2. a) Mostrare che il solido

$$E = \left\{ (x, y, z) \ : \ x \geq 0 \, , \ x^2 - x^4 \geq \sqrt{y^2 + z^2} \right\}$$

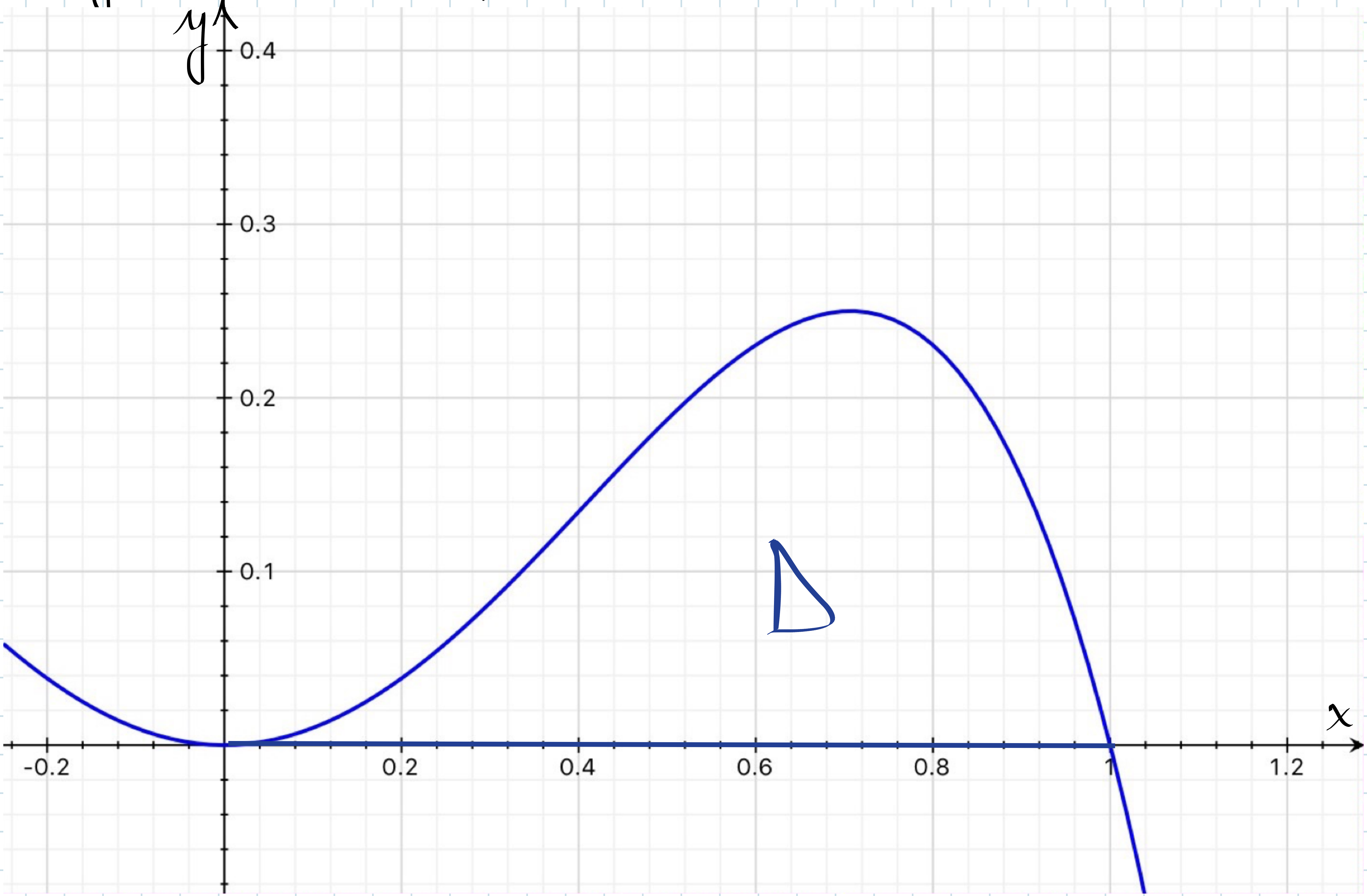
è di rotazione (attorno a quale asse?), e disegnarlo;
b) calcolare il volume di E;
c) trovare una parametrizzazione di ∂E come superficie regolare.

