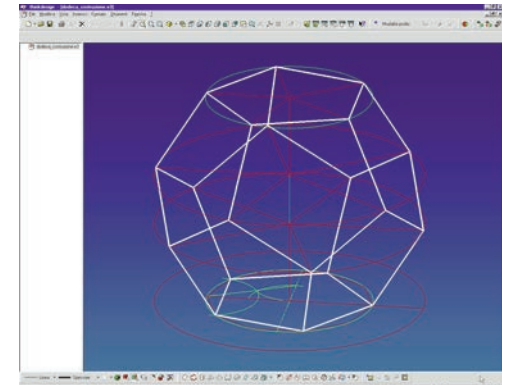
- la costruzione sulle facce del solido di piramidi di eguale altezza.

I solidi che derivano dalla prima operazione si dicono *tronchi* o *troncati*, mentre si dicono *stellati* quelli che derivano dalla seconda operazione.

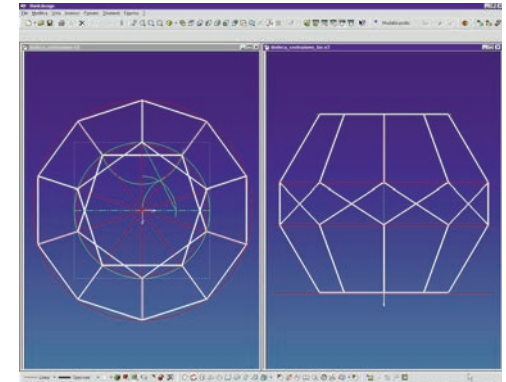
Queste due operazioni possono esser controllate per mezzo di altrettanti rapporti.

Nel caso dei poliedri tronchi, si considera il rapporto tra la parte dello spigolo che viene tagliata e lo spigolo intero. Ad esempio,

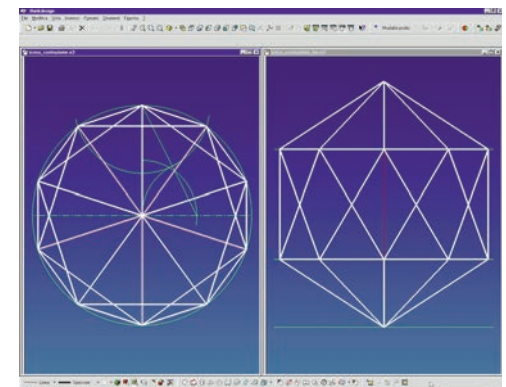
305. Costruzione del dodecaedro.

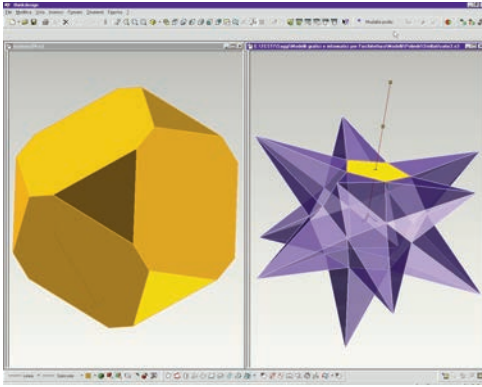


306. Sono qui evidenziate le relazioni tra le quote dei vertici, illustrate da Fano, che permettono la costruzione.

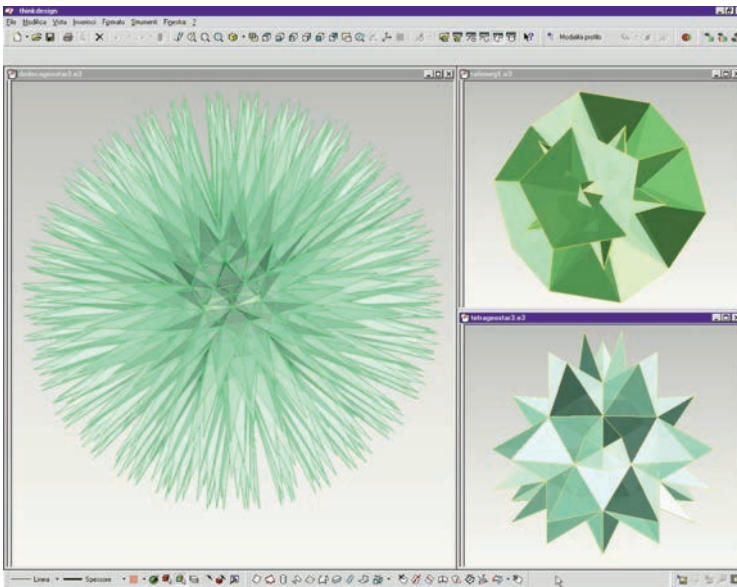


307. Costruzione dell'icosaedro, sfruttando le analoghe relazioni tra i vertici.





308. L'esaedro è stato troncato con *ratio* 0,4; il dodecaedro è stato stellato con *ratio* 3.



309. L'applicazione, ai poliedri regolari, delle operazioni di troncamento ed esplosione a stella produce una varietà di forme infinita.

un esaedro tronco di *ratio* 0,4 è un cubo al quale sono stati tagliati i quattro decimi della lunghezza dello spigolo da entrambi i lati e del quale, perciò, restano solo i due decimi dello spigolo originario.

Nel caso dei poliedri stellati si considera, invece, il rapporto tra il raggio della sfera circoscritta al solido trasformato e il raggio della sfera inscritta nel solido originario, senza escludere che il primo possa essere espresso con un valore negativo (fig. 308). Ad esempio, un poliedro stellato ha:

- *ratio* 2, quando il rapporto tra il raggio della sfera inscritta nel solido originario e il raggio della sfera circoscritta al solido stellato è 1:2, il che si ottiene costruendo su ogni faccia una piramide di altezza pari al raggio della sfera inscritta;
- *ratio* 1, quando il raggio delle due sfere, inscritta e circoscritta, è eguale e l'altezza della piramide è nulla;
- *ratio* compresa tra 1 e 0, quando il raggio della sfera circoscritta è minore del raggio della sfera inscritta e, perciò, le piramidi vengono costruite in modo da scavare le facce del solido originario;
- *ratio* 0, quando il rapporto è nullo e i vertici delle piramidi appartengono tutti al centro del poliedro;
- *ratio* negativa, infine, se i vertici delle piramidi si spingono oltre il centro del solido, autointersecandosi ed, eventualmente, riaffiorando sulla faccia opposta alla base e oltre.

Le operazioni di troncamento e costruzione della stella possono essere combinate, per esempio troncando gli spigoli della piramidi, o costruendo queste ultime sulle facce di solidi troncati in precedenza. Si dà luogo, in questo modo, a una infinità varietà di forme (fig. 309).

Strutture geodetiche

Rimane da descrivere, sia pur brevemente, una operazione di trasformazione dei poliedri che ha grande importanza in architettura per le applicazioni che trova nella costruzione di cupole a struttura reticolare.

Consideriamo, per cominciare, un icosaedro e dividiamo in due

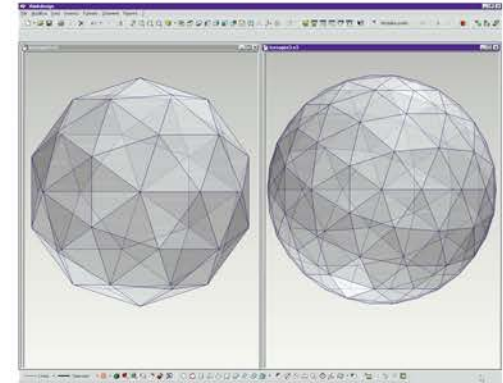
parti tutti i suoi spigoli. Ciò fatto, proiettiamo i punti medi, come sopra costruiti, dal centro del solido sulla superficie della sfera circoscritta. Infine colleghiamo i nuovi vertici tra loro, formando quattro facce triangolari per ogni faccia dell'icosaedro (fig. 310). Abbiamo ottenuto, in questo modo, un poliedro di ottanta facce, costituite da quattro triangoli. Uno di questi triangoli, quello al centro, è equilatero, gli altri sono isosceli. Gli spigoli di questo poliedro, che diventano aste nella struttura geodetica, sono molto simili nella lunghezza e di due soli tipi diversi: ciò risulta assai utile, sia per la prefabbricazione della struttura che per la migliore distribuzione degli sforzi.

Una struttura siffatta si dice geodetica, come vuole il suo inventore, Richard Buckminster Fuller. La *frequenza* di una geodetica è il numero delle divisioni operate su ciascuno spigolo del poliedro originario. Perciò, la struttura geodetica che abbiamo appena costruito è di frequenza 2.

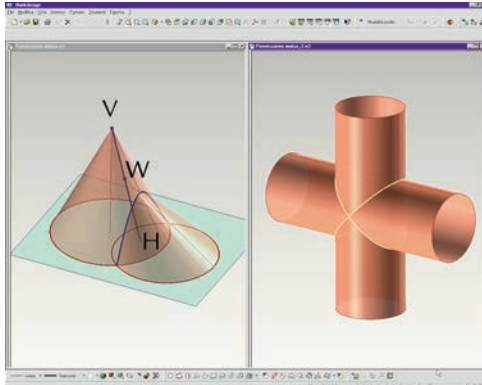
Quando il valore della frequenza è più elevato, come sempre accade per strutture di una certa importanza, si possono seguire diversi metodi per ottenere la divisione dello spigolo del poliedro originario, per esempio dividere in parti eguali l'angolo sotteso dallo spigolo al centro del poliedro, oppure dividere la faccia del poliedro in triangoli prima di proiettarne i vertici sulla superficie della sfera circoscritta. Questo ultimo metodo è stato utilizzato per costruire le strutture geodetiche di frequenza 3 qui riportate.

Un poliedro geodetico può essere a sua volta assoggettato a operazioni di troncamento e può generare poliedri stellati. Questi ultimi trovano, nella complessità, una immagine che riporta a forme organiche.

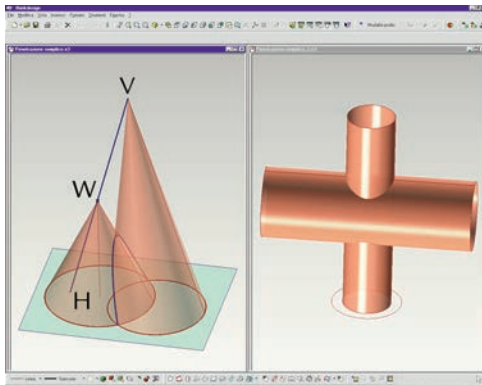
310. Due strutture geodetiche: si ottengono dividendo le facce di un poliedro in triangoli e proiettando i vertici sulla superficie della sfera circoscritta. Hanno proprietà notevoli, come la regolarità della sfaccettatura.



Intersezioni delle superfici



323. Compenetrazione mutua di due superfici e la costruzione che permette di identificarla.



324. Compenetrazione semplice di due superfici e la costruzione che permette di identificarla.

Il procedimento generale che costruisce l'intersezione di due superfici consiste, come abbiamo già detto, nel sezionare entrambe le superfici con una schiera di piani ($\alpha, \beta, \gamma \dots$). Ciascuno di essi taglia le due superfici secondo due linee: i punti che queste linee hanno in comune, se esistono, sono punti della curva sezione cercata; essi appartengono, infatti, tanto all'una quanto all'altra superficie.

Nella modellazione informatica, un solo comando permette di costruire qualsiasi intersezione e di estrarre, volendo, la curva che ne è il risultato.

Nei modelli grafici, invece, occorre, di volta in volta, scegliere i piani ausiliari di sezione nel modo più conveniente per la accuratezza e la semplicità del procedimento. Ad esempio, come meglio vedremo nel seguito, se si ha a che fare con una superficie di rivoluzione, basta scegliere la schiera dei piani con giacitura perpendicolare all'asse di rivoluzione, per ottenere una schiera di circonferenze.

Una certa attenzione merita la costruzione delle tangenti nei punti ordinari della curva sezione. Poiché il piano tangente in un punto di una superficie continua è unico, la tangente in un punto della curva sezione deve appartenergli; quindi la tangente in un punto della curva intersezione di due superfici è la retta intersezione dei due piani tangenti rispettivamente all'una e all'altra superficie nel punto considerato.

Qualche precisazione (BOMPIANI 1968) merita il caso in cui l'intersezione avvenga tra i coni o cilindri che abbiamo detti obliqui o rotondi: sono tali quei coni o cilindri che, tagliati comunque da un piano, producono una sezione conica (propria o degenera). Se si sezionano le due superfici con un medesimo piano, si ottengono due direttrici complanari c e d , coniche. Se ora si costruisce la retta VW che appartiene ai vertici delle due superfici, siano essi punti o direzioni, e il punto H in cui detta retta interseca il piano suddetto, possono darsi tre casi:

- il punto **H** è interno a entrambe le direttrici;
- il punto **H** è interno a una direttrice ed esterno all'altra;
- il punto **H** è esterno a entrambe le superfici.

Immaginiamo ora di costruire il fascio di piani che ha per sostegno la retta **VW** e di ricercare le intersezioni (se esistono) di ogni piano del fascio con entrambi i coni.

Nel primo caso (fig. 323), l'insieme dei piani del fascio taglia entrambe le superfici, dunque le generatrici di ognuna delle due superfici intersecano l'altra: si dice, questa, una *compenetrazione mutua*.

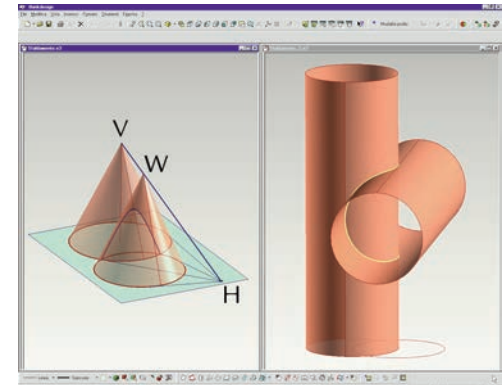
Nel secondo caso (fig. 324), l'insieme dei piani del fascio seziona una superficie e solo un sottoinsieme le seziona entrambe, il che significa che tutte le generatrici di una delle superfici intersecano l'altra, ma non viceversa: si dice, questa, una *compenetrazione semplice*.

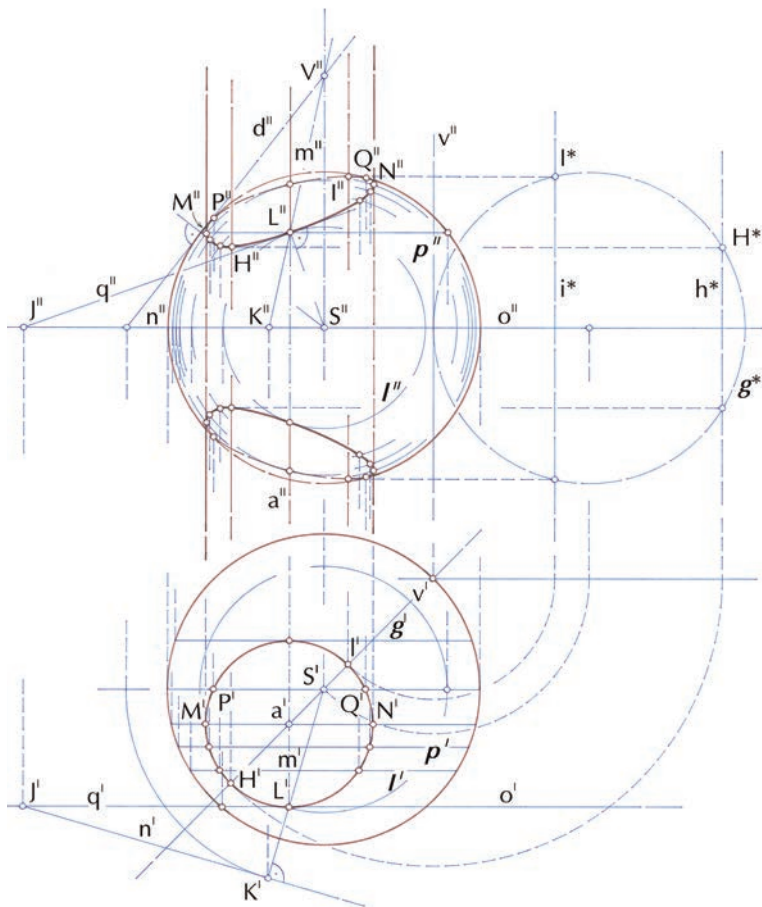
Nel terzo caso, condotte da **H** le tangenti alle due direttrici, può accadere che:

- esse formano angoli distinti: ciò significa che l'insieme dei piani del fascio comprende due sottoinsiemi distinti, che sezionano, rispettivamente, le due superfici, ma non hanno parti in comune; non si ottiene, dunque, alcuna intersezione;
- l'angolo formato dalle une è compreso nell'angolo formato dalle altre: ciò significa che l'insieme dei piani del fascio comprende due sottoinsiemi, che sezionano ciascuno una superficie, ma l'uno dei due sottoinsiemi è incluso nell'altro e seziona, perciò, entrambe le superfici; si ottiene, di conseguenza, una *compenetrazione semplice*;
- i due angoli hanno una parte in comune: ciò significa che l'insieme dei piani del fascio comprende due sottoinsiemi che sezionano, ciascuno, una superficie e che questi due sottoinsiemi si intersecano, cioè hanno una parte in comune; questa intersezione è detta *sfaldamento* (fig. 325).

Le tre modalità di intersezione di due superfici descritte – la compenetrazione mutua, la compenetrazione semplice e lo sfaldamento – si comprendono immediatamente se si applicano i principi generali sopra esposti al caso di due cilindri. Se sono tangenti

325. Sfaldamento e la costruzione che permette di identificare questa particolare intersezione.





326. Modello grafico della intersezione di un cilindro con una sfera. Per costruirla, si tagliano entrambe le superfici con piani paralleli all'asse del cilindro. Questi piani tagliano il cilindro secondo rette e la sfera secondo cerchi, rendendo così agevole la costruzione.

l'uno all'altro, la compenetrazione è mutua. Se uno è compreso nell'altro, la compenetrazione è semplice. Se nessuno dei due comprende l'altro, l'intersezione è uno sfaldamento.

Sussiste, infine, il seguente teorema: se due superfici che ammettono entrambe una sezione piana conica (superfici di secondo grado) possono essere inscritte o circoscritte in una terza superficie, anch'essa di secondo grado, la loro curva intersezione è costituita da due curve piane.

Avremo modo di osservare meglio queste situazioni, nonché altre particolarità, negli esempi che seguono.

Intersezione di una sfera con un cilindro rotondo

Il cilindro, rotondo, è disposto con l'asse **a** verticale; tutte le sue generatrici intersecano la sfera di centro **S** (compenetrazione semplice), ma l'asse non appartiene al centro (figg. 326, 327). La curva che si ottiene è digrammica, cioè è composta di due rami, e questi sono simmetrici rispetto al piano equatoriale della sfera. Perciò costruito il primo ramo (per esempio quello superiore) sarà immediato costruire, per simmetria, anche il secondo.

I piani che si utilizzano per determinare punti della curva intersezione possono essere sia perpendicolari che paralleli all'asse del cilindro. Nel primo caso, essi tagliano sia il cilindro che la sfera secondo circonferenze, che si proiettano in vera forma sul primo piano di proiezione; nel secondo caso, essi tagliano il cilindro secondo generatrici (rette, naturalmente) parallele al secondo piano di proiezione e la sfera secondo circonferenze la cui vera forma può essere osservata operando un ribaltamento.

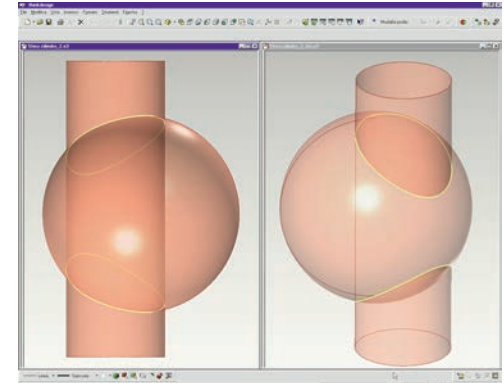
Cominciamo col determinare i punti più alto e più basso del primo ramo. A questo scopo sezioniamo sfera e cilindro con il piano individuato dal centro della sfera e dall'asse del cilindro. Si tratta del piano verticale γ , che seziona la sfera secondo la circonferenza massima **g** e il cilindro secondo le due generatrici **h** e **i**. Ribaltando il piano γ , per esempio intorno alla retta verticale **v**, se ne può rappresentare la vera forma **g***, tracciandola con il compasso, e si possono perciò determinare con esattezza i ribaltamenti **H*** e **I*** dei

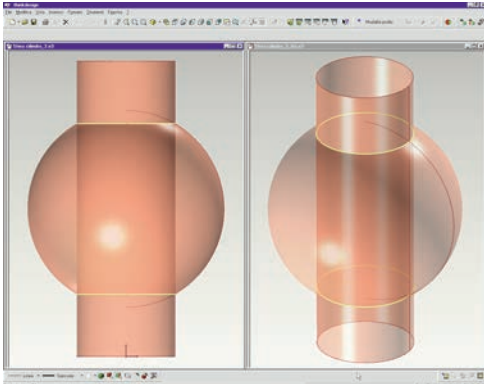
due punti intersezione con i ribaltamenti delle rispettive generatrici. Ai punti oggettivi, e alle loro proiezioni, si perviene raddrizzando il piano. Le tangenti alla curva in **H** e **I** sono orizzontali, come si riconosce ricordando che si tratta, rispettivamente, del punto più basso e più alto del primo ramo.

Possiamo ora occuparci di un punto ordinario, come **L**, che appartiene al piano λ frontale tangente al cilindro. Il medesimo piano seziona la sfera secondo una circonferenza l che si proietta in vera forma sul secondo piano di proiezione. La tangente nel punto si costruisce avvalendosi del cono circoscritto alla sfera e tangente lungo il parallelo p che passa per **L**. Le generatrici di contorno apparente di questo cono rispetto alla seconda direzione di proiezione sono tangenti alla seconda proiezione del contorno apparente della sfera, sicché risulta immediata la costruzione del vertice **V** e della direttrice d del cono che appartiene al piano dell'equatore. Il piano tangente alla sfera nel punto **L** tocca il cono circoscritto lungo la generatrice $m = VL$ e questa incontra il piano dell'equatore nel punto **K**. Per **K** passa la retta n , comune al piano tangente e al piano dell'equatore, e perciò tangente la direttrice d del cono circoscritto. Il piano tangente al cilindro, sempre nel punto **L** che ci interessa, taglia invece il piano dell'equatore secondo una retta o : il punto **J** comune a o e a n è, evidentemente, un punto della retta intersezione dei due piani tangenti sopra costruiti e, perciò, un punto della retta q , tangente alla curva intersezione delle due superfici, nel punto **L**.

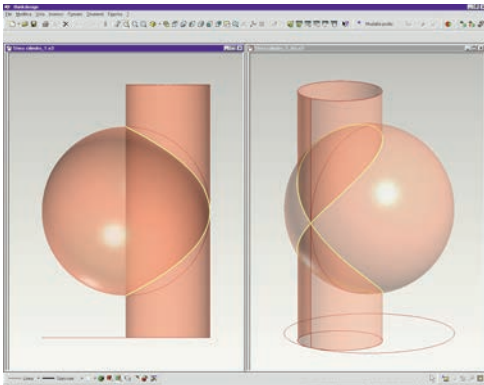
Il procedimento, del tutto generale, può essere applicato alla costruzione delle tangenti nei punti ordinari della curva intersezione cercata. Si noti, tuttavia, che nel caso particolare che abbiamo esaminato, il piano tangente al cilindro è frontale e taglia, perciò, la sfera secondo un cerchio minore, l , che si proietta in vera forma sul secondo piano di proiezione. Detto cerchio contiene il punto **L** e dunque la tangente alla seconda proiezione della curva in L'' può anche costruirsi, semplicemente, come tangente alla seconda proiezione del cerchio l, l'' . Con criteri analoghi si costruiscono altri punti ordinari della curva e si conclude rintracciando i punti **M** e **N** che appartengono alle generatrici di contorno apparente del

327. Modello informatico che illustra la situazione considerata nel modello grafico precedente.





328. Sfera e cilindro coassiali: è il caso di un tamburo impostato su una cupola.



329. Sfera e cilindro tangenti: in questo caso la curva intersezione presenta un nodo.

cilindro rispetto alla seconda direzione di proiezione, nonché i punti P e Q che appartengono, invece, al meridiano contorno apparente della sfera, sempre rispetto alla seconda direzione di proiezione. La seconda proiezione della curva nei quattro punti M , N , P e Q è tangente alle seconde proiezioni dei contorni apparenti relativi.

Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

Se il centro S della sfera appartiene all'asse del cilindro e il diametro della direttrice del cilindro è più piccolo del diametro della sfera, il risultato dell'intersezione sono due circonferenze c e d che compongono una curva digrammica. È questo il caso di un tamburo circolare impostato su una cupola emisferica (fig. 328).

Se, oltre ad avere il centro sull'asse, la sfera ha anche lo stesso diametro della direttrice del cilindro, allora il cilindro è circoscritto alla sfera (compenetrazione mutua) e l'intersezione delle due superfici si riduce alla direttrice e di contatto. Si può intendere questa situazione come un caso speciale di quella precedente.

Se le due superfici ammettono un piano tangente e il diametro della direttrice del cilindro è più piccolo del diametro della sfera, la curva intersezione presenta un nodo N nel punto di contatto (fig. 329).

Se, infine, l'intersezione è uno sfaldamento, la curva relativa è costituita da un solo ramo, o, come si dice, monogrammica.

