4. Dire se esistono i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2(xy)}{x^2+y^4}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2(xy)}{x^2+y^3}$.

Si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2(xy)}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ in quanto $\operatorname{sen} t \sim t$ per $t \to 0$. Poiché sugli assi la funzione vale 0, il limite, se esiste, vale zero.

Si ha $\displaystyle 0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le y^2$ in quanto $\displaystyle\frac{x^2}{x^2+y^4} \le 1$ e quindi, per il teorema dei carabinieri, il primo limite vale zero.

(Ovviamente questo è solo uno dei modi in cui si può procedere)

L'altro limite non esiste.

Come prima, possiamo studiare il limite equivalente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$$

e osservare che tale limite, se esiste, vale 0, visto che la funzione è nulla sugli assi. Propongo quattro modi di verificare che il limite non vale zero, e quindi non esiste.

PRIMO METODO:

Tenuto conto che il denominatore si annulla lungo la curva $y = -x^{2/3}$, possiamo provare a considerare una curva molto "vicina" a questa, per esempio $y = -x^{2/3} + x^2$.

Lungo questa curva si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x, -x^{2/3}+x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-x^{2/3}+x^2)^2}{x^2+(-x^{2/3}+x^2)^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{10/3}+o(x^{10/3})}{3x^{10/3}+o(x^{10/3})} = \frac{1}{3}.$$ Quindi il limite non vale zero.

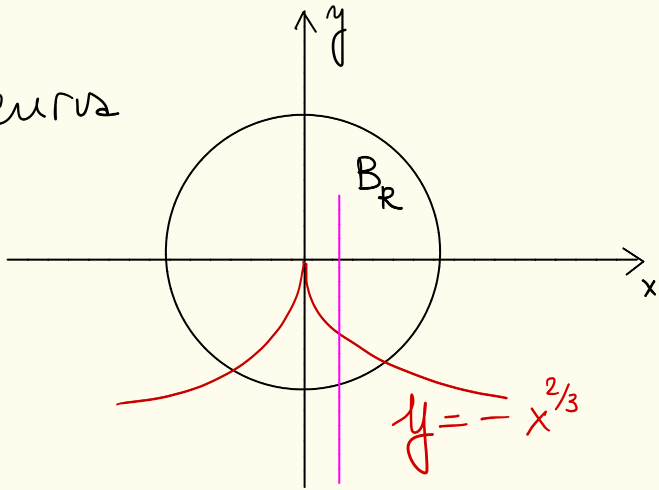
SECONDO METODO: In coordinate polari, se il limite valesse zero, si avrebbe $\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)| = 0.$

D'altra parte, $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \sup_{\theta} \frac{\rho^2 \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{|\cos^2\theta+\rho\,\mathrm{sen}^3\theta|} = +\infty$ $\forall \rho > 0$

In quanto $\exists\, \theta_0$ t.c. il denominatore si annulla (osservare che la funzione $\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^3\theta}$ assume tutti i valori reali). Tale θ_0 non annulla il denominatore. Quindi prendendo il limite per $\theta\to\theta_0$ si ottiene $+\infty$

TERZO METODO: Se fosse $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, dovrebbe esistere, per def. di limite, un disco B_R centrato nell'origine t.c.

$|f(x,y)| \leq 1 \quad \forall (x,y) \in dom(f)$



Tuttavia, se ci avviciniamo alla curva (disegnata in rosso) $y = -x^{2/3}$ (lungo cui la funzione non è definita) lungo una retta verticale (per esempio), cioè se calcoliamo

$\lim_{y \to -x_0^{2/3}} f(x_0, y)$ otteniamo $\pm\infty$ a seconda che $y \to (x_0^{2/3})^{\pm}$.

Ma questo contraddice la limitatezza di f nel disco.

QUARTO METODO:

Considero le curve di livello di f, in particolare la curva di livello 1: $\left\{(x,y) : \frac{x^2y^2}{x^2+y^3} = 1\right\} = \left\{(x,y) : x = \pm\sqrt{\frac{y^3}{y^2-1}}\right\}$

Poiché questa curva, per $y \to 0^-$, si avvicina all'origine, e lungo di essa la funzione vale (per definizione!) 1, possiamo concludere che il limite non esiste.