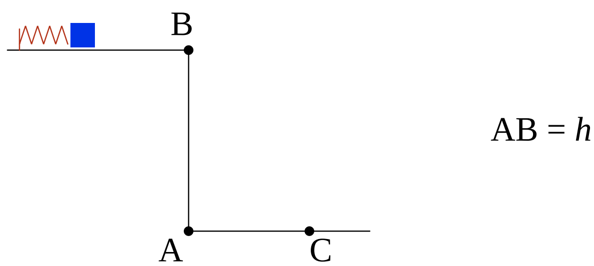
Esame di Fisica per Sc. Biologiche. 4 Luglio 2005

Problema 1:
Si consideri una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $l_0 = 10$ cm, disposta su un piano orizzontale liscio posto ad altezza $h = 6$ cm dal suolo. La molla viene compressa alla lunghezza $l = 2.5$ cm ed un blocco di massa $m = 150$ g viene appoggiato fermo alla sua estremità libera. Successivamente la molla viene lasciata libera: essa accelera la massa m che poi scivola lungo il piano orizzontale senza attrito e cade al suolo nel punto C. (1) Sapendo che la velocità del blocco nel punto B è $v_B = 0.5$ m/s, si calcoli la costante elastica della molla. (2) Si calcoli il modulo della velocità della massa m nel punto C. (3) Si calcoli la distanza d tra A e C.



(1) Inizialmente la molla è compressa e la massa ferma. Il sistema ha quindi una energia uguale $\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$. Non essendovi attrito nel moto, l'energia meccanica si conserva e quindi l'energia finale, uguale alla energia cinetica della massa, deve essere uguale alla energia iniziale. Quindi

$$\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

da cui

$$k = \frac{mv_B^2}{(l-l_0)^2} = 6.67\,\mathrm{N/m}.$$

(2) Nella caduta l'energia si conserva. Tenendo conto della energia potenziale gravitazionale abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2$$

da cui

$$v_C = \sqrt{2gh + v_B^2} = 1.19\,\mathrm{m/s}.$$

(3) Prendendo un sistema di riferimento con origine il punto A le equazioni del moto sono

$$x = v_B t, \qquad y = h - \frac{1}{2}gt^2,$$

e quindi l'equazione della traiettoria è

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_B^2}\ .$$

Il punto C, di coordinate $x = d$, $y = 0$, appartiene alla traiettoria e quindi soddisfa a

$$0 = h - \frac{gd^2}{2v_B^2} \ ,$$

da cui

$$d = \sqrt{2hv_B^2/g} = 5.5\,\text{cm}.$$

Problema 2:
Due moli di gas perfetto descrivono una espansione isoterma reversibile, a partire dallo stato iniziale $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $V_0 = 22$ litri, raddoppiando il volume. Si calcoli: (a) il lavoro fatto dal gas; (b) la quantità di calore scambiata dal gas; (c) ls sua variazione di entropia.

(a) Il lavoro fatto da un gas in una isoterma è dato da

$$L = nRT \log \frac{V_f}{V_0} = p_0 V_0 \log 2 = 3.05 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

dove T e' la temperatura dell'isoterma ed abbiamo utilizzato l'equazione di stato $pV = nRT$.
(b) In una isoterma l'energia interna non varia dato che la temperatura non varia. Quindi, per il primo principio

$$Q = L = 3.05 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

(c) Tenendo conto che T è costante abbiamo

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} \ .$$

La temperatura può essere ricavata dall'equazione di stato:

$$T = \frac{p_0 V_0}{nR} = 265\,\text{K} \, .$$

Quindi $\Delta S = 11.5$ J/K. E' pure possibile evitare il calcolo della temperatura, dato $Q = L = nRT \log 2$. Quindi

$$\Delta S = nR \log 2 \ .$$

Problema 3:
Due resistenze $R_1 = 15\ \Omega$ ed R_2 sono poste in parallelo e le loro estremità collegate ad una pila. Sapendo che per R_2 passa una corrente $i_2 = 3$ A e che R_2 dissipa in un minuto di funzionamento una energia $E = 1.62 \cdot 10^4$ J, si calcoli: (a) la resistenza R_2; (b) la corrente i_1 che attraversa R_1; (c) la potenza erogata dalla pila.

