3. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2\alpha y'(x) + 3y(x) = 0\,, \qquad \text{(E)}$$

trovare i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali **tutte** le soluzioni dell'equazione sono infinitesime per $x \to +\infty$.

Si tratta di un'equazione lineare del 2° ordine, a coefficienti costanti. L'equazione algebrica associata è

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 3 = 0 \qquad \text{(EA)}$$

Distinguiamo tre casi, a seconda del segno del discriminante:

1) se $|\alpha| > \sqrt{3}$, (EA) ammette due radici distinte:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3}$$

Quindi l'integrale generale di (E) è:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Queste sono tutte infinitesime per $x \to +\infty$ se λ_1 e λ_2 sono entrambi negativi, cioè se $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3} < 0$

Questo è vero se e solo se $\boxed{\alpha < -\sqrt{3}}$

2) se $|\alpha| = \sqrt{3}$, allora l'eq^{ne} (EA) ha la radice doppia $\lambda = \alpha$.

le soluzioni di (E) sono $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 + c_2 x)$.

Quindi le soluzioni sono tutte infinitesime per $x \to +\infty$ se e solo se $\boxed{\alpha = -\sqrt{3}}$.

3) se $|\alpha| < \sqrt{3}$, le soluzioni di (EA) sono complesse coniugate:

$\lambda = \alpha \pm i\sqrt{3 - \alpha^2}$, quindi l'integrale generale di (E) è

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right), \text{ dove } \beta = \sqrt{3 - \alpha^2}$$

Le soluzioni sono tutte infinitesime se e solo se $\alpha < 0$, quindi se e solo se $\boxed{-\sqrt{3} < \alpha < 0}$.

Mettendo insieme quanto ottenuto nei casi 1), 2) e 3), si deduce che le soluzioni di (E) sono tutte infinitesime se e solo se $\alpha < 0$.

$\square$