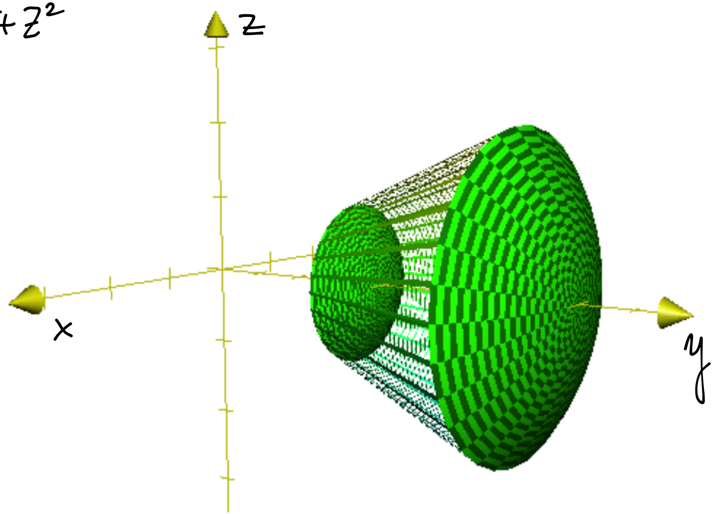
6. Disegnare l'insieme

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \geq 0\,,\ 3(x^2+z^2) \leq y^2\,,\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \right\},$$

e calcolarne il momento di inerzia rispetto all'asse y (densità unitaria, per semplicità).

Si tratta del solido delimitato dal cono $y = \sqrt{3}\sqrt{x^2+z^2}$ e dalle due sfere di centro l'origine e raggio rispettivamente 1 e 2.



Per calcolarne il momento d'inerzia, occorre calcolare l'integrale triplo

$$M = \iiint_D (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

Conviene usare coordinate sferiche in cui l'asse y gioca il ruolo abitualmente svolto dall' asse z:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \end{cases} \qquad \rho \in [1,2],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right],\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$M = \iiint_D (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} d\theta \int_1^2 d\rho\ \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\theta}_{\text{Jacobiano}} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{31}{5} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \ldots = \frac{31}{60}\pi\left(16 - 9\sqrt{3}\right)$$

sost. $\cos\theta = t$