4. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 4x^2 - 4y^3 + 4xy^2 - 7x\,.$$

Successivamente, dire se esistono massimo e minimo assoluti nel primo quadrante $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

Le derivate parziali di f valgono:

$$f_x(x,y) = 8x + 4y^2 - 7$$

$$f_y(x,y) = -12y^2 + 8xy$$

Annullando la seconda si ottiene $y=0$ oppure $x = \frac{3}{2}y$

Se $y=0$, annullando f_x si ottiene $x = \frac{7}{8}$.

Se invece $x = \frac{3}{2}y$, dall'annullamento di f_x segue

$4y^2 + 12y - 7 = 0$ da cui $y = -\frac{7}{2}$ opp. $y = \frac{1}{2}$

Quindi i punti critici di f sono $P_1\left(\frac{7}{8},0\right)$, $P_2\left(-\frac{21}{4},-\frac{7}{2}\right)$, $P_3\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$

Per classificarli, calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 8, \quad f_{xy}(x,y) = 8y, \quad f_{yy} = -24y + 8x;$$

Quindi la matrice Hessiana nei tre punti vale

$$D^2 f(P_1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_1 \text{ è punto di minimo relativo}$$

$$D^2 f(P_2) = \begin{bmatrix} 8 & -28 \\ -28 & 42 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_2 \text{ è punto di sella.}$$

$$D^2 f(P_3) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_3 \text{ è punto di sella}$$

Quanto alla seconda domanda, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,1) = \lim_{x\to+\infty} (4x^2-3x-4) = +\infty.$$

$$\lim_{y\to+\infty} f(1,y) = \lim_{y\to+\infty} (-4y^3+4y^2-3) = -\infty$$

Quindi nel primo quadrante f è illimitata sia superior-mente che inferiormente. Dunque non ha né max, né min. assoluti. $\square$