

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura

Corso di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva

Riccardo Migliari¹,
Leonardo Baglioni², Jessica Romor³, Marta Salvatore⁴

1 Professore ordinario di Fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva – titolare del corso
2, Ricercatore, 3 e 4 Dottori di ricerca in Rilievo e rappresentazione dell'architettura e dell'ambiente

Lezione 18 – 4 Dicembre 2014

Argomenti

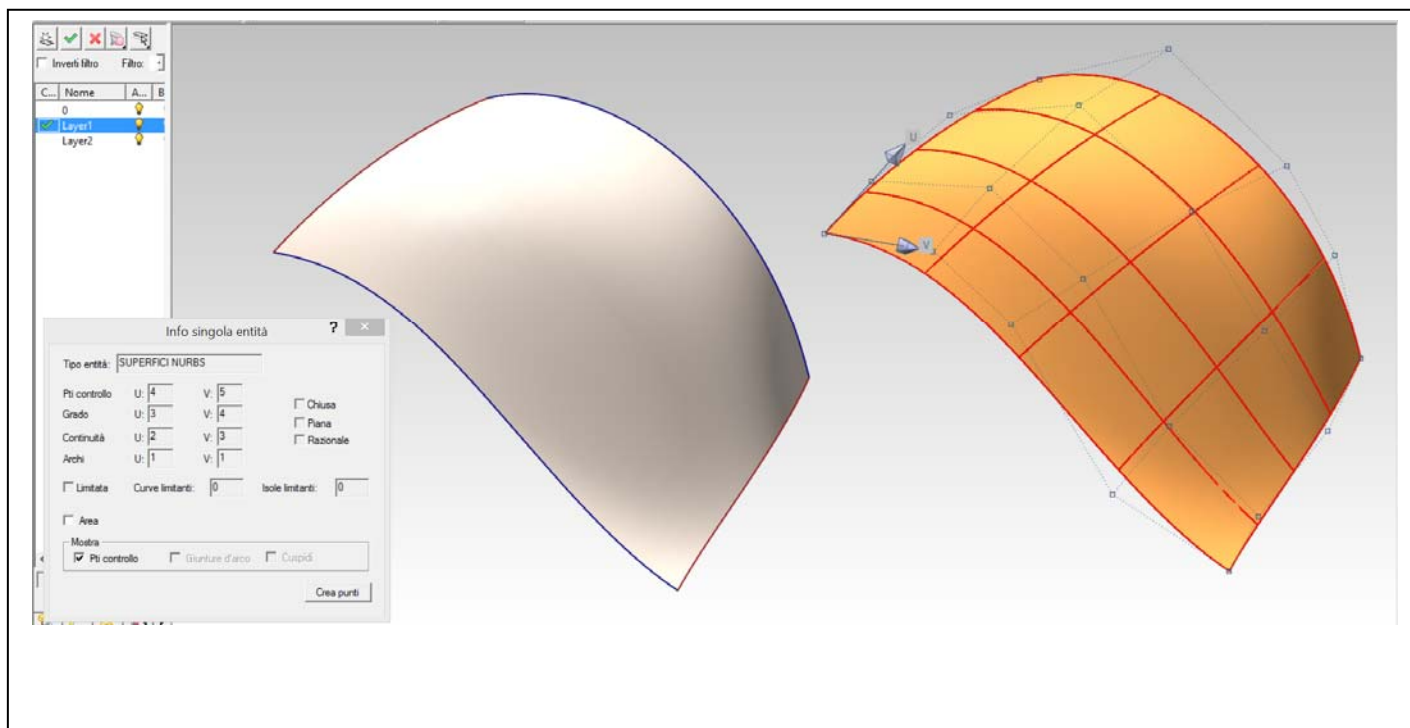
Le superfici (6). La curvatura gaussiana in un punto di una superficie continua. Punti ellittici, punti iperbolici, punti parabolici. Superfici a curvatura positiva, negativa e nulla. Continuità tra superfici. Superfici di classe A: imposizione della continuità di curvatura.

Esercitazione in aula: esempi di imposizione di continuità tra superfici e verifiche relative per mezzo di curve isofote.

