AVVISI:

1) l'esercitazione facoltativa si terrà venerdì 23 ottobre, alle ore 16:00, in Aula 3 (Dip. di Matematica), e verrà tenuta dalla Prof.ssa Lanzara.

2) oggi pomeriggio, dalle 15:00 alle 16:30, spiegazioni su richiesta nel mio studio (Dip. di Matematica, stanza 4, pianterreno)

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (Dini)

Sia $F(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$, A aperto.

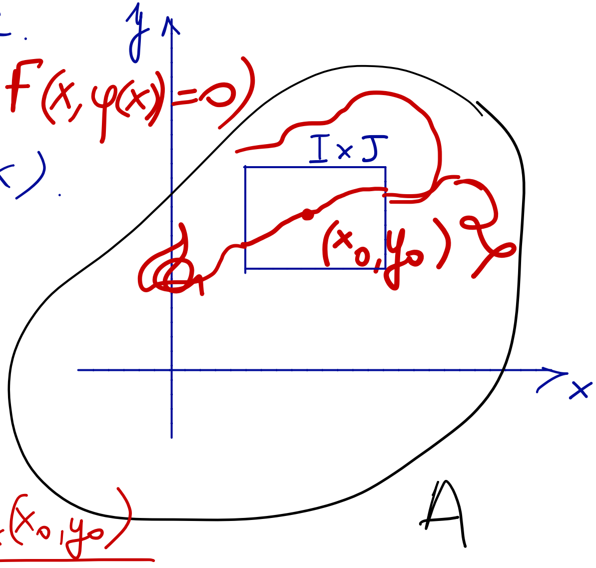
Sia $(x_0,y_0) \in A$ t.c. 1) $F(x_0,y_0)=0$; 2) $F_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ intorno I di x_0, $\exists$ intorno J di y_0,

$\exists!$ funzione $\varphi(x): I \to J$ t.c.

$\forall (x,y) \in I \times J$ si ha $(\exists!\, \varphi(x) : F(x,\varphi(x))=0)$

$$F(x,y)=0 \iff y=\varphi(x).$$



(OSS: $\varphi(x_0)=y_0$)

Inoltre $\varphi \in C^1(I)$, e $\forall x \in I$ si ha

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$

Quindi in particolare $\varphi'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$

Inoltre, se $F \in C^2(A)$, allora anche $\varphi \in C^2(I)$, e $\forall x \in I$

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}$$

dove tutte le derivate di F sono calcolate in $(x, \varphi(x))$.

Formula alternativa:

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}\varphi'(x) + F_{yy}(\varphi'(x))^2}{F_y}$$

Analogamente, se $F \in C^n(A)$, allora $\varphi \in C^n(I)$, e si hanno formule analoghe per tutte le derivate successive di $\varphi(x)$.

<u>OSS</u> Se $F \in C^\infty(A) \Rightarrow \varphi \in C^\infty(I)$

ESERCIZIO

Sia $E = \{(x,y) : e^{2xy} + \cos(y^2) + y + 2\cos(\pi x) = 0\}$

Mostrare che, in un opportuno intorno di $(1,0)$, i punti di E costituiscono il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ oppure $x = \varphi(y)$. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione φ con punto iniziale $x_0 = 1$ oppure $y_0 = 0$, e disegnare la forma di E vicino al punto $(1,0)$.

Sia $F(x,y) = e^{2xy} + \cos(y^2) + y + 2\cos(\pi x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$F(1,0) = 0$.

$F_x(x,y) = 2y\, e^{2xy} - 2\pi \,\text{sen}(\pi x) \implies F_x(1,0) = 0$

$F_y(x,y) = 2x e^{2xy} - 2y \,\text{sen}(y^2) + 1 \implies F_y(1,0) = 3$.

$$F_x(x,y) = 2y e^{2xy} - 2\pi \operatorname{sen}(\pi x) \Longrightarrow F_x(1,0) = 0$$

$$F_y(x,y) = 2x e^{2xy} - 2y \operatorname{sen}(y^2) + 1 \Longrightarrow F_y(1,0) = 3$$

