Dispense del Corso di Disegno, tenuto da Riccardo Migliari
nella Facoltà di Architettura 'Ludovico Quaroni' della 'Sapienza' Università di Roma
nell'Anno Accademico 2009 –2010

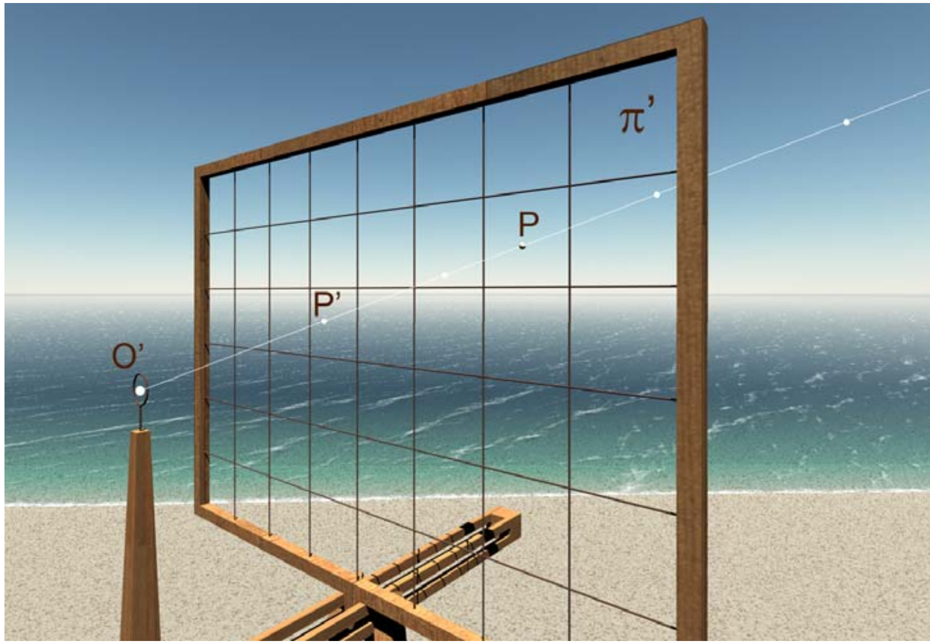
La prospettiva

e i suoi strumenti teorici e tecnici

3

Il punto di fuga, ovvero come la prospettiva riduce l'infinito al finito

Quando si è ben compresa la relazione geometrica che lega una retta dello spazio reale alla sua immagine prospettica, è possibile sviluppare altre interessanti considerazioni, che, pur avendo un carattere prevalentemente teorico, consentono poi deduzioni di valore pratico.
Innanzitutto, consideriamo un punto isolato nello spazio, come **P**, e la sua prospettiva **P**': è evidente che, dati un centro di proiezione **O**', un piano di quadro π' e il punto **P** esiste una sola immagine prospettica di **P** ed è il punto **P**'. Si dice anche che a **P** corrisponde **P**' nella prospettiva di centro **O**' e quadro π'.
Ma proviamo a rovesciare la relazione, chiedendoci quale punto corrisponde a **P**' nella suddetta relazione prospettica: ci accorgiamo subito che la nostra richiesta non ha una unica e determinata risposta che la soddisfi, perché al punto **P**' corrispondono, nella prospettiva che abbiamo stabilito, tutti i punti dello spazio che si trovano allineati sulla retta **O**'**P**' (fig. 3.1). Perciò la relazione che lega **P** e **P**' è univoca, nel senso che **P** è legato a **P**' ma **P**' non è legato esclusivamente a **P**.
Consideriamo ora, invece, il punto **P** non come entità isolata nello spazio, ma come entità che fa parte di un insieme, quello dei punti che appartengono alla retta **r** (fig. 3.2). In questo caso, la relazione che lega il punto **P** di **r** e la sua prospettiva **P**' di **r**' è biunivoca, perché a **P** corrisponde **P**' su **r**' e a **P**' corrisponde **P** su **r**.
Infatti è venuta meno ogni ambiguità, perché la retta proiettante **O**'**P**'**P** stacca sulla retta **r** oggettiva il punto **P** e nessun altro.
Quindi possiamo dire che a un punto **P**, che appartiene a una retta **r**, corrisponde, nella prospettiva di centro **O**' e quadro π', il punto **P**', che appartiene alla immagine prospettica **r**' della retta **r**, *e viceversa*.
C'è un modo assai semplice per capire il significato di questa relazione *biunivoca*: immaginiamo che vi sia una lunga fila di persone, allineate lungo la retta **r**, e scattiamo una fotografia della fila. Ebbene, ogni persona **P** avrà un suo ritratto **P**' nella fotografia (cioè nella prospettiva) e, viceversa, ad ogni ritratto corrisponderà una persona, e nessun'altra.
Dunque ogni persona sarà legata al suo ritratto, e viceversa, dalla retta proiettante **O**'**P**'**P** nella relazione biunivoca della prospettiva.