La rappresentazione NURBS delle superfici

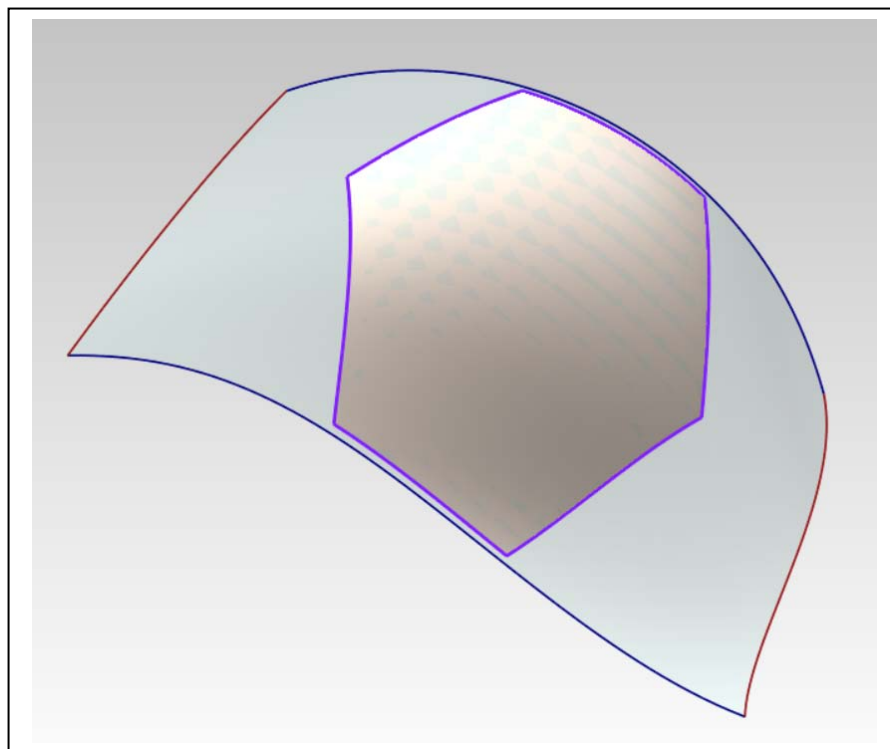
Concetti essenziali:

1. Nella rappresentazione matematica le superfici possono essere descritte per mezzo delle classiche equazioni in tre coordinate. L'esigenza di descrivere superfici di forma libera, ha sollecitato gli studi che hanno portato alle equazioni parametriche NURBS. Queste equazioni usano le stesse logiche della curve NURBS (poli, grado dell'equazione, archi, continuità), ma individuano i punti che loro appartengono al variare di due parametri detti u e v .

