Esercizi e Problemi di Termodinamica.

Dr. Yves Gaspar

March 18, 2009

1 Problemi sulla termologia e sull'equilibrio termico.

Problema 1.

Un pezzetto di ghiaccio di massa m e alla temperatura di $T_1 = 250K$ viene immerso in $m_2 = 60g$ di acqua a temperatura di $T_2 = 330K$. Se il sistema e contenuto in un recipiente a pareti adiabatiche,

a) si determini per quali valori della massa m il pezzetto di ghiaccio fonde completamente.

b) calcolare la temperatura di equilibrio del sistema se la massa del cubetto di ghiaccio vale 35g.

Il calore specifico del ghiaccio vale $c_g = 2051 J/KgK$, il calore specifico dell'acqua vale $c_a = 4186,8 J/KgK$ ed il calore latente di fusione del ghiaccio e pari a $\lambda_f = 3,3.10^5 J/KgK$.

Soluzione.

a) Per fondere il pezzo di ghiaccio deve ricevere una quantita di energia

$$Q_1 = c_g m(T_0 - 250K)$$

dove $T_0 = 273,15K$, e per passare allo stato liquido e necessaria un'altra quantita di energia pari a

$$Q_2 = m\lambda_f$$

Il calore che puo essere ricevuto dalla massa m_2 di acqua vale

$$Q_3 = c_a m_2(T_2 - T_0) = 14281J$$

Quindi, la condizione necessaria affinche tutto il pezzo di ghiaccio fonda corriponde a:

$$Q_3 \geq Q_1 + Q_2$$

e utilizzando le relazioni precedenti si ottiene la relazione

$$2051J/KgK.m.(23,15K) + m.(3,310^5 J/kgK) \leq 14281J$$

dalla quale si ottiene

$$m \leq \frac{14281}{377,5} g = 37,83g$$

b) La temperatura di equilibrio si puo ricavare dalla relazione che esprime il fatto che il calore ceduto dai 60g di acqua viene assorbito dalla massa di 35g di ghiaccio per portare la propria temperatura fino a 273,15K, per realizzare la trasformazione di fase dallo stato di ghiaccio solido allo stato liquido ed infine per elevare la temperatura della massa di 35g di acqua fino alla temperatura di equilibrio T_e ricercata:

$$2051,5J/kgK.35g.(23,15K) + 35g.(3.3.10^5)J/kgK + 4186,8J/kgK.35g.(T_e - 273,15K) =$$

$$4186,8J/kgK.60g.(330K - T_e)$$

Risolvendo questa equazione di primo grado ripetto a T_e risulta:

$$T_e = 309,1K$$

Problema 2.

Un cubetto di ghiaccio galleggia in un bicchiere riempito a raso con dell'acqua. Il cubetto di ghiaccio fonde completamente: cosa succede all'equilibrio termico ? L'acqua esce dal bicchiere ? Giustificare la risposta.

Soluzione.

Sia V_{0g} il volume del cubetto di ghiaccio, sia V_{0gs} il volume di quella parte del cubetto di ghiaccio sommersa sotto la superficie dell'acqua, sia V_{0l} il volume di liquido che risulta dal scioglimento del cubetto di ghiaccio. Se ρ rappresenta la densita dell'acqua e se ρ_g corrisponde alla densita del ghiaccio, possiamo scrivere due relazioni: la prima risulta dalla conservazione della massa durante la trasformazione di fase, massa del ghiaccio=massa del liquido, ovvero, in termini di densita,

$$\rho V_{0l} = \rho_g V_{0g} \tag{1}$$

mentre la seconda relazione risulta dal principio di Archimede per un corpo che galleggia in certo liquido, spinta di Archimede = peso del volume di liquido spostato = peso del corpo che galleggia, ovvero, in termini di densita e rappresentando l'accelerazione gravitazionale con g:

$$\rho V_{0gs} g = \rho_g V_{0g} g \tag{2}$$

e dividendo entrambi i menbri con g risulta

$$\rho V_{0gs} = \rho_g V_{0g} \tag{3}$$

I membri di destra delle equazioni (1) e (3) sono uguali e quindi possiamo esprimere l'ugualianza tra i membri di sinistra come (semplificando con ρ):

$$V_{0l} = V_{0gs}$$

Quindi risulta che il volume di acqua formato dallo scioglimento del cubetto di ghiaccio e pari al volume della parte di ghiaccio sommerso (infatti questo corrisponde al fatto che, contrariamente alla legge generale della dilatazione termica volumica, il volume di acqua e inferiore al volume corrispondente di ghiaccio). Dunque durante la trasformazione di fase, il livello di acqua nel bicchiere non cambia e l'acqua non esce dal bicchiere.