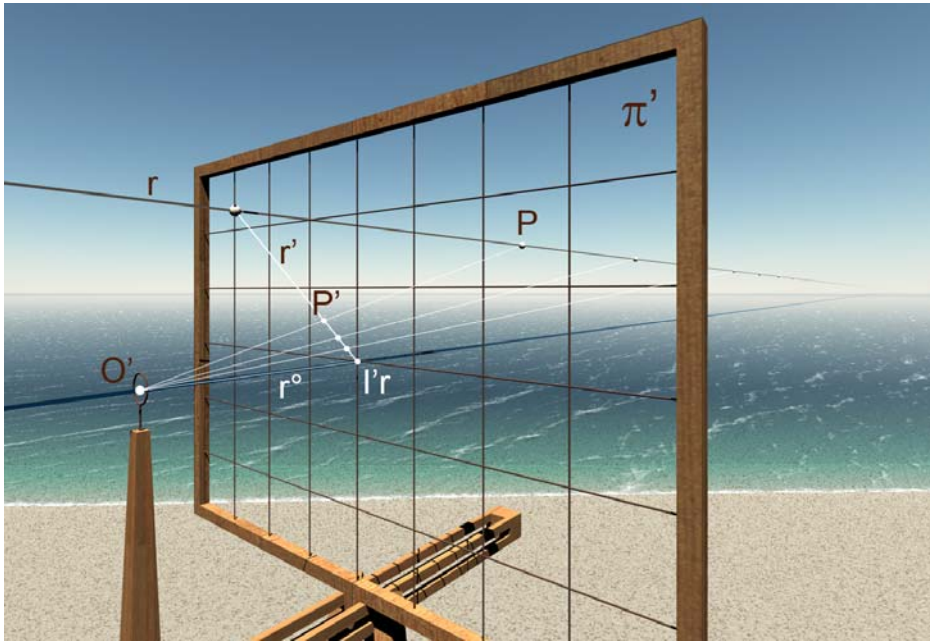


Fig. 1.1 In alto: relazione univoca tra un punto P, isolato nello spazio, e la sua prospettiva P'.

Fig. 1.2 In basso: relazione biunivoca tra un punto P, appartenente a una retta, e la sua prospettiva P'.

Ciò premesso, appare legittima, e per certi versi inquietante, la seguente domanda: a quale persona corrisponde, nella fila, il ritratto che abbiamo chiamato **l'r**, cioè la fuga della retta?
Come sappiamo, la retta proiettante r°, che passa per questo punto, è parallela, per costruzione, alla retta **r**, ma due rette parallele non hanno alcun punto in comune e perciò al ritratto **l' r** corrisponde il volto di una persona che non esiste nello spazio reale.
La storia della prospettiva, da Guidoubaldo del Monte ai giorni nostri, racconta le varie soluzioni date a questo paradosso[1], noi ci limitiamo qui a dire che, se è vero che due rette parallele non hanno, nello spazio euclideo, alcun punto in comune, è pur vero che in comune hanno una qualità: la loro *direzione*. E dunque diremo, semplicemente, che il punto di fuga è l'*immagine della direzione* della retta cui appartiene e delle altre che le sono parallele.
E' facile comprendere che **l'r** è il ritratto dell'ultimo della fila, cioè del punto più lontano, tanto lontano da non poterne misurare la distanza (punto evanescente *vanishing point*, come diceva Brook Taylor[2]). Ed è per questa ragione che Orseolo Fasolo diceva che la prospettiva tratta l'infinito in termini finiti[3].

