Esame scritto di Fisica per Scienze Biologiche – 20 Giugno 2018
Prof. Maoli

Soluzione 1:

a) Scrivendo le equazione per le condizioni di equilibrio per entrambi i corpi si ottiene:

$$\begin{matrix} Mg\sin 60 - T = 0 \\ T - mgsin30 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Mg\sin 60 - mgsin30 = 0 \quad \Rightarrow \quad M = m\frac{\sin 30}{\sin 60} = 5\frac{1}{\sqrt{3}} = 2.9\ \text{kg}$$

b) Riscrivendo le stesse equazioni di prima, questa volta per il sistema in movimento si ha:

$$\begin{matrix} Mg\sin 60 - T = Ma \\ T - mg\sin 30 = ma \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} g(M\sin 60 - m\sin 30) = (M+m)a \\ T = m(g\sin 30 + a) \end{matrix}$$

dove la direzione degli assi lungo il piano inclinato è stata scelta in moda da avere la stessa accelerazione per i due corpi. Risolvendo per *a* e per *T* si ha:

$$a = \frac{M\sin 60 - m\sin 30}{M+m}g = 9.8\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) = 1.8\ \text{m/s}^2$$

$$T = mg\left(\sin 30 + \frac{M\sin 60 - m\sin 30}{M+m}\right) = 5\cdot 9.8\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) = 33\ \text{N}$$

Il corpo di massa *m* sale.

c) Al diagramma delle forze del punto precedente vanno aggiunte la forza di attrito tra il primo corpo e il piano inclinato ($-mg\cos 30$ verso il basso) e la forza di attrito tra il secondo corpo e il piano inclinato ($-mg\cos 60$ verso l'alto). Risolvendo il sistema si trova l'accelerazione e quindi, essendo un moto uniformemente accelerato, la velocità di entrambi i corpi.
Alternativamente si può utilizzare la formula per il lavoro delle forze non conservative prendendo come posizione iniziale quando i corpi partono da fermi e come posizione finale quando i corpi hanno percorso la distanza *L*. In questo caso si ha:

$$-\mu_d mg\cos 30\,L - \mu_d Mg\cos 60\,L = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + mgL\sin 30 - MgL\sin 60$$

dove l'energia meccanica iniziale è nulla essendo i corpi fermi e avendo preso come quota zero per l'energia potenziale gravitazionale la posizione iniziale dei corpi. Il corpo *m* sale verso l'alto di *L*sin30, mentre il corpo *M* scende verso il basso di *L*sin60.
Risolvendo rispetto a *v*, si ha:

$$\text{v} = \sqrt{\frac{2gL}{m+M}[M\sin 60 - m\sin 30 - \mu_d(m\cos 30 + M\cos 60)]} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.8\cdot 0.85}{10}1.01} = 1.3\ \text{m/s}$$

Soluzione 2:

a) Il calore assorbito dalla pentola e dall'acqua per portarsi a 100°C è:

$Q_1 = (m_{H2O}c_{H2O} + M_p c_{Al})\Delta T = (1.5\cdot 4186 + 2.5\cdot 880)80$ =678 kJ

dove si è usata la conversione 1 cal/(g K) = 4186 J/(kg K).

b) La potenza erogata dal fornello elettrico è quella dissipata per effetto Joule sulla resistenza, quindi si ha:

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{220^2}{50} = 968\ \text{W}$$

c) Altre al calore assorbito per portare il sistema a 100 °C, si deve calcolare il calore assorbito dall'acqua per evaporare completamente:
$Q_2 = m_{H2O}\lambda_e = 1.5 \cdot 2257 \cdot 10^3 = 3.39 \cdot 10^6$ J
Quindi il calore totale che il sistema assorbe dal fornello elettrico è: $Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = 4.07 \cdot 10^6$ J
Dal momento che il 30% del calore prodotto dal fornello viene disperso nell'aria, Q_{tot} corrisponde solo al 70% del calore prodotto dal fornello che quindi è: $Q_{fornello} = \frac{Q_{tot}}{0.7} = 5.81 \cdot 10^6$ J
Il tempo necessario per far evaporare completamente l'acqua è:
$$\Delta t = \frac{Q_{fornello}}{P} = \frac{5.81 \cdot 10^6}{968} = 6000 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ m}$$

Soluzione 3:

a) Il valore del campo è dato dal principio di sovrapposizione tra i campi prodotti dalle due lamine:
I quadrante: $E_x = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{3.8 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 215 \text{ V/m}$, $E_y = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1.9 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 107 \text{ V/m}$
$$E = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{2\varepsilon_0} = 240 \text{ V/m}, \theta = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} 0.5 = 27°$$
II quadrante: $E_x = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = -\frac{3.8 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = -215 \text{ V/m}$, $E_y = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1.9 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 107 \text{ V/m}$
$$E = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{2\varepsilon_0} = 240 \text{ V/m}, \theta = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} -0.5 = 153°$$
III quadrante: $E_x = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = -\frac{3.8 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = -215 \text{ V/m}$, $E_y = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = -\frac{1.9 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = -107 \text{ V/m}$
$$E = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{2\varepsilon_0} = 240 \text{ V/m}, \theta = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} 0.5 = 207°$$
IV quadrante: $E_x = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = -\frac{3.8 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = -215 \text{ V/m}$, $E_y = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = -\frac{1.9 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = -107 \text{ V/m}$
$$E = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{2\varepsilon_0} = 240 \text{ V/m}, \theta = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} -0.5 = -27°$$

b) La particella si muove di moto uniformemente accelerato nella stessa direzione del campo elettrico totale. L'accelerazione lungo i due assi si calcola con la II legge di Newton:
$a_x = \frac{q}{m}\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{7.4 \cdot 10^{-5} \cdot 3.8 \cdot 10^{-9}}{8.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 1.87 \text{ m/s}^2$, $a_y = \frac{q}{m}\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{7.4 \cdot 10^{-5} \cdot 1.9 \cdot 10^{-9}}{8.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 0.93 \text{ m/s}^2$.
Per la velocità e la posizione si ha rispettivamente:
$v_x = \frac{q}{m}\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}t = \frac{7.4 \cdot 10^{-5} \cdot 3.8 \cdot 10^{-9}}{8.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}5 = 9.35 \text{ m/s}$, $v_y = \frac{q}{m}\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}t = \frac{7.4 \cdot 10^{-5} \cdot 1.9 \cdot 10^{-9}}{8.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}5 = 4.67 \text{ m/s}$,
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} == 10.5 \text{ m/s}$,
$x = x_P + \frac{1}{2}a_x t^2 = 2 + \frac{1}{2}1.87 \cdot 25 = 25.4 \text{ m}$, $y = y_P + \frac{1}{2}a_y t^2 = 2 + \frac{1}{2}0.93 \cdot 25 = 13.6 \text{ m}$.

c) Nel punto P il campo prodotto da Q deve controbilanciare quello prodotto dalle due lamine; la carica deve quindi essere negativa:
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2} = -\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{2\varepsilon_0}$$
$$Q = -2\pi d^2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = -2\pi(4^2+2^2)4.25 \cdot 10^{-9} = -5.34 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$