Dini $\Rightarrow$ $\exists I$ intorno di $x_0 = 1$ $\exists J$ intorno di $y_0 = 0$, $\exists! \varphi : I \to J$

t.c. $\forall (x,y) \in I \times J$

$$(x,y) \in E \iff y = \varphi(x)$$

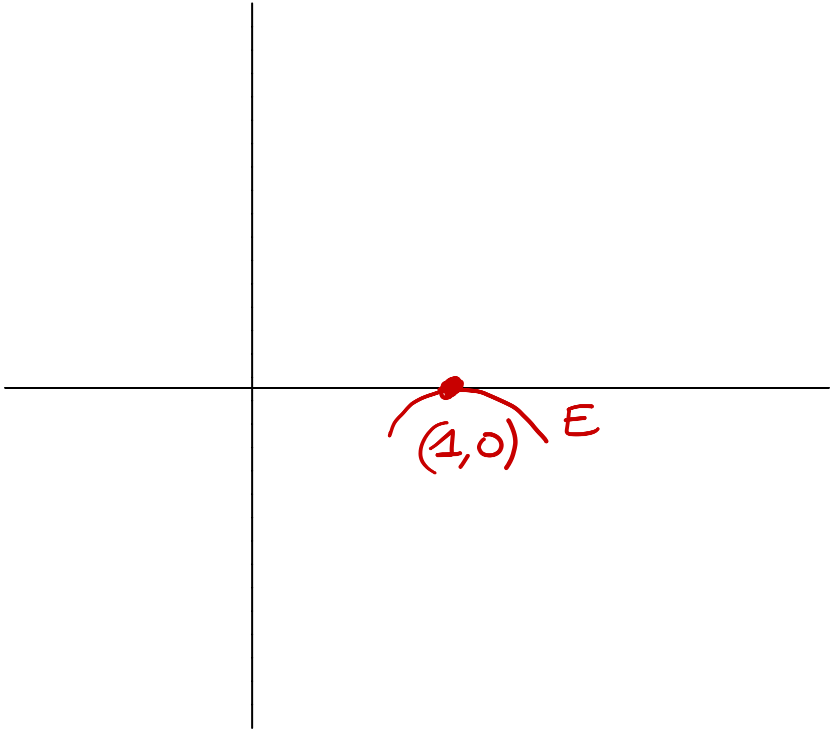
$$\varphi(1) = 0; \quad \varphi'(1) = -\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = 0;$$

$$\varphi''(1) = -\frac{F_{xx}(1,0)}{F_y(1,0)} = -\frac{2\pi^2}{3}$$

$$F_{xx}(x,y) = 4y^2 e^{2xy} - 2\pi^2 \cos(\pi x) \Longrightarrow F_{xx}(1,0) = 2\pi^2$$

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \quad \text{per } x \to 1$$

$$= 0 + 0 - \frac{\pi^2}{3}(x-1)^2 + \quad " \quad "$$


(1,0)
E

- **Esercizio:** Sia

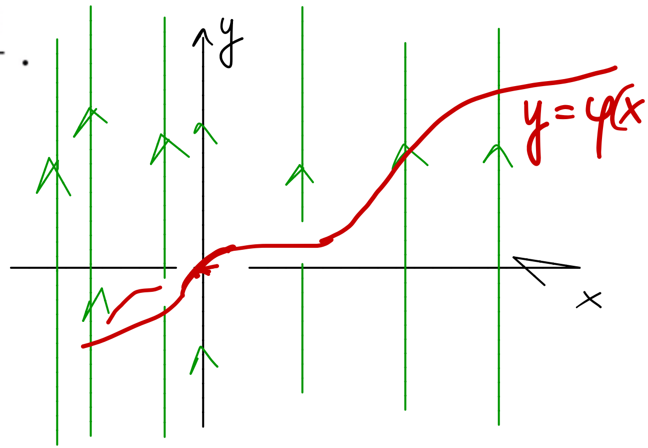
$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1\,.$$

Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutta una semiretta della forma $(-\alpha, +\infty)$, con $\alpha > 0$, una funzione $y = \varphi(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, \varphi(x)) = 0$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di $\varphi(x)$ con punto iniziale $x_0 = 0$, e calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,.$$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$F_y(x,y) = (6y^2+1)e^{2y^3+y} > 0 \quad \forall (x,y)$



$$\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = -x^3-x-1; \quad \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = +\infty$$

<u>OSS</u> $-x^3-x-1<0 \quad \forall x\in(-\alpha,+\infty)$

Per un tale x la funzione $g(y)=F(x,y)$ è:

1) strettamente crescente; 2) positiva per y abbastanza grande

3) negativa per y abbastanza "grande" in modulo e negativo

$$\Rightarrow \forall x\in(-\alpha,+\infty)\ \exists!\ y=\varphi(x) \text{ t.c. } F(x,y)=0$$