Cos'è l'orizzonte?

Se due rette distinte, cioè non coincidenti, si incontrano in un punto, individuano un piano. Su quel piano vi sono altre rette, in numero infinito, ma per costruirlo, due sole sono sufficienti.
Le infinite rette del piano hanno ciascuna una direzione e perciò al piano appartengono infinite direzioni. Queste direzioni formano una classe che descrive la posizione del piano nello spazio e che si chiama *giacitura*.
Quindi, la giacitura è una qualità del piano, così come la direzione, è una qualità della retta.
Ecco due facili esempi: in un intorno ben definito dello spazio architettonico, ad esempio una stanza, il filo a piombo materializza la *direzione verticale*. La superficie dell'acqua contenuta in un bicchiere assume invece una *giacitura orizzontale*. Ora è evidente che, così come esistono infinite rette verticali, tutte parallele, esistono altresì infiniti piani orizzontali, tutti paralleli.

[1] Sulla storia dell'infinito in prospettiva vedi: R. Migliari, la prospettiva e l'infinito, in Disegnare, idee immagini, Anno VI, n. 11, Dicembre 1995. Questo saggio è consultabile all'indirizzo: http://www.migliari.it/pagine/ricerche_it.html

[2] Cfr. Brook Taylor (1685 – 1731), Principles of linear perspective, or the Art of designing upon a plane the representation of all sortes of objects, as they appear to the eye, Londra, 1715.

[3] Orseolo Fasolo, architetto (1916 — 1992), ha insegnato la geometria descrittiva e le sue applicazioni nella facoltà di architettura di Roma tra il 1965 e il 1985, sviluppando l'eredità culturale di Francesco Severi (1920 – 1940) ed Enrico Bompiani (1940 – 1960). Vedi: R. Migliari, *L'insegnamento della Geometria Descrittiva e delle sue Applicazioni* in La Facoltà di Architettura dell'Università di Roma 'La Sapienza' dalle origini al Duemila – Discipline, Docenti, Studenti, a cura di Vittorio Franchetti Pardo, Gangemi, Roma 2001. Questo saggio è consultabile all'indirizzo: http://www.migliari.it/pagine/ricerche_it.html

Abbiamo spiegato come la prospettiva è in grado di rappresentare la direzione di una retta **r** per mezzo del punto di fuga **I'r**.
E' possibile, in modo analogo, rappresentare la giacitura di un piano?
Certamente: basta rappresentare le direzioni di due rette incidenti del piano, ad esempio **r** e **s**: i punti di fuga, **I'r** e **I's**, di queste due rette, individuano una retta **i'**, che è l'immagine della giacitura del piano **rs** e che, in analogia, si dice *fuga del piano*.
L'esempio più immediato di fuga di un piano è l'orizzonte, anche se esiste una percepibile differenza tra l'orizzonte geometrico e l'orizzonte fisico, come, ad esempio, quello che si vede al mare, perché quest'ultimo risente della curvatura della Terra ed è leggermente più basso dell'orizzonte costruito nella prospettiva.
Riassumendo: se una retta sta su un piano, la sua direzione appartiene alla giacitura di quel piano e, di conseguenza, la fuga della retta appartiene alla fuga del piano.
Un qualsiasi piano, indefinitamente esteso, taglia il quadro secondo una retta **t**, che si chiama *traccia* del piano. C'è una sola eccezione a questa regola ed è rappresentata dai piani che sono paralleli al quadro: ne parleremo a breve.
Se una retta sta su un piano, incontra il quadro in un punto **T'** della traccia **t**' del piano[1].

Perciò, quando una retta appartiene ad un piano ha la traccia sulla traccia del piano e la fuga sulla fuga del piano[2].

Per dare un senso concreto a queste considerazioni geometriche, immaginiamo di estendere il quadro nella medesima situazione delle figure precedenti e tracciamo due rette qualsiasi, **r** e **s**, sulla spiaggia e sulla superficie del mare (fig. 3.3). Entrambe le rette sono orizzontali ed hanno fuga nella fuga dei piani orizzontali, che è, appunto, l'orizzonte, rispettivamente nei punti **I'r** e **I's**.