Intersezione di due cilindri

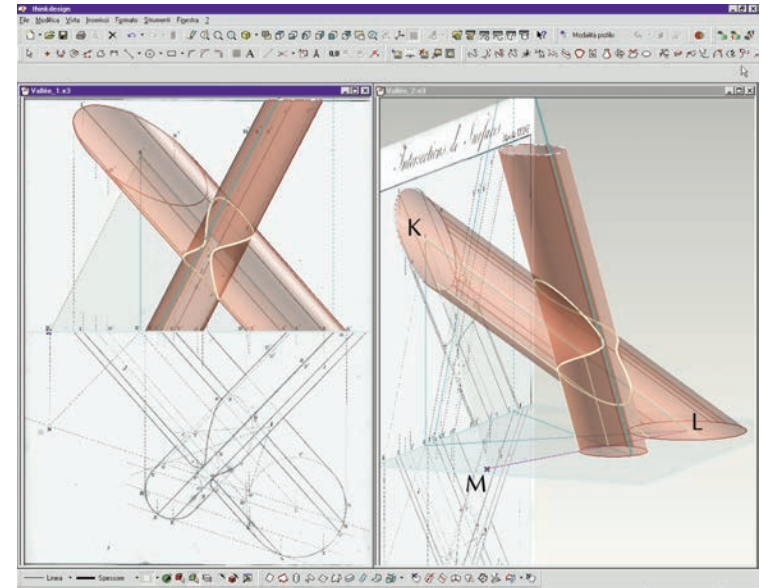
Le direzioni degli assi dei due cilindri individuano una giacitura: ciò significa che esiste sempre una schiera di piani paralleli tanto all'asse del primo cilindro, quanto all'asse del secondo. Sezionando le due superfici con questa schiera di piani, si ottengono, per ogni piano, due coppie di generatrici: i quattro punti così individuati appartengono alla curva intersezione. Il celebre trattatista francese L.L. Vallée (1801-1864) costruisce la giacitura parallela agli assi sghembi dei due cilindri conducendo per un qualsiasi punto K dell'asse del primo cilindro una retta KM parallela alle generatrici del secondo (fig. 330). Il piano così individuato taglia il primo

piano di proiezione secondo una retta **LM**. Ogni piano a esso parallelo sezionerà il primo piano di proiezione secondo una retta parallela alla **LM**, il primo cilindro secondo una coppia di generatrici parallele all'asse **KL**, il secondo cilindro secondo una coppia di generatrici parallele alla **KM**. I punti comuni alle generatrici complanari sono punti della curva intersezione cercata. La tangente in un punto qualsiasi, come **T**, deve passare per il punto comune alle prime tracce dei due piani tangenti ai due cilindri, lungo le due generatrici alle quali **T** appartiene; basta, perciò, costruire per **T** le due generatrici suddette e determinare i punti **G** e **O** che esse hanno in comune con il primo piano di proiezione: le tangenti in **G** e **O** alle direttrici dei due cilindri, tracce dei piani tangenti, si incontrano in un punto **Q** che appartiene alla retta cercata.

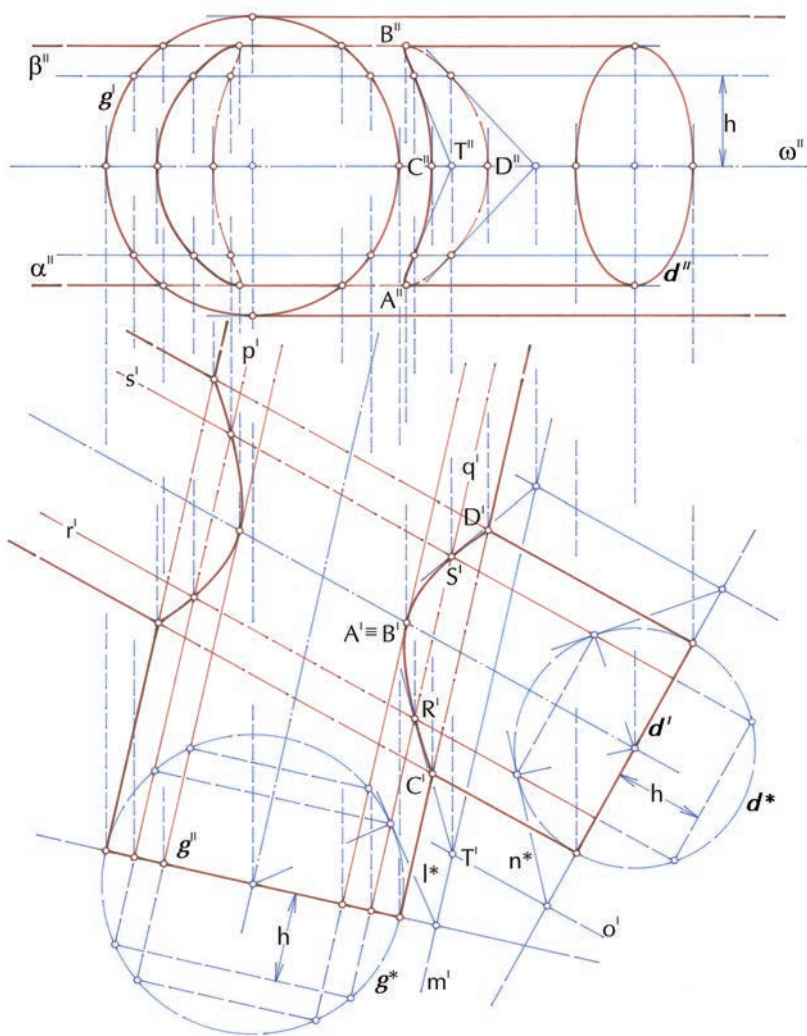
Quanto alla forma della curva intersezione, se i due cilindri sono quadrici, essa è, in generale, una curva sghemba (costituita di uno o due rami).

Cerchiamo ora di analizzare i casi particolari applicando ancora il criterio generale sopra esposto trattando delle intersezioni tra coni. Cerchiamo, innanzi tutto, la retta che appartiene ai vertici dei due cilindri e dà sostegno al fascio di piani capace di sezionarli entrambi secondo coppie di generatrici. Questa retta passa per i vertici dei due cilindri, che sono due direzioni, essa è dunque tutta a distanza indeterminata ed è perciò una giacitura, precisamente la giacitura dei piani paralleli agli assi (in generale sghembi) dei due cilindri. Il punto intersezione di questa retta con il piano delle direttrici sarà dunque, ancora, una direzione H^p : la direzione della retta intersezione del piano delle direttrici con uno dei piani paralleli agli assi. Per costruire questa direzione H^p procediamo dunque come segue: per un punto qualsiasi **P** conduciamo due rette **r** e **s** rispettivamente parallele all'asse **a** e all'asse **b** dei due cilindri; determiniamo quindi i punti **Q** e **R** intersezione delle due rette con il piano che ospita le direttrici: la direzione cercata è quella della $h = RQ$.

Ciò premesso, si può notare che il punto intersezione della retta che appartiene ai due vertici, cioè alle direzioni degli assi, con il piano delle direttrici è sempre a distanza indeterminata e, di con-



330. La curva intersezione di due cilindri si costruisce tagliandoli entrambi con piani paralleli ai loro due assi. Così opera, ad esempio, L.L. Vallée.



331. Il modello grafico dell'intersezione di due cilindri di diametro diverso costituisce la base della rappresentazione di una volta a botte con lunetta cilindrica.

sequenza, esterno alle direttrici medesime. Possono dunque darsi quattro casi:

- le tangenti (parallele) alle due direttrici condotte per H° comprendono due distinte strisce del piano; in tal caso non si ha alcuna intersezione;
- le tangenti (parallele) alle due direttrici condotte per H° delimitano due strisce del piano, delle quali l'una è completamente compresa nell'altra; in tal caso si ha *compenetrazione semplice*;
- le tangenti (parallele) alle due direttrici condotte per H° delimitano due strisce del piano sovrapposte (o coincidenti); in tal caso si ha *compenetrazione mutua*;
- le tangenti (parallele) alle due direttrici condotte per H° delimitano due strisce del piano parzialmente sovrapposte; in tal caso si ha *saldamento*.

Tra questi casi, esamineremo in dettaglio i due che ricorrono più frequentemente nel disegno di architettura che sono quello della compenetrazione semplice, tipico ad esempio di alcune volte lunettate, e quello della compenetrazione mutua, tipico delle volte a crociera romane.

Sono assegnati due cilindri γ e δ , con gli assi orizzontali e complanari (fig. 331). La direttrice g del cilindro γ ha un diametro maggiore della direttrice d di δ . Applicando, dunque, il criterio suesposto, si può constatare che l'intersezione è una compenetrazione semplice. I punti notevoli del primo ramo della curva intersezione che è, come abbiamo detto, digrammica e sghemba, sono:

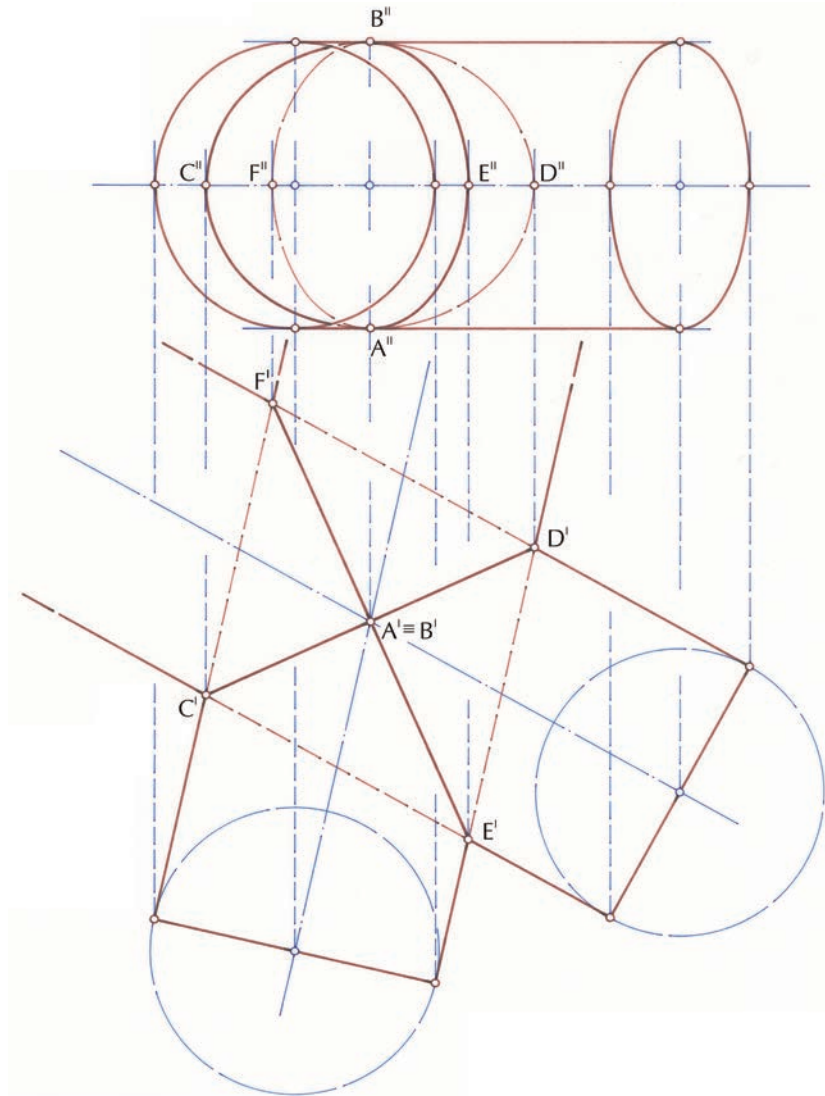
- i due punti **A** e **B**, rispettivamente il più basso e più alto, a tangente orizzontale, che si ottengono sezionando entrambi i cilindri, rispettivamente, con un piano α , e con un piano β orizzontali e tangenti al cilindro di diametro minore;
- i punti **C** e **D**, entrambi a tangente verticale, che si ottengono sezionando i due cilindri con il piano, pure orizzontale, al quale appartengono gli assi.

Altri punti ordinari si costruiscono sezionando entrambi i cilindri con altri piani orizzontali, come si è detto. Le tangenti alla curva, in questi punti, si ottengono costruendo le rette intersezione dei piani tangenti, nei punti stessi, ai due cilindri. Consi-

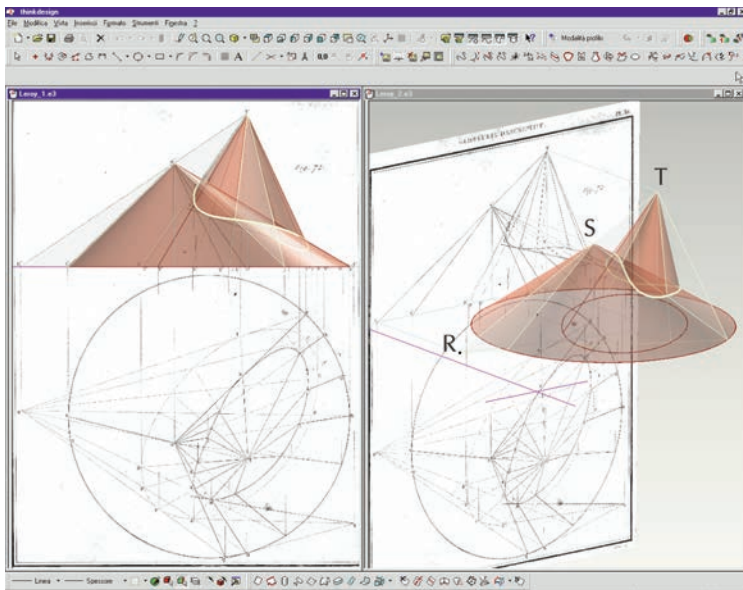
deriamo, ad esempio, il piano γ orizzontale che seziona i due cilindri, rispettivamente, nelle generatrici \mathbf{p} e \mathbf{q} , \mathbf{r} e \mathbf{s} . Le prime proiezioni \mathbf{p}^l , \mathbf{q}^l , \mathbf{r}^l , \mathbf{s}^l di queste generatrici si costruiscono facilmente, riportando, sul ribaltamento g^* e d^* delle direttrici g e d , le intersezioni di \mathbf{g} con i rispettivi piani delle direttrici, alla medesima quota \mathbf{h} , rispetto a un piano di riferimento, per esempio quello, ω , che ospita gli assi. La generatrice \mathbf{q} incontra \mathbf{r} e \mathbf{s} in due punti \mathbf{R} e \mathbf{S} che appartengono al primo ramo della curva intersezione. La tangente alla curva in \mathbf{R} si costruisce ricorrendo, ancora, al ribaltamento delle direttrici. Infatti, il piano tangente al cilindro γ , nel punto \mathbf{R} , taglia il piano della direttrice secondo una retta \mathbf{l} che si ribalta in \mathbf{l}^* e il piano degli assi (assunto come riferimento) secondo una retta \mathbf{m} , parallela all'asse; analogamente il piano tangente al cilindro δ , nel medesimo punto \mathbf{R} , taglia il piano della direttrice secondo una retta \mathbf{n} che si ribalta in \mathbf{n}^* e il piano degli assi secondo una retta \mathbf{o} parallela all'asse relativo. Le rette \mathbf{m} e \mathbf{o} hanno in comune un punto \mathbf{T} che appartiene alla tangente cercata e che, insieme a \mathbf{R} , la individua.

Altra situazione ricorrente è quella che abbiamo definito come compenetrazione mutua. In questo caso i due cilindri ammettono due piani tangenti a entrambi e paralleli. Si dimostra che i due rami che costituiscono la curva intersezione sono piani e che, se i cilindri sono rotondi o obliqui, come sovente nelle applicazioni, i due rami sono, in generale, due ellissi (o circonferenze, come casi particolari).

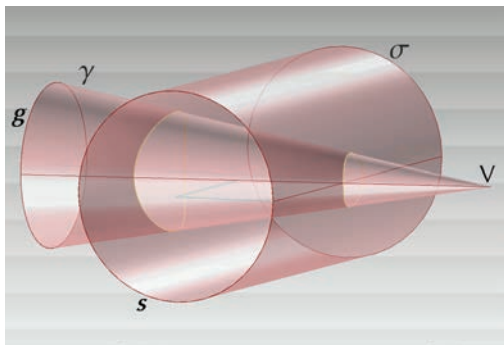
Costruiamo dunque due cilindri γ e δ , disposti come nel caso precedente, ma con direttrici di diametro uguale (fig. 332). Poiché conosciamo *a priori* la forma dei due rami della curva intersezione, cerchiamo gli assi delle due ellissi che la costituiscono, uno dei quali, quello verticale \mathbf{AB} , è in comune. Tali assi, naturalmente, si proiettano, secondo i modelli grafici, ancora in una coppia di assi della curva proiezione, ovvero in una coppia di diametri coniugati o di corde (in prospettiva). In ogni caso, per determinare gli assi è sufficiente costruire gli estremi dei diametri coniugati \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{F} nel modo esposto.



332. Il modello grafico dell'intersezione di due cilindri di diametro uguale costituisce la base della rappresentazione di una volta a crociera.



333. Modello tratto da C.F.A. Leroy, *Traité de Géométrie descriptive*, Parigi, 1872, *planche* 30.



334. Modello della penetrazione semplice di un cono e di un cilindro.

Intersezione di due coni

Esamineremo anche qui il caso più ricorrente, che è quello della penetrazione semplice.

Sono dati due coni (fig. 333): il primo è assegnato per mezzo della direttrice circolare AVB e del vertice S ; il secondo per mezzo della direttrice ellittica, complanare a quella del primo cono, $DUEZG$ e del vertice T . La retta ST interseca il piano delle direttrici in un punto R esterno alle stesse; conducendo da R le tangenti alle direttrici si ottengono due angoli, l'uno dei quali comprende l'altro. Si osservi ora che i piani del fascio che ha per sostegno la retta ST tagliano entrambi i coni secondo coppie di generatrici, cioè ciascuno secondo due coppie di rette: i quattro punti comuni alle due coppie di rette contenute in ciascun piano sono punti della curva intersezione che si vuole costruire. Le tangenti alla curva, in ciascuno dei punti suddetti, sono, come sappiamo, le rette intersezione dei piani tangenti ai due coni che passano per i punti medesimi.

Intersezione di cono e cilindro

L'intersezione di un cilindro con un cono è, senz'altro, un problema più comune, nel disegno di architettura, di quanto non sia l'intersezione di due coni. Si presenta, infatti, quando nel fianco di una volta a botte si apre una finestra strombata, sormontata da un arco. Gli assi del cilindro e del cono sono per solito complanari e l'intersezione è una penetrazione semplice nella quale si considera soltanto uno dei due rami della curva relativa.

È dato, dunque, il cilindro σ con direttrice circolare s e asse orizzontale, penetrato nel fianco dal cono γ , con direttrice g e vertice V , che ha l'asse ortogonale all'asse del cilindro e compreso nel medesimo piano (fig. 334). Consideriamo la retta h che passa per V (fig. 335) ed è parallela all'asse c del cilindro: essa è sostegno di un fascio di piani che secano entrambe le superfici secondo coppie di generatrici. È facile riconoscere in questa situazione quella generale più volte descritta, nella quale si costruisce la retta che ap-

partiene ai vertici di due coni, sia che essi abbiano il vertice accessibile (come nel cono vero e proprio) sia che abbiano per vertice una direzione (come nel caso del cilindro). La soluzione del problema è dunque ricondotta alle costruzioni già note. Vale solo la pena di osservare che per ogni piano del fascio, come ad esempio γ , occorrerà determinare le intersezioni con i piani delle direttrici e che, a questo scopo, occorre servirsi dei seguenti ribaltamenti:

- il ribaltamento di s intorno al diametro che appartiene al piano degli assi, ribaltamento che porta la direttrice del cilindro in s^* : le intersezioni di questo piano con i piani del fascio secante passano per il punto W , intersezione della retta h con il piano della direttrice medesima;
- il ribaltamento del piano proiettante in prima per l'asse del cono, intorno all'asse medesimo.

Ad esempio la retta q^* , ribaltamento dell'intersezione di un piano secante con il piano che proietta in prima l'asse del cono, si trova riportando su detto ribaltamento la quota del punto Q , che si può misurare sul ribaltamento di s , precedentemente effettuato. Infatti, posto che la retta h è per costruzione parallela all'asse c del cilindro, i piani secanti sono pure paralleli all'asse e dunque la loro distanza dall'asse medesimo è costante.

Si usa infine il ribaltamento della direttrice g del cono, che la porta in g^* .

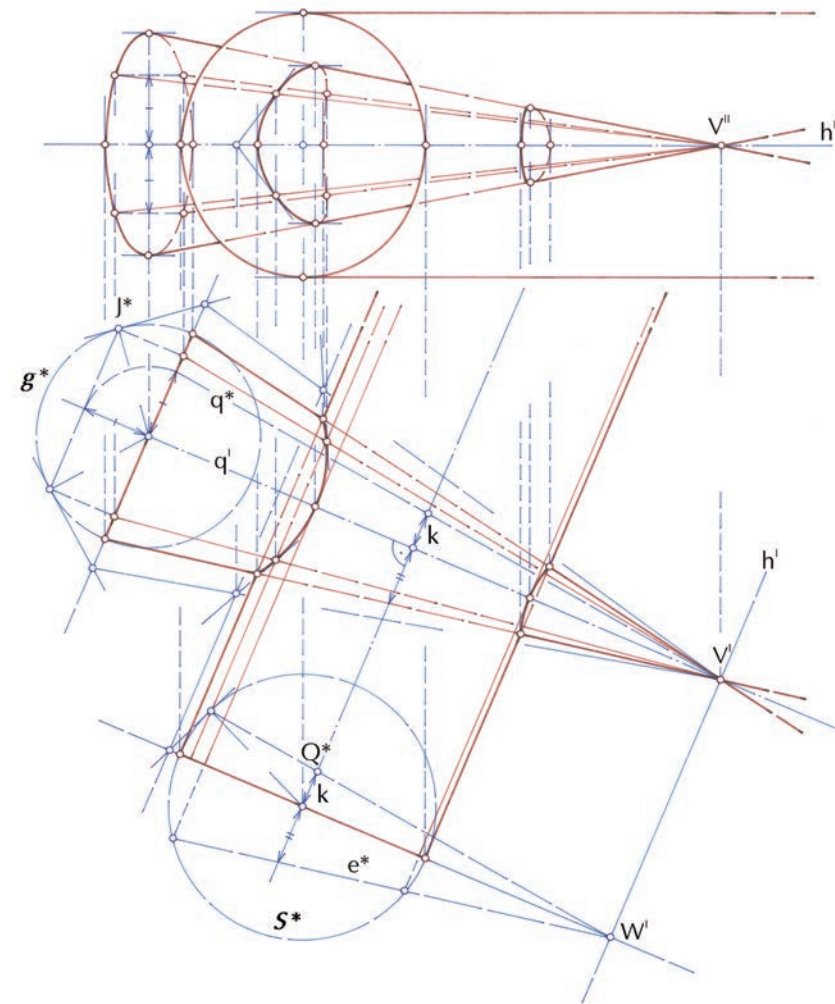
Riassumendo: si vogliono costruire le generatrici individuate, sul cilindro e sul cono, dal piano di sezione σ , che appartiene al fascio che ha sostegno nella retta h .

Sul ribaltamento s^* si assegna la retta e^* , ribaltamento della retta intersezione del piano di sezione con il piano della direttrice s : restano così individuate le due generatrici intersezione di σ con il cilindro.

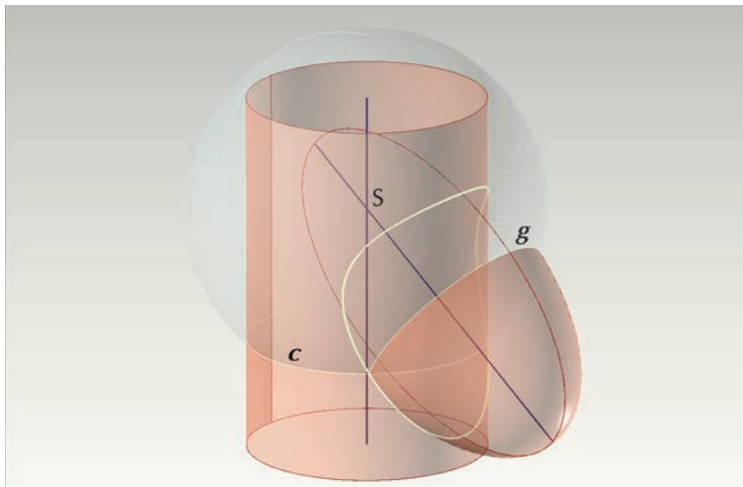
Si misura, nel segmento k , la quota del piano sulla verticale per l'asse del cilindro.

La medesima quota si riporta sopra l'asse del cono, individuando la retta q^* .

Si individua il punto J^* , ribaltamento del punto intersezione della retta q con il piano della direttrice del cono. Si riporta sul ribalta-



335. Curva intersezione di un cono con un cilindro costruita ribaltando le rispettive direttrici.



336. La curva intersezione di due superfici di rivoluzione, che abbiamo gli assi incidenti, si costruisce sezionandole con una schiera di sfere centrate nel punto comune agli assi. Queste sfere, infatti, tagliano entrambe le superfici secondo cerchi, facili da costruire.

mento di detta direttrice la quota di J , individuando la retta intersezione del piano secante prescelto con il piano della direttrice del cono, che risulta ancora parallela all'asse, dal momento che così è per il piano che ospita la direttrice: restano perciò individuate le due generatrici intersezione di σ con il cono (nel caso il piano della direttrice non fosse parallelo all'asse occorrerebbe, evidentemente, costruire il punto intersezione della retta h con il piano della direttrice).

Un caso particolare, ma di notevole interesse, giacché rappresenta un'ottima esemplificazione del teorema che abbiamo ricordato all'inizio del paragrafo, è quello dell'intersezione di un cilindro e di un cono, tali che entrambi siano circoscritti a una sfera: la curva intersezione è, allora, costituita da due ellissi.