<u>OSS</u> $x_0=0 \Rightarrow \varphi(0)=0$ Applichiamo Dini in $(0,0)$

$$F_y(0,0)=1; \quad F_x(0,0)=-1$$

$$\varphi'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = 1$$

$$F_{xx}(x,y)=-6x$$

$$F_{xy}(x,y)=0$$

$$F_x(x,y)=-1-3x^2$$

$$F_{xx}(0,0)=0$$

$$F_{yy}(x,y)=e^{2y^3+y}\cdot\left(12y+(6y^2+1)^2\right)$$

$$\varphi''(0) = -\frac{\cancel{F_{xx}}+2\cancel{F_{xy}}+F_{yy}}{F_y(0,0)} = -\frac{1}{1} = -1;$$

$$F_{yy}(0,0)=1$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, x + \varphi''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x)}{x} \quad \nexists$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \pm\infty$$

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI DINI ALLE CURVE DI LIVELLO

Sia $F(x,y) \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto.
consideriamo la "curva di livello" $E_a = \{(x,y) \in A \text{ t.c. } F(x,y) = a\}$

Sia $(x_0, y_0) \in E_a$. Diremo che (x_0, y_0) è un punto regolare di E_a se $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Altrimenti lo chiameremo punto singolare.

Sia (x_0, y_0) un punto regolare di E_a. $\Rightarrow$ una delle F_x, F_y è diversa da zero. Supponiamo $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora, applicando Dini a $G(x,y) = F(x,y) - a$, otteniamo che, localmente, E_a è il grafico di una $y = \varphi(x)$. Analogamente scambiando i ruoli di x e y.

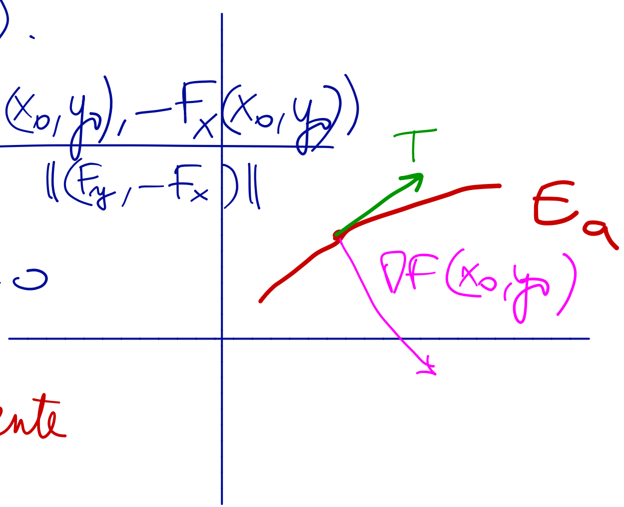
COROLLARIO Nell'intorno di un punto regolare (x_0, y_0) l'insieme di livello E_a è una curva regolare

Come è orientato in tale punto il gradiente di F?

Supponiamo $F_y(x_0,y_0) \neq 0 \overset{\text{Dini}}{\Longrightarrow}$ L'insieme di livello è (localmente) il grafico di $y = \varphi(x)$.

$$\varphi'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} \Rightarrow \underline{T} = \frac{(F_y(x_0,y_0), -F_x(x_0,y_0))}{\|(F_y, -F_x)\|}$$

