Soluzioni della prova scritta del 2 Febbraio 2010

Esercizio 1

a. A causa della presenza dell'attrito l'energia meccanica non si conserva e si ha $E_f - E_i = L_{attrito}$ dove

$$E_i = Mgh_1$$
$$E_f = \frac{1}{2}Mv_B^2$$
$$L_{attrito} = F_a \frac{h_1}{\sin\alpha} = -\mu_d Mg\cos\alpha \frac{h_1}{\sin\alpha}$$

da cui segue

$$Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv_B^2 + \mu_d Mg\cos\alpha \frac{h_1}{\sin\alpha}$$
$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2\left(gh_1 - \mu_d g\cos\alpha \frac{h_1}{\sin\alpha}\right)} = \sqrt{2gh_1\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)} = 2.62\ m/s$$

b. In mancanza di attrito nel tratto BD, per la conservazione dell'energia meccanica si ha $E_D = E_B$ dove

$$E_B = Mgh_1 + \frac{1}{2}Mv_B^2$$
$$E_D = \frac{1}{2}Mv_D^2$$

e quindi le velocita` nel punto D e`

$$\frac{1}{2}Mv_D^2 = Mgh_2 + \frac{1}{2}Mv_B^2$$
$$\Rightarrow v_D = \sqrt{v_B^2 + 2gh_2} = 3.57\ m/s$$

c. Usando le equazioni del moto a partire dal punto D, moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e uniformemente accelerato lungo l'asse y, si ha

$$x(t) = d = v_D t$$
$$y(t) = 0 = h_3 - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow d = v_D\sqrt{\frac{2h_3}{g}} = 3.57 * 0.175 = 0.625\ m$$

Esercizio 2

Il sistema subisce una trasformazione in tre fasi:

a. Nella prima fase, il ghiaccio si riscalda da T_2 = -18.8 + 273.2 = 254 K a T_0 = 273.2 K. Per il ghiaccio vale:

$$\Delta s_g = \int_{T_2}^{T_0} \delta Q/T = m_g c_{V,g} \int_{T_2}^{T_0} \delta T/T = m_g c_{V,g} \ln\frac{T_0}{T_2} = 15.3 * 2220 * \ln(273/254) = 2.45 * 10^3\ J/K$$

b. Nella prima fase, mentre il ghiaccio raggiunge la temperatura di T_0 = 273.2 K, l'acqua cede il calore Q_1 al ghiaccio fino a raggiungere la temeratura T_3 che dobbiamo calcolare. Dato che il sistema e` isolato vale $Q_{ghiaccio} + Q_1 = m_g c_{V,g}(T_0 - T_2) + M_a c_{V,a}(T_3 - T_1) = 0$, dove $M_a$ e` la massa dell'acqua nel cilindro con $M_a = \rho h\pi(d/2)^2$, e $\rho = 1\ g/cm^3 = 10^3 kg/m^3$ e` la densita` dell'acqua. Dunque $M_a = 10^3 \cdot 0.536 \cdot 3.14 \cdot (0.208/2)^2 = 18.2$ kg e

$$T_3 = T_1 - \frac{m_g c_g}{M_a c_a}(T_0 - T_2) = (87.4 + 273.2) - \frac{15.3 * 2220}{18.2 * 4186}(273.2 - 254) = 352K$$

Nella seconda fase, il ghiaccio si scioglie (con la temperatura che rimane a 0 ºC), e l'acqua nel cilindro si raffredda ulteriormente da T_3 a T_4. Durante lo scioglimento il ghiaccio assorbe un calore

$Q_{ghiaccio} = m_g\lambda = 15.3 \cdot 333 \cdot 10^3 = 5.09 \cdot 10^6$ J, ceduto dall'acqua. Dal momento che $Q_{ghiaccio} + Q_2 = 0$ e $Q_2 = M_a c_a (T_4 - T_3)$ e si ha $Q_2 = -Q_{ghiaccio} \Rightarrow M_a c_a (T_4 - T_3) = -Q_{ghiaccio}$ da cui $T_4 = T_3 - Q_{ghiaccio} / M_a c_{V,a} = 352 - 5.09 \cdot 10^6/(18.2 \cdot 4186) = 285$ K.

La variazione di entropia dell'acqua nella seconda fase e` dunque

$$\Delta s_a = \int_{T_3}^{T_4} \delta Q/T = M_a c_{V,a} \int_{T_3}^{T_4} \delta T/T = M_a c_{V,a} \ln\frac{T_4}{T_3} = 18.2 * 4186 * \ln(286/353) = -1.63 * 10^4 J/K$$

c. Nella terza fase, il ghiaccio e` gia` sciolto ed e` semplicemente acqua che si riscalda da T_0 alla temperatura finale T_f di equilibrio, assorbendo calore dall'acqua, che si raffredda ulteriormente da T_4 a T_f. Lo scambio di calore ancora una volta avviene tra il ghiaccio e l'acqua per cui

$$Q_{ghiaccio} + Q_3 = m_g c_a (T_f - T_0) + M_a c_a (T_f - T_4) = 0$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{m_g T_0 + M_a T_4}{m_g + M_a} = \frac{15.3 * 273.2 + 18.2 * 285}{15.3 + 18.2} = 280\ K$$

Esercizio 3

a. Applicando la legge di Ampère, si trova che il campo magnetico prodotto dal conduttore cilindrico al suo interno è nullo e quindi la forza agente sul tratto di filo all'interno del conduttore è nulla.

