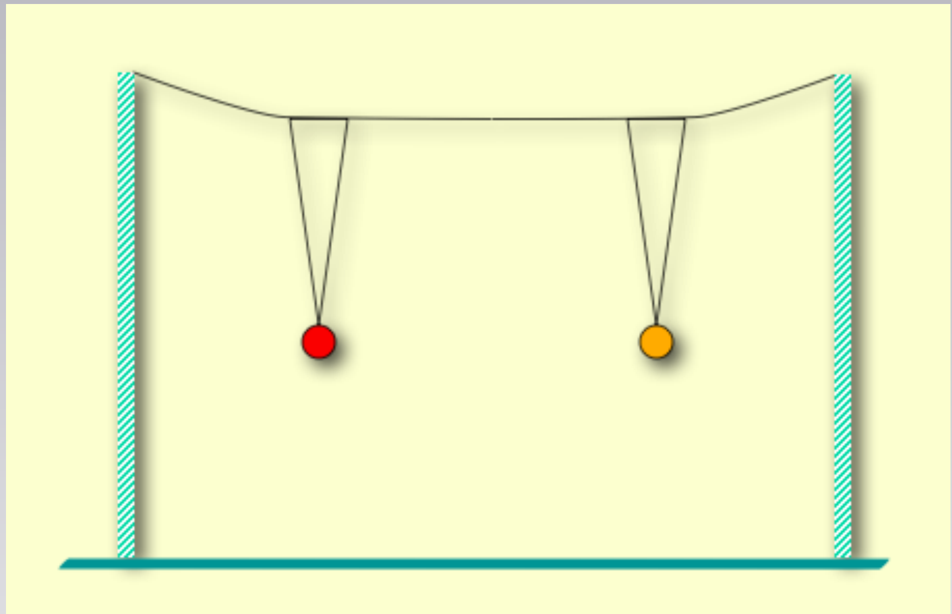
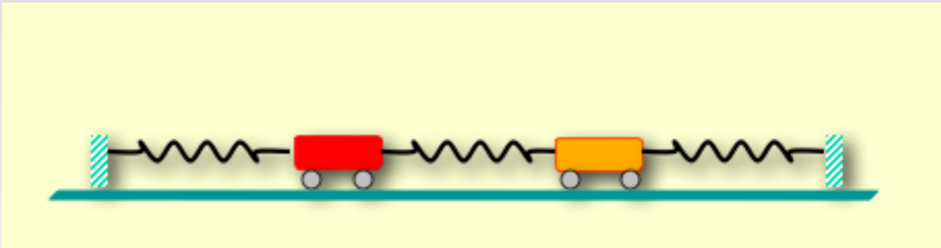
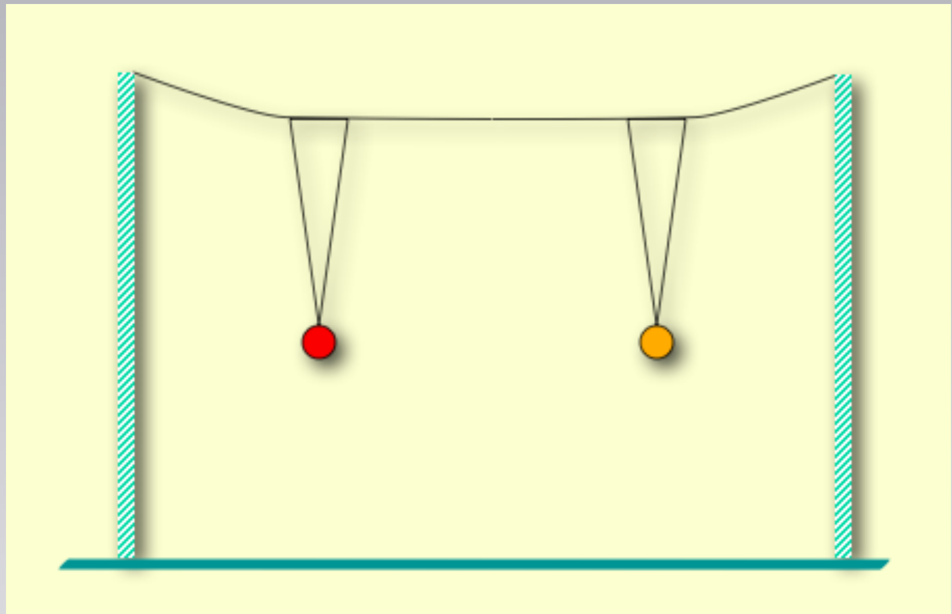
Oscillatori accoppiati