Intersezione di due superfici di rivoluzione

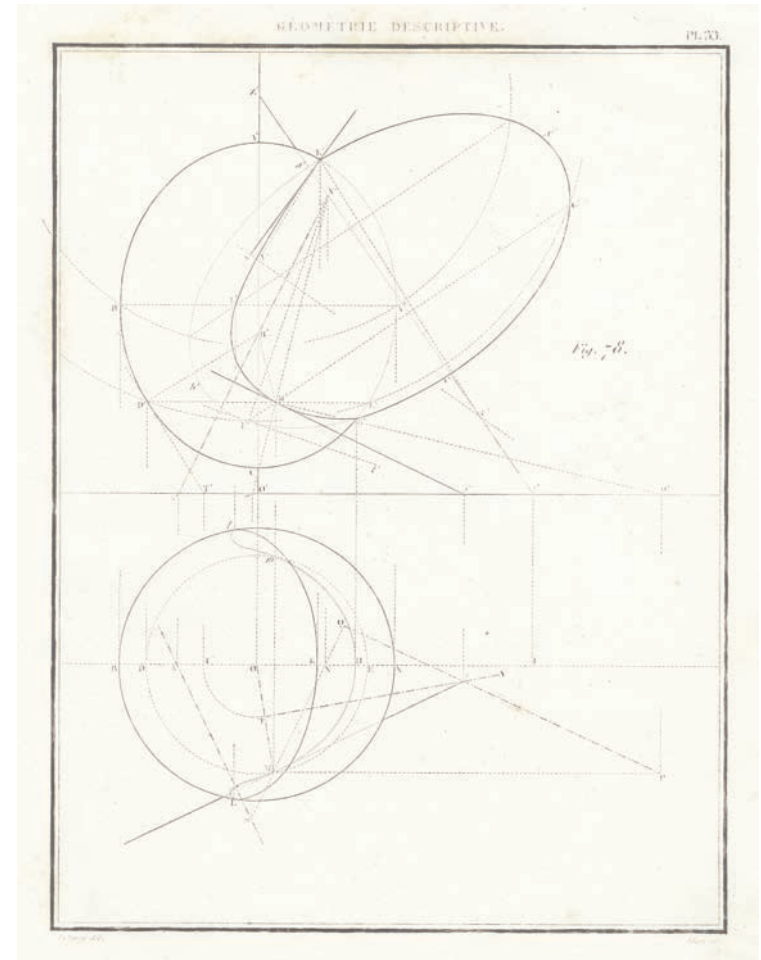
Per quanto riguarda l'intersezione di due superfici di rivoluzione possono verificarsi tre casi:

- le superfici hanno gli assi coincidenti;
- le superfici hanno gli assi distinti ma incidenti;
- le superfici hanno gli assi sghembi.

Se le due superfici sono coassiali esse si intersecano secondo circonferenze che giacciono in piani perpendicolari all'asse. Consideriamo, infatti, i punti comuni a due generatrici complanari, l'una appartenente alla prima superficie, l'altra alla seconda: è evidente che, nel moto di rivoluzione delle generatrici intorno al medesimo asse, questi punti descrivono circonferenze che, poiché appartengono a entrambe le superfici, sono le curve intersezione cercate. Il problema si risolve graficamente senza difficoltà, ponendo le superfici con l'asse parallelo a uno dei piani di proiezione e sezionandole con un piano pure parallelo, in modo da ottenere le generatrici in vera forma.

Se le superfici hanno gli assi incidenti, conviene sezionarle con una schiera di sfere aventi il centro comune nel punto S intersezione dei due assi (fig. 336). Ciascuna sfera taglia le due superfici secondo coppie di circonferenze c e g . Se, lavorando nel modello

della doppia proiezione, si dispongono gli assi paralleli a uno dei piani di proiezione, le circonferenze suddette, che giacciono in piani perpendicolari agli assi, si proiettano in segmenti, il che rende agevole e precisa la determinazione dei punti della curva intersezione. Se, infine, le superfici hanno gli assi sghembi, occorre scegliere di volta in volta la schiera dei piani ausiliari (o delle superfici ausiliarie) in modo ridurre le intersezioni relative ai casi elementari sopra esposti. Un esempio di intersezione siffatta è dato dal cilindro e dalla sfera descritti precedentemente.

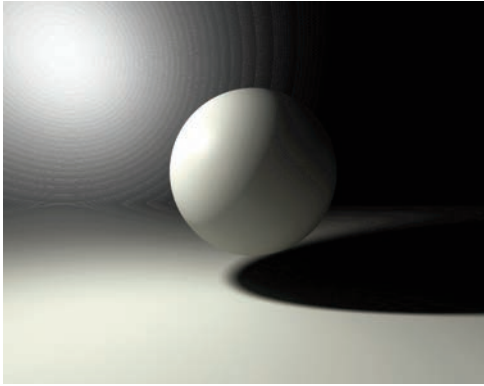


337. L'intersezione di due superfici di rivoluzione in una tavola di Leroy (1872).

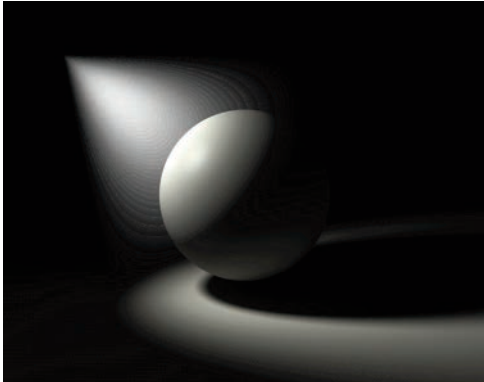
Parte Quarta
I modelli della luce



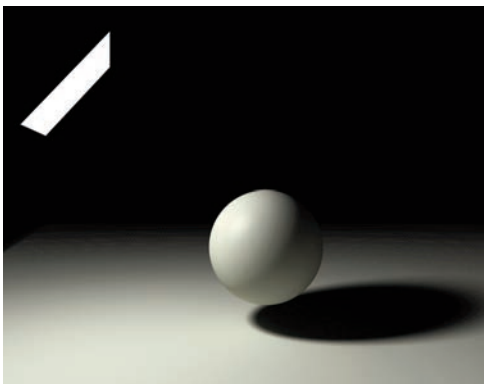
La propagazione della luce e i suoi modelli geometrici



338. Sorgente di luce a distanza finita, omnidirezionale.



339. Sorgente di luce a distanza finita, spot.



340. Sorgente di luce a distanza finita del tipo area (simula lo specchio di una finestra).

La luce è un fenomeno ondulatorio. In uno spazio limitato, come quello dell'architettura, ogni sequenza di onde luminose percorre una linea retta, che si usa chiamare *raggio di luce*. Il raggio di luce è una retta orientata. Ciò significa che non è individuata da un punto e dalla direzione, come qualsiasi retta, ma da un punto, dalla direzione e dal *verso*. Il verso, evidentemente, è quello del moto delle onde luminose che si allontanano dalla sorgente. I raggi di luce possono avere in comune un punto, nel qual caso divergono in tutte le direzioni, oppure possono avere in comune una direzione, nel qual caso sono paralleli.

Modelli di sorgente luminosa

Una stella di raggi di luce incidenti in un punto si presta a simulare la luce di una lampadina, mentre una stella di raggi di luce paralleli si presta a simulare la luce del Sole. Ogni altro modello di sorgente luminosa discende da questi due modelli fondamentali, che, in analogia ai centri di proiezione, si possono chiamare, rispettivamente, *modello centrale* e *modello parallelo*, o, anche *modello conico* e *modello cilindrico*.

Sono modelli di luce centrale:

- le *sorgenti omnidirezionali*, che simulano le comuni lampadine (fig. 338);
- le *sorgenti spot*, che simulano i fari che concentrano la luce in una zona circoscritta (fig. 339);
- le *sorgenti area* o *linea*, che simulano la luce di una finestra o di un tubo al neon, distribuendo su una superficie o su una linea un insieme di sorgenti centrali (fig. 340).

Sono modelli di luce parallela:

- le *sorgenti distanti* o *parallele* (fig. 341);
- le *sorgenti spot* parallele (fig. 342).

Nei modelli grafici, come in quelli informatici, le sorgenti centrali sono rappresentate da un punto dello spazio, mentre le sorgenti parallele si rappresentano per mezzo di una retta: un solo raggio di luce che descrive la direzione di tutti gli altri. Nella prospettiva, in particolare, il Sole, sorgente di luce parallela, è rappresentato come punto di fuga dei raggi luminosi.

Consideriamo ora una sorgente di luce centrale **S**: la luce si propaga da **S** in tutte le direzioni all'intorno e i suoi raggi costituiscono, quindi, una stella di centro **S**. La luce investe un corpo di forma sferica e raggio **CA**, posto a una distanza **n** da **S** (fig. 343). È possibile costruire, in un piano che passa per il centro **C** del corpo, i due raggi **SA** e **SB** che sono a esso tangenti. Questi raggi formano un angolo Φ il cui valore è espresso dalla relazione: $\text{Sen}\Phi/2 = CA/n = CB/n$.

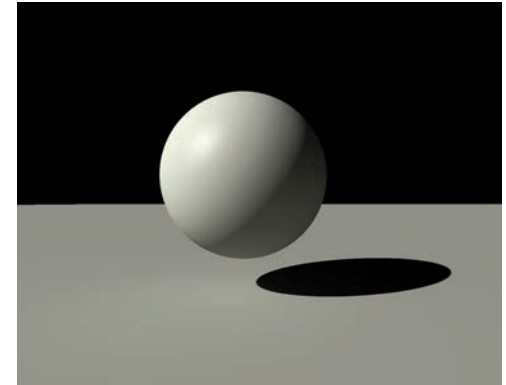
Con questa relazione è possibile calcolare la divergenza di due raggi di luce uscenti da un medesimo punto della superficie del Sole: il valore, anche se rapportato a due punti opposti della Terra, è trascurabile. Infatti: **AC**, raggio del geoide, è pari a $6,378 \times 10^3$ Km; **n**, distanza media della terra dal Sole, è pari a $149,6 \times 10^6$ Km; e, perciò, $\text{Sen}\Phi/2 = 0,000043$ e, conseguentemente, $\Phi/2 = 0,0024$ gradi sessadecimali.

È quindi lecito assumere i raggi del Sole come paralleli e a maggior ragione se **AC** assume le dimensioni dell'architettura, pochi metri contro i seimila chilometri del raggio della Terra.

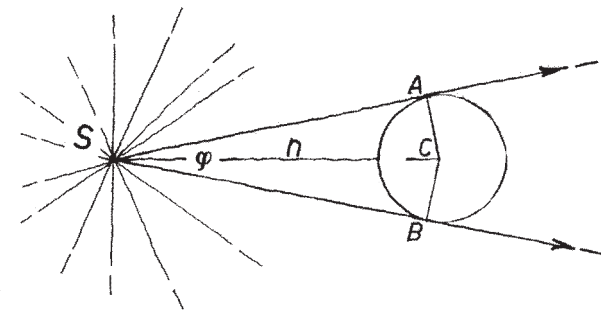
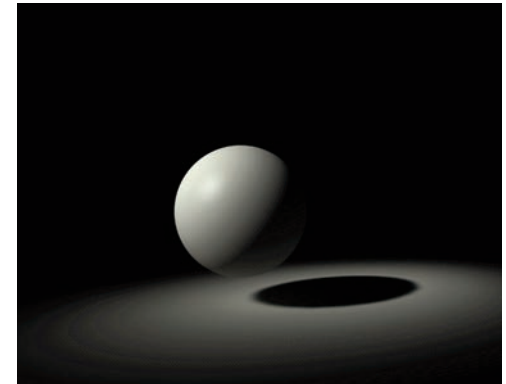
Questo modello, tuttavia, non riproduce esattamente il fenomeno, anzi, lo approssima grossolanamente. Infatti le dimensioni apparenti del Sole, nel cielo, non sono trascurabili e, di fatto, i raggi di luce non provengono da un solo punto ma dagli infiniti punti di un disco che appare ai nostri occhi sotto un angolo di circa trentadue primi. Conseguentemente, i raggi di luce che colpiscono un oggetto sulla Terra non hanno la medesima direzione, ma sono paralleli a direzioni comprese in un angolo solido la cui apertura è pari a mezzo grado sessagesimale. La conseguenza di questa divergenza dei raggi di luce è il fenomeno della *penombra*.

Immaginiamo un muro il cui spigolo superiore sia lambito dai raggi solari e un secondo muro, parallelo al primo e posto alla distan-

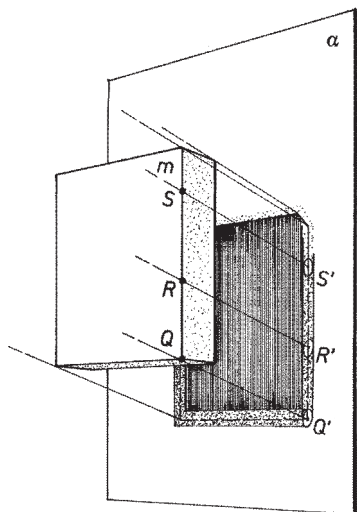
341. Sorgente di luce a distanza indeterminata, come il Sole.



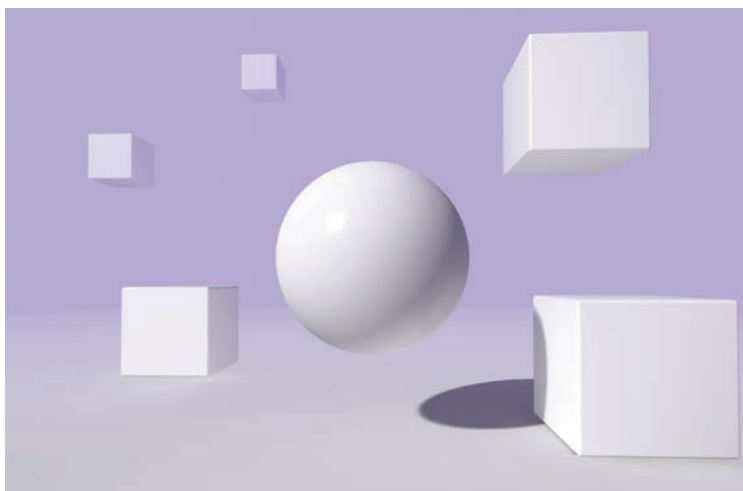
342. Sorgente di luce a raggi paralleli, del tipo spot.



343. Schema per il calcolo della divergenza dei raggi di luce solari.



344. Fenomeno della penombra, dovuto alla dimensione apparente del Sole.



345. Principali effetti studiati dalla teoria del chiaroscuro: ombre proprie e portate, intensità luminosa delle superfici, riflessi, punti brillanti e prospettiva aerea.

za di un metro (fig. 344). Evidentemente, il primo muro intercetta una parte della luce, producendo sul secondo una zona d'ombra. Ebbene, il passaggio dalla zona in ombra alla zona in luce non è immediato, come ci si potrebbe attendere, ma sfumato. Si può facilmente calcolare che la larghezza della zona che sfuma dalla luce all'ombra è pari a circa 9 mm, e aumenta in proporzione per ogni metro della distanza tra i due muri.

Assumere una direzione come modello della luce solare significa dunque trascurare la penombra. Nulla vieta, tuttavia, di ammorbidire il contorno delle ombre in modo intuitivo, aiutandosi con osservazioni del fenomeno nella realtà. I modellatori informatici consentono tanto applicazioni semplificate della penombra, quanto applicazioni calcolate.

Effetti della luce sui corpi

Gli effetti della luce sui corpi, che possono essere resi in un modello grafico o informatico, sono (fig. 345):

- le *ombre proprie*;
- le *ombre portate*;
- il *chiaroscuro*, cioè il variare dell'intensità luminosa di una superficie al variare dell'angolo di incidenza della luce;
- i *punti brillanti*, cioè le immagini riflesse della sorgente di luce;
- i *riflessi*, cioè gli effetti dovuti alla luce diffusa (e riflessa) dalle superfici illuminate;
- la *prospettiva aerea*, cioè le variazioni della chiarezza apparente delle superfici dovute alle masse d'aria interposte tra le stesse e l'osservatore.

OMBRA PROPRIA, PORTATA E AUTOPORTATA

Quando un corpo opaco è investito dalla luce, alcune sue parti risultano illuminate, altre non possono essere raggiunte dalla luce e si dice che sono in *ombra propria*. I raggi di luce che non sono stati intercettati dal corpo, investono altre superfici e le illuminano, ma quelli intercettati non possono, evidentemente, procedere oltre. Si crea così una lacuna nel flusso luminoso che produce una zona d'ombra sulle superfici che incontra. Questa zona si dice

nell'*ombra portata* dal corpo. Quando un corpo è particolarmente articolato e complesso, come in genere l'architettura, accade che parti di esso, come ad esempio gli elementi aggettanti, portino ombra sulle superfici del corpo stesso: queste particolari ombre si dicono *autoportate*. Le ombre autoportate sono particolarmente importanti perché consentono una chiara percezione dei risalti e delle concavità, in altre parole esaltano la plasticità dell'oggetto (fig. 346).

CHIAROSCURO E GRADO DI INTENSITÀ LUMINOSA

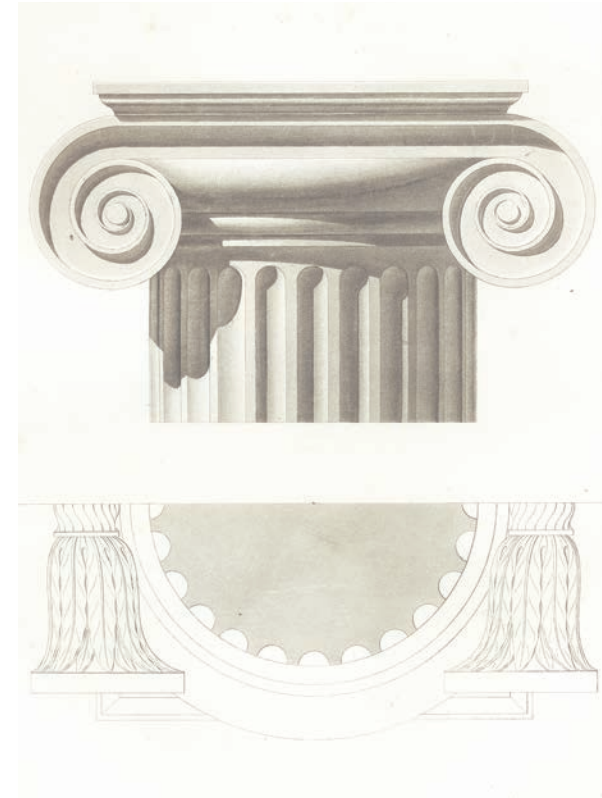
Con il termine *chiaroscuro* si indica, in generale, la resa del complesso dei fenomeni che stiamo studiando. Tuttavia, il termine indica anche, in particolare, la resa grafica della varia distribuzione della luce sui corpi.

La luce, infatti, non illumina le superfici in modo uniforme, ma con una intensità che è tanto maggiore quanto più piccolo è l'angolo che i raggi di luce formano con la perpendicolare alla superficie, nel punto di volta in volta considerato. In un piano, l'illuminazione è uniforme in ogni punto, ma due piani che formano con i raggi di luce angoli diversi, hanno diversa illuminazione. Nelle superfici curve, poi, l'illuminazione varia con continuità da punto a punto.

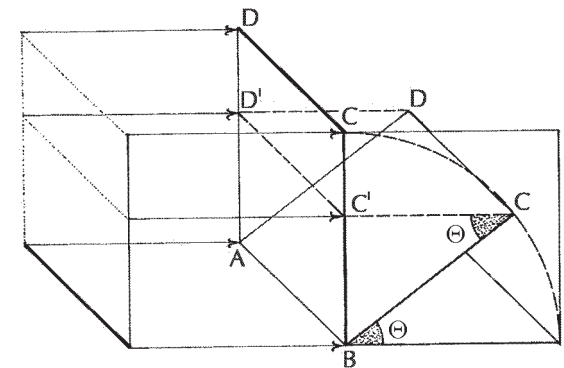
Si dice *grado di intensità luminosa* di una superficie nel punto **P** considerato il valore del coseno dell'angolo Φ che i raggi di luce formano con la normale alla superficie nel punto **P**: $i = \text{Cos}\Phi$.

Questa legge, dovuta a Lambert, può essere facilmente dimostrata per via geometrica, oltre che per via sperimentale (TESSARI 1880).

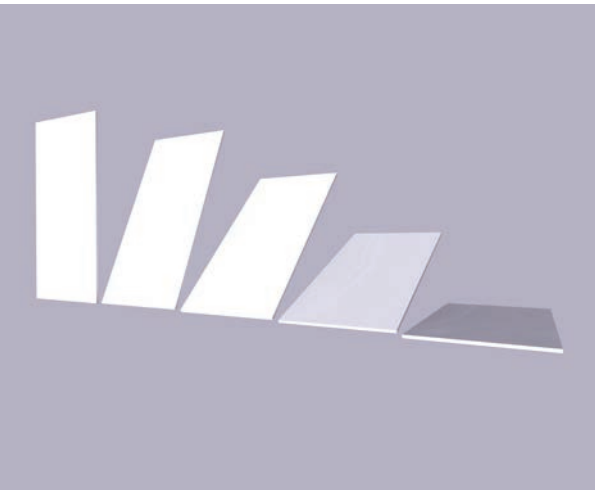
Consideriamo il rettangolo **ABCD** e immaginiamo che la sua superficie sia opaca e investita da un fascio di raggi luminosi paralleli e perpendicolari alla superficie stessa (fig. 347). L'energia che colpisce la superficie è palesemente proporzionale alla sua estensione, cioè al rettangolo **ABCD**. Ruotiamo ora il rettangolo intorno al lato **AB** e sia Θ l'angolo che i raggi luminosi formano con il piano, dopo la rotazione. Il flusso di raggi luminosi che colpiscono ora la superficie ha una sezione normale **ABC'D'** di area più piccola, rispetto a quella del flusso originale. Quindi, sulla superficie del rettangolo **ABCD**, che non è mutata per estensione, si distribuisce



346. Le ombre autoportate, come quella che la voluta porta sul sommoscapo del fusto scanalato, sono le più importanti, perché permettono di apprezzare i volumi e i loro aggetti.



347. Dimostrazione geometrica della legge di Lambert.



348. Variazione del grado di intensità luminosa di una superficie con il variare dell'angolo di incidenza della luce.

ora una minor quantità di energia luminosa, e perciò l'illuminazione del piano è meno intensa.

In particolare, dal momento che AB è costante nelle due aree ($ABCD$, $ABC'D'$), l'intensità di illuminazione dipende dalla lunghezza dei segmenti BC , per la giacitura normale del piano e BC' per la giacitura obliqua.

Ora, $BC' = BC \text{ Sen}\Theta$, mentre l'angolo che la normale al piano forma con i raggi di luce è $\Phi = \Pi/2 - \Theta$.

Se dunque poniamo uguale a uno il grado massimo di intensità luminosa i del piano in posizione normale ai raggi di luce, sarà $i_0 = \text{Cos}\Theta$ il grado di intensità i_0 del piano nella posizione obliqua.

Per rendere la variazione della luce sulle superfici, nei modelli grafici, come in quelli informatici, si usa attribuire alla superficie considerata un tono di colore tanto più chiaro quanto più elevato e vicino all'unità è il valore i , che, vedremo, è facile misurare. Nei modelli informatici, in particolare, il calcolo e la resa del grado di intensità di illuminazione delle superfici è affidato agli algoritmi di Gouraud e di Phong (fig. 348), mentre se si vogliono anche altre simulazioni, come i riflessi, si deve ricorrere ad altri algoritmi.

Nei modelli grafici, invece, si colorano le superfici con toni di colore (in genere acquerello monocromatico) il più possibile simili a quelli di una scala precostituita, che è detta *scala delle tinte*.

Nelle superfici curve e continue, come si è detto, il grado di intensità luminosa varia con continuità da punto a punto. I punti di eguale grado di intensità luminosa costituiscono un luogo geometrico, che è detto *linea isofota* o *linea di uguale illuminazione*.

Il luogo geometrico dei punti con grado di illuminazione zero, oppure l'*isofota zero*, è il confine tra la parte in luce e la parte in ombra propria di un corpo, o, come si dice, il *contorno d'ombra propria* del corpo.

Il punto o i punti che presentano il massimo grado di intensità luminosa, non necessariamente uguale all'unità, è il punto o la zona di *massima intensità luminosa*.

È chiaro che la conoscenza delle isofote è di grande utilità e che è per mezzo di tale conoscenza che si riesce a riprodurre, con esattezza, quell'effetto di sfumatura che è tipico delle superfici curve.

INTENSITÀ LUMINOSA E CHIAREZZA APPARENTE

L'intensità luminosa di una superficie è un dato oggettivo, per così dire, proprio della relazione tra quella superficie e la luce del Sole. Ciò che noi vediamo è, invece, la *chiarezza apparente* della superficie e cioè quella parte dell'energia luminosa che la superficie stessa rinvia nel nostro occhio, dopo averla in vario modo modificata.

Ad esempio, una certa serie di muri paralleli, se osservati da una distanza finita, hanno lo stesso grado d'intensità luminosa ma chiarezze apparenti diverse (fig. 349). La chiarezza apparente di un punto di una superficie è infatti "direttamente proporzionale al coseno dell'angolo che la normale alla superficie in questo punto forma col raggio visuale e inversamente proporzionale al quadrato della distanza di quello stesso punto dall'occhio" (FANO 1914).

Nei modelli grafici, si può tenere conto, geometricamente, di tale aspetto del problema, o anche trascurarlo, poiché le differenze sono minime. Nei modelli informatici, se si vuole tener conto della chiarezza apparente delle superfici, occorre utilizzare algoritmi adatti, come il *ray tracing*.

Nei modelli ottenuti per proiezione parallela, l'angolo che la normale alla superficie forma con il raggio visuale è costante e, perciò, non si tiene conto delle modificazioni indotte dalla chiarezza apparente.

PUNTI BRILLANTI E RIFLESSI

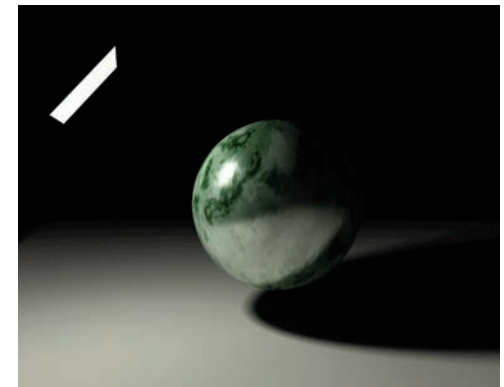
Se il corpo investito dalla luce ha una superficie sufficientemente liscia, una parte della luce viene riflessa, la parte rimanente viene diffusa. Un corpo perfettamente levigato riflette una gran parte della luce. Se alcuni raggi della luce riflessa raggiungono l'occhio di un osservatore, questi vede, sulla superficie, l'immagine della sorgente di luce, come in uno specchio. Nella maggior parte dei casi questa immagine viene percepita come un *punto brillante*, come accade, ad esempio, in una sfera di marmo lucido (fig. 350). In altri casi, se la superficie è speculare, l'osservatore distingue la forma della sorgente luminosa (ad esempio una finestra, dalla quale entra la luce del cielo).

