Esercizio 1. Cinematica

Un sacco di zavorra viene staccato da una mongolfiera mentre questa sta scendendo verticalmente a velocità v_0 costante. Sapendo che il sacco tocca il suolo dopo un tempo t_0 , determinare l'altezza dal suolo della mongolfiera al momento del distacco del sacco.

DATI: $v_0=2$ m/s, $t_0=10$ s

Esercizio 2. Dinamica

Tre corpi (punti materiali) di massa m_1 , m_2 e m_3 sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile attraverso una carrucola di massa trascurabile, come indicato in figura. Trascurando tutti gli attriti, trovare la tensione del cavo di collegamento tra i corpi di massa m_2 e m_3 .

DATI: $m_1 = 30$ Kg, $m_2 = 40$ Kg, $m_3 = 10$ Kg

Esercizio 3. Urti ed energia

Un corpo di massa m_1 si muove parallelamente al suolo alla quota h con velocità v_1 quando viene colpito dal basso da una freccia di massa m_2 che era stata lanciata verticalmente dal suolo con velocità iniziale v_2 . Sapendo che la freccia rimane conficcata nel corpo, determinare la direzione e il modulo della velocità del corpo con la freccia conficcata un istante dopo l'impatto.

DATI: $m_1=0.5$ Kg, $h=25.5$ m, $v_1=4$ m/s, $m_2=0.1$ Kg, $v_2=30$ m/s

Esercizio 4. Fluidi

Un cubo di lato L è appeso ad una fune, inestensibile e di massa trascurabile, ed è immerso completamente in acqua (densità ρ_A). La tensione della fune è pari a T . Determinare (a) la densità del materiale di cui è fatto il cubo e (b) la tensione del cavo nel caso in cui il cubo venga appeso in modo da emergere di una quantità h dalla superficie dell'acqua (si supponga che la superficie superiore del cubo sia parallela alla superficie dell'acqua).

DATI: $L=13,3$ cm, $T = 190$ N, $h= 8$ cm, $\rho_A= 1000$ kg/m³

NOTE:

- Riportare nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio.
- Il tempo massimo per la consegna del compito completo è di 2 ore. Il tempo massimo per ritirarsi è 1 ora.

Formulario (in caso di dubbi chiedere al docente)

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a = cost \quad ; \quad v = v_0 + a(t - t_0) \quad x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Moto parabolico (assumendo l'origine come in figura, si avrà $x_0 = 0, y_0 = 0$)

Traiettoria: $y = y_0 + tg\theta_0(x - x_0) - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)(x - x_0)^2$

gittata $R = \frac{v_0^2\sin(2\theta_0)}{g}$ Altezza massima $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$

Moto circolare uniforme $v = \omega r$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

Forza elastica $\vec{F} = -k(l - l_0)\hat{u}_x$ **Forza peso** $\vec{F} = m\vec{g}$

Modulo forza attrito statico $F \leq \mu_s N$ **Modulo Forza attrito dinamico** $F = \mu_d N$

Lavoro di una forza e teorema dell'energia cinetica: $W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_k^f - E_k^i$

Energia potenziale forza elastica: $E_p^e = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cost$

Energia potenziale forza peso: $E_p^p = mgy + cost$

Conservazione energia meccanica: $E_k^f + E_p^f = E_k^i + E_p^i$

Bilancio energetico in presenza di forze non conservative: $W_{nc} = E_m^f - E_m^i$

Quantità di moto: $\vec{p} = m\vec{v}$

Conservazione della quantità di moto: $\vec{p}_{tot} = \sum_i^N \vec{p}_i = cost \rightarrow \vec{p}_1^i + \vec{p}_2^i = \vec{p}_1^f + \vec{p}_2^f$

Centro di massa: $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{\sum_i^N m_i}$; **Velocità del centro di massa:** $\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i^N m_i \vec{v}_i}{\sum_i^N m_i}$

Momento di una forza: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ **Momento angolare:** $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Condizioni di equilibrio statico di un corpo rigido di una forza: $\vec{M}_{tot}^{ext} = \sum_i^N \vec{M}_i^{ext} = 0$; $\vec{F}_{tot}^{ext} = \sum_i^N \vec{F}_i^{ext} = 0$

Equazioni cardinali (polo fisso): $\vec{R}_{tot}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$ $\vec{M}_{tot}^{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$

Momento d'inertia per un sistema di punti materiali: $I = \sum_i^N m_i r_i^2$

Momento angolare di un corpo che ruota attorno ad un asse fisso di "simmetria": $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Conservazione del momento angolare: $\vec{L}_{tot} = \sum_i^N \vec{L}_i = cost$

Legge della portata: $A_1 v_1 = A_2 v_2$ **Legge di Stevino:** $P_2 = P_1 + \rho gh$

Equazione di Bernoulli: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 = cost$

Spinta di Archimede: $F_A = \rho_{fl. sp.} V_{immerso} g$

(1atm = $1.01 \cdot 10^5$ Pa = 760 mmHg)

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1. Cinematica

Scegliendo un sistema di riferimento con origine nel suolo e orientato verso l'alto, le equazioni del moto dopo il distacco del sacco ($t=0$) sono:

$$\begin{cases} a = -g \\ v = -v_0 - gt \\ y = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Sapendo che il sacco tocca terra all'istante t_0 , otteniamo: $h_0 = v_0 t_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 = 510 \text{ m}$

ESERCIZIO 2. Dinamica

Utilizzando l'asse curvilineo che va da m_1 a m_3 è possibile scrivere le seguenti equazioni (con ovvio significato dei simboli):

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 + m_2 g = m_2 a \\ -T_2 + m_3 g = m_3 a \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema di equazioni lineari è possibile trovare l'accelerazione del sistema e, quindi, la tensione richiesta:

$$a = \frac{(m_2 + m_3)g}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad \rightarrow \quad T_2 = m_3(g - a) = 37 \text{ N}$$

ESERCIZIO 3. Urti ed energia

Utilizzando il principio di conservazione dell'energia è possibile calcolare la velocità della freccia un istante prima dell'urto v'_2 :

$$\frac{1}{2}m_2 v'_2 + m_2 gh = \frac{1}{2}m_2 v_2 \quad \rightarrow \quad v'_2 = \sqrt{v_2^2 - 2gh}$$

Per calcolare la velocità v del sistema dopo l'urto è possibile utilizzare la conservazione della quantità di moto (urto completamente anelastico): $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}$. Utilizzando un opportuno sistema di riferimento è possibile proiettare questa equazione vettoriale e trovare quanto richiesto:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_x \\ m_2 v'_2 = (m_1 + m_2)v_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v'_2)^2}}{(m_1 + m_2)} = 4.7 \text{ m/s} \\ \theta = \arctan\left(\frac{m_2 v'_2}{m_1 v_1}\right) = 45^\circ \end{cases}$$

ESERCIZIO 4. Fluidi

Utilizzando la condizione di equilibrio e tenendo conto della forza di galleggiamento, è possibile trovare la densità del materiale di cui è fatto il cubo:

$$T + \rho_A L^3 g = \rho_C L^3 g \quad \rightarrow \quad \rho_C = \rho_A + \frac{T}{L^3 g} = 9241 \text{ kg/m}^3$$

Quando il cubo emerge di h è possibile utilizzare la stessa condizione di equilibrio ed ottenere:

$$T + \rho_A L^2 (L - h)g = \rho_C L^3 g \quad \rightarrow \quad T = (\rho_C L - \rho_A (L - h))L^2 g = 204 \text{ N}$$