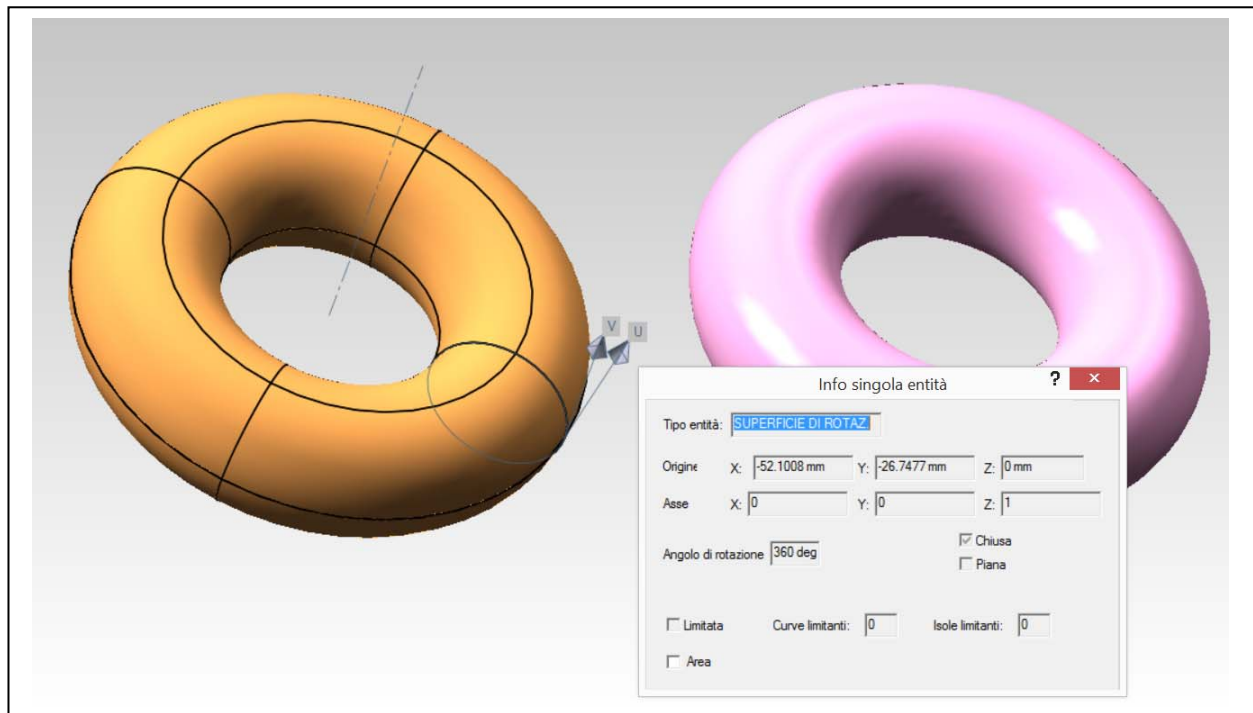


La figura mostra una superficie NURBS (a sinistra) e i poli che la controllano (a destra). Il punto nel quale hanno origine le due frecce è quello ove i parametri u e v sono eguali a zero; il punto diametralmente opposto ha parametri $u=1$, $v=1$; le linee rosse sono le isoparametriche (u e v): 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.

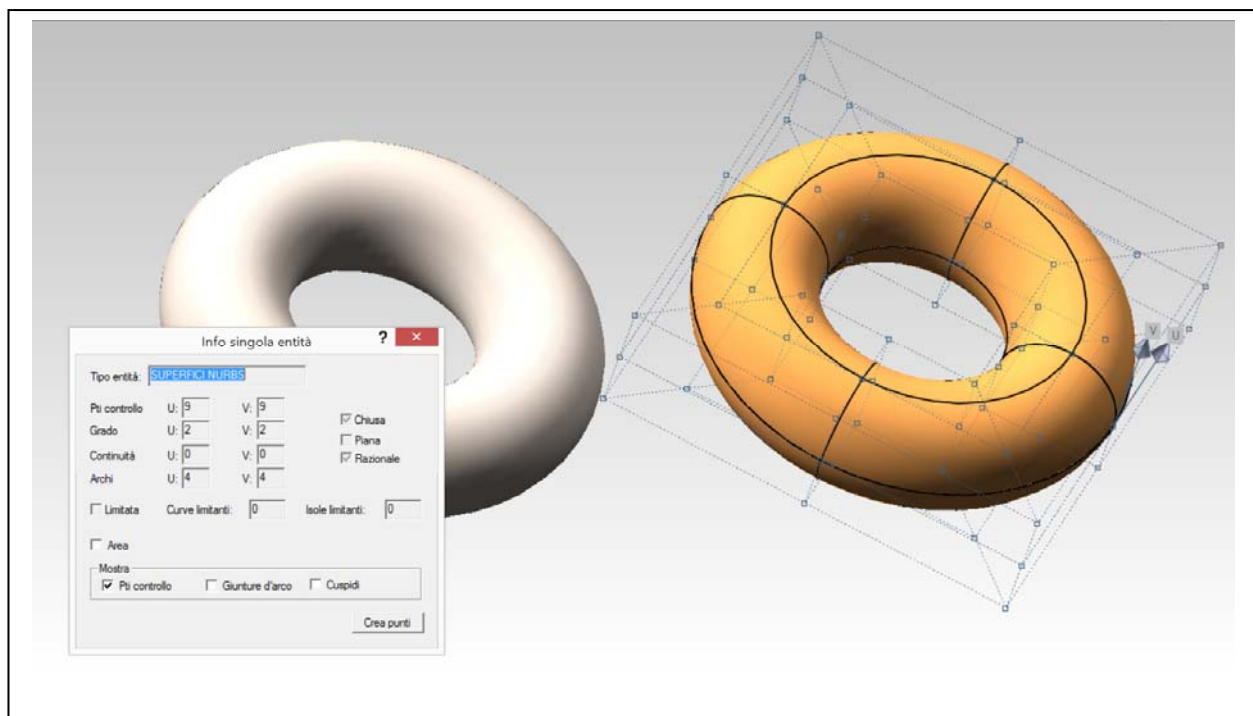
2. Le superfici NURBS descrivono sempre e soltanto patch (pezze) quadrilatere. Perciò, se si vuole modellare una superficie che abbia per perimetro un triangolo, un pentagono o una qualsiasi altra figura, occorre tagliarla. I veri bordi della superficie sono le isoparametriche **0** e **1**. Tutti gli altri bordi si dicono ‘bordi tagliati’. Nella figura qui sotto da una superficie quadrilatera intera è stato ricavato un segmento con sei lati; i bordi tagliati sono quelli in viola.



