Soluzioni del compito del 7 aprile 2014

Esercizio 1

(a) All'impatto con l'acqua la pallina ha un'energia cinetica $mv^2/2 = mgh + mv_o^2/2$. La sua velocità è quindi $v = (2gh + v_o^2)^{1/2} = (2 \cdot 9.81 \cdot 4.35 + 8.20^2)^{1/2} = 12.4$ m/s.
(b) Nell'acqua la forza (diretta verso l'alto) che agisce sulla pallina è $F = F_A - mg = (\rho_a - \rho)Vg$, dove F_A è la forza di Archimede, ρ_a la densità dell'acqua, e V è il volume della pallina.
La profondità massima p viene raggiunta quando il lavoro negativo della forza F eguaglia in valore assoluto l'energia cinetica posseduta dalla pallina all'impatto con l'acqua: $Fp = mv^2/2$. Ne consegue $p = mv^2/2F = \rho Vv^2/2[(\rho_a - \rho)Vg] = \rho v^2/2(\rho_a - \rho)g = 0.670 \cdot 12.4^2 / 2 \cdot (1.00 - 0.670) \cdot 9.81 = 15.9$ m.
(c) Il moto nell'acqua è uniformemente accelerato, con accelerazione (diretta verso l'alto) pari ad $a = F/m = (\rho_a - \rho)Vg / \rho V = (\rho_a - \rho)g / \rho$. Indicando con T il tempo totale trascorso in acqua ($t = 0$ corrisponde all'entrata in acqua), proiettando i vettori su un asse verticale diretto verso l'alto, vale $v(T) = v(0) + aT$, con $v(0) = -v$. Poiché le forze che agiscono sulla pallina sono conservative, la pallina riemerge dall'acqua con la stessa velocità (in modulo) con cui è entrata, cioè $v(T) = v$. Vale quindi $T = 2v / a = 2v\,\rho / (\rho_a - \rho)\, g = (2 \cdot 12.4 \cdot 0.670 / (1.00 - 0.670) \cdot 9.81 = 5.13$ s.

Esercizio 2

(a) La trasformazione è isoterma, vale quindi $P_oV_o = P_1V_1$, da cui
$V_1 = (P_o / P_1) \cdot V_o = (6.25 \cdot 101325 / 0.865 \times 10^5)\, V_o = 7.32\, V_o$.
Il volume è aumentato di 6.32 volte.
(b) Il numero di moli del gas è dato da
$n = P_o V_o / RT_o = 6.25 \cdot 101325 \cdot 15.8 \times 10^{-3} / 8.31 \cdot 380 = 3.17$.
Il lavoro fatto dal gas è: $L= nRT \ln (V_1/V_o) = 3.17 \cdot 8.31 \cdot 380 \cdot \ln 7.32 = 1.99 \times 10^4$ J.
(c) La variazione di energia interna è $\Delta U = nC_v\, \Delta T$, ed è quindi nulla.
Ne consegue $Q = L = 1.99 \times 10^4$ J; il calore è assorbito.
(d) Poiché il raffreddamento avviene a pressione costante, vale $Q' - L' = \Delta U'$ con
$Q' = nC_p (T^* - T_o)$, $L' = P_1 (V_o - V_1)$, $\Delta U' = nC_v (T^* - T_o)$. Da qui si ottiene, con $C_p - C_v = R$,
$T^* = T_o + P_1 (V_o - V_1) / nR = 380 + 0.865 \times 10^5 \cdot 15.8 \times 10^{-3} \cdot (1 - 7.32) / (3.17 \cdot 8.31) = 52.1$ K.

Esercizio 3

(a) I campi elettrici in O dovuti alle cariche nei punti P_1, P_2 e P_3 (individuati da $\mathbf{r}_1 = a\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = 2\,a\,\mathbf{i}$, e $\mathbf{r}_3 = 4\,a\,\mathbf{i} + 4\,a\,\mathbf{j}$ rispettivamente) sono dati da
$\mathbf{E}_1 = [3q / (4 \pi \varepsilon_0 \cdot a^2)]\, \mathbf{j}$, $\mathbf{E}_2 = - [4q / (4 \pi \varepsilon_0 \cdot 4 a^2)]\, \mathbf{i}$, $\mathbf{E}_3 = [16q / (4 \pi \varepsilon_0 \cdot 32 a^2)]\, 0.707\, (\mathbf{i} + \mathbf{j})$,
per cui $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = q / (4 \pi \varepsilon_0 a^2)\, [\, 3\mathbf{j} - 4\mathbf{i} / 4 + (16 / 32)\, 0.707\, (\mathbf{i} + \mathbf{j})] =$
$= q / (4 \pi \varepsilon_0 a^2)\, [- 0.647\, \mathbf{i} + 3.354\, \mathbf{j}]$.
$E = [1.09 \times 10^{-9} \cdot 8.99 \times 10^9 / (3.18 \times 10^{-2})^2] \cdot [(0.647)^2 + (3.354)^2]^{1/2} =$ 33.1 kV / m.

(b) $V = V_1 + V_2 + V_3 = - 3q / (4 \pi \varepsilon_0\, a) + 4q / (4 \pi \varepsilon_0\, 2a) - 16q / (4 \pi \varepsilon_0\, 5.66\, a) =$
$[1.09 \times 10^{-9} \cdot 8.99 \times 10^9 / 3.18 \times 10^{-2}] \cdot (-3 + 2 - 2.83) = - 1.18$ kV.