5. Data la superficie φ di equazioni parametriche

$$\varphi(u,v) = (3\cos v\,,\ 3\sin v\,,\ u+v)\ , \qquad (u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]\,,$$

verificare che è una superficie regolare, e disegnarne il sostegno. Successivamente, calcolarne la posizione del baricentro.

La superficie è evidentemente di classe C^1, inoltre

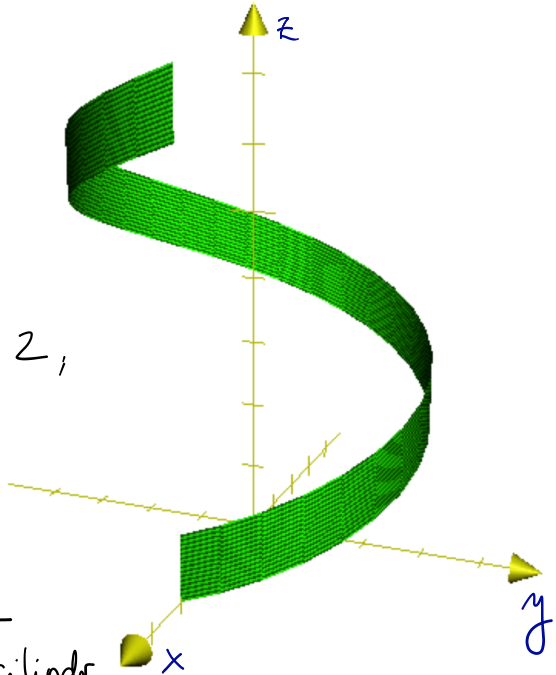
$\varphi_u(u,v) = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1);$

$\varphi_v(u,v) = (-3\,\text{sen}\,v,\ 3\cos v,\ 1)$

La matrice jacobiana ha sempre rango 2, in quanto la somma dei quadrati dei minori vale 9.

Infine φ è iniettiva.

Per disegnarne il sostegno, osservare che per u fissato si ottengono delle eliche cilindr.



mentre per v fisso si ottengono dei segmenti verticali.
La superficie così ottenuta ricorda la ringhiera di una scala a chiocciola

CALCOLO DEL BARICENTRO

$$\text{Area } \varphi = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \; 3 = 6\pi$$

$$x_B = \frac{1}{6\pi} \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \; 9\cos v = 0$$, come era prevedibile per simmetria

$$y_B = 0$$ (similmente)

$$z_B = \frac{1}{6\pi} \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \; 3\,(u+v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 du \left(2\pi u + 2\pi^2\right) = \frac{1}{2} + \pi$$

anche quest'ultimo valore era prevedibile, in quanto è la metà dell'altezza massima della "ringhiera".