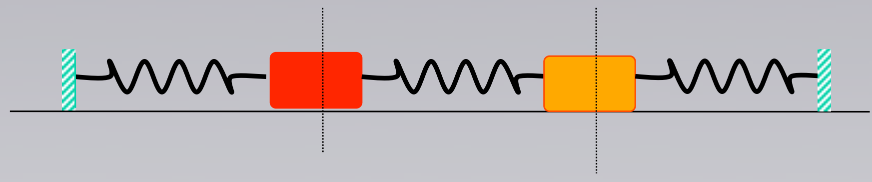


Oscillatori accoppiati



possiamo immaginare il comportamento del sistema a partire dal fenomeno della risonanza?

oscillatori accoppiati

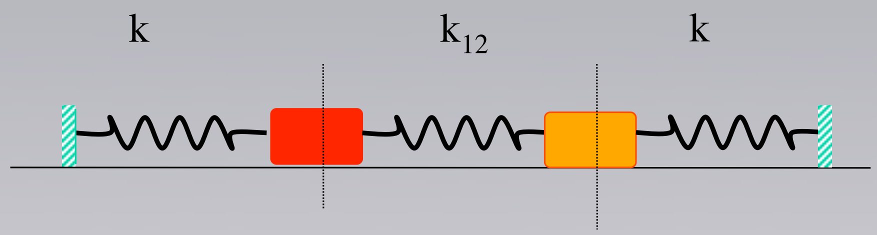


$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - 2k_{12}(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2(x_2 + x_1)}{dt^2} = -k(x_2 + x_1) \end{cases}$$

equazioni dei modi normali

oscillatori accoppiati



soluzione dei modi normali

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 - x_1 = \bar{x} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ \omega = \sqrt{(k + 2k_{12})/m} \end{array}$$

soluzione generale:

$$\begin{cases} 2x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ 2x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

se una delle due ampiezze è nulla, ciascun oscillatore si muove di moto puramente armonico

modi normali

Cosa rappresentano le variabili (x_2-x_1) e (x_2+x_1) ?

$x_2-x_1 = 0$ vuol dire che la molla centrale è sempre alla lunghezza di equilibrio, e la distanza tra i due oscillatori non cambia mai durante il moto:

I due oscillatori si spostano in fase tra loro.

$x_2+x_1 = 0$ vuol dire che per tutto il moto gli spostamenti dei due oscillatori sono uguali ed opposti :

I due oscillatori si spostano in opposizione di fase

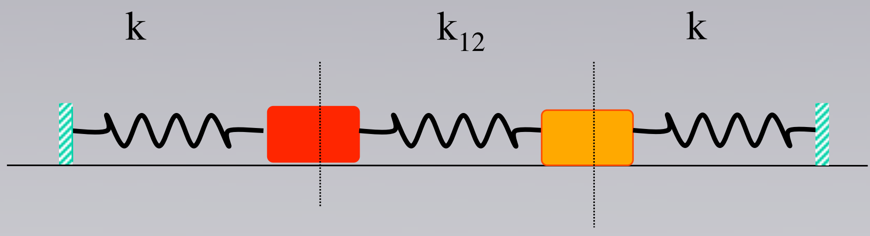
I due modi di vibrazione in fase ed in opposizione di fase possono essere entrambi mantenuti dal sistema dei due oscillatori ("modi normali")