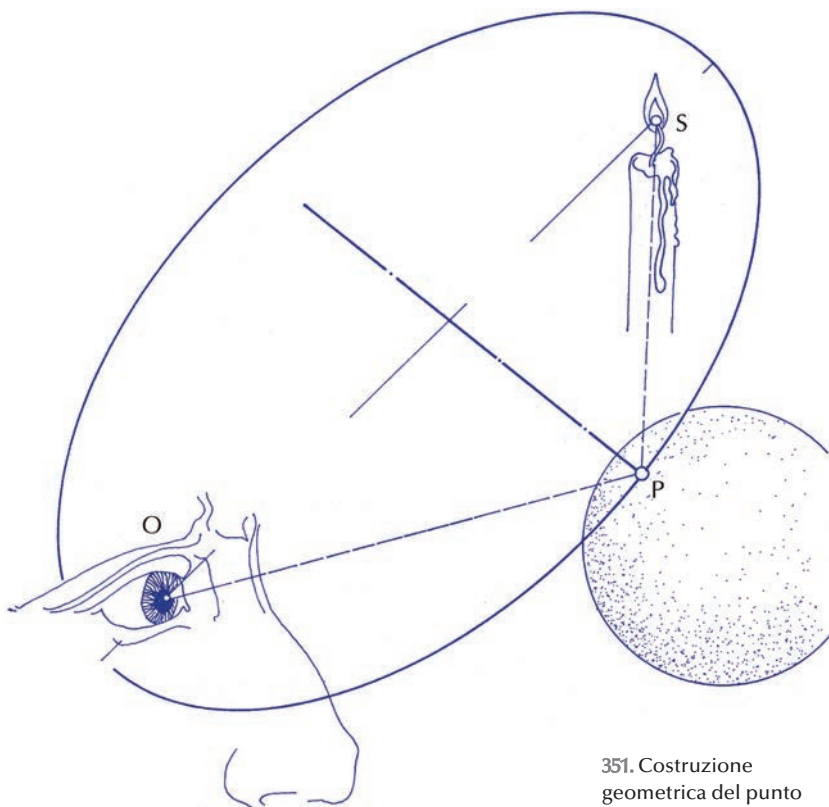
I punti brillanti possono essere costruiti sia nei modelli grafici che

349. Variazione della chiarezza apparente di una superficie con il variare dell'angolo di incidenza dei raggi riflessi nell'occhio dell'osservatore. I piani, paralleli e illuminati dal Sole, hanno il medesimo grado di intensità luminosa; i più lontani, tuttavia, hanno maggiore chiarezza apparente perché sono osservati con uno scorcio minore.



350. Il punto brillante è una immagine della sorgente luminosa che le superfici lucide riflettono nell'occhio di chi osserva.





351. Costruzione geometrica del punto brillante nel caso di una sorgente a distanza finita.

nei modelli informatici, in questi ultimi usando il già citato algoritmo di *ray tracing*.

La costruzione grafica del punto brillante viene discussa da Fano (FANO 1914, p. 182; fig. 351). Se **S** è la sorgente di luce, centrale, **P** il punto brillante e **O** l'osservatore, è possibile costruire l'ellisse che ha **S** e **O** come fuochi e passa per **P**. La bisettrice dell'angolo **OPS** è, com'è noto, la normale all'ellisse nel punto **P**. Perciò, se desideriamo costruire il punto brillante di una superficie qualsiasi σ , illuminata da una sorgente **S**, accessibile, rispetto a un osservatore **O**, potremo generare l'ellissoide che ha **O** e **S** come fuochi ed è tangente alla superficie. Il punto **P** di tangenza dell'ellissoide alla superficie data sarà il punto brillante, poiché l'angolo formato dalla retta **SP** con la normale alla superficie **S** in **P** (angolo di incidenza della luce) sarà uguale all'angolo formato dalla medesima normale con la retta **PO** (angolo di rifrazione). Dunque **O** vedrà riflettersi la sorgente **S** nel punto **P**. Nel caso la sorgente sia parallela, basta sostituire all'ellissoide il paraboloide, per ottenere il risultato voluto.

È possibile, anzi frequente, che una parte della luce diffusa o riflessa da un corpo illuminato investa le zone in ombra propria o portata di altri corpi. In questi casi le ombre risultano notevolmente schiarite. Il fenomeno è quello dei riflessi. Un tipico esempio di luce riflessa è quello di una sfera prossima a un piano (fig. 345): la zona in ombra propria della superficie più vicina al piano sul quale la sfera è poggiata risulta investita dalla luce riflessa.

Il disegno accademico studia e simula il fenomeno, soprattutto con osservazioni empiriche. Nei modelli informatici, per ottenere una resa accurata dei riflessi, occorre impiegare un algoritmo speciale, che è detto *radiosity*.

PROSPETTIVA AEREA

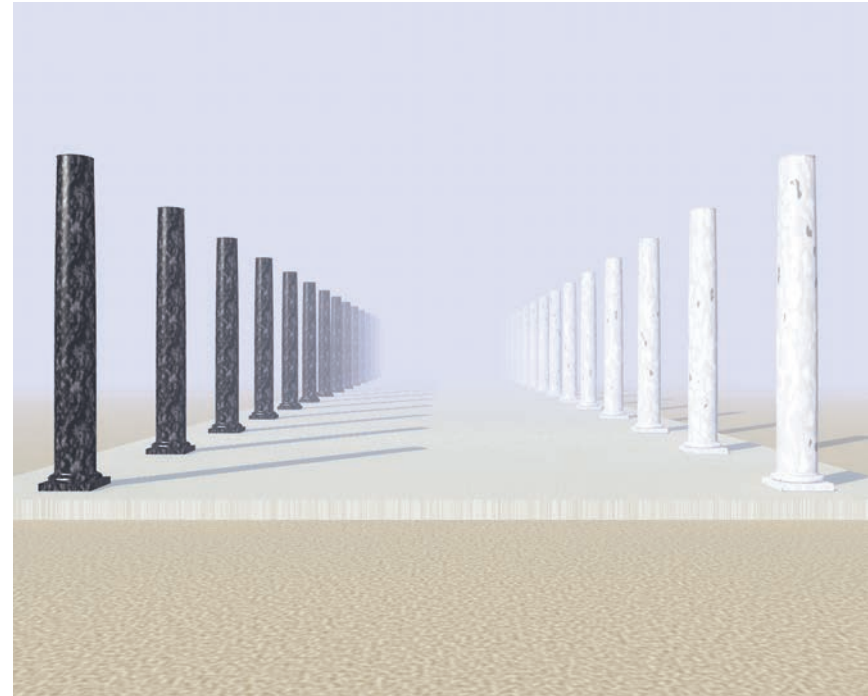
Da ultimo occorre tener conto della prospettiva aerea, cioè dell'effetto di dissolvenza dovuto alle masse d'aria interposte tra l'oggetto e l'osservatore. È celebre, in proposito, l'osservazione di Leonardo: i corpi più chiari dell'aria, appaiono più scuri, di mano in mano che si allontanano dall'osservatore e viceversa. Ad esempio, in una fitta nebbia, di colore grigio, un corpo nero tende a schiarirsi man mano che, allontanandosi dall'osservatore, si im-

merge nella nebbia, un corpo bianco, tende a diventare anch'esso grigio, come la nebbia, cioè diventa più scuro con la distanza (fig. 352).

Questo effetto viene trattato in modo intuitivo nel disegno accademico e può essere reso empiricamente, cioè per tentativi, nella modellazione informatica per mezzo di un algoritmo detto *fog*. Ma l'effetto più importante delle masse d'aria è la diffusione della luce: ne è conseguenza la luminosità diffusa del cielo. Una trattazione geometrica di questo fenomeno è stata tentata da Giuseppe Peri (PERI 1859), ma i suoi risultati non sono mai stati applicati, perché l'intuito e l'osservazione del vero permettono di soddisfare le esigenze della rappresentazione assai più rapidamente. I modellatori permettono di graduare, per tentativi, l'importanza di questa componente luminosa con il parametro relativo alla luce ambiente o diffusa, che ne descrive, appunto, l'intensità.

Le osservazioni di Peri, tuttavia, tornano utili quando si voglia simulare il fenomeno con cura, proprio con l'aiuto delle tecniche informatiche di *rendering*. Infatti, Peri immagina l'atmosfera formata da innumerevoli minutissime sfere lucide, ciascuna dotata di un punto brillante e definisce la luminosità ambientale come l'insieme della radiazione luminosa di questi punti. Per controllare l'effetto di questa luce Peri sostituisce agli infiniti punti brillanti delle particelle d'aria una sorgente di luce a raggi paralleli, che chiama *raggio atmosferico principale*. Anticipando i tempi, Peri si serve, perciò, di una tecnica assai nota ai fotografi professionisti che, per schiarire le ombre e ammorbidire i contorni del soggetto, lo illuminano, oltre che con luci dirette, anche con schermi luminosi.

Per rendere la prospettiva aerea nell'ambiente informatico bisogna distinguere gli effetti dovuti alla massa d'aria da quelli dovuti alla luminosità del cielo o dell'ambiente. I primi vengono resi per mezzo di algoritmi che simulano la nebbia (*fog*), sia nel piano dell'immagine che all'interno di volumi che possono contenere gli oggetti rappresentati. La luminosità dell'ambiente o del cielo è trattata con varie tecniche, come quella detta HDRI (*High Dynamic Range Imaging*) capace di simulare anche luci non uniformemente diffuse, come avviene nella realtà.



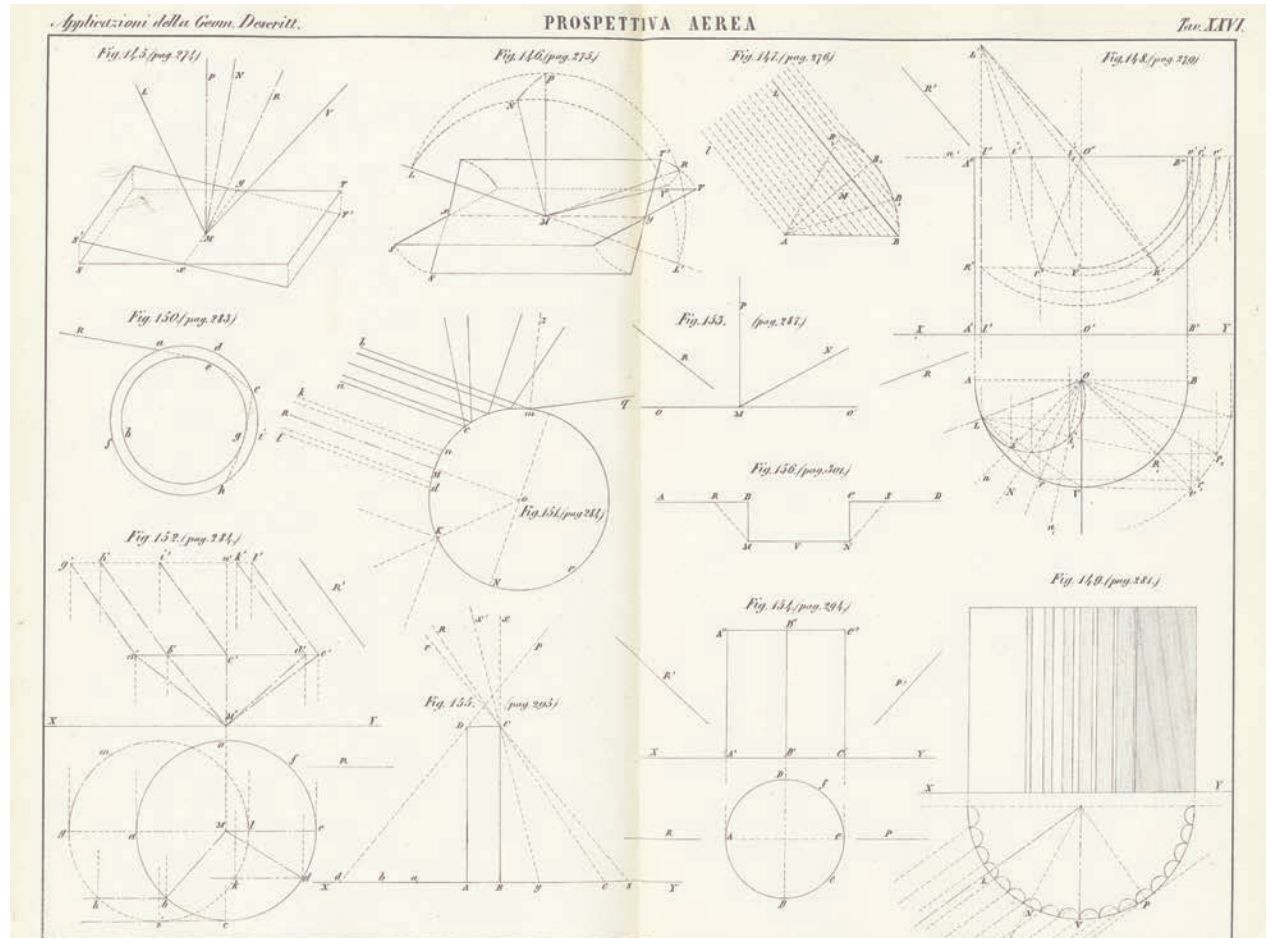
352. Legge leonardesca della prospettiva aerea: i corpi più scuri dell'aria diventano più chiari con la lontananza dall'osservatore; i corpi più chiari diventano, al contrario, più scuri. Entrambi finiscono con il confondersi nel colore dell'aria.



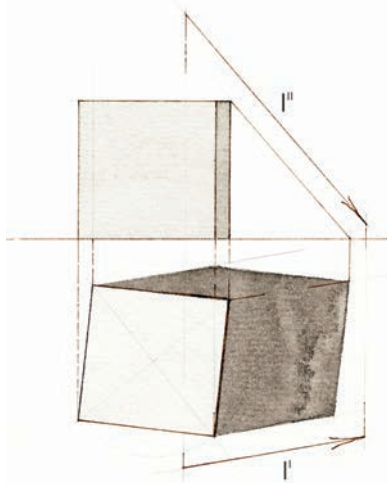
353. La resa della prospettiva area e della luce ambientale in una acquerello di scuola ottocentesca.

Nei modellatori capaci di *rendering* sofisticati è possibile costruire aree luminose e affidare a queste ultime il compito di simulare la luminosità del cielo quando l'applicazione di una luminosità ambientale omogenea non paia soddisfacente. È bene, allora, considerare i valori suggeriti da Peri, per sintetizzare i risultati della sua ricerca (fig. 354).

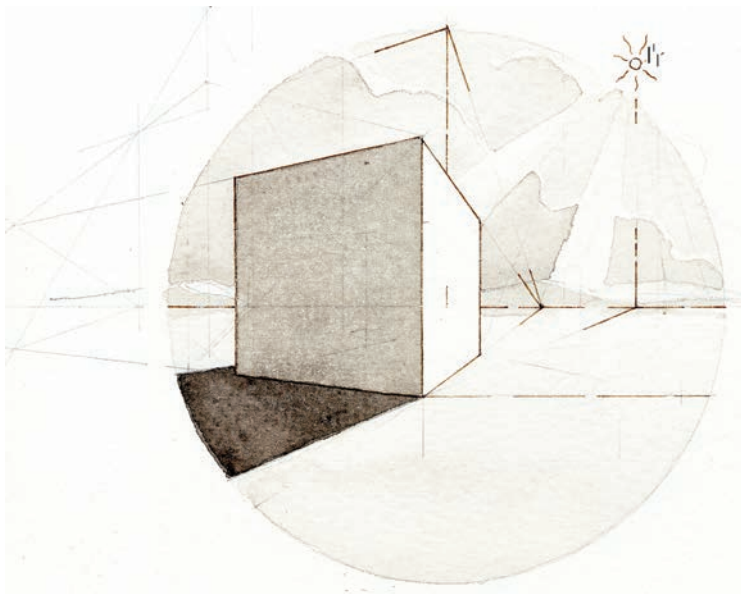
Se il Sole è basso sull'orizzonte, il raggio atmosferico principale appartiene al medesimo piano, ma proviene dalla parte opposta con un'inclinazione (altezza) di circa venti gradi. Volendo simulare la luminosità del cielo, perciò, bisognerà costruire un piano, perpendicolare al raggio atmosferico principale e perciò inclinato sull'orizzonte per 70 gradi. Se il Sole ha un'altezza di 45 gradi, il raggio atmosferico principale è simmetrico. Se l'altezza del Sole è prossima ai 90 gradi, come avviene ai Tropici, il raggio atmosferico principale ha un'altezza di circa 60 gradi.



354. Tavola del Peri che descrive il modello geometrico della prospettiva aerea e la costruzione del raggio atmosferico principale.



355. Nelle proiezioni ortogonali il Sole si rappresenta per mezzo di un raggio di luce.



356. Nella prospettiva, invece, il Sole si rappresenta come punto di fuga dei raggi di luce.

La costruzione delle ombre nei modelli grafici

Se la sorgente di luce è il Sole, come sempre avviene nel disegno di architettura, i relativi raggi si considerano paralleli e, perciò, basta rappresentarne uno solo per descrivere la sorgente di luce. In particolare, nei modelli ottenuti per proiezione parallela, questa retta sarà rappresentata da due sue distinte proiezioni I' e I'' (fig. 355), mentre nei modelli prospettici, ottenuti, perciò, per proiezione centrale, sarà sufficiente costruire il punto di fuga I₁ comune alla stella dei raggi luminosi (fig. 356). Questa rappresentazione è particolarmente efficace, poiché simula l'aspetto del Sole nel cielo diurno, che tutti conosciamo, e che diventa ancora più esplicito quando i suoi raggi filtrano dalle nuvole.

Le spezzate separatrici d'ombra

Consideriamo un poliedro convesso, ad esempio un prisma parallelepipedo. Le facce illuminate e le facce in ombra propria sono separate dagli spigoli del prisma. Gli spigoli che svolgono questo ruolo sono contigui e costituiscono una spezzata sghemba, chiusa, che si dice *spezzata separatrice d'ombra propria* (fig. 357).

I raggi di luce lambiscono i lati della spezzata separatrice d'ombra propria generando altrettanti piani, ciascuno costituito dagli infiniti raggi di luce che si appoggiano al lato. I piani così generati e, in generale, i piani individuati da una retta e da uno dei raggi di luce incidenti, si dicono *piani di luce*.

L'ombra portata è contornata dalle intersezioni dei piani di luce con le superfici sulle quali l'ombra si distende. Questa linea di contorno si dice *spezzata separatrice d'ombra portata*. La costruzione dell'ombra portata si riduce perciò, alla determinazione delle intersezioni dei piani di luce che lambiscono il prisma con il piano o i piani sui quali cade l'ombra.

Esistono vari algoritmi che permettono la determinazione accura-

ta del contorno dell'ombra propria, sia nel caso dei poliedri, che nel caso delle superfici curve.

Ci limiteremo a considerare il caso di un solido parallelepipedo.

Se questo è rappresentato in un modello grafico, basta ricostruire nello spazio, uno alla volta, i piani proiettanti paralleli alle facce del solido e, contestualmente, il raggio di luce che passa per il centro di proiezione: risulterà evidente quale faccia del piano è investita dalla luce, la faccia opposta è in ombra propria.

Costruzione dell'ombra di una retta

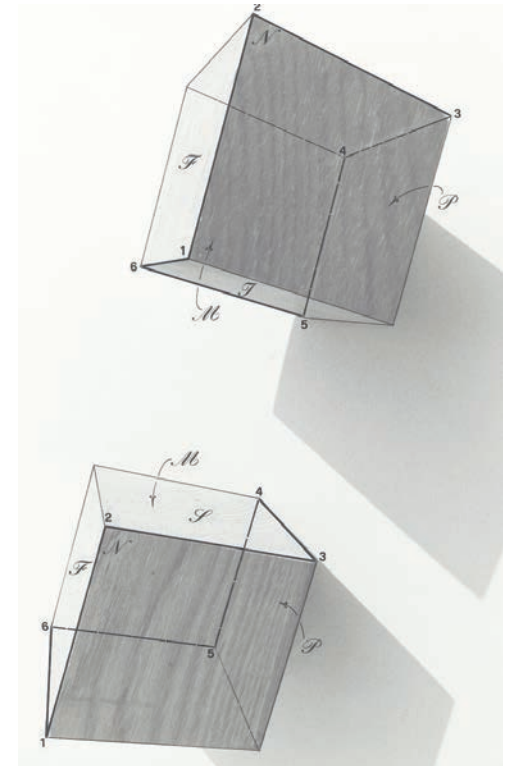
Data una retta e una stella di raggi di luce paralleli, resta individuato il piano di luce formato dai raggi che appartengono alla retta. L'ombra della retta è l'intersezione del piano di luce con il piano che la riceve. Ora, come sappiamo, la retta intersezione di due piani si costruisce individuando due punti distinti che le appartengono e si considerano, in genere, i punti in cui due rette che appartengono al primo piano, intersecano il secondo.

La costruzione dell'ombra di una retta non sfugge a questa regola e si ottiene, appunto, considerando i punti in cui due rette del piano di luce intersecano il piano che riceve l'ombra.

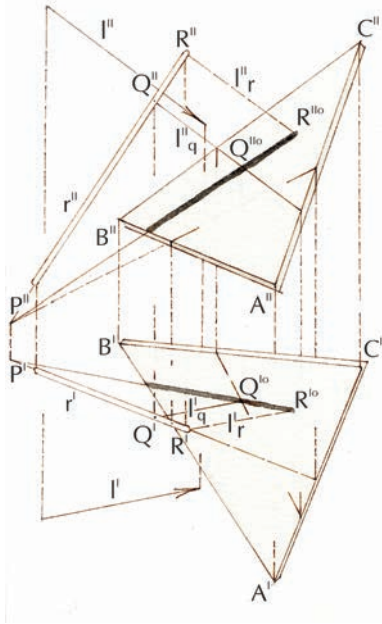
La prima di queste rette è proprio la retta che porta ombra e si considera il punto **P** in cui incontra il piano sul quale l'ombra stessa si distende. Infatti l'ombra nasce sempre in questo punto, sia esso reale, come nel caso di un bastone infisso nel suolo, sia esso meramente geometrico, come nel caso di un bastone sospeso: in questo caso il punto origine dell'ombra si trova prolungando idealmente la retta e il piano considerati.

La seconda retta è un qualsiasi raggio di luce, incidente la retta che porta l'ombra, e si considera il punto in cui incontra il piano sul quale l'ombra si distende. Questo punto, evidentemente, è l'ombra del punto comune al raggio di luce e alla retta che porta ombra.

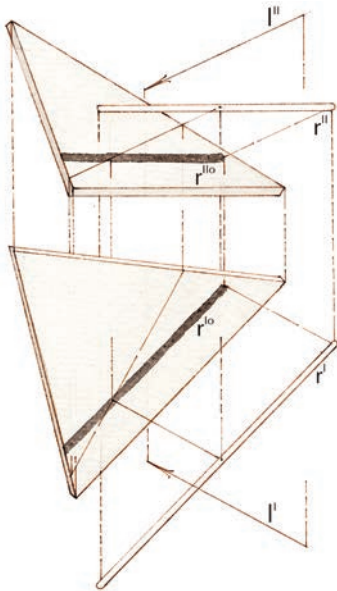
I due punti come sopra costruiti individuano l'ombra, cioè, come abbiamo detto, la retta intersezione del piano di luce con il piano che riceve l'ombra stessa.



357. La spezzata separatrice d'ombra propria è la linea che separa le parti illuminate di un corpo da quelle in ombra.



358. Nelle proiezioni ortogonali, l'ombra di una retta su un piano si costruisce trovandone due punti: il punto nel quale la retta incontra il piano e un qualsiasi altro punto della retta come, nell'esempio, l'estremità del segmento considerato.



359. Se una retta è parallela al piano sul quale porta ombra, anche l'ombra ha la medesima direzione.

COSTRUZIONE DELL'OMBRA PORTATA IN PROIEZIONE PARALLELA

Sono dati (fig. 358): un raggio di luce I (I' , I'') con il suo verso (dall'alto in basso) una retta r (r' , r''), e un piano ABC , per mezzo delle proiezioni di tre punti, non allineati, che gli appartengono ($A'B'C'$, $A''B''C''$).

Si costruisce, innanzi tutto il punto P intersezione della retta r con il piano ABC : è questo il primo punto dell'ombra. Se è necessario, tanto la retta, quanto il piano, devono essere considerati indefinitamente estesi.

Si costruisce poi il raggio di luce I_Q , che passa per un qualsiasi punto Q della retta r . Le proiezioni di questo raggio di luce (I'_Q , I''_Q) appartengono alle omonime proiezioni del punto Q e sono parallele alle omonime proiezioni del raggio di luce assegnato.

Si trova, infine, il punto R^o , intersezione del raggio I_R che passa per l'estremità della retta con il piano dato.

L'ombra r^o della retta r , è la retta che appartiene ai due punti che abbiamo costruito, P e R^o .

Questo il procedimento in generale. Volendo abbreviare la costruzione si può considerare direttamente il punto R in luogo del punto Q .

CASI PARTICOLARI DELL'OMBRA PORTATA IN PROIEZIONE PARALLELA

Consideriamo ora alcuni casi particolari.

Se la retta r è parallela al piano che riceve l'ombra (fig. 359), il primo punto dell'ombra, P^o , è la direzione della retta stessa, perciò l'ombra r^o , che deve passare per questa direzione, è parallela alla retta r data. Per costruire l'ombra, allora, sarà sufficiente trovare l'intersezione, con il piano, di un qualsiasi raggio di luce che appartenga a uno dei punti della retta.

Se la retta r è parallela al raggio di luce assegnato, l'ombra si riduce al punto P^o , nel quale si confondono le ombre di tutti i punti della retta.