3. Una superficie descritta da una equazione classica (si dice specializzata) può sempre essere convertita in una superficie NURBS, controllata da poli.



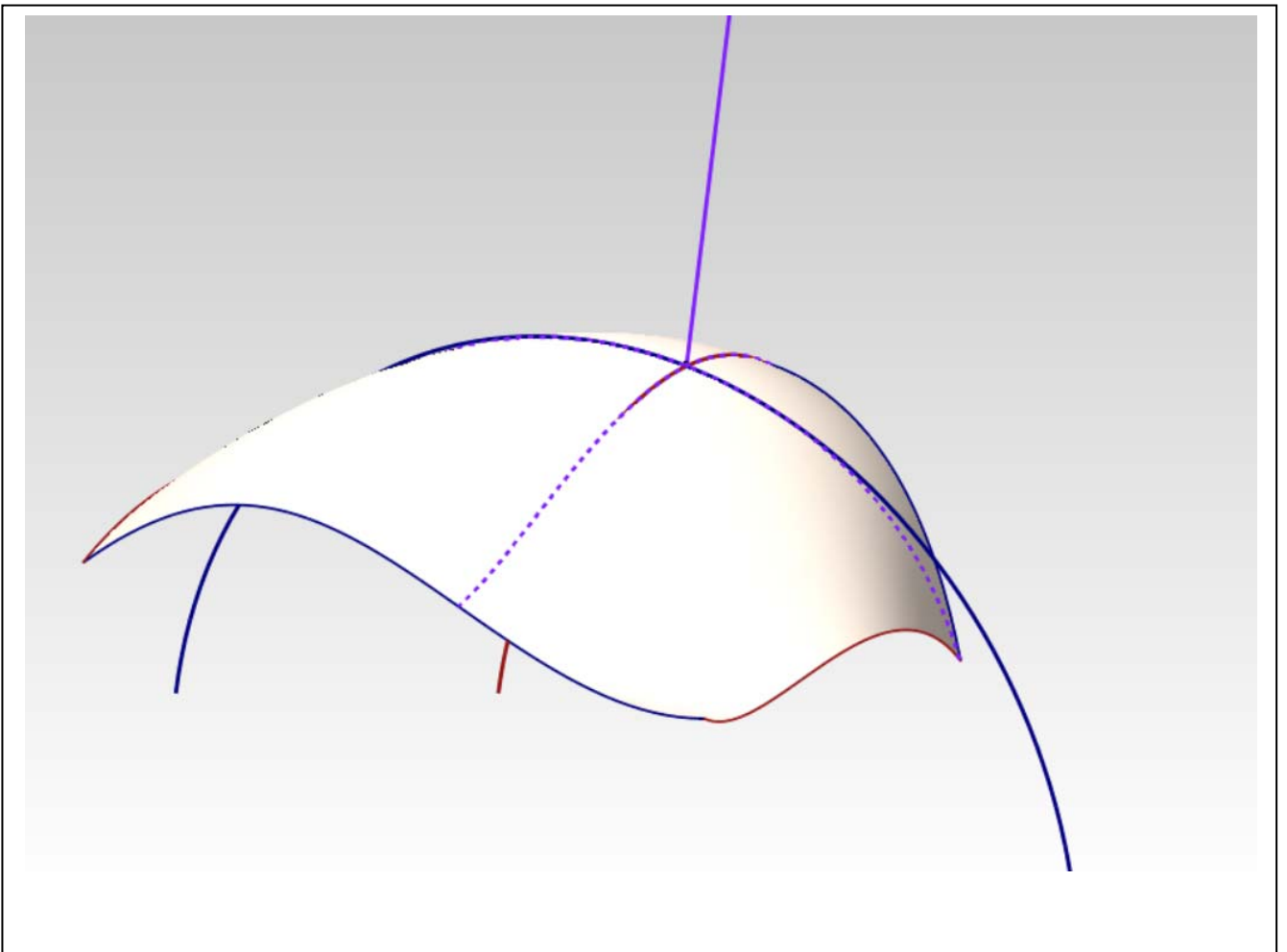
In questa figura, il toro a destra è stato generato come superficie di rotazione, utilizzando una equazione parametrica tradizionale. Se interrogato, il software mostra l'asse e la generatrice, nonché l'orientamento dei parametri u e v . Il toro a sinistra, invece, è frutto di una conversione in NURBS. Nella figura qui sotto l'interrogazione ne mette in luce la struttura, controllata da poli.