Problema 3.

Un pendolo semplice costruito con un filo di ferro subisce una variazione di temperatura di 10^0C. Determinare la variazione percentuale del periodo del pendolo. Il coefficiente di dilatazione lineare del ferro vale $\lambda = (9.1)10^{-6}(1/\mathrm{K})$.

Soluzione.

Il periodo di un pendolo semplice viene dato dalla relazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

La stessa equazione puo essere utilizzata nel caso in cui la lunghezza del pendolo vale $l^{'} = l(1 + \lambda\Delta t)$,

$$T^{'} = 2\pi\sqrt{\frac{l(1+\lambda\Delta t)}{g}} = T\sqrt{1+\lambda\Delta t}$$

Ora, utilizzando una seria di Taylor-McLaurin per la funzione $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + ...$$

la relazione per $T^{'}$ diventa:

$$T^{'} = T(1 + \lambda\frac{\Delta t}{2}) + ...$$

La variazione percentuale del periodo sarebbe quindi pari a:

$$\frac{T^{'} - T}{T} = \frac{T(1 + \lambda\frac{\Delta t}{2}) - T}{T} = \lambda\frac{\Delta t}{2} = (4,55)10^{-5}$$

Problema 4.

Un proiettile di piombo, avente velocita $v = 200m/s$, penetra in un blocco di legno e si ferma. La temperatura iniziale del proiettile vale 20^0C. Ammettendo che l'energia persa dal proiettile provochi un aumento di temperatura del proiettile, quanto vale la temperatura finale ? Quale dovrebbe essere la velocita del proiettile per aumentare la sua temperatura fino a raggiungere la temperatura di fusione del piombo (ossia $326,85^0$C) ? Il calore specifico del piombo vale $c_p = 129,8J/kgK$.

Soluzione.

Il calore assorbito dal proiettile di piombo, pari all'energia cinetica E_{cin} persa, vale

$$Q = mc_p\Delta T = E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4}$$

La variazione di temperatura vale dunque

$$\Delta T = \frac{v^2}{2c_p} = 154,08K = 154,08^0C$$

La temperatura finale vale dunque:

$$T_f = 20^0C + 154,08^0C = 174,08^0C$$

Dalla relazione (4) segue la seguente relazione tra la velocita del proietile e la variazione di temperatura:

$$v^2 = 2c_p \Delta T$$

Per raggiungere la fusione del piombo, la variazione di temperatura dev'essere pari a $\Delta T = 326,85^0C - 20^0C = 306,85^0C$, quindi risulta:

$$v = \sqrt{2c_p 306,85^0C} = 282,23m/s$$

Problemi suggeriti:

- Un solido di massa pari a $0,40Kg$ viene riscaldato a 90^0C e poi immerso in un contenitore a pareti adiabatiche, contente $1.5l$ di acqua inizialmente a 15^0C. Se la temperatura finale del sistema e di 18^0C, si determini il calore specifico del solido. (Risposta: $c = 654,19J/KgK$)

- Un blocco di ghiaccio di massa m_1 a $T_1 = -20^0C$ si trova in un contenitore adiabatico. Vengono immersi nel contenitore un corpo solido di massa $m_2 = 0.4Kg$ ($c_2 = 380J/KgK$) a $T_2 = 60^0C$ e una massa $m_3 = 0.8Kg$ di acqua a $T_3 = 10^0C$. Si osserva che la temperatura di equilibrio $T_e = -3^0C$. Calcolare il valore di m_1. (Risposta: $m_1 = 8,95Kg$)

2 Problemi sui gas e sul primo principio della termodinamica.

Problema 1.

La temperatura di una massa di 1 grammo di ferro passa da 18^0C a 20^0C, alla pressione atmosferica. Calcolare la variazione di energia interna della massa di ferro. Il calore specifico del ferro vale $c = 448J/kgK$, il coefficiente di dilatazione termica del ferro e pari a $\lambda = 1,1.10^{-6}\frac{1}{K}$ e la densita del ferro vale $\rho = 7,8.10^3\frac{Kg}{m^3}$.