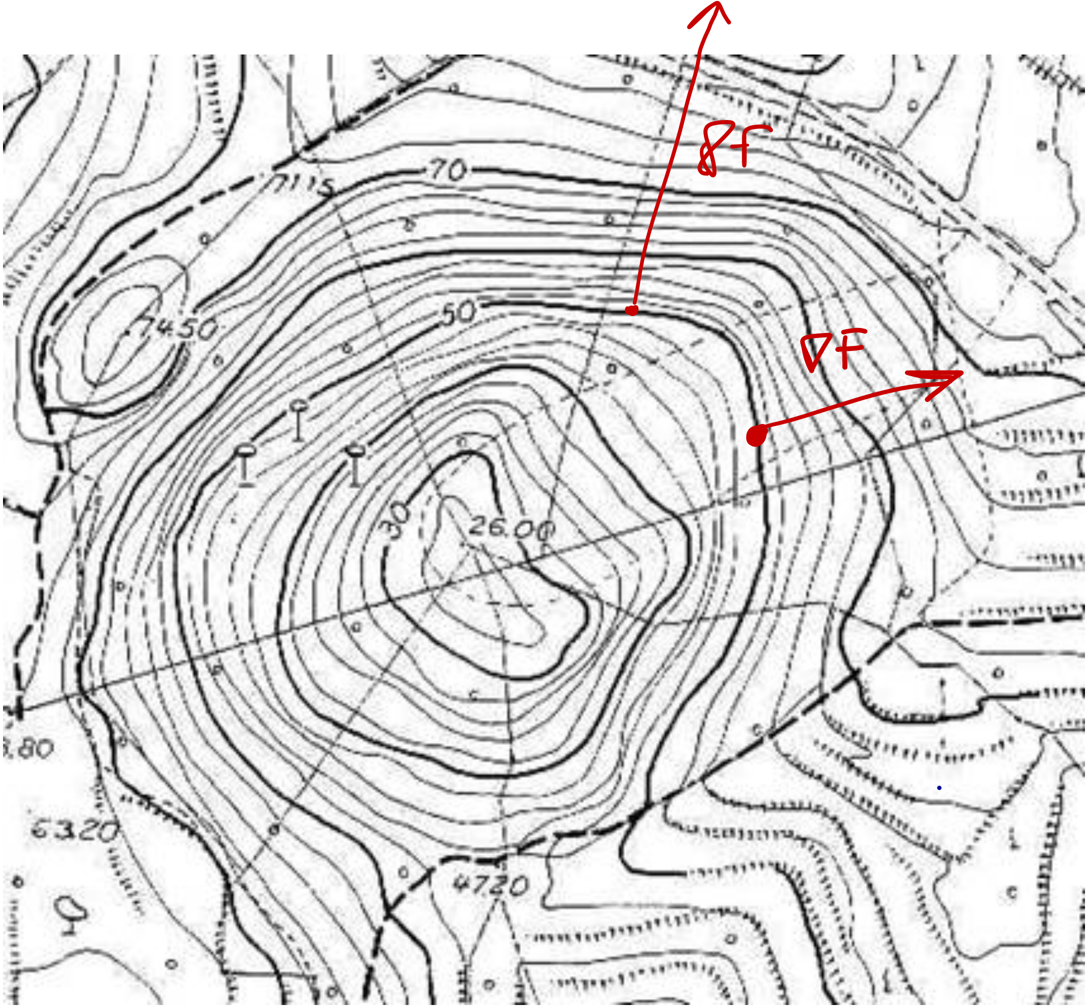
$$\nabla F(x_0,y_0) \cdot \underline{T} = \frac{F_x F_y - F_y F_x}{\| \ldots \|} = 0$$



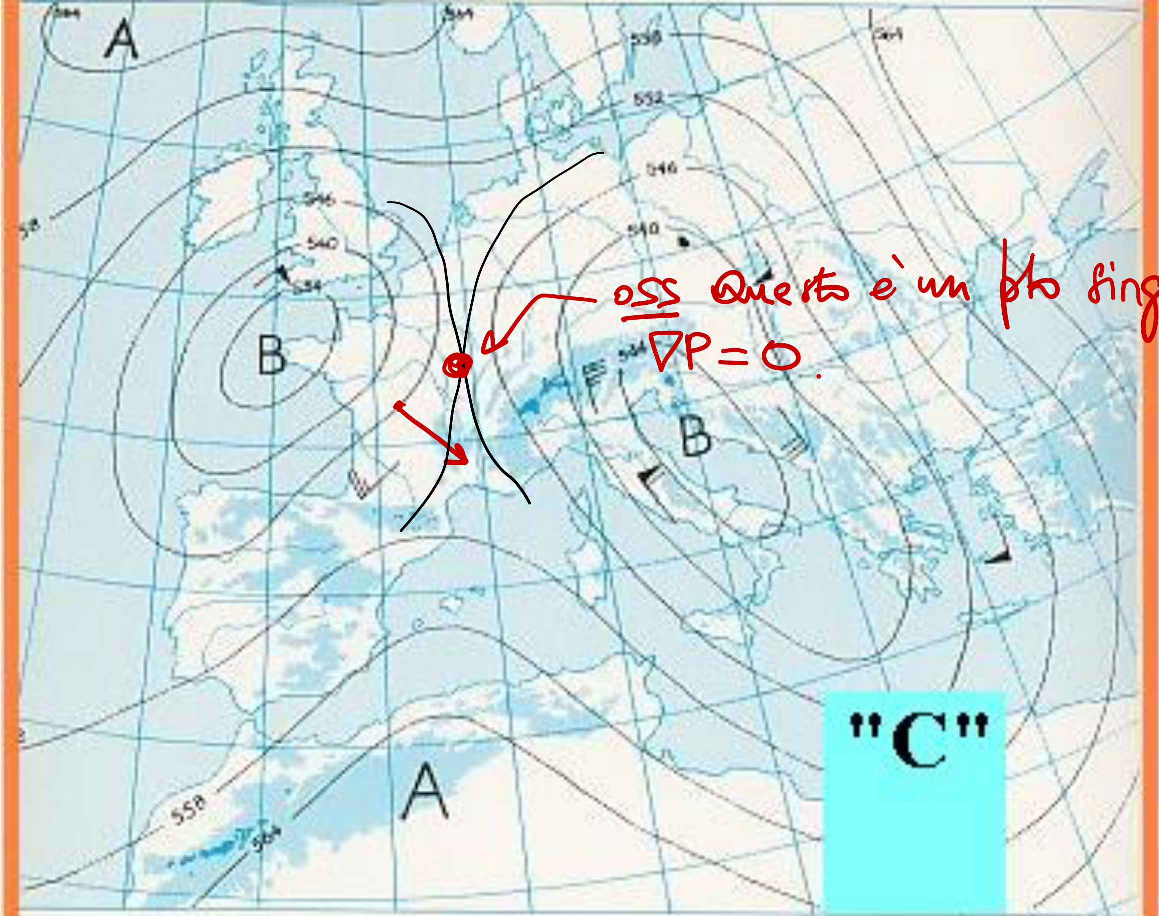
$\Rightarrow$ in un punto regolare il ∇F è ortogonale al versore tangente alla curva di livello