La curvatura gaussiana in un punto di una superficie continua

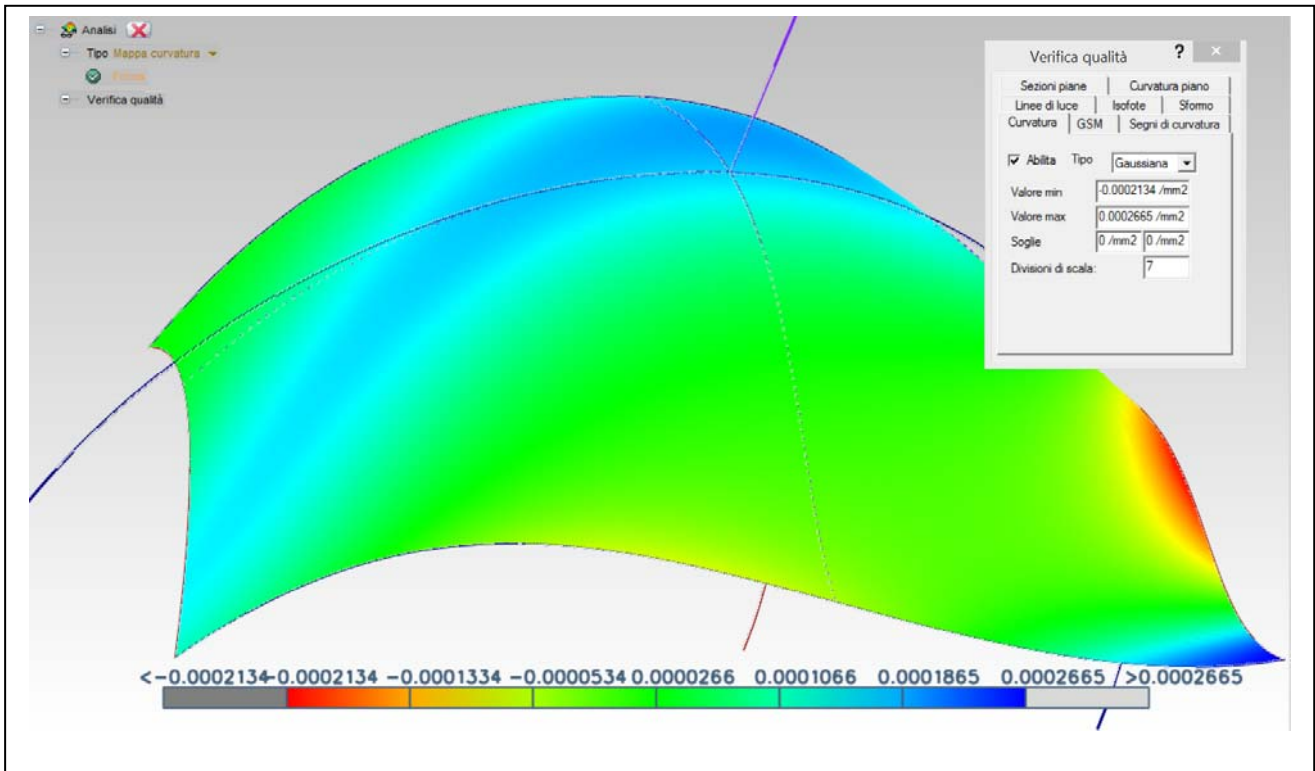
Concetti essenziali:

1. Consideriamo un punto qualsiasi **P** di una superficie continua e la relativa normale: i piani che passano per questa retta tagliano la superficie secondo sezioni, ognuna delle quali ammette un cerchio osculatore e un valore di curvatura **k** nel punto **P**. Tra questi valori esiste un massimo e un minimo. Si dice curvatura gaussiana della superficie nel punto **P** il prodotto delle curvature minima e massima $\mathbf{K} = \mathbf{k}^{\min} * \mathbf{k}^{\max}$. Questo prodotto può assumere valori positivi, negativi e valore nullo.



