1. Data l'equazione

$$(x+1)y^2 + (x^2-2)y + \operatorname{sen}(xy) = -1\,,$$

si dimostri che in un intorno del punto $(0,1)$ essa descrive il grafico di una funzione φ di una sola variabile. Si determini

$$\lim_{y\to 1} \frac{\varphi(y)}{(y-1)^2}\,.$$

Poniamo $f(x,y) = (x+1)y^2 + (x^2-2)y + \operatorname{sen}(xy) + 1$. Si ha $f(0,1) = 0$.

Inoltre $f_x(x,y) = y^2 + 2xy + y\cos(xy)$,

$f_y(x,y) = 2y(x+1) + x^2 - 2 + x\cos(xy)$, da cui

$f_x(0,1) = 2$, $f_y(0,1) = 0$.

Poiché $f_x(0,1) \neq 0$. Si può applicare il teorema di Dini, che dice che esistono un intervallo $I = (-\delta, \delta)$, un intervallo $J = (1-\eta, 1+\eta)$ (con $\delta, \eta > 0$) ed una unica funzione

$\varphi : J \longrightarrow I$ t.c. per $(x,y) \in I \times J$ si ha

$$f(x,y) = 0 \iff x = \varphi(y) \qquad (\text{da cui } \varphi(1) = 0)$$

Inoltre φ è di classe $C^1(J)$ e $\forall y \in J$ si ha

$$\varphi'(y) = -\frac{f_y(\varphi(y), y)}{f_x(\varphi(y), y)}.$$

In particolare

$$\varphi'(1) = -\frac{f_y(0,1)}{f_x(0,1)} = 0$$

Inoltre si ha $\varphi''(1) = -\dfrac{f_{yy}(0,1)}{f_x(0,1)}$.

Poiché $f_{yy}(x,y) = 2(x+1) - x^2 \operatorname{sen}(xy)$, si ottiene

$f_{yy}(0,1) = 2$, e quindi $\varphi''(1) = -1$.

Scrivendo lo sviluppo di Taylor di φ, si ottiene

$$\varphi(y) = \varphi(1) + \varphi'(1)(y-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(y-1)^2 + o((y-1)^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(y-1)^2 + o((y-1)^2) \qquad \text{per } y \to 1.$$

Pertanto $\displaystyle\lim_{y\to 1} \frac{\varphi(y)}{(y-1)^2} = -\frac{1}{2}$ $\square$