Infine, se il raggio di luce assegnato è parallelo al piano che riceve l'ombra, allora il secondo punto dell'ombra, Q^o , è la direzione del raggio di luce, e perciò l'ombra è parallela ai raggi di luce e indefinitamente estesa. Questa condizione, tuttavia, è puramente teorica, poiché nella realtà il piano si trova in una condizione di illumi-

nazione che è di passaggio tra luce e ombra e che si dice di *luce radente*. In questo caso il grado di intensità luminosa del piano è nullo e, conseguentemente, è anche nullo, o neutro, il tono di grigio che dovrebbe essere assegnato tanto al piano quanto all'ombra portata su di esso dai corpi circostanti.

COSTRUZIONE DELL'OMBRA DI UN SOLIDO IN PROIEZIONE PARALLELA

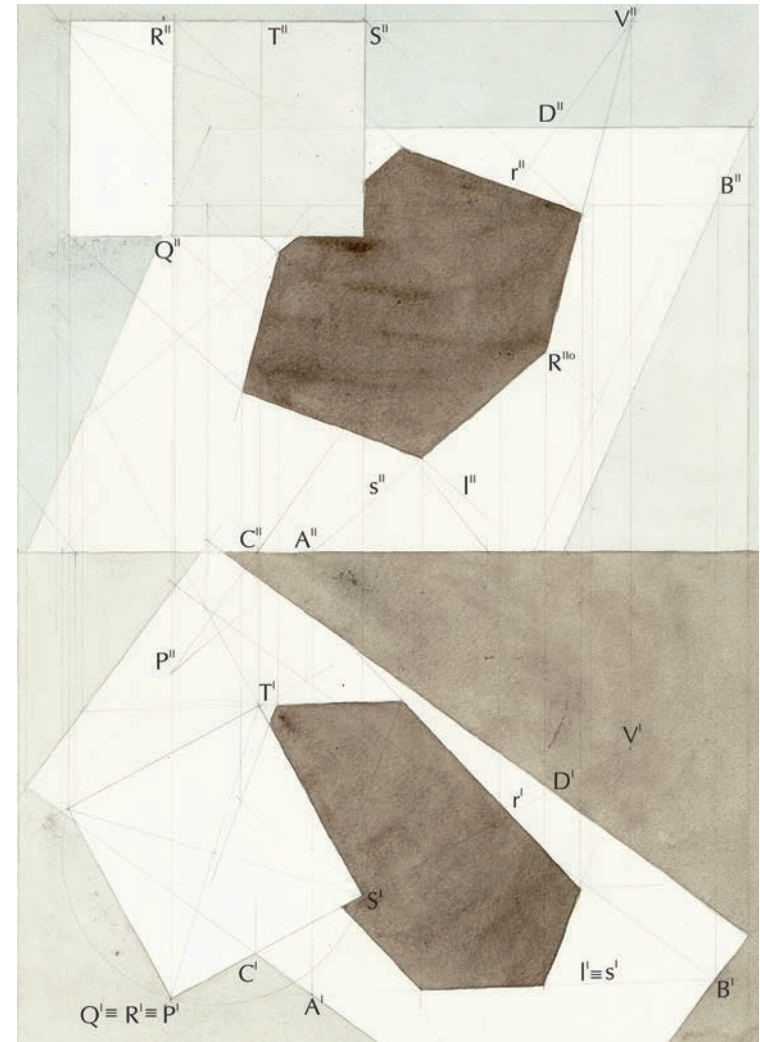
È ora possibile costruire l'ombra propria e portata di uno o più solidi su uno o più piani.

Conviene, innanzi tutto, identificare le spezzate separatrici d'ombra propria. Ciò fatto il problema si riduce a costruire l'ombra dei lati della spezzata sui piani che la ricevono. Si riduce, quindi, alla reiterata applicazione del procedimento che abbiamo sopra illustrato.

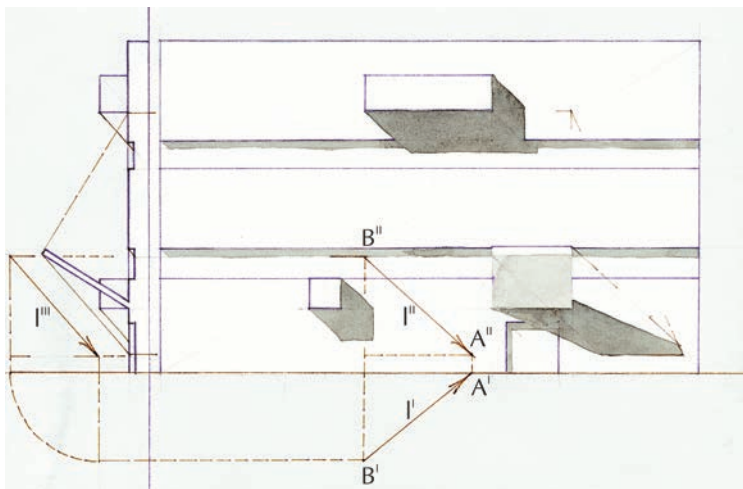
Ad esempio un cubo (fig. 360) porta la propria ombra su un piano inclinato e la sorgente di luce è rappresentata dal raggio l , che appartiene al vertice Q . Perciò, la faccia verticale del cubo, visibile a sinistra di chi osserva, è in luce e così la faccia verticale contigua, che non è visibile, e, ovviamente, la faccia orizzontale superiore. Le altre facce del cubo, opposte a quelle che abbiamo indicato, sono in ombra propria.

Consideriamo un primo tratto della spezzata separatrice di ombra propria, quello individuato dai vertici Q , R , S e T e ricerchiamo, per cominciare, l'ombra della retta QR . A questo scopo consideriamo il piano di luce che passa per la retta, anch'esso verticale e perciò proiettante in prima. Questo piano taglia il piano dato secondo una retta s che ha in comune due punti con i lati del piano medesimo: A e B . il punto P in cui la retta $s = AB$ incontra la QR è il punto in cui l'ombra ha origine. Le ombre dei punti Q e R si trovano costruendo i relativi raggi di luce.

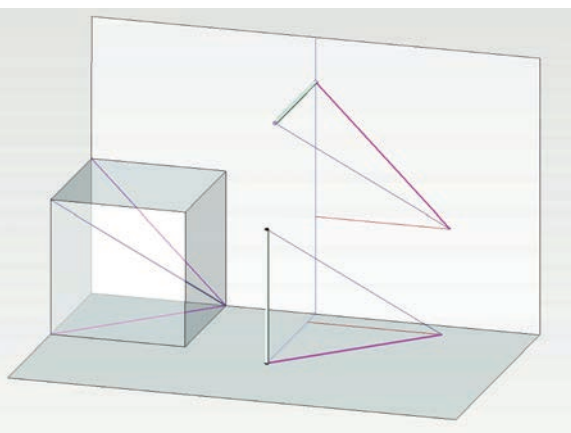
Consideriamo ora lo spigolo RS e, per cominciare, ricerchiamo il punto V in cui detto spigolo, prolungato idealmente, incontra il piano su cui cade l'ombra. Per costruire questo punto basta tagliare il piano dato con il piano, proiettante in prima, che passa per RS , il quale è una delle facce del solido. Questo piano ha in comune con il piano dato una retta r che ne incontra due lati nei punti



360. L'ombra portata di un solido si costruisce trovando l'ombra dei lati della spezzata separatrice d'ombra propria.



361. Quando si disegnano le ombre su un prospetto, conviene usare una sezione anche schematica (come quella a sinistra) per trovare rapidamente i punti intersezione dei raggi di luce con le superfici della facciata.



362. Nei prospetti si fa uso, frequentemente, delle cosiddette ombre a quarantacinque gradi, che si ottengono adottando, come direzione della luce, quella illustrata in questo modello.

C e D. V è il punto comune a RS e CD . Il tratto successivo dell'ombra è, perciò, $R^{\circ}V$. L'ombra di S si costruisce con l'ausilio del solito raggio di luce. L'ombra del terzo vertice T è stata costruita reiterando il procedimento già indicato per Q . Infine, le ombre dei tre spigoli rimanenti si costruiscono tenendo conto del parallelismo con i corrispondenti lati della spezzata separatrice d'ombra propria.

La costruzione delle ombre può essere notevolmente agevolata, soprattutto nel disegno degli alzati, dall'uso di un terzo piano di proiezione, che sostituisca il primo.

Se, ad esempio (fig. 361), si debbono costruire le ombre autoportate su un prospetto, conviene affiancare a quest'ultimo un prospetto laterale o una sezione che utilizzi, come piano di proiezione, un piano verticale perpendicolare al secondo. Su questo piano si proietta anche il raggio di luce l .

A questo scopo, si staccano due punti, A e B , sul raggio di luce l assegnato e si misurano la quota e l'aggetto del più alto A , rispetto al più basso B , riportandoli sulla terza proiezione, per determinare così la terza proiezione l''' di una qualsiasi raggio di luce.

L'ombra di una retta r sul piano dato si costruisce, ora, assai agevolmente.

Il primo punto dell'ombra è, come sempre, il punto in cui la retta incontra il piano.

Per costruire l'ombra del secondo punto basta disegnare la terza proiezione del raggio di luce che gli appartiene e osservare il punto in cui quest'ultima incontra la parete che riceve l'ombra. La quota di questo punto è la quota dell'ombra, che si troverà dunque sulla retta orizzontale della parete che ha quella quota e sulla seconda proiezione del raggio di luce.

Quando si lavora su un alzato ricco di sporti e rientranze questa è sicuramente la via più rapida, perché permette di utilizzare i soli prospetti, che contengono tutte le informazioni del caso, anziché le piante dell'edificio, che dovrebbero essere riportate tutte una sull'altra o usate una alla volta con gran dispendio di energie e scarsa accuratezza grafica.

Nel disegno di architettura, si usa molto una direzione convenzio-

nale della luce che induce notevoli semplificazioni. Questa particolare direzione è quella della diagonale di un cubo appoggiato al primo e al secondo piano di proiezione (fig. 362). Come si può facilmente constatare, questa scelta della sorgente luminosa fa sì che rette perpendicolari, rispettivamente, al primo e al secondo piano di proiezione, abbiano ombre rispettivamente inclinate a 45 gradi con la linea di terra.

Non solo, si può dimostrare che la distanza dell'ombra di un punto dalla linea di richiamo che passa per quel punto è uguale all'oggetto del punto stesso (*Teorema degli oggetti*).

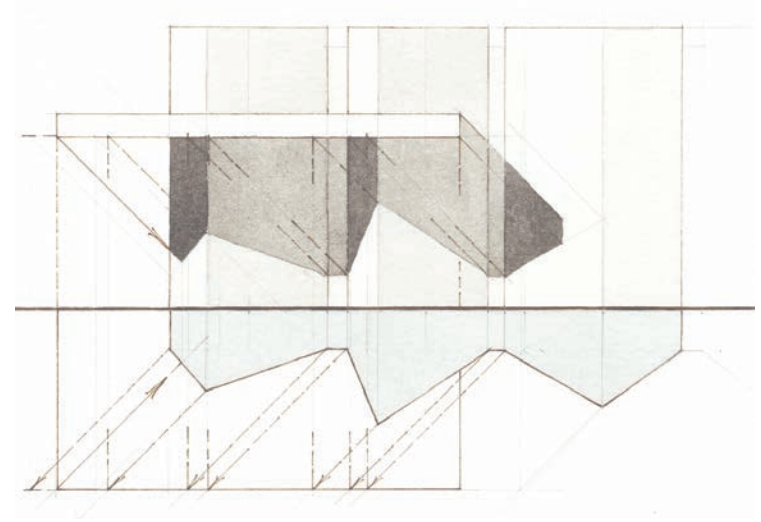
La conoscenza di questo teorema consente, in primo luogo, di costruire le ombre su un prospetto senza far ricorso ad altri disegni, ma solo alla conoscenza degli oggetti, che, per solito, sono ben noti al progettista dell'opera; in secondo luogo, consente di ricavare da un solo disegno, il prospetto con le ombre a 45 gradi, la misura degli sport e delle rientranze della facciata.

Talvolta la particolare posizione della retta che porta ombra rende utile il ricorso a un semplice artificio, detto, *della luce invertita*. Se, ad esempio, la retta è disposta in un piano di profilo (fig. 363) conviene ritrovare il punto della retta stessa che porta ombra su uno spigolo del solido che la riceve. Si lavora sulla proiezione nella quale lo spigolo in questione si confonde in un punto: qui si traccia la proiezione di un raggio di luce che passa per lo spigolo stesso e si risale così al punto voluto della retta. Si passa poi alla proiezione associata per completare il disegno.

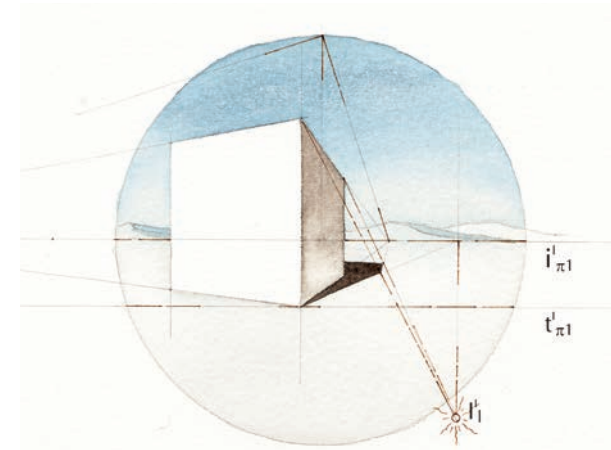
COSTRUZIONE DELL'OMBRA PORTATA IN PROSPETTIVA

Il Sole si rappresenta, in prospettiva, come punto di fuga dei raggi di luce (fig. 364).

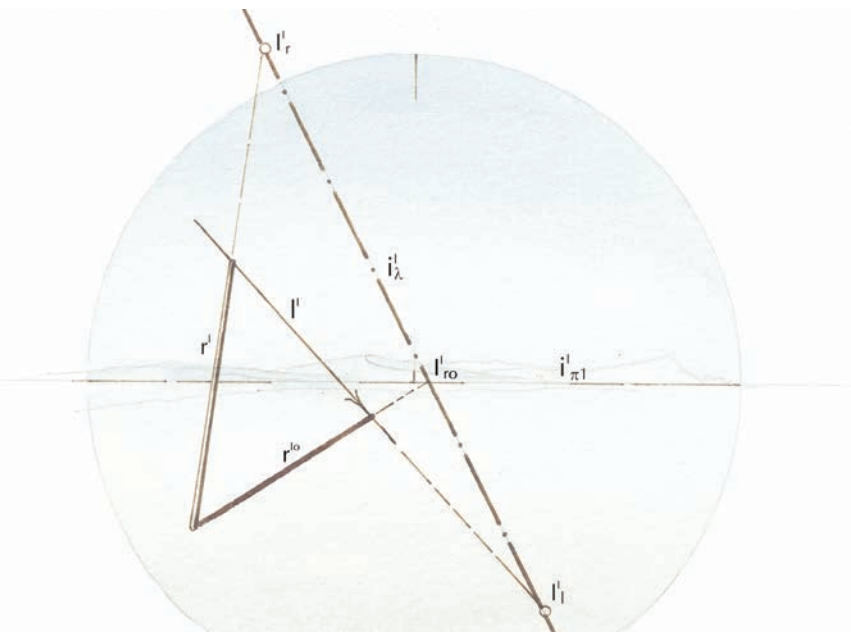
Questo punto, I_1 , è dato dalla intersezione, con il quadro π^1 , del raggio di luce proiettante l . È bene osservare che, se il Sole si trova nel semispazio posto davanti all'osservatore, il punto di fuga I_1 sta nella parte del quadro, cioè del disegno, che è sopra l'orizzonte i'_{π^1} ; se, invece, il Sole è alle spalle dell'osservatore, allora la sua immagine risulta sotto l'orizzonte. È questo l'unico caso in cui, nella pratica del disegno, si rappresenta un punto posto dietro il centro di proiezione. Questa situazione, infatti, benché sia pienamente



363. Il procedimento detto *della luce invertita* consente di risolvere rapidamente situazioni più complesse, come quella di un solaio che porta ombra su una facciata mossata.



364. Quando la luce proviene da un punto alle spalle dell'osservatore, l'immagine del Sole si trova al di sotto dell'orizzonte.



365. In prospettiva, l'ombra di una retta su un piano si costruisce trovandone due punti: il punto nel quale la retta incontra il piano e la fuga dell'ombra, che non è altro che l'ombra della direzione della retta.

legittima dal punto di vista geometrico, non ha però significato dal punto di vista percettivo, ovvero della simulazione del fenomeno visivo che è qualità tipica della prospettiva. Nel caso del Sole, invece, la sua collocazione alle spalle dell'osservatore produce ombre significative quando si rappresenta uno spazio esterno ed è, perciò, una situazione comune per non dire obbligata.

Per costruire l'ombra di una retta si procede come già abbiamo visto trattando dei modelli che si ottengono per proiezione parallela: si ricerca, cioè, l'intersezione del piano di luce che passa per la retta considerata con il piano che riceve l'ombra.

Anche qui si cercano due punti della retta intersezione del piano di luce con il piano che riceve l'ombra, cioè due punti dell'ombra. Il primo di questi punti è, come sempre, il punto in cui la retta che porta l'ombra incontra il piano che la riceve. Il secondo punto è, invece, la fuga della retta ombra.

È molto semplice determinare questo secondo punto, in prospettiva: infatti, poiché l'ombra di una retta è l'intersezione del piano di luce con il piano sul quale l'ombra stessa si distende, la fuga della retta ombra è il punto comune alle fughe dei due piani. Ricordiamo, infatti, che se una retta e un piano si appartengono, si appartengono anche le rispettive fughe; e l'ombra, appunto, appartiene tanto al piano di luce quando al piano su cui cade.

Consideriamo, dunque (fig. 365), la fuga I_r della retta che porta ombra e la fuga I_1 dei raggi di luce, cioè la rappresentazione del Sole. La retta che appartiene a questi due punti è la fuga i_λ del piano di luce. Infatti il piano di luce è individuato da due rette incidenti: quella assegnata e un raggio di luce; e, come sappiamo, la fuga di un piano appartiene alle fughe delle rette che gli appartengono.

La fuga del piano di luce taglia la fuga del piano che riceve l'ombra in un punto: questo punto è la fuga della retta comune ai due piani, cioè la fuga dell'ombra.

Questo procedimento è anche suscettibile di un'altra, legittima, interpretazione: supponiamo, infatti di voler costruire l'ombra della direzione della retta r assegnata. Dovremo condurre per l'immagine della direzione la prospettiva di un raggio di luce e, così

facendo, saremo indotti a disegnare la fuga del piano di luce, cioè l'immagine di una retta che è tutta a distanza indeterminata (è la giacitura del piano di luce). Dovremo poi trovare il punto che questa retta ha in comune con il piano dato e questo punto non può che essere a distanza indeterminata, come tutti i punti della retta cui appartiene, perciò sta sulla giacitura del piano che riceve l'ombra e ha per immagine la fuga dell'ombra. In sintesi possiamo affermare che la fuga dell'ombra di una retta è l'immagine dell'ombra della direzione della retta stessa.

Nella pratica del disegno si prendono in considerazione, una alla volta, le rette che costituiscono i lati della spezzata separatrice d'ombra propria e per ciascuna di esse si considerano:

- un punto qualsiasi dell'ombra della retta;
- il punto di fuga dell'ombra della retta stessa.

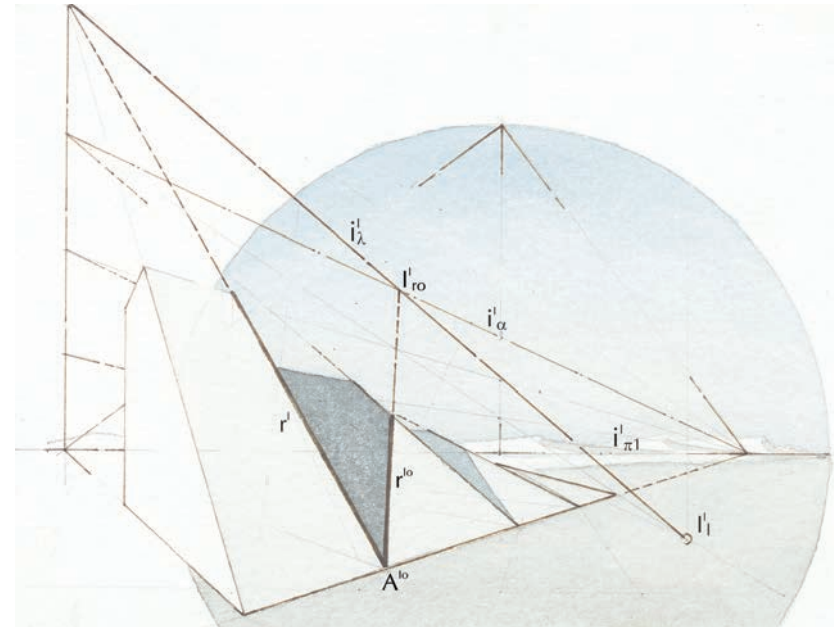
Il primo punto, nella maggior parte dei casi è noto, perché è un vertice, già costruito, della spezzata separatrice d'ombra portata; se invece il primo punto non è noto, lo si ottiene prolungando la retta che porta l'ombra e trovando la sua intersezione con il piano che riceve l'ombra.

Il secondo punto è la fuga della retta ombra, che si trova, come abbiamo detto, nella intersezione della fuga del piano di luce con la fuga del piano sul quale l'ombra è portata.

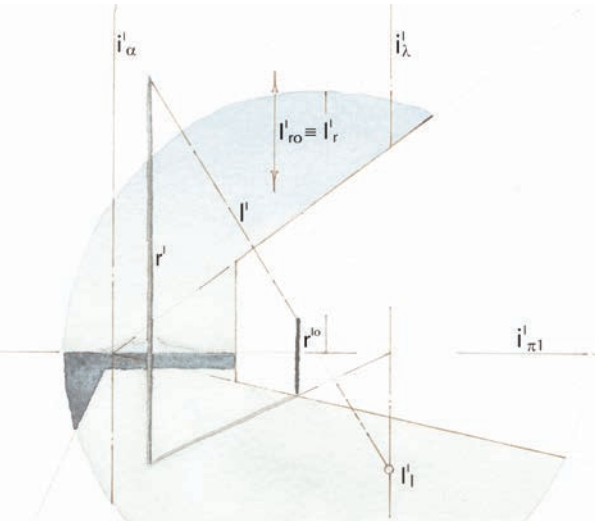
Infatti: la retta ombra, in quanto intersezione dei due piani, deve appartenere tanto al piano di luce quanto al piano che riceve l'ombra e perciò ha fuga nel punto comune alle fughe relative.

Riassumendo, l'ombra di una retta si trova applicando il seguente procedimento (fig. 366):

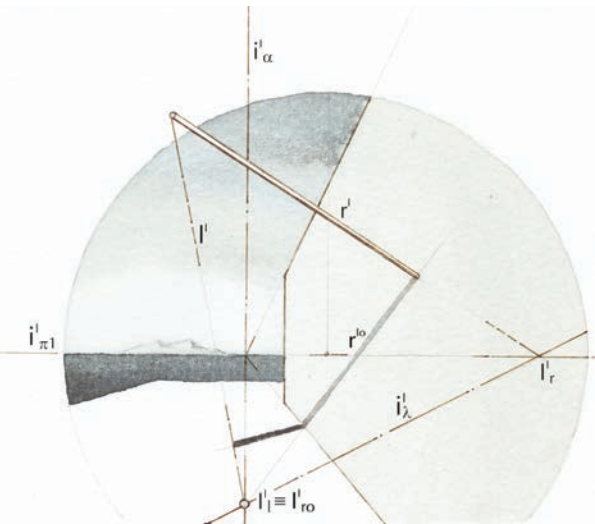
- si costruisce al fuga i'_{λ} del piano di luce;
- si individua o si costruisce la fuga i'_{α} del piano sul quale cade l'ombra;
- si individua la fuga l'_{ρ} dell'ombra, come punto comune a i'_{λ} e i'_{α} ;
- si individua il punto di inizio dell'ombra A^{lo} , eventualmente prolungando la retta r fino a incontrare il piano su cui cade l'ombra;
- si traccia la retta $A^{lo}l'_{\rho}$ che è l'immagine r^{lo} dell'ombra della retta r , che si voleva costruire.



366. La fuga dell'ombra si costruisce come punto comune alle fughe di due piani: il piano sul quale la retta porta ombra e il piano di luce. Il piano di luce, descritto dai raggi di luce che si appoggiano alla retta, ha per fuga la retta che appartiene alla immagine del Sole e alla fuga della retta che porta ombra.



367. Se una retta è parallela al piano sul quale porta ombra, anche l'ombra è parallela alla retta.



368. Quando i raggi di luce e il piano su cui cade l'ombra sono paralleli: l'immagine del Sole appartiene alla fuga del piano; l'ombra della retta su quel piano è indefinitamente estesa; il piano è in luce radente, cioè in una condizione limite tra la luce e l'ombra propria.

CASI PARTICOLARI DELL'OMBRA DI UNA RETTA IN PROSPETTIVA

È bene discutere alcuni casi particolari nelle posizioni reciproche dei raggi di luce, del quadro, della retta e del piano su cui cade l'ombra.

Se la retta e il piano su cui cade l'ombra sono paralleli (fig. 367), anche la retta e la sua ombra sono parallele, come abbiamo già visto trattando del modello in proiezione parallela. Perciò, la prospettiva della retta e quella della sua ombra hanno il medesimo punto di fuga: $l_r^o \equiv l_r^o$. Infatti la retta che porta l'ombra e il piano α , che la riceve, hanno in comune la direzione della retta $l_{\pi\alpha}$; conseguentemente la fuga l_r^o della retta appartiene alla fuga i_{α}^l del piano e, perciò, la fuga del piano di luce interseca la fuga del piano α nel punto l_r^o che è, al contempo, fuga della retta r e fuga della sua ombra r^o .

