1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = (n+1)\, e^{-|x-n|}\,,$$

studiarne la convergenza puntuale, e dire su quali intervalli si ha convergenza uniforme.

In primo luogo, osserviamo che, fissato un qualunque $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\, e^{-(n-x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e^{n-x}} = 0$$

ho tolto il valore assoluto perché def^{te} si ha $n > x$

↳ L'exp. va a ∞ più rapidamente di ogni potenza

Quindi $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$.

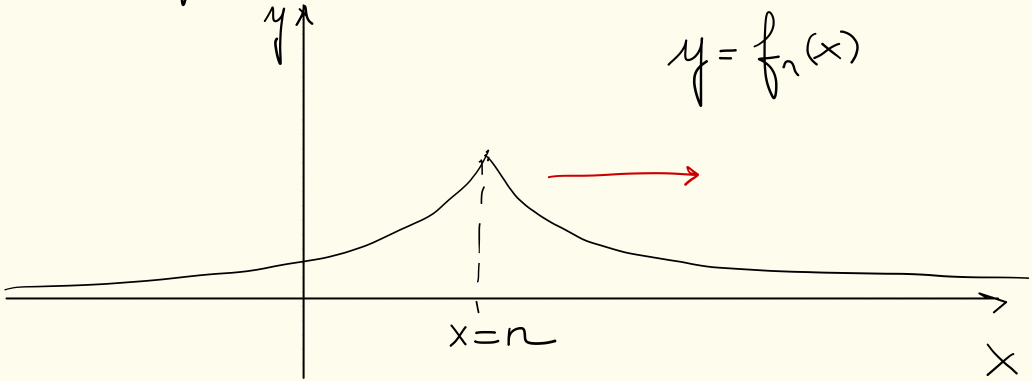
Convergenza uniforme su $\mathbb{R}$: equivale a $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 0$

ma $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(n) = n+1 \not\to 0$

Quindi non si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$

Convergenza puntuale su intervalli limitati $[a,b]$:

Per n fissato, $f_n(x)$ è crescente per $x<n$, decrescente per $x>n$.



e il suo pto di massimo si sposta verso destra quando n aumenta. Quindi se $n \geq b$, il massimo di f_n in $[a,b]$ è assunto per $x=b$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} f_n(b) = 0$$ per la conv. punt.

Ne segue che

Si ha convergensa uniforme in ogni intervallo limitato

(anzi, basta limitato superiormente).