COROLLARIO

In un pto regolare di una curva di livello di F, ∇F è ortogonale a tale curva.



70
7115
7450
50
30
26.00
5.80
6320
4720
δf
∇f



oss Questo è un pto singolare!
$\nabla P = 0$.

Particolare di carta meteorologica in quota (topografia assoluta della superficie isobarica di 500 mb. corrispondente a circa 5500 m di quota) del 18 gennaio 1979 ore 0100.

TEOREMA FUNZIONI IMPLICITE IN DIM. 3

Sia $F(x,y,z) \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto. Sia $(x_0,y_0,z_0) \in A$ t.c.

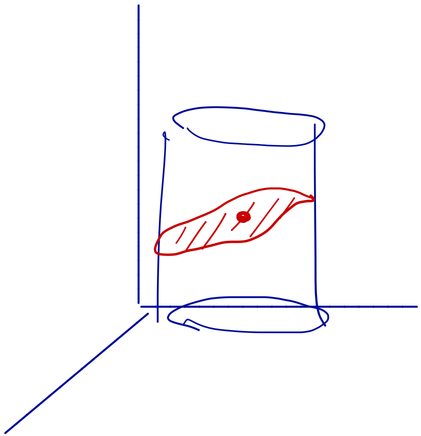
$F(x_0,y_0,z_0) = 0$, $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ intorno $B_r(x_0,y_0)$; $\exists$ intorno J di z_0 t.c.

$\forall (x,y,z) \in B_r(x_0,y_0) \times J$ $\exists!$ $z = \varphi(x,y)$ t.c.

$F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. In altre parole, in $B_r(x_0,y_0) \times J$

$$F(x,y,z) = 0 \iff z = \varphi(x,y)$$



OSS $\varphi(x_0,y_0) = z_0$

Inoltre $\varphi \in C^1(B_r(x_0,y_0))$, e si ha

$$\varphi_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))} \ ; \quad \varphi_y(x,y) = -\frac{F_y(\quad)}{F_z(\quad)}$$

In particolare $\varphi_x(x_0,y_0) = -\dfrac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$ etc..

Dim. non fatta, ma è del tutto simile a quella in 2 variabili.

- **Esercizio:** Mostrare che l'equazione

$$F(x,y,z) = x^2e^z + ze^y + y^2 = 0$$

si esplicita nella forma $z = \varphi(x, y)$ in un intorno di $(0, 0, 0)$, e trovare $\nabla\varphi(0, 0)$.

$F_x(x,y,z) = 2xe^z$, $F_x(0,0,0) = 0$

$F_y(x,y,z) = ze^y + 2y$, $F_y(0,0,0) = 0$

$F(0,0,0) = 0$;

$F_z(x,y,z) = x^2e^z + e^y \Rightarrow F_z(0,0,0) = 1 \neq 0.$

Dini $\Longrightarrow \exists$ intorno $B_r(0,0)$, $\exists$ J intorno di $z_0 = 0$

$\exists!\ \varphi(x,y) : B_r(0,0) \longrightarrow J$ t.c.

$F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. In altre parole, nel cilindro

si ha $F(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow z = \varphi(x,y)$

$$\nabla \varphi(0,0) = (0,0)$$