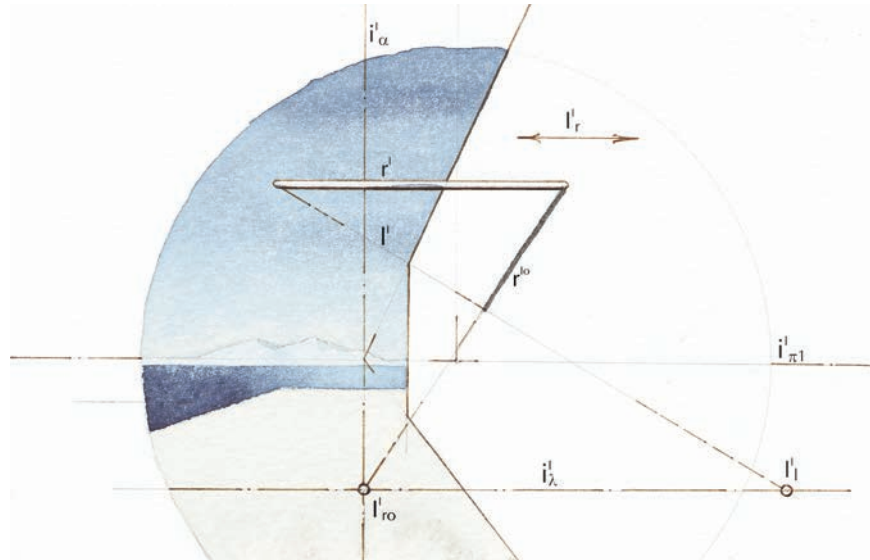
Se la retta è, invece, parallela alla direzione della luce, l'ombra si riduce al punto S^o , intersezione della retta con il piano che riceve l'ombra, e in questo punto si confondono le ombre di tutti i punti della retta.

Se i raggi di luce sono paralleli al piano che riceve l'ombra (fig. 368), l'ombra della retta su quel piano è indefinitamente estesa ed è essa stessa parallela ai raggi di luce. In questo caso, la fuga del piano di luce interseca la fuga del piano che riceve l'ombra nel punto dei fuga dei raggi di luce che è anche fuga dell'ombra. Questa condizione, tuttavia, è puramente teorica, poiché nella realtà il piano si trova in luce radente.

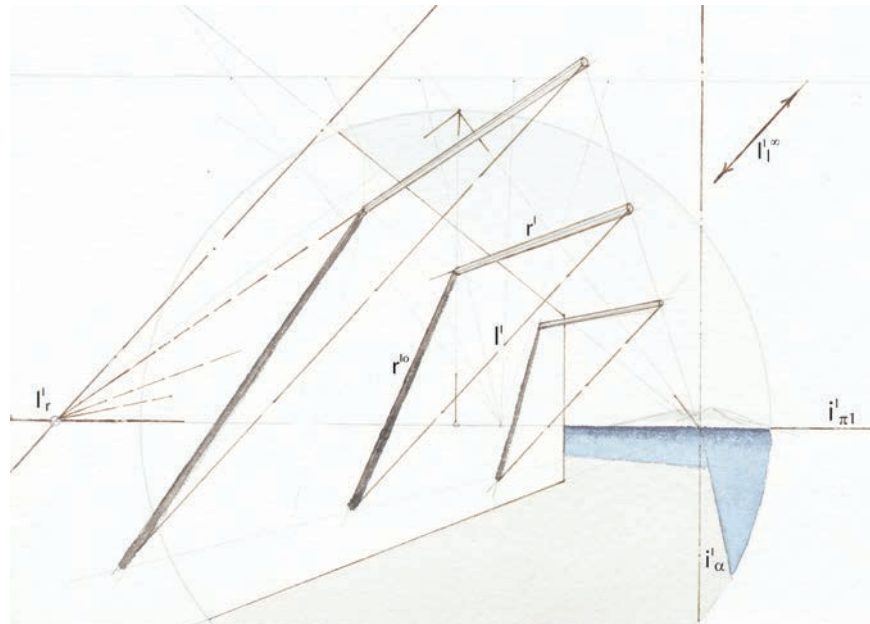
Se la retta è parallela al piano di quadro (fig. 369), la fuga del piano di luce è parallela alla prospettiva della retta: $i_{\lambda}^l // r^o$. In questo caso, la fuga della retta l_r^o è la direzione l^o ; infatti la retta proiettante r è parallela al quadro. La fuga del piano di luce i_{λ}^l è allora la retta del quadro che appartiene alla fuga dei raggi di luce l_1^l ed è parallela alla direzione l^o .

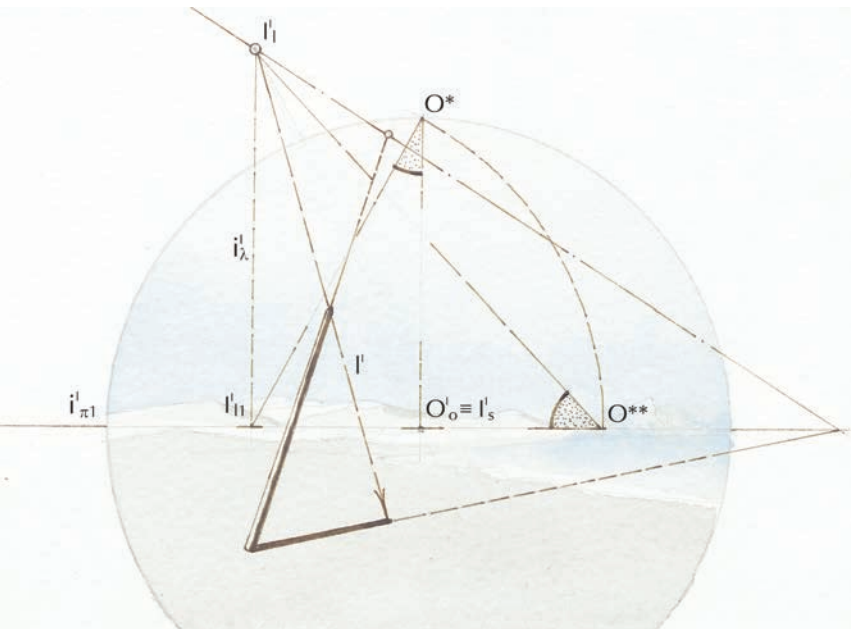
Può darsi il caso, infine, che i raggi di luce siano paralleli al quadro (fig. 370); condizione, questa, da evitare per i cattivi risultati che fornisce dal punto di vista grafico. Allora la fuga dei raggi di luce è una direzione l_{λ}^l . La fuga del piano di luce i_{λ}^l appartiene alla fuga della retta l_r^o ed è perciò parallela alla direzione l_{λ}^l .

369. Se la retta che porta ombra è parallela al piano di quadro, la sua fuga è una direzione. La fuga del piano di luce, conseguentemente, è parallela alla proiezione della retta.



370. Se i raggi di luce sono paralleli al quadro, l'immagine del Sole è una direzione.





371. La posizione del Sole nel cielo è descritta da due angoli: l'azimut e l'altezza.

Costruzione accurata dell'immagine del Sole

Per solito, nella pratica del disegno, la direzione della luce si sceglie in modo da ottenere la migliore resa dei volumi rappresentati, con riguardo, perciò, alle ombre autoportate che esaltano la plasticità dell'oggetto. È possibile, tuttavia, rappresentare il Sole nel punto del cielo in cui si trova realmente in una determinata ora del giorno e in un determinato giorno dell'anno a condizione di conoscere l'orientamento dell'architettura e la latitudine del luogo.

In questo caso, semplici considerazioni astronomiche forniscono l'azimut e l'altezza del Sole e cioè i due angoli che individuano la posizione dell'astro rispetto all'osservatore. In particolare, l'azimut è l'angolo che la proiezione geometrale di un raggio di luce forma con la direzione Sud; l'altezza è l'angolo che i raggi di luce formano con la loro proiezione geometrale.

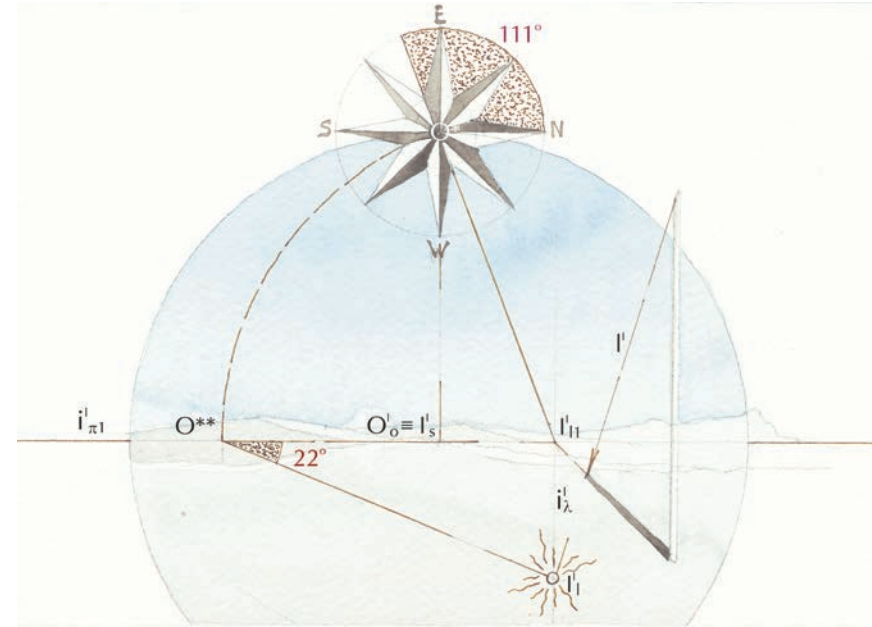
Data la fuga dei raggi di luce I_1 (fig. 371), si individua la fuga $I_{\pi 1}$ della proiezione geometrale dei raggi di luce, costruendo la fuga i_{λ} dei piani di luce verticali e individuando il punto $I_{\pi 1}$, in cui questa incontra l'orizzonte $i_{\pi 1}$. La direzione del Sud geografico è rappresentata dalla fuga I'_s delle rette del geometrale che sono orientate, appunto, a Sud. Per misurare l'azimut, si ribalta il piano dell'orizzonte e si misura l'angolo formato dalle rette $O^*I_{\pi 1}$ e $O^*I'_s$. Per misurare l'altezza si ribalta invece il piano di luce proiettante verticale, assumendo la fuga i_{λ} come cerniera, e si misura l'angolo formato dalle rette $O^{**}I_1$ e $O^{**}I_{\pi 1}$.

Per costruire l'immagine del Sole quando siano note le sue coordinate astronomiche, nonché l'orientamento geografico, rappresentato dall'immagine del Sud I'_s , si ribalta prima il piano dell'orizzonte, per costruire la fuga $I_{\pi 1}$ della proiezione geometrale dei raggi di luce. Si costruisce poi la fuga i_{λ} del piano di luce verticale. Si ribalta infine il piano di luce proiettante verticale, per misurare l'altezza, come sopra.

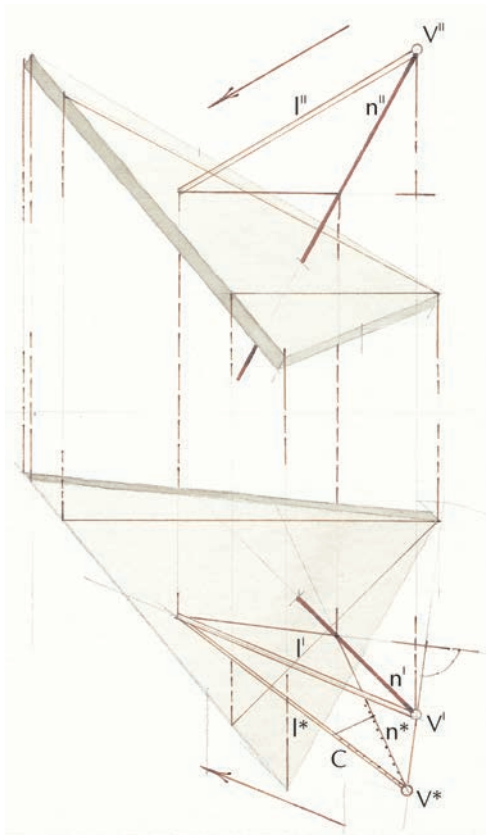
La costruzione può essere resa notevolmente più esplicita rappresentando una bussola sul ribaltamento del piano proiettante. Ad esempio (fig. 372), se lo sguardo dell'osservatore è rivolto a Ovest

e immaginiamo la bussola centrata nell'osservatore, ribaltando il piano dell'orizzonte sulla parte alta del quadro, il quadrante della bussola si disporrà con l'Ovest in basso, l'Est in alto, il Nord a destra e il Sud a sinistra dell'osservatore.

Nel momento in cui scrivo, a Roma, il 20 Marzo del 2002, alle 8.20 del mattino, le effemeridi danno un Azimut di 111 gradi Sud Est e un'altezza di 22 gradi. Perciò la fuga dei raggi di luce è quella rappresentata in figura in I_1 .



372. Conoscendo azimut e altezza del Sole e l'orientamento dell'architettura rappresentata, è possibile riprodurre le ombre esattamente come si producono in un certo giorno dell'anno, ad una certa ora. Azimut e altezza del Sole si possono ricavare con procedimenti geometrici, con il calcolo o, anche, consultando le effemeridi.



373. Il grado di intensità luminosa di un piano dipende dall'angolo che i raggi luce formano con la normale al piano. È facile misurare quest'angolo con un ribaltamento del piano di luce che appartiene alla normale.

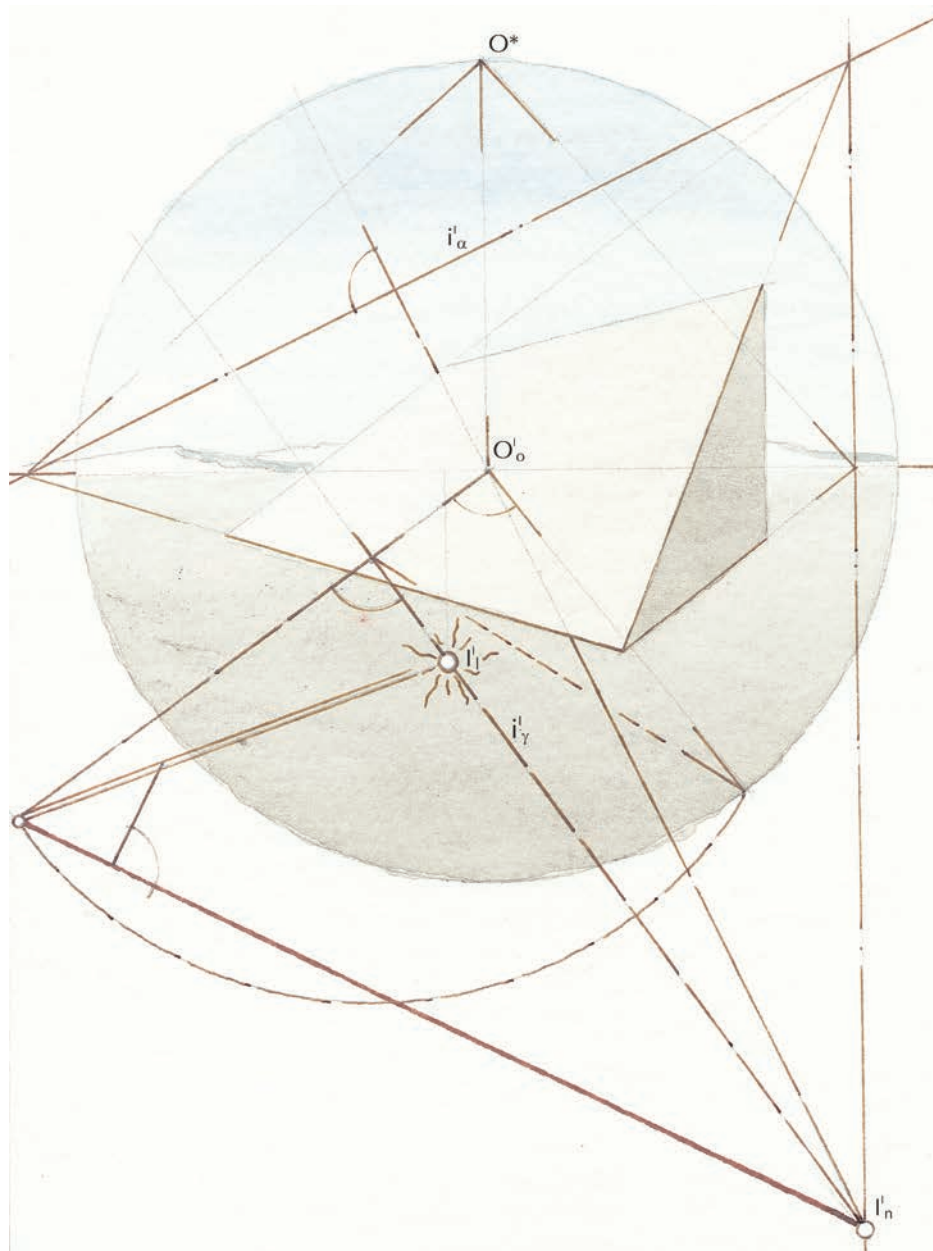
La costruzione del chiaroscuro nei modelli grafici

Come abbiamo detto, il grado di intensità luminosa di un piano, secondo la legge di Lambert, è uguale al coseno dell'angolo che i raggi di luce formano con la normale al piano. Per misurarlo, perciò, si procede come segue (fig. 373):

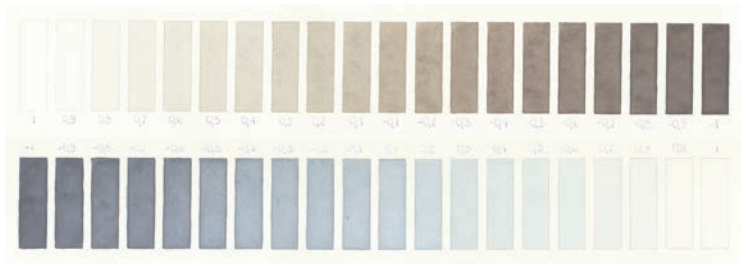
- in primo luogo si costruisce una qualsiasi retta n perpendicolare al piano che riceve la luce;
- si costruisce poi un qualsiasi raggio di luce l incidente la retta n nel punto V ;
- si ribalta il piano individuato dalle rette l e n ;
- sul ribaltamento di una delle due rette, ad esempio l^* , si stacca un segmento di lunghezza unitaria, a partire dal vertice V dell'angolo, e lo si divide in dieci parti;
- per l'estremo di questo segmento si conduce poi una retta ortogonale all'altro lato dell'angolo, nell'esempio n^* , fino al punto C ;
- con il compasso, centro in V , si riporta sulla l^* il segmento VC e se ne misura la lunghezza per mezzo della segmento unitario come sopra suddiviso;
- il valore trovato, nell'esempio 0,85 è il valore del coseno che descrive il grado di intensità luminosa del piano.

Questa procedura risulta anche più agevole nel modello prospettico. Qui, infatti, basta costruire la fuga l'_n della normale n al piano che riceve la luce. Si traccia poi la retta $l'_n l'_1$ che si assume come cerniera del ribaltamento del piano individuato dalle rette l e n , che proiettano le direzioni delle rette l e n , rispettivamente. Su tale ribaltamento si misura il coseno dell'angolo delle due rette, per via grafica, nel modo già illustrato.

Ad esempio (fig. 374): è data l'immagine del Sole l_1 e la prospettiva di un piano obliquo, che ha fuga in l'_α . Per misurare il grado di intensità luminosa del piano, secondo la prima legge di Lambert, occorre, innanzi tutto, costruire una retta perpendicolare al piano, o, anche, soltanto la sua fuga l'_n . Ciò fatto, si considera il piano



374. In prospettiva, il grado di intensità luminosa di un piano si misura ribaltando le due rette proiettanti rispettivamente parallele alla normale e ai raggi di luce.



375. Nei modelli grafici, il chiaroscuro si rende assegnando a ogni grado di intensità luminosa un tono della scala delle tinte.

proiettante γ , individuato dalle rette l e n , cioè dalle rette che proiettano, rispettivamente, la direzione dei raggi di luce e la direzione della normale al piano. Il piano taglia il quadro nella retta l' ; assumendo quest'ultima come cerniera, si ribalta il piano stesso sul quadro e si misura l'angolo formato dalle due rette suddette: è questo l'angolo di Lambert.

Occorre, a questo punto, tradurre i valori del coseno trovati per i vari piani dell'oggetto in altrettanti valori di grigio, che ne riproducano le caratteristiche di illuminazione. A tal fine, si disegnano su un foglio venti rettangoli (fig. 375), che si numerano nel modo che segue: $-1; -0,9; -0,8; -0,7; -0,6; -0,5; -0,4; -0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$.

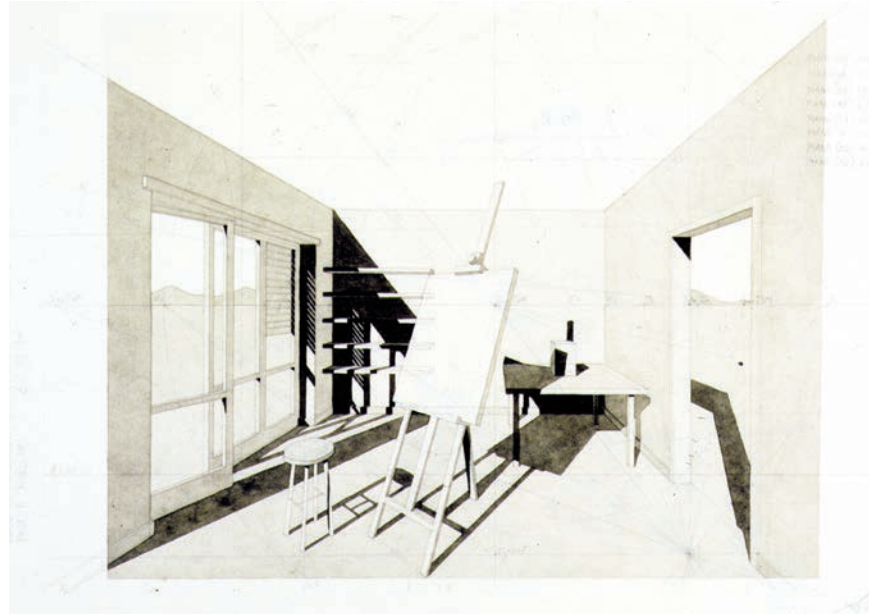
Con l'acquerello, si prepara poi una tinta di colore chiarissimo, appena distinguibile dal bianco della carta, e si campiscono tutti i rettangoli. Quando il colore è perfettamente asciutto, e non prima, si ripete la campitura, escludendo il rettangolo 1 e rinforzando un poco la tinta. Si procede così, sempre escludendo un rettangolo e sempre rinforzando la tinta. In questo modo, si ottiene infine una scala perfettamente graduata di tinte che vanno dal grigio chiarissimo del rettangolo 1 al grigio scuro (quasi saturo) del rettangolo -1 .

La scala delle tinte, così costruita, si utilizza per stabilire il tono di grigio da attribuire ai piani in funzione dell'angolo di Lambert, e precisamente: i piani che hanno grado di intensità luminosa 1 si campiscono con un grigio simile a quello del rettangolo 1; i piani che hanno grado 0,9, con un grigio simile al grado 0,9 della scala, e così via.

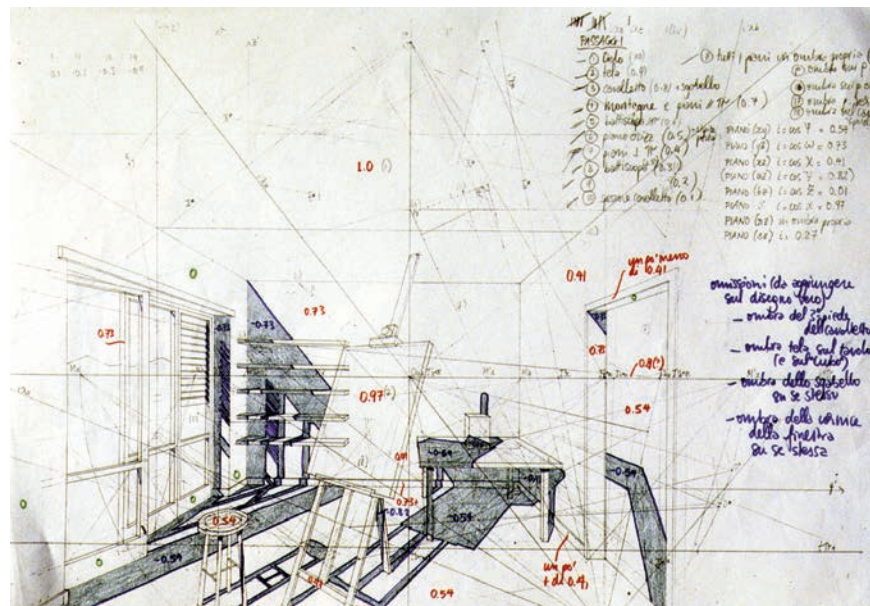
I valori negativi della scala servono per le ombre, in base a una norma empirica del disegno accademico che è detta *legge del contrasto*. Le ombre portate, infatti, appaiono tanto più scure, quanto più luminoso è il piano sul quale si distendono. Perciò se un'ombra è portata su un piano che ha grado 1, sarà campita con il grigio -1 ; se è portata su un piano che ha grado 0,5, sarà campita con il grigio $-0,5$, e così via.

Il bianco puro della carta serve per i punti brillanti, ovvero per rendere l'immagine della sorgente luminosa.

376. Il chiaroscuro reso nella maniera tradizionale da Rachel Hentsch, studentessa del corso di Applicazioni della Geometria descrittiva (1994).



377. Lavoro di preparazione della tavola precedente, che consiste nella misura del grado di intensità luminosa delle superfici illuminate.





378. Il chiaroscuro è reso intuitivamente, ma con piena consapevolezza delle leggi che descrivono il fenomeno.

È sorprendente constatare come questa tecnica sia in grado di rendere gli effetti della luce solare, soprattutto se la scala è ben contrastata. Una scala morbida, cioè poco contrastata, produce un effetto di Sole velato; una scala dura, molto contrastata, produce invece l'effetto della luce estiva quando il Sole è alto sull'orizzonte. L'architetto che voglia applicare la tecnica delle campiture all'acquerello non deve possedere una abilità particolare, è sufficiente che segua poche semplici regole pratiche.