(a) la potenza dissipata in una resistenza R è $P = Ri^2$ dove i è la corrente che attraversa la resistenza. Quindi l'energia dissipata in un tempo t è $Pt = Ri^2 t$. Segue

$$R_2 = \frac{E}{i_2^2 t} = 30\,\Omega.$$

(b) La differenza di potenziale ai capi delle due resistenze è uguale dato che sono in parallelo. Quindi dalla legge di Ohm segue che $V = R_1 i_1 = R_2 i_2$. Da cui

$$i_1 = \frac{R_2 i_2}{R_1} = 6A.$$

(c) la potenza può essere calcolata in due modi diversi. Si può osservare che l'energia fornita dalla pila viene dissipata dalle resistenze. Quindi

$$P_{\text{pila}} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = 810\,\text{W}$$

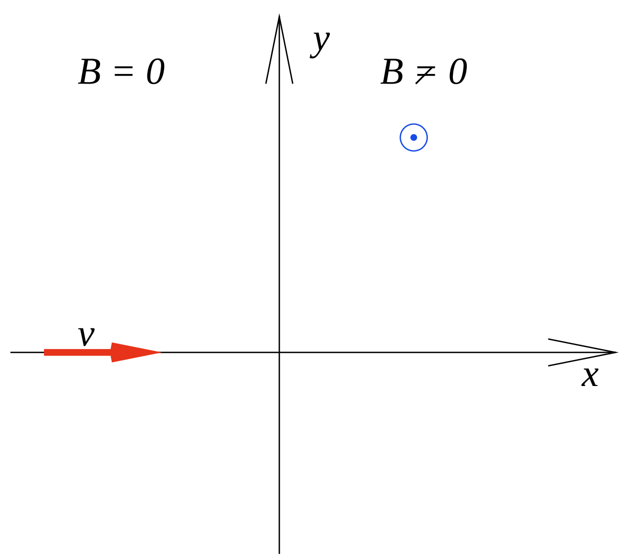
Alternativamente si può calcolare la differenza di potenziale V ai capi della pila e la corrente i che attraversa la pila:

$$V = R_1 i_1 = 90\,\text{V} \qquad\qquad i = i_1 + i_2 = 9\,\text{A}.$$

Quindi

$$P_{\text{pila}} = Vi = 810\,\text{W}$$

Problema 4:
Si consideri un fascio di ioni K^+ ed Na^+. Nel semispazio $x < 0$ gli ioni si muovono lungo l'asse x come indicato in figura con velocità v uguale e costante. Essi successivamente entrano nel semispazio $x > 0$, dove vi è un campo magnetico B ortogonale al piano del foglio. (a) Nel loro moto gli ioni intersecano l'asse y, oltre che nell'origine, nei punti P_{Na} di coordinate $x = 0$, $y = y_{\text{Na}}$ e P_{K} di coordinate $x = 0$, $y = y_{\text{K}}$. Si calcoli B in modo che $|y_{\text{Na}} - y_{\text{K}}| = d$. (b) Quanto tempo impiegano gli ioni per percorrere la traiettoria dall'origine ai punti P_{Na} e P_{K} se B assume il valore trovato al punto (a)?
Dati numerici: $v = 10^3$ m/s, $d = 1$ mm; le masse del sodio e del potassio sono rispettivamente $38{\cdot}10^{-27}$ Kg e $65{\cdot}10^{-27}$ Kg; la carica dell'elettrone è -1.6×10^{-19} C.



(a) Nel campo magnetico le particelle percorrono un semicirconferenza di raggio $R = mv/(eB)$, dove e è la carica degli ioni (uguale, a parte il segno, a quella dell'elettrone). Quindi il punto di raccolta y è uguale a $|y| = 2R$. Quindi

$$d = |y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{Na}}| = \left|\frac{2m_{\mathrm{K}}v}{eB} - \frac{2m_{\mathrm{Na}}v}{eB}\right| == \frac{2v(m_{\mathrm{K}} - m_{\mathrm{Na}})}{eB}$$

Segue

$$B = \frac{2v(m_{\mathrm{K}} - m_{\mathrm{Na}})}{ed} = 0.34\,\mathrm{T}$$

(b) I raggi delle circonferenze percorse sono:

$$R_{\mathrm{K}} = \frac{m_{\mathrm{K}}v}{eB} = 1.2\,\mathrm{mm} \qquad R_{\mathrm{Na}} = \frac{m_{\mathrm{Na}}v}{eB} = 0.7\,\mathrm{mm}$$

Quindi, dato che le particelle percorrono una semicirconferenza di lunghezza πR con velocità costante v, abbiamo

$$T_{\mathrm{K}} = \frac{\pi R_{\mathrm{K}}}{v} = 3.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}, \qquad T_{\mathrm{Na}} = \frac{\pi R_{\mathrm{Na}}}{v} = 2.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}.$$