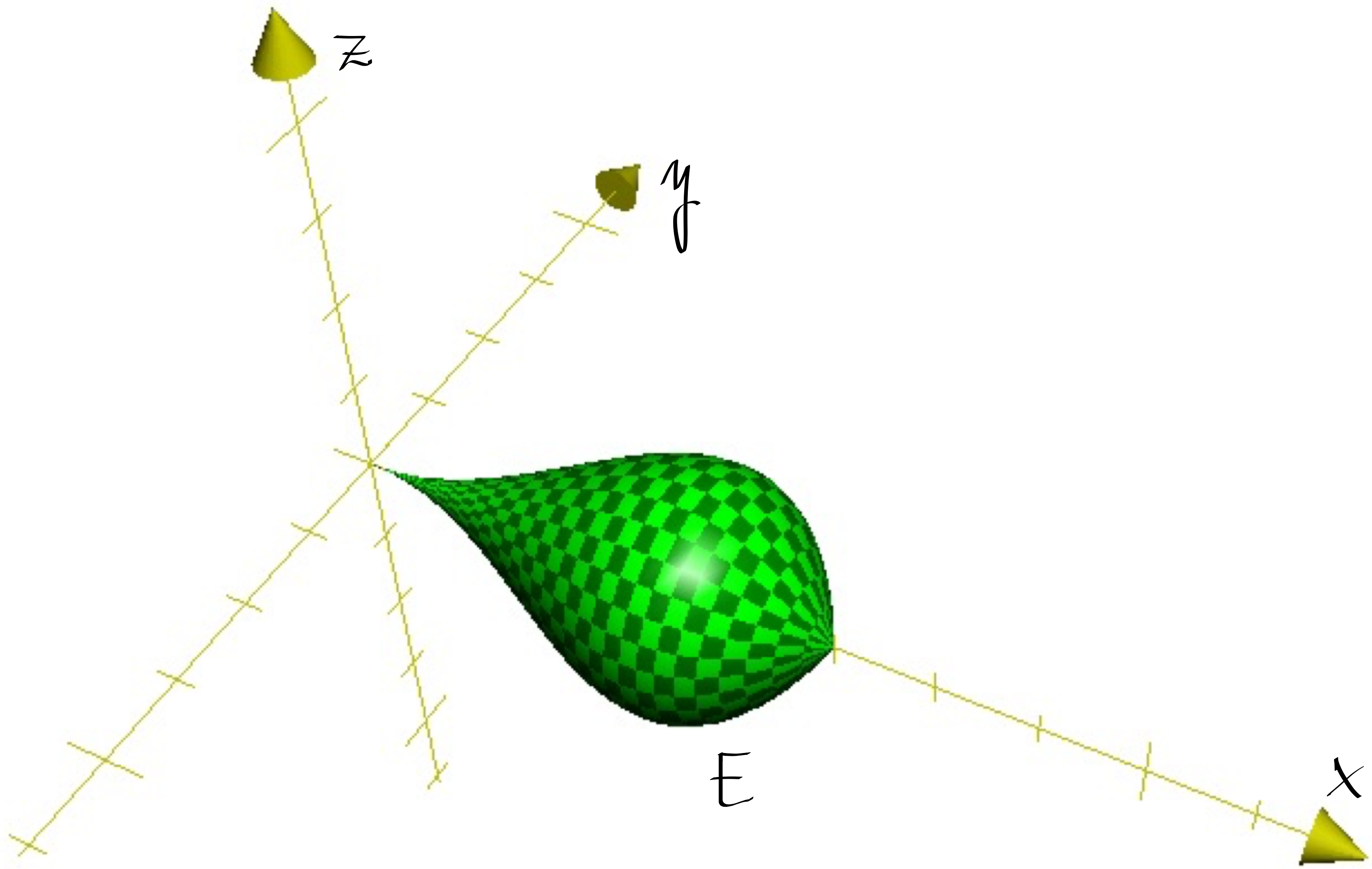
Poiché le disuguaglianze che definiscono E dipendono da y e z solo attraverso la quantità $\sqrt{y^2+z^2}$, cioè la distanza dall'asse x, E è un solido di rotazione attorno all'asse delle x. Esso è ottenuto facendo ruotare intorno all'asse x la regione piana $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x^2 - x^4, \ x \geq 0\}$.

Imponendo che $x^2 - x^4 \geq 0$, si trova $0 \leq x \leq 1$.

Quindi $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x^2 - x^4\}$.

Un rapido studio della funzione $x^2 - x^4$ porta al seguente disegno di D (risp. E):





z
y
E
x

Per calcolare il volume, utilizziamo il teorema di Guldino:

$$\text{vol } E = 2\pi \iint_D y \, dx\, dy = 2\pi \int_0^1 dx \int_0^{x^2-x^4} dy \; y =$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^6 + x^8) dx = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{8}{315}\pi.$$

Per quanto riguarda la parametrizzazione di ∂E, vista la simmetria assiale, conviene usare coordinate cilindriche "riferite all'asse x", e cioè:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e una parametrizzazione possibile è, tenuto conto che l'equazione della superficie è $\rho = \sqrt{y^2+z^2} = x^2 - x^4$,

$$\begin{cases} x = x \\ y = (x^2 - x^4)\cos\theta \\ z = (x^2 - x^4)\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad (x,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

$\square$