Soluzione.

Il primo principio $\Delta U = Q - W$, richiede il calcolo della quantita di calore e di lavoro. La quantita di calore vale

$$Q = cm\Delta T = 8,91.10^{-1}J$$

Per quanto riguarda il lavoro $W = p\Delta V$, bisogna calcolare la variazione di volume del corpo, utilizzando la legge della dilatazione termica per i volumi:

$$\Delta V = V3\lambda\Delta T$$

Il volume risulta dalla definizione della densita $\rho = \frac{m}{V}$:

$$V = \frac{m}{\rho} = 0,13.10^{-6}m^3$$

Dunque la variazione di volume risulta essere:

$$\Delta V = V3\lambda\Delta T = 7,1.10^{-12}m^3$$

ed il lavoro vale, con $p = p_{atm} = 1,013.10^5Pa$,

$$W = p\Delta V = 7,2.10^{-7}J$$

Il lavoro e trascurabile rispetto al calore Q, quindi:

$$\Delta U = Q - W \sim Q = 8,91.10^{-1}J$$

Problema 2.

Due moli di gas ideale monoatomico si espandono in modo adiabatico reversibile, fino ad occupare un volume triplo di quello iniziale. La temperatura iniziale vale $T_A = 300K$. Determinare il lavoro compiuto durante l'espansione.

Soluzione.

Dato che l'espansione e adiabatica, $Q = 0$, ed il primo principio implica che $\Delta U = -W$, quindi

$$W = -\Delta U = -nc_v \Delta T = nc_v (T_A - T_B)$$

La temperatura T_A e nota, mentre per calcolare T_B possiamo ricorrere alla legge delle trasformazioni adiabatiche reversibili $TV^{\gamma-1} = cost$, ovvero

$$T_A {V_A}^{\gamma-1} = T_B {V_B}^{\gamma-1} = T_B (3V_A)^{\gamma-1}$$

Se per un gas monoatomico $\gamma = 5/3$, si ottiene

$$T_B = T_A 3^{-2/3} = 144,22K$$

Quindi il lavoro compiuto e pari a

$$W = nc_v (155,78K) = 3885,46J$$

Problema 3.

In un recipiente vuoto termicamente isolato di volume $V = 10^{-3} m^3$ viene praticato un foro. L'aria inizialmente alla temperatura $T_0 = 310K$ entra nel recipiente fino ad avere una pressione uguale a quella atmosferica esterna. Determinare la temperatura dell'aria all'interno del recipiente e la variazione di energia interna della massa di aria.

Soluzione.

La trasformazione considerata e adiabatica, quindi $Q = 0$, e dal primo principio risulta che $\Delta U = -W$. Considerando la massa di aria che all'esterno del recipiente occupa un certo volume V_0 e che nello stato finale occupa un volume nullo all'esterno (visto che l'aria si trova nel recipiente dopo la trasformazione), possiamo scrivere per il lavoro

$$W = p\Delta V = p(0 - V_0) = -pV_0 = -nRT_0$$

Quindi, se T rappresenta la temperatura finale dell'aria nel recipiente, la variazione di energia interna e data dalla seguente equazione

$$\Delta U = nc_v(T - T_0) = -W = pV_0 = nRT_0 \tag{5}$$

Da quest'ultima relazione possiamo ricavare la temperatura T:

$$c_v(T - T_0) = RT_0$$

dunque, considerando l'aria come un gas ideale biatomico ($\gamma = 7/5$),

$$T = \frac{(R + c_v)T_0}{c_v} = (\frac{R}{c_v} + 1)T_0 = \gamma T_0 = 434K$$

Ora, si possono anche calcolare il numero di moli di gas utilizzando la legge dei gas ideali $pV = nRT$, con il volume del recipiente pari a $V = 10^{-3}m^3$,

$$n = \frac{pV}{RT} = 2,82.10^{-2}$$

Infine, possiamo calcolare la variazione di energia interna:

$$\Delta U = nc_v(T - T_0) = 19,27J$$

ed il lavoro e pari a $W = -\Delta U = -19,27J$. Il lavoro e negativo perche la massa di aria "subisce" il lavoro ed viene compressa nel recipiente.

Problema 4.