Il foglio, di carta ruvida e non troppo leggera, deve essere ben stirato, il che si ottiene inumidendolo e incollandolo, umido, e solo sui bordi, su una tavoletta di legno (*stiratore*). Il disegno, se eseguito a matita, non sarà danneggiato da questa operazione. A lavoro ultimato il foglio si stacca dallo stiratore, tagliandolo a un centimetro dal bordo, con una taglierina. Il colore deve essere disteso con il pennello sempre abbondantemente intriso e mai con il pennello asciutto. Il piano di lavoro deve essere inclinato verso il disegnatore, in modo che il colore si raccolga in una goccia di liquido nella parte più bassa della campitura: questa goccia impedisce che il colore soprastante asciughi prima che la campitura stessa sia ultimata e consente di campire anche grandi superfici in modo perfettamente omogeneo. Infine è importante la qualità dei materiali impiegati (carta, pennelli, colore). In particolare, l'acquerello deve essere del tipo in tubetto. I colori utilizzati per la resa del chiaroscuro, nella tradizione accademica e dei grandi viaggiatori, sono il seppia e l'indaco. Usare altri colori o, peggio, una varietà di colori, porta inevitabilmente a risultati che nulla hanno a che vedere con la resa della luce nel disegno di architettura.

La costruzione delle isofote di una superficie

Alla ricerca delle linee isofote sono stati dedicati, in passato, interi trattati, come quello di Domenico Tessari (TESSARI 1880). La tecnologia informatica consente oggi di costruire il chiaroscuro in modo del tutto automatico e con grande accuratezza, e apparentemente confina l'interesse per questi studi nelle pagine della storia della scienza. In realtà la costruzione delle isofote non è soltanto neces-

saria per una corretta applicazione della legge di Lambert alle superfici, ma è anche utile alla analisi della loro forma, tant'è vero che quasi tutti i modellatori offrono strumenti che costruiscono automaticamente le isofote e le visualizzano per consentire al progettista un più accurato controllo delle variazioni e delle discontinuità delle forme modellate.

È perciò utile esaminare il procedimento generale che consente la costruzione delle linee di eguale illuminazione di una superficie qualsiasi.

Secondo la definizione che abbiamo già giustificato, la linea isofota è il luogo geometrico dei punti di una superficie ove è costante il valore $i = \text{Cos}\Phi$ dell'angolo formato dai raggi luminosi con le normali alla superficie condotte in quei punti.

Ora ricordiamo che la legge di Lambert si può esprimere anche nella forma $i = \text{Sen}\Theta$ dove Θ è il complemento di Φ cioè l'angolo che il raggio di luce, che appartiene al punto P , forma con il piano tangente alla superficie in P . Costruita una superficie σ (fig. 379) immaginiamo che sia s una sua isofota. I piani tangenti alla superficie nei vari punti di s , tutti egualmente inclinati rispetto alla direzione della luce, involuppano una seconda superficie che è circoscritta alla prima. Assumiamo ora un punto arbitrario V esterno alla superficie, costruiamo il raggio di luce I , che passa per questo punto e poi sempre per V conduciamo i piani paralleli ai piani che involuppano la superficie e le sono tangenti nei punti di s .

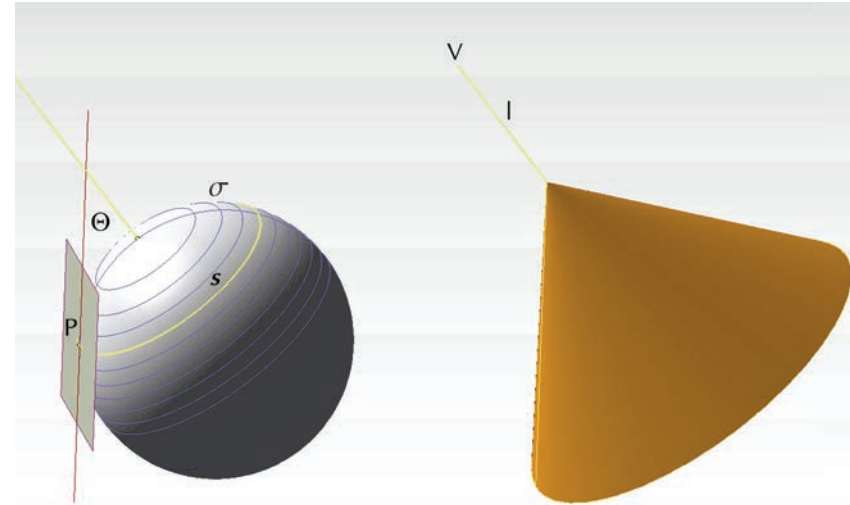
Poiché l'angolo Θ , che il raggio I forma con i piani che abbiamo costruito, è costante, i suddetti involuppano un cono circolare retto di vertice V .

Quest'ultimo è il *cono direttore* della superficie che involuppa σ e ha la proprietà di essere ugualmente illuminato in tutti i suoi punti, ragion per cui viene chiamato cono di uniforme illuminazione.

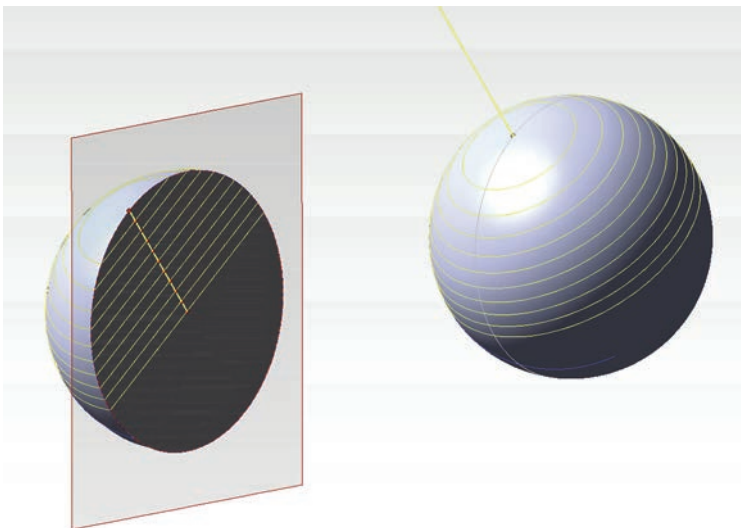
Il problema viene risolto, grazie al cono di uniforme illuminazione, elaborando le seguenti operazioni.

È assegnata una superficie σ qualsiasi e la direzione dei raggi di luce I° .

Assunto un qualsiasi raggio di luce I e su di esso un punto V , si costruiscono tanti coni di uniforme illuminazione, coassiali, di vertice



379. Le linee isofote di una superficie sono il luogo geometrico dei punti di eguale grado di intensità luminosa. Queste linee si costruiscono, in generale, per mezzo di coni di uniforme illuminazione.



380. In alcuni casi speciali, come quello della sfera, la costruzione delle isofote è pressoché immediata, basta dividere in parti eguali il raggio della sfera che è parallelo ai raggi di luce.

ce V per quante linee isofote si desidera tracciare ed in modo tale che le aperture $\Theta = \Pi - \Phi$ di questi coni corrispondano ad altrettanti gradi di intensità luminosa.

Considerato uno di detti coni, si costruiscono n piani a esso tangenti e n piani, a questi paralleli, tangenti alla superficie: i punti di contatto relativi sono punti della linea isofota cercata il cui grado di illuminazione è il coseno dell'angolo complementare dell'apertura del cono considerato.

Ricordiamo infine che delle isofote sono state date numerose espressioni analitiche.

Nei modelli grafici è ovviamente impossibile una soluzione esatta del caso generale. Si possono invece adottare alcuni espedienti che rendono più rapida la costruzione.

Ad esempio, se la superficie da chiaroscurare è una sfera (fig. 380), conviene sezionarla con uno degli infiniti piani che passano per il raggio di luce incidente il centro della sfera. La sezione individua un cerchio massimo che ha uno dei raggi appartenente al raggio di luce come sopra costruito. Basta allora dividere questo raggio in dieci parti e tagliare il cerchio con altrettante ortogonali al raggio, per avere punti che appartengono alle isofote da 1 a 0. I cerchi della sfera che appartengono a questi punti e giacciono in piani perpendicolari al raggio, sono le isofote cercate.

Se la superficie, invece, è un cilindro (fig. 381), basterà costruire le isofote sulla sfera inscritta. Le isofote della sfera taglieranno la direttrice di contatto, in punti del cilindro che hanno un pari grado di intensità luminosa. Le isofote del cilindro sono le generatrici che passano per questi punti.

Questo procedimento apre al via alla soluzione grafica del problema generale. Assegnata una superficie qualunque ζ della quale si desidera costruire le isofote, si costruisce una sfera di paragone, che viene detta *sfera normale*.

Si determinano su tale sfera le linee isofote.

Preso ora un punto P qualsiasi della superficie si costruisce il piano tangente alla superficie in quel punto e un secondo piano, parallelo, tangente alla sfera. Evidentemente il punto di contatto del piano tangente alla sfera e il punto P hanno lo stesso grado di illuminazione.

La resa delle ombre e del chiaroscuro nei modelli informatici

Come abbiamo visto, dunque, la più importante applicazione del *rendering* alle superfici, non è il fotorealismo, come si potrebbe pensare, ma la valutazione delle qualità della superficie studiata.

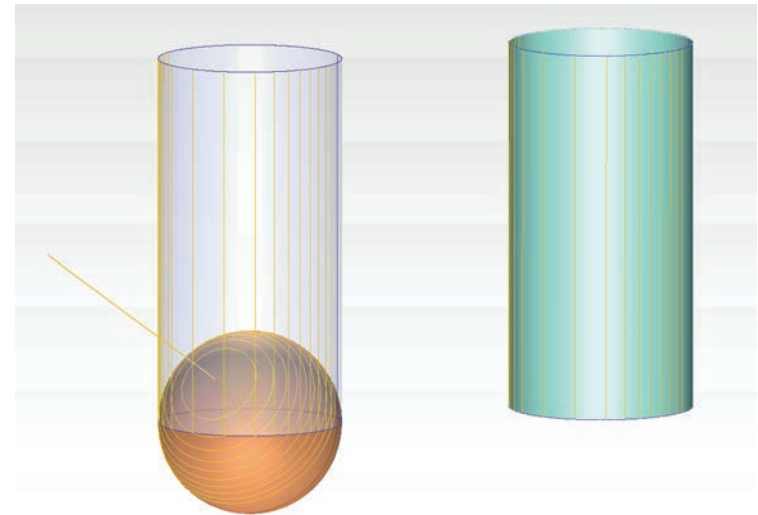
I modellatori offrono, al riguardo, varie possibilità che vanno dalla semplice applicazione della legge di Lambert (*shading*), alla costruzione delle isofote, fino a vari strumenti che, utilizzando una sorta di chiaroscuro a falsi colori, mostrano le variazioni di curvatura della superficie e le sue discontinuità.

Quando si utilizzano gli algoritmi di *rendering* su un modello di architettura è facile cedere alla tentazione di ricercare il massimo del realismo, fino a ottenere immagini virtuali che possono essere confuse con una fotografia. Quasi sempre, però, questi tentativi sfociano in immagini di scarso interesse. Cerchiamo di capire perché.

In primo luogo bisogna considerare la variazione del colore dei materiali con la distanza: il rosso di un mattone, ad esempio, si spegne rapidamente in un grigio di tonalità calda, con l'aumentare della distanza; il grigio dell'asfalto si schiarisce tendendo al violetto. Perciò il segreto per ottenere immagini seducenti sta nell'interpretare il colore, non nel renderlo per quello che appare decontestualizzato.

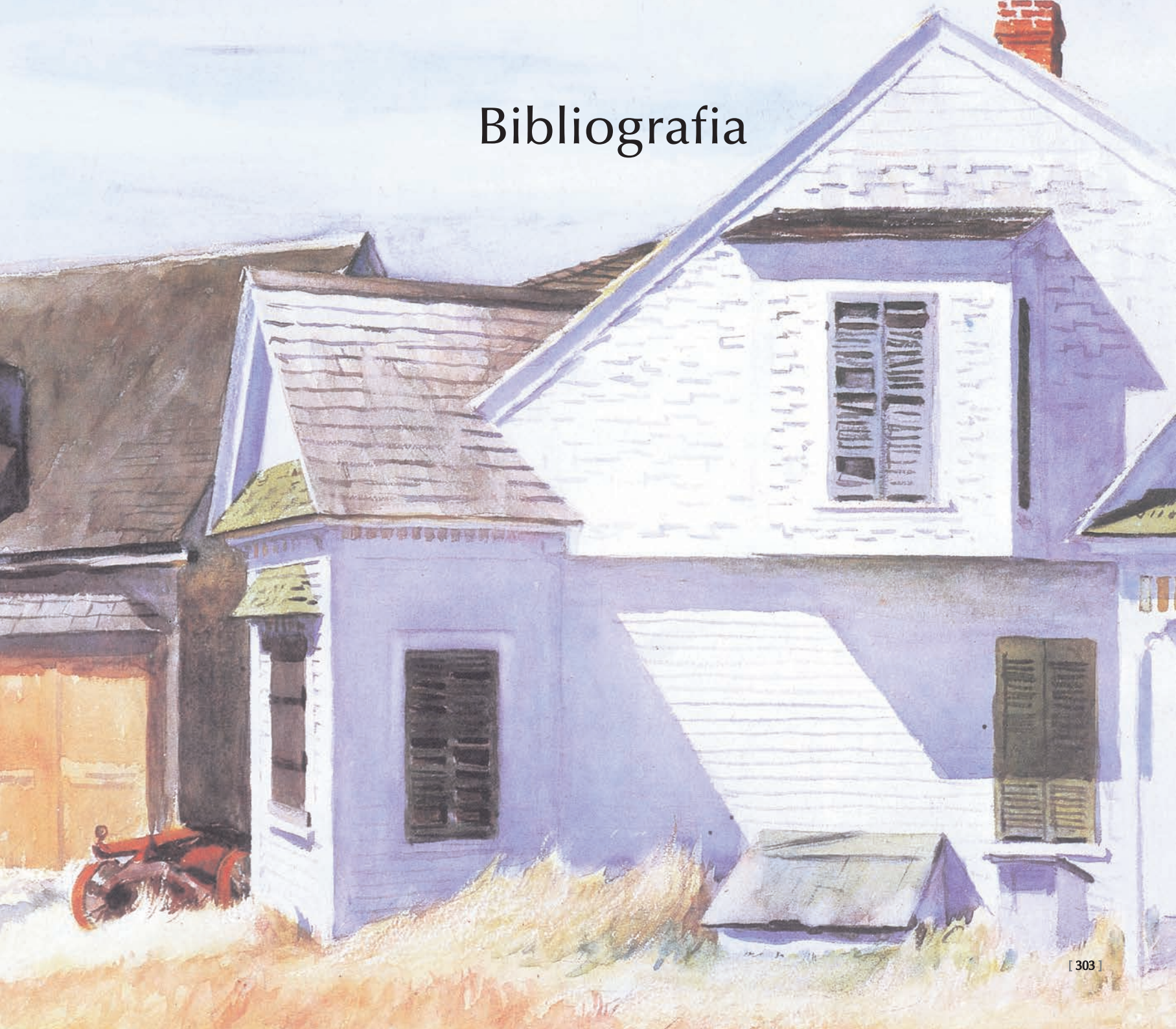
Un'ultima considerazione: il pittore non dipinge mai la realtà come la vede, ma come la immagina. Altrettanto deve fare l'architetto, anche quando usa il computer, invece della matita o del pennello: bisogna alludere allo spazio immaginato e non tentare una rappresentazione oggettiva che non fa parte delle nostre percezioni.

I *rendering* migliori, come il chiaroscuro tradizionale, uniscono agli effetti della luce il rigore della rappresentazione classica. Una sezione prospettica che tratta la luce nelle parti scorciate e impiega campiture convenzionali in quelle sezionate sarà sempre più convincente di una prospettiva in cui l'edificio si staglia su un cielo oleografico. Un'assonometria su un semplice fondo nero, che presenta in modo esplicito il modello, è più seducente di una malintesa realtà virtuale.



381. La sfera consente di costruire le isofote delle superfici nelle quali può essere inscritta, come, ad esempio, il cilindro.

Bibliografia



In questa bibliografia si trovano raccolti i libri citati nel testo e quelli essenziali per delineare una storia dei modelli, nonché quelli che, per la ricchezza dell'apparato iconografico, costituiscono una testimonianza importante sulla costruzione e sull'uso dei modelli nel passato, come alcuni manuali di tecnica delle costruzioni. Non si tratta, dunque, di una bibliografia completa, che richiederebbe un volume a se stante.

Mancano, ad esempio, molte delle fonti della prospettiva, per le quali rimando alle opere fondamentali di Chasles, Poudra e Vagnetti. Manca del tutto la bibliografia relativa alla modellazione informatica (ho citato solo due testi che mi sono parsi essenziali). E mancano infine le numerose opere di molti Autori contemporanei: mi sono limitato a quelle che sperimentano il connubio tra geometria descrittiva e informatica o che hanno rilevanza dal punto di vista storico.

Un repertorio ancora parziale, ma commentato, è disponibile alla consultazione all'indirizzo www.rappresentazione.net.

I testi sono ordinati per anno di prima edizione (nel caso di opere straniere, a volte è indicato l'anno della prima edizione in italiano), mentre la citazione bibliografica si riferisce all'edizione consultata.

La data è preceduta dal nome dell'autore per semplificare il rimando dal testo alla bibliografia.

EUCLIDE III A.C.

Euclide, *Gli Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, 1970.

EUCLIDE III A.C.

Euclides, *L'Optique et la Catoptrique. Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke*, Parigi, Blanchard, 1959.

APOLLONIO III A.C.

Apollonii Pergaei conicorum libri quatuor. Una cum Pappi Alexandrini Lemmatibus, et Commentarii Eutocii Ascalonitae. Sereni Atinsensis Philosophi Libri duo nunc primum in lucem editi, edizione originale della traduzione latina di Federico Commandino, Bologna, 1566.

VITRUVIO 27 A.C.

Marco Vitruvio Pollione, *De Architectura libri X*, a cura di Pierre Gros, Einaudi, 1997.

ALBERTI 1435

Leon Battista Alberti, *De Pictura*, Bari, 1980.

PIERO 1475

Piero de' Franceschi, *De perspectiva pingendi*, edizione critica di Giusta Nicco Fasola, Firenze, 1942.

PACIOLI 1497

Luca Pacioli, *De divina proporzione*, copia anastatica del manoscritto, a cura di Augusto Marinoni, Milano, 1982.

DÜRER 1535

Albrecht Dürer, *Albertus Durerus Nurembergensis pictor huius aetatis celeberrimus, versus e Germanica Lingua in Latinam, Pictoribus, Fabris aeraris ac lignariis, Lapididis, Statuaris et universis demum qui circino, gnomone, libella, aut alioqui certa mensura opera sua examinant, prope' necessarius: adeo exactè Quatuor Institutionum Geometricarum Libris, lineas, superficies et solida corpora tractavit, adhibitis designationibus ad eam rem accomodatissimis*, Parigi, 1535.

COMMANDINO 1558

Federico Commandino, *Ptolemai planisphaerium, jordanii planisphaerium, Federici Commandini in planisphaerium commentarius in quo universa scenographices ratio quam brevissime traditur ac demonstrationibus confirmatur*, Venezia, 1558.

COUSIN 1560

Jehan Cousin il Vecchio, *Livre de perspective*, Parigi, 1560.

CATANEO 1567

Pietro Cataneo, *L'architettura di Pietro Cataneo senes. Alla quale oltre all'essere stati dall'istesso autore riuisti, meglio ordinati e di diversi disegni, e discorsi arricchiti i primi quattro libri...*, Venezia, Manuzio Paolo, 1567.

BARBARO 1568

Daniele Barbaro, *La pratica di prospettiva di Mons. Daniel Barbaro Eletto Patriarca di Aquileia. Opera molto utile a Pittori, Scultori, Architetti...*, Venezia, 1568.

ALHAZEN 1572

Ibn-al-Haitham, *Opticae Thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Eiusdem liber de Crepusculis et Nubium ascensionibus. Item Vitellioni Thuringopoloni libri X omnes instaurati, figuris illustrati et aucti, adjectis enim...*, Basilea, F. Risnero, 1572.

VIGNOLA 1583

Giacomo Barozzi da Vignola, *Le due regole della prospettiva di M. Jacomo Barocci da Vignola; con i commentari del R.P.M. Egnatio Danti dell'Ordine de' Predicatori, Matematico dello Studio di Bologna*, Roma, 1583.

DEL MONTE 1600

Guidubaldo Del Monte, *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis Perspectivae libri sex*, Pesaro, 1600.

KEPLERO 1604

Johannes Kepler, *Ad vitellionem paralipomena, quibus atronomia pars optica traditur*, Francoforte, 1604.

DESARGUES 1639

Girard Desargues, *Brouillon Project d'une atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plan*, Parigi, 1639.

DESARGUES 1640

Girard Desargues, *Brouillon Project d'Exemple d'une Manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierre en l'Architecture: et de l'esclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en Perspective comme en Géométral, et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil*, Parigi, 1640.

BOSSE 1648

Abraham Bosse, *Manière Universelle de Mr Desargues, pour pratiquer la Perspective par petit-pied, comme le Geometral. Ensemble Les Places et Proportions des Fortes et Foibles Touches, Teintes ou Couleurs*, par A. Bosse, Parigi, 1648.

GUARINI 1671

Guarino Guarini, *Euclides adauctus et methodicus Mathematicaque universalis*, Torino, 1671.

TROILI 1672

Giulio Troili, *Paradossi per praticare la prospettiva senza saperla; fiori per facilitare l'intelligenza; frutti per non operare alla cieca...*, Bologna, 1683.

POZZO 1702

Andrea Pozzo, *Perspectiva pictorum et architectorum Andreae Putei e Societate Jesu. PARS PRIMA In quâ docetur expeditissimus delineandi opticè omnia, quae pertinent ad Architecturam*, Roma, 1702.

TAYLOR 1715

Brook Taylor, *Principles of linear perspective, or the Art of designing upon a plane the representation of all sortes of objects, as they appear to the eye*, Londra, 1715.

GALLI BIBIENA 1731

Ferdinando Galli Bibiena, *Direzioni a' giovani studenti nel disegno dell'architettura* (con: *Direzioni della prospettiva teorica corrispondenti a quelle dell'Architettura*), Bologna, 1731, 1732.

FRÉZIER 1737

Amedé François Frézier, *La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois, pour la Construction des Voûtes - Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires, ou Traité de Stéréotomie à l'usage de l'architecture*, 3 vv., Strasburgo, 1737-1739.

Il terzo volume contiene la *Dissertation sur les Ordres d'Architecture*.

GUARINI 1737

Guarino Guarini, *Architettura Civile del Padre D. Guarino Guarini Chierico regolare Opera Postuma dedicata a Sua Sacra Regale Maestà*, Torino, 1737.

LAMBERT 1739

Johann Heinrich Lambert, *La perspective affranchie de l'embaras du plan géometral* par I.H. Lambert, Zurigo, 1739.

ZANOTTI 1766

Eustacchio Zanotti, *Trattato teorico-pratico di prospettiva*, Bologna, 1766.

DEIDIER 1770

Abate Deidier (prof. di Matematiche nella S. d'Artiglieria di La Fere), *Traité de perspective theorique et pratique*, Parigi, 1770.

MONGE 1780

Gaspard Monge, *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres des surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres*, sta in *Mémoires présentés par divers Savants*, Parigi, 1780.

MONGE 1794

Gaspard Monge, *Mort aux tyrans - Programmes des courses révolutionnaires sur la fabrication des salpêtres, des poudres et des canons... par les citoyens Guyton, Fourcroy... Monge, par ordre du Comté de Salut Public*, Parigi, 1794.

LACROIX 1795

Sylvestre François Lacroix, *Saggio di Geometria riguardante Le Superficie Piane e Curve o sia Elementi della Geometria Descrittiva*, Firenze, 1829.

MONGE 1798

Gaspard Monge, *Géométrie descriptive, leçons données aux Écoles Normales, l'an III de la République, par Gaspard Monge...*, Parigi, 1798.

HACHETTE 1804

Jean Pierre Nicholas Hachette, *Correspondance su l'école politecnique*, Parigi, 1804-1815.

TRAMONTINI 1811

Giuseppe Tramontini, *Delle Projezioni Grafiche e delle loro principali applicazioni. Trattato teorico-pratico ad uso della Reale Scuola Militare del Genio e dell'Artiglieria come ancora di tutti i giovani architetti, ed ingegneri civili, di G. T. professore di Geometria Descrittiva nella R. Scuola suddetta*, Modena, 1811.

TACCANI 1813

Francesco Taccani, *Geometria Descrittiva ad uso degli Artisti, che contiene La Delineazione Geometrica e Prospettica degli Oggetti e l'Arte di ombreggiarli*, Milano, 1813.

TACCANI 1813

Francesco Taccani, *Operazioni di geometria descrittiva*, 2 vv., (I. Dimostrazioni; II. Tavole disegnate ed incise dall'autore), Milano, 1813.

FLAUTI 1815

Vincenzo Flauti, *Geometria di Sito sul piano e nello spazio*, Napoli, 1842.

BORDONI 1816

Antonio Bordoni, *De' contorni delle ombre ordinarie, Trattato*, Milano, 1816.

DUPIN 1818

Charles Dupin, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, s.l., 1818.

HACHETTE 1818

Jean Pierre Nicolas Hachette, *Second Supplément de la géométrie descriptive, par M. Hachette, Professeur adjoint de la faculté des sciences... suivi de l'analyse géométrique de M. John Leslie, Professeur de Mathématiques ...*, Parigi, 1818.

VALLÉE 1819

L.L. Vallée, *Traité de la Géométrie Descriptive*, Parigi, 1819.

MONGE 1820

Gaspard Monge, *Géométrie descriptive, par G. Monge... édition augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papier de l'auteur par M. Brisson*, Parigi, 1820.

