5. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\alpha - y^2}{y(x-1)^2}\,,\; \frac{xy^2-1}{y^2(x-1)} \right)$$

sia conservativo nell'insieme $(1,+\infty)\times(0,+\infty)$. Per tali valori di α, calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) = \left(2 + \frac{4}{\pi}\arctan(1-t)\,,\; \sqrt{1+3t^2} \right), \qquad t \in [0,1]\,.$$

Visto che il settore $(1,+\infty)\times(0,+\infty)$ è semplicemente connesso il campo è ivi conservativo se e solo se è irrotazionale.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\alpha - y^2}{y(x-1)^2}\right] = -\frac{y^2+\alpha}{y^2(x-1)^2}\,; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2-1}{y^2(x-1)}\right) = \frac{1-y^2}{y^2(x-1)^2}\,;$$

quindi il campo è conservativo se e solo se $\alpha = -1$.

La curva è tutta contenuta nel settore sopra indicato.

Pertanto per calcolare il lavoro basta calcolare un potenziale

Si ha $V(x,y) = -\int \frac{1+y^2}{y(x-1)^2}\,dx = \frac{1+y^2}{y(x-1)} + g(y)$ $(*)$

Del resto, imponendo che $V_y(x,y) \equiv F_2(x,y)$, si ottiene

$$\frac{y^2-1}{y^2(x-1)} + g'(y) = \frac{xy^2-1}{y^2(x-1)}, \quad \text{da cui} \quad g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y\,(+c)$$

Quindi dalla $(*)$ si ottiene $V(x,y) = \frac{xy^2+1}{y(x-1)} + c$

Il lavoro deve essere pari alla differenza di potenziale tra gli estremi della curva, quindi

$$L = \int_\gamma F \cdot T\, ds = V(2,2) - V(3,1) = \frac{5}{2} \qquad \square$$