Un recipiente adiabatico e diviso in due parti uguali da una parete isolante. Una parte contiene un gas perfetto a temperatura e pressione iniziali $T_1 = 300K$ e $p_1 = 10^5 Pa$. Nell'altra parte e contenuta una quantita dello stesso gas perfetto a temperatura e pressione iniziali $T_2 = 500K$ e $p_2 = 3.10^5 Pa$. Se la parete viene rimossa e i due gas si mescolano, determinare la temperatura e la pressione del gas nella condizione di equilibrio finale.

Soluzione.

Le equazioni dei gas perfetti per lo stato iniziale sono,

$$p_1 V = n_1 RT_1$$

$$p_2 V = n_2 RT_2$$

mentre per lo stato finale, caratterizzato da $V_f = 2V$ e pressione p_f, possiamo scrivere

$$p_f(2V) = (n_1 + n_2)RT_f$$

Da quest'ultima relazione possiamo ricavare una relazione utile per poter calcolare la pressione finale p_f:

$$p_f = \frac{(n_1 RT_f + n_2 RT_f)}{2V}$$

Dalle relazioni per lo stato iniziale risulta che $n_1 = \frac{p_1 V}{RT_1}$ e $n_2 = \frac{p_2 V}{RT_2}$, l'equazione precedente diventa:

$$p_f = \frac{p_1 T_f}{RT_1} + \frac{p_2 T_f}{RT_2} = (\frac{p_1}{RT_1} + \frac{p_2}{RT_2})T_f \tag{6}$$

Il calcolo di T_f risulta dall'applicazione del primo principio $\Delta U = Q - W$. Facendo riferimento al sistema totale (l'intero contenuto del recipiente), possiamo affermare che nella trasformazione qui considerata, $Q = 0$ visto che siamo in condizione di adiabaticita, inoltre il lavoro $W = 0$, perche complessivamente il volume non cambia (il volume del recipiente non cambia). Quindi, la variazione totale dell'energia interna $\Delta U = 0$. Considerando l'unione dei due sottosistemi, abbiamo

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

Quindi, dato che $\Delta U_1 = n_1 c_v (T_f - T_1)$ e che $\Delta U_2 = n_2 c_v (T_f - T_2)$, la relazione precedente diventa:

$$n_1 c_v (T_f - T_1) + n_2 c_v (T_f - T_2) = 0$$

dunque

$$T_f(n_1 + n_2) = n_1 T_1 + n_2 T_2$$

e la temperatura finale vale, utilizzando le relazioni $n_1 = \frac{p_1 V}{RT_1}$ e $n_2 = \frac{p_2 V}{RT_2}$:

$$T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = \frac{p_1 + p_2}{p_1/T_1 + p_2/T_2} = 429K$$

Infine, sostituendo il valore di $T_f = 429K$ nell'equazione (6), si ottiene

$$p_f = 2.10^5 Pa$$

Problemi suggeriti.

- Un gas perfetto biatomico si espande seguendo una trasformazione lungo la quale il prodotto della temperatura del gas per il volume da esso occupato si mantiene costante, passando dalo stato A allo stato B. Noti T_A e $\frac{V_A}{V_B}$, determinare, discutendone il segno, la variazione di energia interna, il lavoro ed il calore scambiato con l'esterno.

- Una mole di gas perfetto, inizialmente alla temperatura di $27^0 C$, viene riscaldato fino a $127^0 C$ a pressione costante. Sapendo che nel processo il calore assorbito vale 495,76 cal, si calcoli il rapporto γ, la variazione di energia interna ed il lavoro fatto dal gas.

3 Problemi sul secondo principio della termodinamica e sui cicli termodinamici.

Problema 1.

Un blocco di rame di massa $m = 0,5kg$ cade da un'altezza di $h = 100m$ in un lago a temperatura $T_L = 283K$. La temperatura iniziale del blocco di rame vale $T_1 = 423K$. Calcolare la variazione di entropia dell'universo in questo processo. Il calore specifico del rame vale $c = 387J/KgK$.

Soluzione.