Entrambe incontrano il quadro, rispettivamente nelle tracce **T'r** e **T's**.
Dunque **r**' è la retta che passa per **T'r** e **I'r**, mentre **s**' è la retta che passa per **T's** e **I's**.
Tra tutti i piani orizzontali, quello su cui sta in piedi l'osservatore assume una particolare importanza in prospettiva: divide la terra dal cielo, stabilisce un riferimento per la misura delle altezze. Per

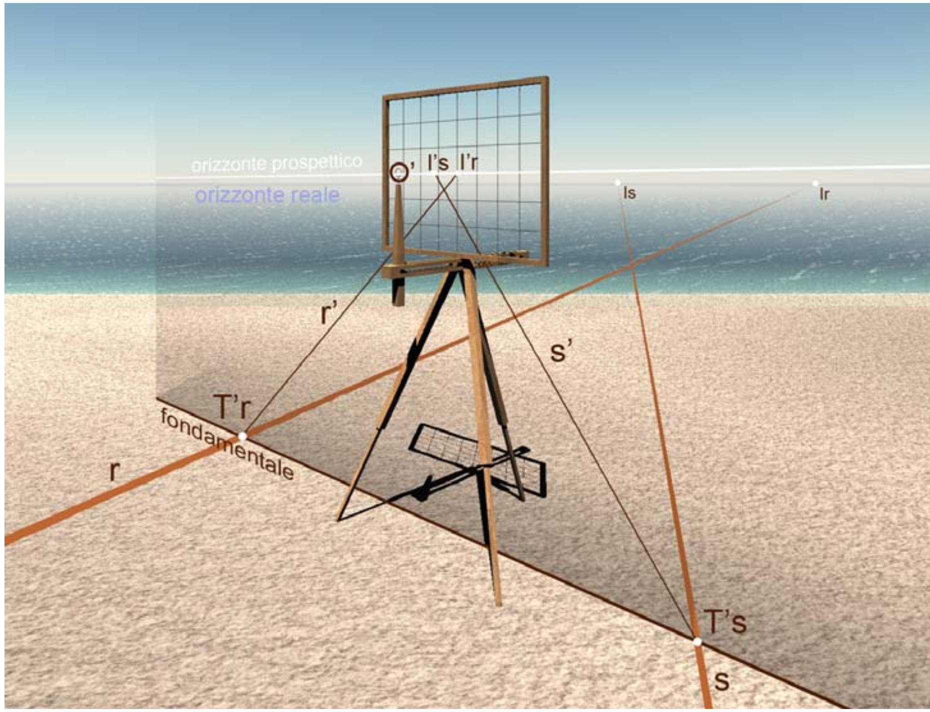


Fig. 3.3 Prospettiva di rette orizzontali del piano geometrale

[1] Si noti che anche i simboli delle tracce assumono l'indice ' (primo), per indicare che sono intersezioni con il primo quadro (π').

[2] E' facile dimostrare questa legge: se un piano α qualsiasi taglia il quadro in una retta **t**, una qualsiasi retta **r** che appartenga pure ad α, può essere incidente o parallela a **t**, nel primo caso ha in comune con la retta **t** il punto **T**, nel secondo caso ha in comune la direzione; analogamente, se una retta **r** appartiene ad un piano α, la direzione **I** della retta appartiene alla giacitura **i** del piano, perciò la retta i può essere vista come l'intersezione di α con un piano luogo geometrico di tutte le direzioni e di tutte le giaciture dello spazio, che si usa chiamare piano improprio; è lecito immaginare questo piano come una sfera che ha il centro nell'osservatore e il raggio grande a piacere (o in misura indeterminata).

questo lo chiameremo, in ossequio a Desargues[1], *piano geometrale*, e lo indicheremo con il simbolo $\pi 1$ (leggi pi greco uno). L'orizzonte è, dunque, la fuga del piano geometrale e si indica con il simbolo **i'**$\pi 1$ (i primo di pi greco uno). La retta che il geometrale ha in comune con il quadro, cioè la sua traccia, si chiama *fondamentale*, e si indica con il simbolo **t'**$\pi 1$ (t primo di pi greco con uno).

[1] Cfr. A. Bosse, Manière universelle di Mr. Desargues pour pratiquer la perpsective par petit-pied, comme le Geometral, Paris 1648..