**2.** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left( -\frac{8xy}{(4x^2+y^2)^2}, \ \frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2} \right),$$

1. dimostrare a priori che è conservativo nel suo dominio, senza calcolarne i potenziali;
2. calcolarne i potenziali.

---

Il campo vettoriale è irrotazionale, essendo

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = \frac{8x(3y^2-4x^2)}{(4x^2+y^2)^3}$$

Tuttavia il dominio di F è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è sempl. connesso. Per poter affermare che il campo è conservativo, dobbiamo calcolare il lavoro del campo lungo una conveniente curva che giri intorno all'origine.

Data la forma del campo, può essere conveniente (ma non è l'unica possibilità) integrare lungo l'ellisse $4x^2+y^2=1$, che si parametrizza come

$$\gamma \begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il lavoro lungo $\gamma$ è pari a:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_0^{2\pi} \left[(4\cos\theta \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\right] d\theta = 0$$

Quindi il campo è conservativo.

Ora ne calcoliamo un potenziale $V(x,y)$. Si ha

$$V(x,y) = \int F_1(x,y)\, dx = -\int \frac{8xy}{(4x^2+y^2)^2}\, dx = \frac{y}{4x^2+y^2} + g(y)$$

A questo punto, imponendo che $V_y(x,y) = F_2(x,y)$, si trova

$$g'(y) = 0 \implies g(y) = c.$$

Quindi i potenziali di $\underline{F}$ sono della forma

$$V(x,y) = \frac{y}{4x^2+y^2} + c.$$