PONCELET 1822

Jean Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures, Ouvrage utile a ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'operations géométriques sur le terrain*, Parigi, 1865.

COUSINERY 1826

Barthélemy Edouard Cousinéry, *Géometrie perspective ou principes de projection polaire appliqués a' la description des corps*, Parigi, 1828.

SERENI 1826

Carlo Sereni, *Geometria Descrittiva. Trattato di Carlo Sereni Ingegnere in capo di Roma, professore di Geometria Descrittiva e d'Idrometria e membro del collegio filosofico all'Università della Sapienza*, Roma, 1845.

HACHETTE 1828

Jean Pierre Nicholas Hachette ancien professeur de l'École Polytechnique, *Traité de Géométrie Descriptive comprenant les Application de cette Géométrie aux ombres, à la Perspective et à la Stéréotomie ...*, Parigi, 1828.

CHASLES 1837

Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie particulièrement de celles qui se rapportent a la géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de Géometrie sur Deux Principes Généraux de la science: la Dualité et l'Homographie*, Bruxelles, 1837.

LEROY 1842

Charles Felix Auguste Leroy, *Traité de géométrie descriptive; suivi de la méthode des plans cotes et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques: avec une collection d'epures composee de 69 planches*, Parigi, 1872.

OLIVIER 1842

Théodore Olivier, *Cours de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1842, 1843.

OLIVIER 1843

Théodore Olivier, *Compléments de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1843-1870.

PASI 1844

Carlo Pasi, *Geometria Descrittiva*, Pavia, 1844.

LEROY 1845

Charles Felix Auguste Leroy, *Traité de Stéréotomie comprenant les Applications de la Géométrie Descriptive a la Théorie des Ombres, la Perspective Linéaire, la Gnomonique, la Coupe des Pierres et la Charpente*, Parigi, 1870.

SERENI 1846

Carlo Sereni, *Applicazioni di Geometria Descrittiva di Carlo Sereni Ingegnere in capo di Roma, membro del collegio filosofico, professore d'Idrometria e di Geometria Descrittiva all'Università della Sapienza, socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Roma, 1846.

OLIVIER 1847

Théodore Olivier, *Additions au Cours de Géométrie Descriptive: démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques*, Parigi, 1847.

OLIVIER 1847

Théodore Olivier, *Applications de la géométrie descriptive: aux ombres, à la perspective, à la gnomonique, aux engrenages*, Parigi, 1847.

BELLAVITIS 1851

Giusto Bellavitis, *Lezioni di geometria descrittiva con Note contenenti i principi della Geometria superiore ossia di derivazione e parecchie regole per la misura delle aree e dei volumi*, Padova 1851.

OLIVIER 1851

Théodore Olivier, *Mémoire de Géométrie Descriptive théorique et appliquée*, Parigi, 1851.

VALLÉE 1853

L.L. Vallée, *Spécimen de Coupe de Pierres, contenant les principes généraux du trait et leur application aux murs, aux plates-bandes, aux berceaux, aux voutes sphériques, aux voutes de révolution, aux voutes a base polygonale,...*, Parigi 1853.

TOUSSAINT 1857

Claude Jacques Toussaint, *Nouvel manuel complet de la coupe des pierres précédé des Notions de Géométrie Élémentaires et Descriptive nécessaires et suivi de quelques observations-pratiques et d'un vocabulaire par C.J. Toussaint de Sens et H.-M. M., ...*, Parigi, Roret, 1857.

DEL RE 1859

Alfonso Del Re, *Lezioni di Geometria descrittiva dettate nella R. Università di Napoli*, Napoli, 1859.

PERI 1859

Giuseppe Peri, *Applicazioni della Geometria Descrittiva, alle ombre, alla prospettiva lineare ed aerea, al taglio delle pietre e del legname*, Firenze, Libri cinque, 1859.

POUDRA 1859

Noël Germain Poudra, *Examen critique du traité de perspective linéaire de m. de la Gournerie*, Parigi, 1859.

GOURNERIE 1860

Jules de la Gournerie, *Traité de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1860, 1862, 1864.

ANGELINI 1862

Annibale Angelini, *Trattato teorico pratico di prospettiva*, Roma, 1862.

POUDRA 1864

Noël Germain Poudra, *Histoire de la perspective ancienne et moderne*, Parigi, 1864.

REALE 1865

Carlo Reale, *Dei piani quotati o livellati ed applicazioni alle superficie irregolari; all'accordo delle scarpe; al problema del deffilamento; al tracciamento delle strade e dei canali; al calcolo degli sterri ed interri*, Pavia, 1865.

CHIZZONI 1866

Cesare Chizzoni, *Corso completo di prospettiva lineare*, Milano, 1866.

REYE 1866

Teodoro Reye, *La geometria di posizione*, Venezia, 1884.

SALMON 1868

George Salmon, *Trattato analitico delle sezioni coniche contenente un cenno dei più importanti metodi moderni algebrici e geometrici*, Napoli, 1868.

CREMONA 1873

Luigi Cremona, *Elementi di Geometria proiettiva*, Milano, 1873.

HOEFFER 1874

Ferdinand Hofer, *Histoire des mathématiques depuis leur origines jusq'au commencement du dix-neuvième siècle*, Parigi, 1874.

REGIS 1879

Domenico Regis, *Delle Proiezioni Quotate*, Torino, 1879.

MANNHEIM 1880

Amedee Mannheim, *Cours de Géométrie Descriptive l'ecole polytechnique, comprenant les elements de la geometrie cinematique*, Parigi, 1880.

TESSARI 1880

Domenico Tessari, *La teoria delle ombre e del chiaro-scuro*, Torino, 1880.

PERI 1882

Giuseppe Peri, *Corso elementare di Geometria Descrittiva. Libri tre con atlante di 24 tavole seguiti da un'appendice sul Metodo delle Proiezioni Quotate*, Firenze, 1882.

BELLAVITIS 1883

Ernesto Bellavitis, *Elementi di prospettiva concorrente, insegnati nell'Università di Padova*, Padova, 1883.

AMIOT 1885

A. Amiot, *Nuove Lezioni di Geometria Descrittiva*, Napoli, 1885.

BREYMANN 1885

Gustav Adolf Breyman, *Costruzioni in pietra e strutture murali*, Milano, 1885.

DINO 1885

Salvatore Dino, *Elementi di Geometria Proiettiva*, Napoli, 1885.

PILLET 1885

J.J. Pillet, *Traité de Perspective Linéaire précédé du Tracé des ombres usuelles (Rayon a 45 degrés) et du Rendu dans le dessin d'Architecture et dans le dessin des Machines*, Parigi-Lipsia, 1885-1921.

VECCHI 1885

Stanislao Vecchi, *La teoria geometrica attuale sulle restituzioni prospettive riveduta e corretta. Memoria sulle impressioni diverse che producono le prospettive e i bassorilievi quando venga a cambiare la posizione del punto da cui si guardano*, s.l., 1885.

ARNÒ 1887

Valentino Arnò, *Applicazioni di geometria descrittiva (Ombre, prospettiva, assonometria, gnomonica)*, Torino, 1887.

ASCHIERI 1887

Ferdinando Aschieri, *Geometria Descrittiva*, Milano, 1887, 1897.

LODI 1887

Fortunato Lodi, *Studi grafici per disegnare le ombre nei disegni geometrici di architettura*, Roma, 1887.

ASCHIERI 1888

Ferdinando Aschieri, *Geometria Proiettiva. Lezioni di Ferdinando Aschieri...*, Milano, 1888.

ANTONELLO 1889

Francesco Antonello, *Corso completo di prospettiva ragionata*, Napoli, 1889.

BRISSE 1891

Charles Michel Brisse, *Cours de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1891.

FOLINEA 1891

R. Folinea, *Architettura Pratica*, Napoli, 1891.

REGIS 1891

Domenico Regis, *Applicazioni della geometria descrittiva. Corso ... nella R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Torino*, Roma-Torino-Firenze, 1891.

FORMENTI 1893

Carlo Formenti, *La pratica del fabbricare*, con 126 tavole litografate a colori, Milano, 1893, 1895.

BECCHETTI 1894

Enrico Becchetti, *Studio teorico-pratico delle Ombre e del Chiaroscuro. Applicazioni al disegno geometrico e alla prospettiva del prof. Enrico Becchetti Insegnante nel R. Istituto di Belle Arti e nell'Istituto Professionale di S. Michele*, Milano-Roma, 1894.

PAOLONI 1894

Pacifico Paoloni, *Disegno Assonometrico*, Milano, 1894.

ASCHIERI 1895

Ferdinando Aschieri, *Geometria Proiettiva dello Spazio*, Milano, Hoepli, 1895.

ASCHIERI 1896

Ferdinando Aschieri, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Milano, 1896.

VEGETTI 1896

Enrico Vegetti, *Prospettiva lineare speculativa e pratica*, Milano, 1896, 1899.

CLAUDI 1897

Claudio Claudì, *Manuale di prospettiva dell'ingegnere*, Milano, 1897.

BASILE 1898

Alceste Basile, *Prospettiva Lineare*, Palermo, Reber, 1898.

BELLAVITIS 1900

Ernesto Bellavitis, *Prospettiva Lineare Insegnata nella Scuola d'Applicazione degli Ingegneri di Padova*, Padova, 1900.

GIAMPIETRI 1900

Settimio Giampietri, *A new system of practical perspective for artist and architects*, Londra, 1900.

ENRIQUEZ 1902

Federigo Enriquez, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Bologna, 1902.

FANO 1902

Gino Fano, *Lezioni di Geometria Descrittiva, date nel R. Politecnico di Torino*, Torino, 1925.

HATTON 1902

Richard G. Hatton, *Perspective for art students*, Londra, 1902.

MARCHESI 1902

Salvatore Marchesi, *Prospettiva lineare pratica con tavole a rilievo*, Milano, 1902.

CASTELNUOVO 1903

Guido Castelnuovo, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Roma, 1903-1905.

CIANI 1903

Edgardo Ciani, *La prospettiva cavaliera a quarantacinque gradi*, Milano, 1903.

ENRIQUEZ 1903

Federigo Enriquez, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Firenze, 1926.

AMODEO 1905

Federico Amodeo, *Lezioni di Geometria Proiettiva dettate nella R. Università di Napoli*, Napoli, 1905.

SEVERI 1906

Francesco Severi, *Complementi di Geometria Proiettiva*, Bologna, 1906.

BORGOGELLI 1909

Guido Borgogelli, *Prospettiva lineare*, Roma, 1927.

BRICARD 1911

Raoul Bricard, *Géométrie Descriptive*, 1911, Parigi.

CLOQUET 1913

Louis Cloquet, *Traité de perspective pittoresque, ouvrage illustré de 228 gravures, Perspective Du Trait*, Parigi, 1913.

MERIZZI 1913

Claudio Merizzi, *Lezioni di Geometria Descrittiva per l'Istituto tecnico*, Livorno, 1913.

PERAZZO 1913

Umberto Perazzo, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Torino, 1913.

RANELLETTI 1913

Ranelletti Cesare, *Elementi di geometria descrittiva ad uso dei rr. Istituti tecnici*, Milano, 1913.

NICODEMI 1914

R. Nicodemi, *Prospettiva*, Napoli, 1914.

PITTARELLI 1914

Giulio Pittarelli, *Applicazioni di geometria descrittiva*, 2° ed. riv.e ampl. dallo studente A. Irianni, Roma, 1914.

NOELLI 1917

Agide Noelli, *La prospettiva per gli scultori*, Milano, 1917.

SEVERI 1918

Francesco Severi, *Lezioni di Geometria Descrittiva dettate nella R. Università di Padova e nella Libera Università di Ferrara e raccolte dall'Assistente Prof. A. Comessatti*, Padova, 1918.

LORIA 1919

Gino Loria, *Metodi di Geometria Descrittiva*, Milano, 1919.

BURALI 1921

Geometria descrittiva Burali Forti, Torino-Genova, 1921.

LORIA 1921

Gino Loria, *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Milano, 1921.

PILLET 1921

Jules Pillet, *Traité de géométrie descriptive*, Parigi, 1921.

SEVERI 1921

Francesco Severi, *Geometria Proiettiva*, Padova, 1921.

CIANI 1922

Edgardo Ciani, *Lezioni di Geometria Proiettiva ed Analitica*, Pisa, 1922.

GORRIERI 1922

Domenico Gorrieri, *Applicazioni di Geometria Descrittiva*, Bologna, 1922.

TAGLIAVINI 1922

Giacomo Tagliavini, *La geometria descrittiva nelle scuole d'Arte e di Magistero*, Bologna, 1922.

BRICARD 1924

Paul Bricard, *Petit Traité de Perspective*, Parigi, 1924.

CHEVALLEY 1924

Giovanni Chevalley, *Elementi di tecnica dell'Architettura*, Torino, 1924.

LORIA 1924

Gino Loria, *Complementi di Geometria Descrittiva*, Milano, 1924.

LORIA 1925

Gino Loria, *Curve sghembe speciali, algebriche e trascendenti*, Bologna, Zanichelli, 1925.

PANOFSKY 1927

Erwin Panofsky, *La Prospettiva come "forma simbolica" e altri scritti*, Milano, 1966.

ROUSE BALL 1927

Walter William Rouse Ball, *Le matematiche dall'antichità al rinascimento*, versione del dottor Giulio Puliti, riveduta e corretta dal professor Gino Loria, Bologna, Zanichelli, 1927.

BOMPIANI 1928

Enrico Bompiani, *Geometria Descrittiva*, Roma, 1948.

LORIA 1930

Gino LORIA, *Pagine di Storia della Scienza*, Torino, 1930.

CHOLLET 1931

T. Chollet, P. Mineur, *Traité de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1931.

LORIA 1931

Gino LORIA, *Il Passato e il Presente delle principali Teorie Geometriche - Storia e Bibliografia*, Padova, 1931.

CIANI 1932

Edgardo Ciani, *Lezioni di geometria descrittiva*, Padova, 1932.

COMESSATTI 1932

Annibale Comessatti, *Lezioni di Geometria Descrittiva con Applicazioni*, Padova, 1932-1939.

BENEDETTI 1933

Enrico Benedetti, *Il problema fondamentale della prospettiva lineare conica obliqua*, 1933, Padova.

LAUNAY 1933

Louis de Launay, *Monge Fondateur de l'École Polytechnique*, s.l., 1933.

GIOVANARDI 1934

Mario Giovanardi, *Elementi di prospettiva lineare cilindrica*, Napoli, 1934.

GIOVANARDI 1934

Mario Giovanardi, *Elementi di prospettiva lineare conica*, Napoli, 1934.

CAPPELLONI 1935

A. Cappelloni, *Applicazioni di geometria descrittiva in Trattato generale teorico pratico dell'arte dell'ingegnere civile, industriale ed architetto. Applicazioni di geometria descrittiva*, Milano, Vallardi, 1935.

SEVERI 1936

Francesco Severi, *Applicazioni di Geometria Descrittiva. Lezioni date nella Facoltà di Architettura della R. Università degli Studi di Roma, raccolte da Michele Campanella*, Roma, 1936.

RICHTER 1937

Gisela Marie Augusta Richter, *Perspective, ancient, medieval and renaissance in Scritti in onore di Bartolomeo Nogara, raccolti in occasione del suo 70 anno*, Città del Vaticano, Roma, 1937, pp. 381-388.

LAUTARD 1939

A. Lautard, O. Berry, *Géométrie Descriptive*, edition italienne, s.l., 1939.

BORTOLOTTI 1942

Enea Bortolotti, *Geometria Descrittiva. Lezioni redatte per uso degli studenti della R. Università di Firenze*, Padova, 1942.

CICOGNA 1944

Giampiero Cicogna, *Elementi di Proiettiva e Prospettiva*, Torino, 1944.

MASOTTI 1944

Giuseppina Masotti Bigioggero, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Milano, 1944.

BERTINI 1945

Eugenio Bertini, *Lezioni di Geometria Descrittiva precedute da Cenni di Geometria Proiettiva*, Pisa, s.d. (1945?).

BOMPIANI 1946

Enrico Bompiani, *Lezioni di geometria descrittiva, esercizi e complementi di geometria descrittiva*, Roma, 1946.

SPINOSA 1948

Gaetano Spinosa, *Geometria Descrittiva - Elementi ed applicazioni con particolare trattazione della Prospettiva*, Brescia, 1948.

CAMPEDELLI 1949

Luigi Campedelli, *Lezioni di Geometria, Volume Primo: La geometria Analitica e gli Elementi della Geometria Proiettiva*, Padova, 1970.

LALA 1949

Augusto Lala, *Prospettiva con l'uso del Riportatore - una innovazione nel campo della Geometria Descrittiva - Metodo rapidissimo e di facile applicazione*, Napoli, 1949.

SELLER 1949

Giovanni Seller, *Geometria Descrittiva. Elementi ed applicazioni*, Milano, 1949.

GIOVANARDI 1950

Mario Giovanardi, *Elementi di Geometria Descrittiva*, Napoli, s.d. (1950?).

FEDELE 1951

Luigi Fedele, *Il Disegno Assonometrico, la teoria e la pratica*, Napoli 1951.

TATON 1951

René Taton, *L'oeuvre scientifique de Monge*, Parigi, 1951.

ZANETTI 1951

Mario Zanetti, *Una proposta di riforma della prospettiva lineare*, in "L'Ingegnere", n. 9, Settembre 1951, pp. 945-951.

WEYL 1952

Hermann Weyl, *La Simmetria*, Milano, 1962.

- HOLLIS 1955**
H.F. Hollis, *Perspective Drawing*, Londra, 1955.
- WATSON 1955**
Ernest W. Watson, *How to use creative perspectiv*, New York, 1955.
- CHISINI 1956**
Oscar Chisini, Giuseppina Masotti Biggiogero, *Esercizi di Geometria Descrittiva*, Milano, 1972.
- TENNEGUIN 1956**
R. Tennequin, *Toutes les perspectives*, Parigi, 1956.
- GIOSEFFI 1957**
Decio Gioseffi, *Perspectiva artificialis, per una Storia della Prospettiva, spigolature e appunti*, Trieste, 1957.
- BONELLI 1958**
Renato Bonelli, *Prospettiva del Cinquecento*, in "Architettura", anno IV, n. 35, pp. 338-341.
- GANASSINI 1959**
Maria Luisa Ganassini, *Applicazioni della Geometria Descrittiva - Prospettiva*, Roma, 1959.
- PAL 1959**
Imre Pal, *Géométrie Descriptive avec figures en relief par les anaglyphes*, Lausanne, Parigi, s.d. (1966?).
- BONFIGLI 1960**
Clemente Bonfigli, C.R. Braggio, *Geometria descrittiva e prospettiva con applicazioni ed esercizi*, Milano, 1960.
- ROSSIER 1960**
Paul Rossier, *Perspective*, Neuchatel, 1960.
- SAMPAOLESI 1960**
Piero Sampaolesi, *Studi di prospettiva*, in "Raccolta Vinciana", fasc. XVII, 1960, pp. 188-202.
- MARTINELLI 1961**
Enzo Martinelli, *Lezioni di Geometria con esercizi per il secondo anno di studi di matematica, fisica, ingegneria*, Roma, 1961.
- MORIN 1964**
Ugo Morin, *Lezioni di Geometria*, Parte quarta: *Geometria Descrittiva, curve sghembe e superficie*, Padova, 1964.
- PARRONCHI 1964**
Alessandro Parronchi, *Studi su la dolce prospettiva*, Milano, 1964.
- VAGNETTI 1964**
Fausto Vagnetti, *Elementi di Scienza del Disegno*, Roma, 1964.
- CHISINI 1967**
Oscar Chisini, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Bologna, 1967.
- BOMPIANI 1968**
Enrico Bompiani, Carmelo Longo, *Lezioni di Geometria Descrittiva per gli allievi di Architettura*, Roma, 1968.
- BOYER 1968**
Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*, Milano, 1980.
- CHAHLY 1968**
A.T. Chahly, *Descriptive Geometry Traslated from the russian by A.E. Tchernukhin and Th. Botting*, Mosca, 1968.
- GAUDEFROY 1970**
Jean-Henri Gaudefroy, *La perspective dans le dessin technique*, Parigi, 1970.
- GUARINI 1970**
Guarino Guarini e l'internazionalità del barocco. Atti del Convegno Internazionale promosso dall'Accademia della Scienze di Torino (30 Settembre-5 Ottobre 1968), Torino, 1970.
- VACCARO 1970**
Giuseppe Vaccaro, *Esercizi e complementi di geometria*, Roma, s.d. (1970?).
- KRYLOV 1971**
P. Krylov Lobandieski, S. Maine, *Géométrie Descriptive*, Mosca, Mir, 1971.
- ARUSTAMOV 1972**
Khristofor Artem'evic Arustamov, *Problems in descriptive geometry*, Mosca, 1972.
- HILBERT 1972**
David Hilbert, *Geometria Intuitiva*, Torino, 1972.
- AGAZZI 1973**
Evandro Agazzi, a cura di, *La Simmetria*, Seminari interdisciplinari di Venezia, Bologna, 1973.
- CUNDY 1974**
Henry Martyn Cundy, A.P. Rollet, *I modelli matematici*, Milano, Feltrinelli, 1974.
- FASOLO 1975**
Orseolo Fasolo, *Lezioni di geometria descrittiva raccolte e coordinate da R. Migliari*, Roma, 1975.
- SACCARDI 1976**
Ugo Saccardi, *Applicazioni della Geometria Descrittiva*, Firenze, 1976.
- FLOCON 1978**
Albert Flocon, René Taton, R., *La Prospettiva*, Milano, Franco Angeli, 1985.
- GHEORGHIU 1978**
Adrian Gheorghiu, Virgil Dragomir, *Geometry of structural forms*, Bucharest, 1978.
- SINISGALLI 1978**
Rocco Sinisgalli, *Il contributo di Simon Stevin allo sviluppo scientifico della prospettiva artificiale*, Roma, 1978.
- VILKO 1978**
Nice Vilko, *Perspektiva*, Zagabria, 1978.
- CATALDI 1979**
Giancarlo Cataldi, *Sistemi statici in architettura*, Padova, 1979.
- VAGNETTI 1979**
Luigi Vagnetti, *De Naturali et Artificiali Perspectiva*, Firenze, 1979.
- FASOLO 1980**
Orseolo Fasolo, *Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura*, Tomi I e II: *Modelli, Linee*, Roma, 1980, 1983.

GIOSEFFI 1980

Decio Gioseffi, *I disegni dei "Quattro Libri" come modelli; modellistica architettonica e teoria dei modelli*, in "Bollettino del Centro Internazionale di Studi Architettura Andrea Palladio", XII, 1980.

DAHAN-DALMEDICO 1982

Amy Dahan-Dalmedico, Jeanne Peiffer, *Routes et dédales*, Parigi, 1982.

MIGLIARI 1982

Riccardo Migliari, *Dieci lezioni di geometria descrittiva. Il modello prospettico frontale*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n. 1, Roma, 1982.

MIGLIARI 1983

Riccardo Migliari, *Dieci lezioni di geometria descrittiva. Il modello prospettico d'angolo e il modello prospettico a quadro inclinato con la descrizione di utili procedimenti ed alcune considerazioni sull'anamorfose e sulla sostanziale identità dei modelli*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n. 2, Roma, 1983.

FASOLO 1984

Orseolo Fasolo, *Un modo nuovo ma antico di fare e di insegnare la prospettiva, note di cronaca e storia delle applicazioni della geometria descrittiva ai problemi della rappresentazione*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n. 3, Roma 1984.

MIGLIARI 1984

Riccardo Migliari, *Dieci lezioni di Geometria Descrittiva. La teoria delle ombre e del chiaroscuro. Il modello geometrico del moto apparente del Sole*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n. 3, Roma, 1984

PASCUCCI 1984

Achille Pascucci, *Quadriche a doppia curvatura, tipologia di coperture a pianta quadrilatera (Da Monge al computer come strumento di ricerca)*, con un complemento di A. Pero Nullo, *Fascio di quadriche rigate sostenuto da un quadrilatero sghembo*, Roma, 1984.

GAMBA 1988

Enrico Gamba, Vico Montebelli, *Le scienze a Urbino nel tardo rinascimento*, Urbino, 1988.

INZERILLO 1988

Michele Inzerillo, Giuseppe Catalano, Cosimo Quattrocchi, *Analisi computerizzata sulle proiezioni prospettiche di aggregati di quadriche e poliedri*, Parte prima: *Ellissoidi*, Palermo, 1988.

FASOLO 1989

Orseolo Fasolo e altri, *L'omologia e le sue applicazioni alla rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura*, "Quaderni di applicazioni della geometria descrittiva", n. 4, Roma, 1989

HASELBERGER 1989

Lothar Haselberger, *Die Zeichnungen in Vitruvs De Architectura, Zur Illustration antiker Schriften über das Konstruktionswesen*, in *Munus non ingratum*, Proceedings of the International Symposium on Vitruvius' De Architectura and the Hellenistic and Republican Architecture, Leiden, 1989.

TYBOUT 1989

R.A. Tybout, *Die Perspektive bei Vitruv: Zwei Überlieferungen von scaenographia*, in *Munus non ingratum*, Proceedings of the International Symposium on Vitruvius' De Architectura and the Hellenistic and Republican Architecture, Leiden, 1989.

ATERINI 1990

Aterino Aterini, Roberto Corazzi, Ugo Saccardi, *Geometria e strutture*, Firenze, Alinea, 1990.

ROGERS 1990

David F. Rogers, James Alan Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, New York, Mc Graw-Hill, 1990.

HASELBERGER 1995

Lothar Haselberger, *Un progetto architettonico di 2000 anni fa*, in "Le Scienze", n. 324, Agosto 1995.

MIGLIARI 1995

Riccardo Migliari, *La prospettiva e l'infinito*, in 'Disegnare, idee, immagini', Anno VI, n. 11, Roma 1995.

PIEGL 1997

Les Piegl, Wayne Tiller, *The NURBS Book*, Berlino, Springer, 1995.

DE ROSA 2000

Agostino De Rosa, Anna Sgrosso, Andrea Giordano, *La geometria nell'immagine*, Torino, UTET, 2000.

Finito di stampare
nel mese di maggio 2003.