3. Mostrare che l'insieme E dei punti (x, y) del piano che verificano la disuguaglianza $x^4 + y^4 \leq 1$ è chiuso e limitato. Successivamente calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = x - 8y$ su E.

L'insieme E è chiuso in quanto la funzione $g(x,y) = x^4 + y^4$ è continua, ed E è l'insieme dei punti in cui $g(x,y) \leq 1$.
Per vedere che è limitato, osserviamo che $x^4 \leq x^4 + y^4 \leq 1$.
Analogamente $y^4 \leq 1$. Quindi E è contenuto nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$. Per il teorema di Weierstrass la funzione $f(x,y) = x - 8y$ (continua) ammette massimo e minimo assoluti su E. Poiché f non ha punti critici, il massimo e il minimo si trovano sulla frontiera

$$\partial E = \{(x,y) : x^4 + y^4 = 1\}$$

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene:

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x^3 \\ -8 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^3} = -\frac{8}{y^3} \Rightarrow y = -2x$$

$$\Rightarrow x^4 + 16x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{17}}$$

Abbiamo quindi trovato i due punti $P_1\left(\frac{1}{\sqrt[4]{17}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right)$

$P_2\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}}, \frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right)$.

$f(P_1) = 17^{3/4}$ è il massimo cercato.

$f(P_2) = -17^{3/4}$ è il minimo.