La variazione di entropia dell'universo (ΔS_U) e pari alla somma della variazione di entropia del sistema, ossia del blocco di rame (ΔS_{Cu}), e della variazione di entropia dell'ambiente esterno, ossia del lago (ΔS_L). Quindi

$$\Delta S_U = \Delta S_{Cu} + \Delta S_L$$

Consideriamo per primo il blocco di rame: esso subisce una variazione di temperatura e cede una certa quantita di calore, dunque la variazione corrispondente dell'entropia vale

$$\Delta S_{Cu} = \int_{T_1}^{T_L} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_L} \frac{mcdT}{T} = mcln(\frac{T_L}{T_1}) = -77,8J/K$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia dell'ambiente, il lago puo essere considerato una sorgente termica a temperatura costante, quindi

$$\Delta S_L = \frac{Q_L}{T_L}$$

Dove Q_L rappresenta l'energia assorbita dal lago: quest'ultima risulta dall'energia potenziale gravitazionale del blocco convertita in energia cinetica e poi termica e dal calore ceduto dal blocco al lago, quindi

$$Q_L = mgh + mc(T_1 - T_L) = 27580J$$

La variazione di entropia del lago e quindi pari a:

$$\Delta S_L = \frac{27580J}{283K} = 97,5J/K$$

e la variazione di entropia dell'universo e data da

$$\Delta S_U = \Delta S_{Cu} + \Delta S_L = 97,5J/K - 77,8J/K = 19,7J/K$$

Problema 2.

Un blocco di alluminio di massa $m_1 = 0,1Kg$ ed alla temperatura di $T_1 = 580K$ viene immerso in un recipiente di vetro di massa $m_2 = 0,2Kg$ ed avente temperatura pari a $T_2 = 300K$. Il recipiente di vetro contiene una massa di acqua pari a $m_3 = 0,5Kg$ alla temperatura di 300K. Trascurando gli scambi di calore con l'ambiente esterno, determinare
- la temperatura di equilibrio del sistema
- la variazione di entropia dell'universo.
I calori specifici dell'aluminio, del vetro e dell'acqua sono rispetivamente $c_1 = 896J/KgK$, $c_2 = 630,4J/KgK$ e $c_3 = 4187J/KgK$.

Soluzione.

Il calore ceduto dal blocco di aluminio (Q_1) sara pari alla somma del calore assorbito dal vetro (Q_2) e del calore assorbito dall'acqua (Q_3), ossia:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

con

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_1 - T_e)$$

$$Q_2 = m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

$$Q_3 = m_3 c_3 (T_e - T_3)$$

Bisogna dunque risolvere la seguente equazione di primo grado rispetto a T_e:

$$m_1 c_1 (T_1 - T_e) = m_2 c_2 (T_e - T_2) + m_3 c_3 (T_e - T_3)$$

e risulta:

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + (m_2 c_2 + m_3 c_3) T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3} = 310,86K$$

Passiamo ora al calcolo della variazione di entropia dell'universo. Essa viene data dalla somma della variazione di entropia del sistema e della variazione di entropia dell'ambiente esterno, che nel nostro caso vale zero. Quindi

$$\Delta S_U = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = \Delta S_{sist}$$

e la variazione di entropia del sistema e composta da tre parti: la prima dall'aluminio che cede calore (ΔS_1) , la seconda dal vetro che assorbe una parte di calore (ΔS_2) e la terza dall'acqua che assorbe del calore(ΔS_3):

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$

dove

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{m_1 c_1 dT}{T} = m_1 c_1 ln(\frac{T_e}{T_1}) = -55,6 J/K$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{m_2 c_2 dT}{T} = m_2 c_2 ln(\frac{T_e}{T_2}) = 4,48 J/K$$

$$\Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{m_3 c_3 dT}{T} = m_3 c_3 ln(\frac{T_e}{T_2}) = 74,45 J/K$$

e la variazione di entropia dell'universo vale:

$$\Delta S_U = -55,6 J/K + 4,48 J/K + 74,45 J/K = 23,05 J/K$$

Problema 3.

Due moli di gas ideale, inizialmente nello stato 1, vengono messi a contatto termico con un serbatoio a temperatura di 800K e raggiungono mediante una trasformazione isocora irreversibile uno stato termodinamico 2 ($T_2 = 800K$). Tramite una espansione isoterma reversibile il gas raggiunge lo stato 3 tale che $V_3 = 2V_2$. Successivamente, il gas viene riportato allo stato 1 mediante una trasformazione isobara reversibile. Il calore specifico del gas a pressione costante dipende dalla temperatura e puo essere scritto come $\frac{c_p}{R} = 2 + 0.02T$.
Determinare tutti i calori scambiati per ogni trasformazione e calcolare il rendimento del ciclo. Quanto vale il lavoro lungo la trasformazione 3-1 ?

