# ERRORI DI APPROSSIMAZIONE

richiami

# ERRORE DI MISURAZIONE

La misura sperimentale di una grandezza è inevitabilmente approssimata:
Ciò è dovuto agli errori di osservazione, ai limiti della strumentazione,
o anche alla semplicità di lettura di un dato. Per questo si utilizzano notazioni del tipo

$$\mathbf{a = (12.35 \pm 0.01)m}$$

per indicare che la misura non è precisa, e che il valore di **a** è noto,
ma con una incertezza di 1 cm, ossia che

$$\mathbf{12{,}34\ m \leq a \leq 12{,}36\ m}$$

CIFRE SIGNIFICATIVE :
in pratica si esprime una misura sperimentale (o in generale affetta da errori)
riportando solo le cifre sicure e la prima cifra incerta

$$\mathbf{a = 12.35m}$$

rappresentazione con 4 cifre significative
QUINDI PER MISURAZIONI SPERIMENTALI LE DUE SCRITTURE
**a = (12.35 ± 0.01)m** ED **a = 12.35m** SONO EQUIVALENTI

# TRONCAMENTO versus ARROTONDAMENTO

TRONCAMENTO: trascurare le cifre decimali che non interessano

**$\pi$= 3,141592653 . . . (pi greco numero reale con infinite cifre decimali)**

Allora

**3,14** (troncamento di $\pi$ con 2 cifre decimali) $3,14 \leq \pi=3,141592653\ldots<3,15$

**3,1415** (troncamento di $\pi$ con 4 cifre decimali) $3,1415 \leq \pi= 3,141592653\ldots<3,1416$

***e* = 2.71828 . . . (numero di Nepero, numero reale con infinite cifre decimali )**

**2.71** (troncamento di *e* con 2 cifre decimali) $2,71 \leq e=2,71828\ldots$

**2.7182** (troncamento di *e* con 4 cifre decimali) $2,7182 \leq e=2,71828\ldots$

ARROTONDAMENTO: scegliere la migliore approssimazione con un numero di cifre decimali fissato

(in pratica: Se l'ultima cifra decimale trascurata nel numero $x$ appartiene a {0,1,2,3,4} l'arrotondamento e il troncamento sono uguali, e l'arrotondamento di $x$ è minore o uguale a $x$ Se invece l'ultima cifra trascurata appartiene a {5,6,7,8,9} l'arrotondamento è maggiore di $x$)

**3.14** (arrotondamento di $\pi$ con 2 cifre decimali) $3,14 \leq \pi= 3,141592653\ldots$

**3.1416** (arrotondamento di $\pi$ con 4 cifre decimali) $\pi= 3,141592653\ldots \leq 3,1415$

**2.72** (arrotondamento di *e* con 2 cifre decimali) $e=2,71828\ldots \leq 2,72$

**2.7182** (arrotondamento di *e* con 4 cifre decimali) $2,7182 \leq e=2,71828\ldots$

# PROPAGAZIONE DELL'ERRORE

$\mathbf{a= \alpha \pm \Delta a}$ $\mathbf{b= \beta \pm \Delta b}$

cioè SE E SOLO SE

$\boldsymbol{\alpha - \Delta a \leq a \leq \alpha + \Delta a}$ $\boldsymbol{\beta - \Delta b \leq b \leq \beta + \Delta b}$

ALLORA

$$\mathbf{a+b = \alpha+\beta \pm (\Delta a + \Delta b)}$$

$$\mathbf{a-b = \alpha-\beta \pm (\Delta a + \Delta b)}$$

infatti $(\alpha - \Delta a)+(\beta - \Delta b)\leq a+b\leq (\alpha + \Delta a) +(\beta + \Delta b)$

cioè $\alpha+\beta - (\Delta a + \Delta b) \leq a+b\leq \alpha+\beta + (\Delta a + \Delta b)$

Analogamente, essendo $- \beta - \Delta b\leq - b\leq - \beta + \Delta b$,

segue $(\alpha - \Delta a) + (- \beta - \Delta b)\leq a - b \leq (\alpha + \Delta a) + (- \beta + \Delta b)$

cioè $\alpha - \beta - (\Delta a + \Delta b) \leq a+b\leq \alpha - \beta + (\Delta a + \Delta b)$

Supponiamo che

**$a=(12{,}35 \pm 0{,}01)$m e $b=(10{,}75 \pm 0{,}02)$m**

**siano le misure dei lati di un edificio.**

**Per calcolare l'area (della base) dell'edificio dobbiamo calcolare ab che errore commettiamo?**

**Potremo dire che**

$$ab = 12{,}35 \cdot 10{,}75\ m^2 \pm$$
$$\pm\ (12{,}35 \cdot 0{,}02 + 10{,}75 \cdot 0{,}01)\ m^2$$

**Anche se sarebbe più preciso dire che**

$$ab = 12{,}35 \cdot 10{,}75\ m^2 + 0{,}01 \cdot 0{,}02\ m^2 \pm (12{,}35 \cdot 0{,}02 + 10{,}75 \cdot 0{,}01)\ m^2$$

**Ma la differenza è di $2 \cdot 10^{-4}$ m$^2$, ed è quindi trascurabile,**

**se ci interessa una precisione fino alla seconda cifra decimale**

SIA $\mathbf{a = \alpha \pm \Delta a}$ $\mathbf{b = \beta \pm \Delta b}$

con $\mathbf{0 \le \alpha - \Delta a \le a \le \alpha + \Delta a}$ $\mathbf{0 \le \beta - \Delta b \le b \le \beta + \Delta b}$

ALLORA $\mathbf{ab = \alpha\beta + \Delta a\, \Delta b \pm (\alpha\Delta b + \beta\Delta a)}$

E quindi l'errore assoluto è $\mathbf{\alpha\Delta b + \beta\Delta a}$

**E l'errore relativo =ERRORE ASSOLUTO/ VALORE della GRANDEZZA vale**

$\mathbf{(\alpha\Delta b + \beta\Delta a)/(\alpha\beta + \Delta a\, \Delta b) =_{circa} (\alpha\Delta b + \beta\Delta a)/(\alpha\beta) = (\Delta b/\beta) + (\Delta a/\alpha)}$

**dove abbiamo trascurato il prodotto $\Delta a\, \Delta b$ al denominatore,**

**in quanto ha, in genere, un ordine di grandezza molto piccolo:**

**l'errore relativo del prodotto è la somma degli errori relativi per a e per b**

infatti $(\alpha - \Delta a)(\beta - \Delta b) \le ab \le (\alpha + \Delta a)(\beta + \Delta b)$

cioè $\alpha\beta - \alpha\Delta b - \beta\Delta a + \Delta a\, \Delta b \le ab \le \alpha\beta + \alpha\Delta b + \beta\Delta a + \Delta a\, \Delta b$

cioè $\alpha\beta + \Delta a\, \Delta b - (\alpha\Delta b + \beta\Delta a) \le ab \le \alpha\beta + \Delta a\, \Delta b + (\alpha\Delta b + \beta\Delta a)$