I modi normali sono gli unici moti armonici del sistema di due oscillatori

modi normali

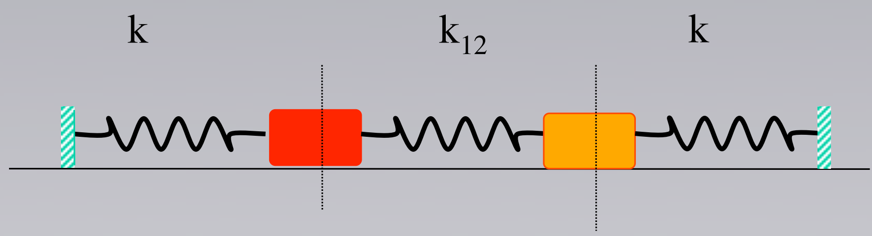
Come si attivano i due modi normali?

oscillatori accoppiati



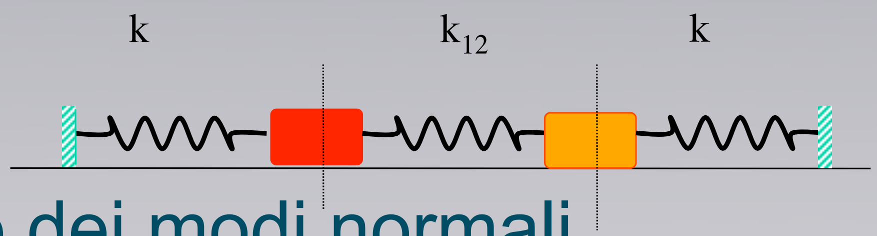
Notiamo che la comprensione dei due modi normali come modi “naturali” (sinusoidali) di oscillazione del sistema è abbastanza intuitiva, e non richiede la trattazione delle equazioni differenziali. E’ anche facile da verificare sperimentalmente sia coi pendoli che con i carrellini.

le frequenze dei modi normali



- Con i carrellini, a causa del forte accoppiamento, le frequenze dei due modi normali appaiono diverse ad occhio (o ad orecchio), mentre per i pendoli è necessaria una misura precisa.
- In entrambi i casi è però possibile una misura col cronometro
- La ricostruzione dei moti individuali come "sovrapposizione" dei due modi normali può essere fatta euristicamente confrontando su un foglio excel le formule precedenti.

oscillatori accoppiati



soluzione dei modi normali

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 - x_1 = \bar{x} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{k/m} \\ \omega &= \sqrt{(k + 2k_{12})/m} \end{aligned}$$

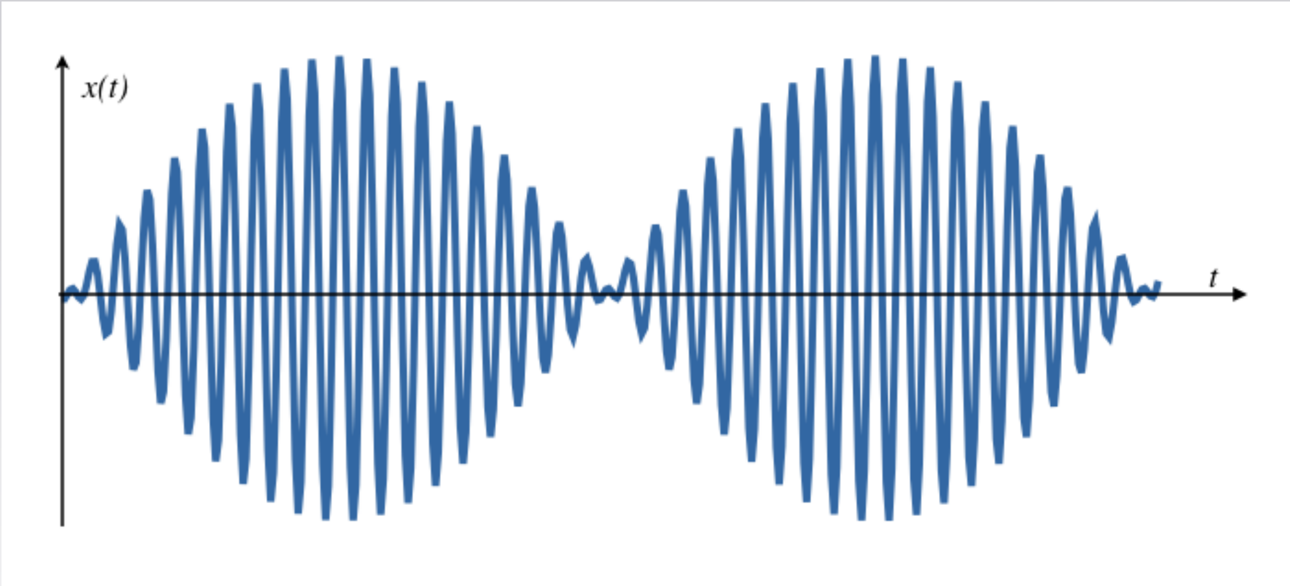
soluzione generale:

$$\begin{cases} 2x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ 2x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