Nella figura qui sopra si vede il punto **P** con la normale alla superficie (in viola). Le due sezioni che hanno, in **P**, curvatura minima e massima sono tratteggiate. Il cerchio osculatore blu, essendo il più grande, è quello che dà luogo al valore minimo della curvatura in **P**, il cerchio osculatore rosso dà luogo, invece, al valore massimo.

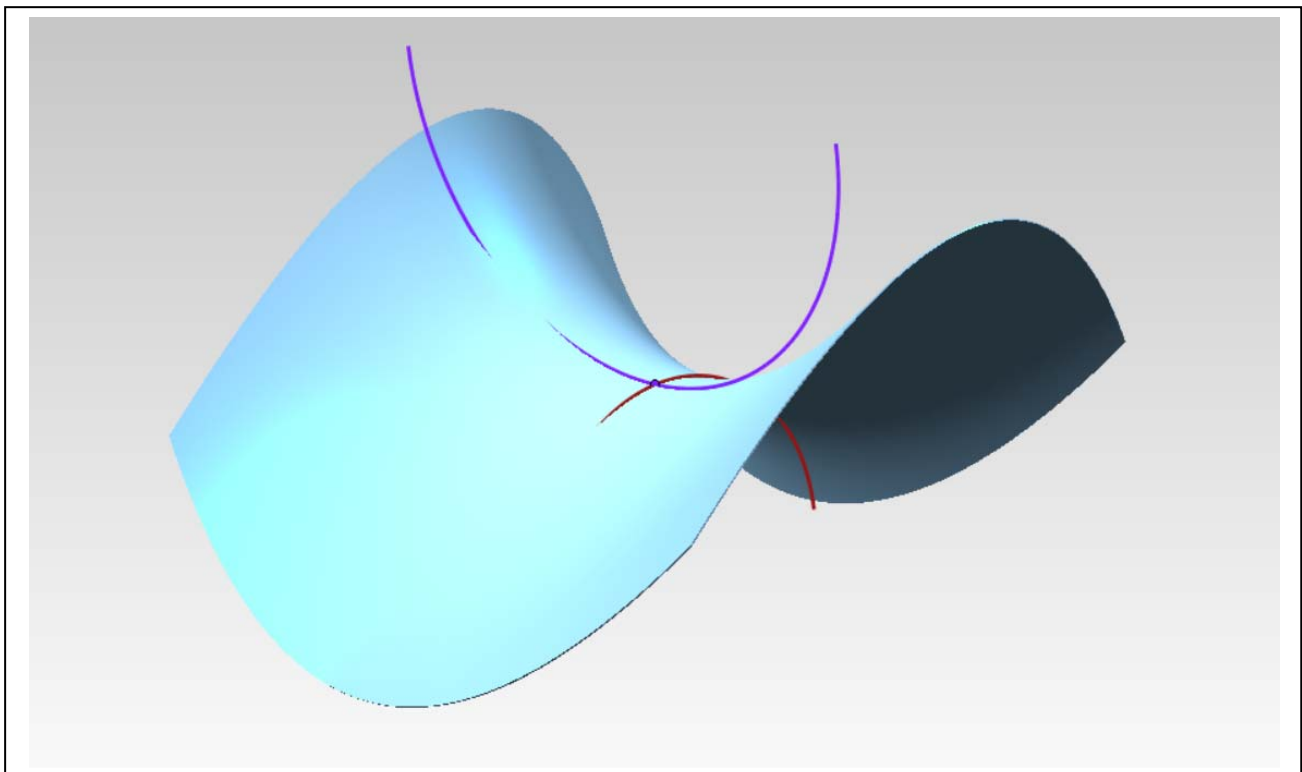
Naturalmente, salvo casi particolari, ogni punto della superficie ha curvatura gaussiana diversa. I software forniscono strumenti per l'analisi dei valori di curvatura, associando ad essi una scala cromatica, come si vede nelle figura seguente.