Soluzione.

-La trasformazione 1-2:

Dalla relazione di Mayer $c_p - c_v = R$ possiamo ricavare un'espressione per c_v:

$$c_v = R(1 + 0.02T)$$

Dal primo principio $\Delta U = Q - W$, e tenendo conto del fatto che il lavoro lungo la trasformazione 1-2 e nullo dato che essa e isocora, abbiamo che $\Delta U_{1-2} = Q_{1-2}$. Quindi basterebbe calcolare ΔU_{1-2} per determinare il calore scambiato. Dobbiamo pero integrare l'espressione differenziale $dU = nc_v dT$, dato che c_v e una funzione continua della temperatura:

$$\Delta U_{1-2} = \int_{T_1}^{T_2} nc_v dT = nR\int_{T_1}^{T_2} (1 + 0.02T)dT$$

Per poter calcolare questa integrale, dobbiamo calcolare T_1. Considerando che $T_2 = T_3 = 800K$ (la trasformazione 2-3 e isoterma), e che $p_1 = p_3$ (la trasformazione 1-3 e isobara), possiamo utilizzare la legge dei gas perfetti nel modo seguente:

$$p_1 V_1 = nRT_1$$

$$p_3 V_3 = nRT_3$$

oppure

$$p_1 V_1 = nRT_1$$

$$p_1 V_3 = nRT_2$$

e dividendo queste ultime due relazioni membro a membro, si ottiene:

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_2}$$

e dato che $V_1 = V_2$,

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_1}{T_2}$$

quindi, tenendo conto della relazione $V_3 = 2V_2$,

$$T_1 = T_2 \frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{2} = 400K$$

Infine il calcolo di ΔU_{1-2} risulta:

$$\Delta U_{1-2} = nR\int_{T_1}^{T_2} (1 + 0.02T)dT = nR[T + 0.01T^2]_{400K}{}^{800K} = 86465,6J = Q_{1-2}$$

- La trasformazione 2-3.
Questa trasformazione e isoterma, quindi la variazione di energia interna e nulla ed il primo principio implica che $Q_{2-3} = W_{2-3}$. Il lavoro viene calcolato mediante la relazione

$$W_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} p(V)dV = nRT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{1}{V} dV = nRT_2 ln(\frac{V_3}{V_2}) = 9220,52J = Q_{2-3}$$

- La trasformazione 3-1.
Questa trasformazione e isobara e quindi dobbiamo integrare la relazione differenziale $\delta Q_{1-3} = nc_p dT$:

$$Q_{1-3} = \int_{T_3}^{T_1} n[2R + R(0.02)T]dT = -93116,8J$$

Il lavoro puo essere determinato dal primo principio, $W_{3-1} = Q_{3-1} - \Delta U_{3-1}$. Il calcolo di ΔU_{3-1} richiede l'integrazione della relazione differenziale $dU_{3-1} = nc_v dT$, tra le temperature T_3 e T_1:

$$\Delta U_{3-1} = \int_{T_3}^{T_1} nc_v dT = -86465,6J$$

Quindi il lavoro scambiato vale $W_{3-1} = -93116,8J + 86465,6J = -6651,2J$

Il rendimento del ciclo viene dato dalla relazione (con Q_a il calore totale assorbito):

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_a} = \frac{\Sigma Q_i}{Q_a} = 1 + \frac{Q_{3-1}}{Q_{1-2} + Q_{2-3}} = 1 - \frac{93116,8J}{95686,12J} = 0.027$$

Problema 4.

Una massa $m = 0,25Kg$ di rame ad una temperatura T viene immersa in un recipiente contenente $0,1Kg$ di acqua inizialmente alla temperatura di 320K. Quando il sistema raggiunge l'equilibrio termico rimangono nel recipiente 0,09Kg di acqua. Determinare la temperatura iniziale T del rame e calcolare la variazione di entropia dell'universo, trascurando i scambi di calore con

l'ambiente esterno.
Siano $c = 387J/KgK$ e $c' = 4187J/KgK$ rispettivamente i calori specifici del rame e dell'acqua. Il calore latente di ebollizione dell'acqua vale $\lambda_e = 22,6.10^5 J/Kg$.

Soluzione.