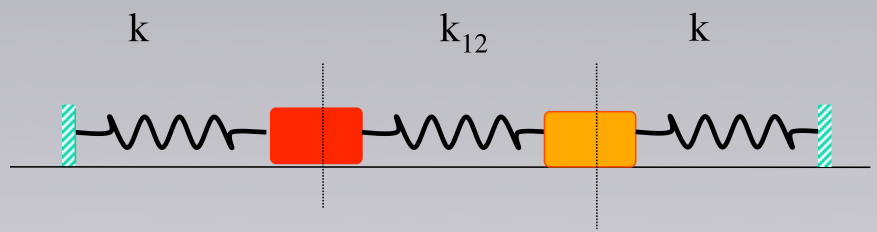
cosa rappresentano queste somme di sinusoidi?

formule di prostaferesi

$$\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t = 2\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$



oscillatori accoppiati



modi normali:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) & \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ x_2 - x_1 = \bar{x} \sin(\omega t + \varphi) & \omega = \sqrt{(k + 2k_{12})/m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ 2x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

cambiare le fasi

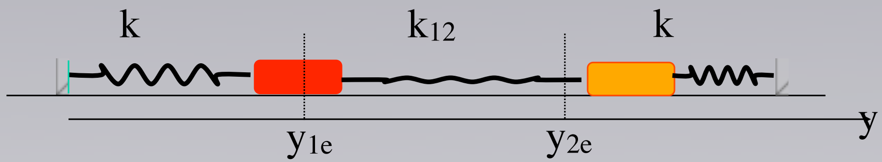
se $x_0 = \bar{x}$

e $\varphi_0 = \bar{\varphi} = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos(\omega_m t) \sin(\omega_p t) \\ x_2 = x_0 \sin(\omega_m t) \cos(\omega_p t) \end{cases} \qquad \omega_m = \frac{\omega - \omega_0}{2} \qquad \omega_p = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

cosa rappresentano queste condizioni iniziali?

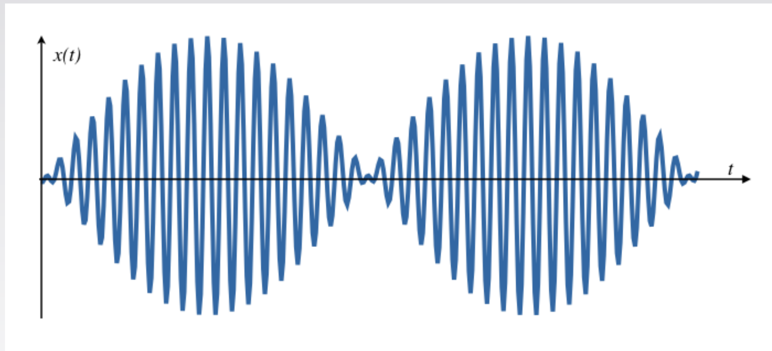
stato iniziale con un oscillatore nella sua posizione di equilibrio e l'altro spostato di x_0:



$$\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t = 2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

il moto di ciascun oscillatore è una sinusoide alla frequenza portante, modulata da una sinusoide alla frequenza modulante.

Come si vede dalla fase di seno e coseno, quando l'oscillazione del primo oscillatore è massima, il secondo è fermo e viceversa, come è facile osservare sperimentalmente.



pendoli e carrelli

che differenza c'è tra due pendoli accoppiati e due carrellini accoppiati?

pendoli e carrelli

che differenza c'è tra due pendoli accoppiati e due carrellini accoppiati?

cosa determina la relazione tra le frequenze della portante e della modulante?