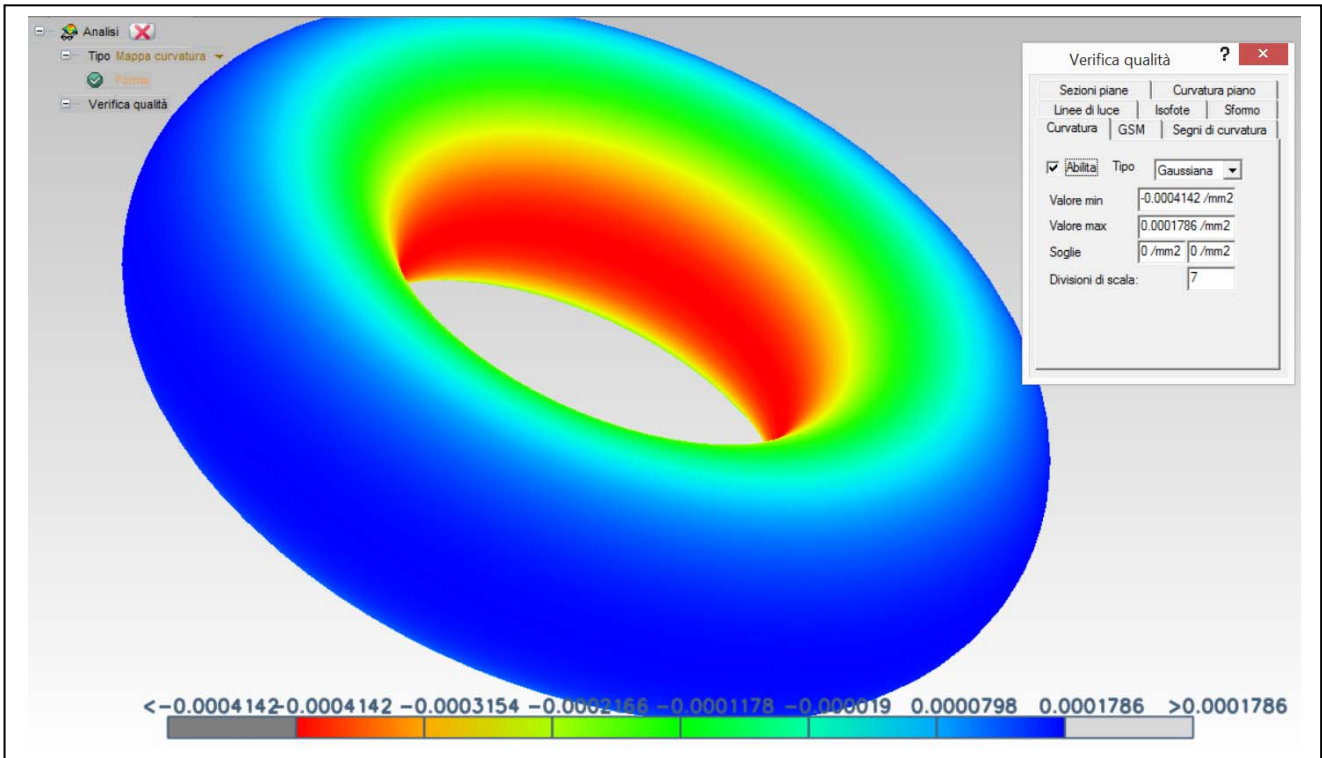
Punti ellittici, punti iperbolici, punti parabolici

Concetti essenziali:

1. Se i due cerchi osculatori vengono a trovarsi da parti opposte della superficie, il prodotto delle curvatures è negativo. Ciò accade, ad esempio, nell'iperboloide a una falda e nel paraboloide iperbolico.



2. Se una delle due sezioni principali è una retta, che ha curvatura nulla, il prodotto delle curvature pure si annulla. Perciò superfici come il cono e il cilindro hanno curvatura gaussiana nulla.
3. Esistono superfici che hanno curvatura positiva in ogni punto (come l'ellissoide), che hanno curvatura negativa in ogni punto (come il parabolide iperbolico visto poc'anzi) e che hanno curvatura nulla in ogni punto (come il cono e il cilindro).
4. I punti che hanno curvatura positiva si dicono 'ellittici'; quelli che hanno curvatura negativa si dicono 'iperbolici'; quelli che hanno curvatura nulla si dicono parabolici.
5. Esistono, come abbiamo visto, superfici che hanno solo punti di un tipo; ma esistono anche superfici che hanno punti di ogni tipo, ad esempio, il toro. Qui sotto è raffigurata l'analisi di curvatura di un toro.



Continuità tra superfici. Superfici di classe A: imposizione della continuità di curvatura

Concetti essenziali:

1. Così come è possibile imporre condizioni di continuità tra curve, è possibile anche imporre condizioni di continuità tra superfici. Nelle figure che seguono sono state imposte a due superfici, prima la continuità posizionale, poi quella tangenziale e infine quella di curvatura.