In questo processo, il blocco di rame ha ceduto calore all'acqua, la quale assorbe del calore per portarsi alla temperatura di ebollizione e per evaporare. Il bilancio energetico e quindi dato dalla relazione:

$$mc(T - T_e) = m_1 c'(T_e - 320K) + (m_1 - m_2)\lambda_e$$

dove T_e rappresenta la temperatura di ebollizione dell'acqua, $m_1 = 0,1Kg$ e la massa iniziale di acqua, $m_2 = 0.09Kg$ e la massa di acqua che rimane nel recipiente, $m_1 - m_2 = 0,01Kg$ e la massa di acqua evaporata. La risoluzione della precedente equazione di primo grado ci permette di calcolare la temperatura iniziale del rame:

$$T = T_e + \frac{m_1 c'(T_e - 320K) + (m_1 - m_2)\lambda_e}{mc} = 841,11K$$

La variazione di entropia dell'universo coincide con quella del sistema (ΔS_{sist}), dato che si possono trascurare scambi di energia con l'ambiente esterno. La variazione di entropia del sistema viene data da tre contributi: il rame che cede calore (ΔS_1), l'acqua che assorbe calore e si riscalda (ΔS_2) e l'acqua che evapora (ΔS_3), ossia

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$

dove , con $T_1 = 320K$,

$$\Delta S_1 = \int_T^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_T^{T_e} \frac{mcdT}{T} = mcln(\frac{T_e}{T})$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{m_1 c' dT}{T} = m_1 c' ln(\frac{T_e}{T_1})$$

$$\Delta S_3 = \frac{\lambda_e(m_1 - m_2)}{T_e}$$

Per la variazione di entropia del sistema (e dell'universo) risulta:

$$\Delta S_{sist} = 46,28J/K$$

Problema 5.

Tre moli di un gas ideale monoatomico vengono portati dallo stato A allo stato B mediante una espansione adiabatica nel vuoto. Successivamente, il gas viene portato allo stato C tramite una compressione adiabatica irreversibile ed infine il gas viene posto a contatto con una sorgente a temperatura T_A e ritorna allo stato iniziale A con una trasformazione isobara irreversibile. Sono dati la temperatura $T_A = 300K$, la pressione $p_A = 2.10^5 Pa$ ed il lavoro compiuto nella trasformazione BC, $W_{BC} = -3,7.10^4 J$. Determinare il volume dello stato C e calcolare la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione.

- La trasformazione AB.

Questa trasformazione corrisponde ad una espansione adiabatica libera, dunque il lavoro e nullo (l'espansione nel vuoto non richiede lavoro) e il calore scambiato e nullo (la trasformazione e adiabatica). Quindi, dal primo principio, abbiamo:

$$\Delta U_{AB} = 0$$

quindi la trasformazione AB e anche isoterma, dato che per un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura: $T_A = T_B = 300K$.

- La trasformazione BC.

Dato che la compressione e adiabatica, $Q_{BC} = 0$, quindi il primo principio implica che:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_v(T_B - T_C) = nc_v(T_A - T_C)$$

Risolvendo questa relazione rispetto a T_C si otiene:

$$T_C = T_A - \frac{W_{BC}}{nc_v} = 1288,96K$$

Ora, il volume dello stato C puo essere ricavato dalla relazione $p_C V_C = nRT_C$, utilizzando il fatto che $p_A = p_C$:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_A} = 0,16m^3$$

- La trasformazione CA.

Il gas cede una quantita di calore Q_{CA} che puo essere calcolata facilente perche la trasformazione e isobara:

$$Q_{CA} = nc_p(T_A - T_C) = -61666,60J$$

Questa informazione e utile per determinare la variazione di entropia dell'universo per il ciclo. Nel nostro caso, abbiamo

$$\Delta S_u = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb}$$

Le tre trasformazioni subite dal gas nel ciclo sono irreversibili, pero sommando i contributi risulta $\Delta S_{gas} = 0$, perche corrisponde alla variazione di entropia di un gas per il ciclo (l'entropia e una funzione di stato). Quindi rimane solo da determinare la variazione di entropia dell'ambiente. Essa viene data dal fatto che la sorgente termica assorbe del calore Q ceduto dal gas, quindi

$$Q = -Q_{CA} = +61666,60J$$

e la variazione di entropia dell'ambiente (e dell'universo) risulta essere:

$$\Delta S_u = \Delta S_{amb} = \frac{Q}{T_A} = \frac{61666,60J}{300K} = 205,56J/K$$