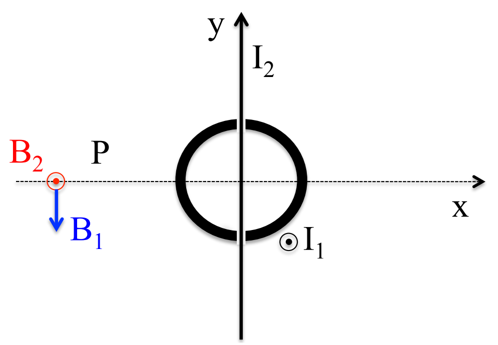
b. Il campo magnetico nel punto P e` dato dalla somma del campo B_1 generato dalla corrente I_1 nel conduttore cilindrico con il verso di y negativo, ed il campo B_2 generato dalla corrente I_2 con il verso uscente dal piano. Si ha

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d} = 2 * 10^{-7} * \frac{2}{3 * 10^{-2}} = 1.33 * 10^{-5}\ T, \text{ verso y negativi}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d} = 2 * 10^{-7} * \frac{5}{3 * 10^{-2}} = 3.33 * 10^{-5}\ T, \text{ verso uscente dal foglio}$$

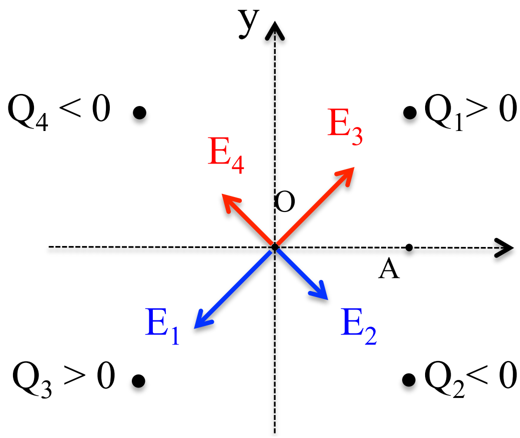
Il modulo del campo totale e`

$$|\vec{B}| = |\vec{B_1} + \vec{B_2}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{(1.33^2 + 3.33^2) * 10^{-10}}$$
$$= 3.59 * 10^{-5}\ T$$



Esercizio 4

a. Per la simmetria della posizione delle cariche, il campo in O generato da Q_1 puo` essere annullato solo da una carica uguale posta simmetricamente rispetto ad O, quindi da $Q_3 = Q_1$. Analogamente si trova che deve essere $Q_4 = Q_2$.



b. La distanza fra O ed ognuna delle quattro cariche e` $D = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = a/\sqrt{2}$. Quindi

$$V_O = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 D}(2\,Q_1 + 2\,Q_2) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0 a}(Q_1 + Q_2).$$

Le distanze di A da Q_1 e Q_2 sono uguali ad $a/2$. Le distanze di A da Q_3 e Q_4 sono invece date da $d = \sqrt{a^2 + a^2/4} = a\sqrt{5}/2 = 1.76 \cdot 1.12 = 1.97$ m. Quindi

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{a}(Q_1 + Q_2) + \frac{2}{a\sqrt{5}}(Q_3 + Q_4)\right] = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}(Q_1 + Q_2)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\right).$$

Dunque

$$V_A - V_O = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}(Q_1 + Q_2)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} - \sqrt{2}\right) = \frac{3.30 \cdot 10^{-2}}{2\pi\varepsilon_0 a}(Q_1 + Q_2) =$$

$$2 \cdot 3.30 \cdot 10^{-2} \cdot 8.99 \cdot 10^{9} \cdot (2.43 \cdot 10^{-8} - 1.17 \cdot 10^{-8}) / 1.76 = 4.25 \text{ V}.$$

c. Indicando con $\alpha = \text{arctg}(1/2) = 0.464$ radianti, la componente x del campo in A e` prodotta solo dalle cariche Q_3 e Q_4, e vale:

$$E_x = E_{3x} + E_{4x} = \frac{Q_3 + Q_4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\cos\alpha$$

$$= (2.43 \cdot 10^{-8} - 1.17 \cdot 10^{-8}) \cdot 8.99 \cdot 10^{9} \cdot 0.894 / (1.97)^2 = 26.1 \text{ N/C}$$

Per la componente y del campo si trova:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-Q_1 + Q_2}{a^2/4} + \frac{Q_3 - Q_4}{d^2}\right) = \frac{-Q_1 + Q_2}{\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= (-\,2.43 \cdot 10^{-8} - 1.17 \cdot 10^{-8}) \cdot 8.99 \cdot 10^{9} \cdot 4 \cdot (4/5) / (1.76)^2 = -\,334 \text{ N/C}.$$