Sia

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-y)\,\mathrm{sen}((x+y)^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabilità di f in $(0,0)$

(P.G. Vernole, 2014)

---

1) Continuità: si tratta di provare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)\,\mathrm{sen}\,(x+y)^2}{x^2+y^2}=0$$

In effetti si ha

$$|\mathrm{sen}\,(x+y)^2| \leq (x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2 \leq$$

$$\leq \left(|(x,y)|+|(x,y)|\right)^2 = 4\,(x^2+y^2)$$

dove si è utilizzato:

$$|\mathrm{sen}\,t| \leq |t|,$$

$$|x| \leq |(x,y)|, \quad |y| \leq |(x,y)|$$

Quindi

$$\left| \frac{(x-y)\ \operatorname{sen}(x+y)^2}{x^2+y^2} \right| \leq 4\,|x-y| \to 0.$$

In alternativa si possono usare coord. polari.

2) derivabilità parziale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\ \operatorname{sen} h^2}{h^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{h\ \operatorname{sen} h^2}{h^3} = -1.$$

3) differenziabilità.

Ci sono varie maniere di dimostrare che f non è differenziabile nell'origine:

<u>Primo modo</u>: mediante la def. di differenziabilità

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{(h-k)\,\text{sen}\,(h+k)^2}{h^2+k^2} - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0.$$

e questo è falso, perché il limite lungo le direzioni è falso, ad esempio, sulla retta $k=-h$ il limite precedente vale

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h\to 0}\left(-\sqrt{2}\,\frac{h}{|h|}\right) \nexists .$$

<u>Secondo modo</u>: le derivate direzionali valgono (posto $\underline{v}=(v_1,v_2)$ con $v_1^2+v_2^2=1$)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h v_1, h v_2) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(v_1-v_2)\,\text{sen}\,(h^2(v_1+v_2)^2)}{h^3\,\underbrace{(v_1^2+v_2^2)}_{=1}} =$$

$$= (v_1-v_2)(v_1+v_2)^2,$$

mentre, se f fosse differenziabile, si avrebbe

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot \underline{v} = v_1 - v_2,$$

e le due espressioni sono in generale diverse □