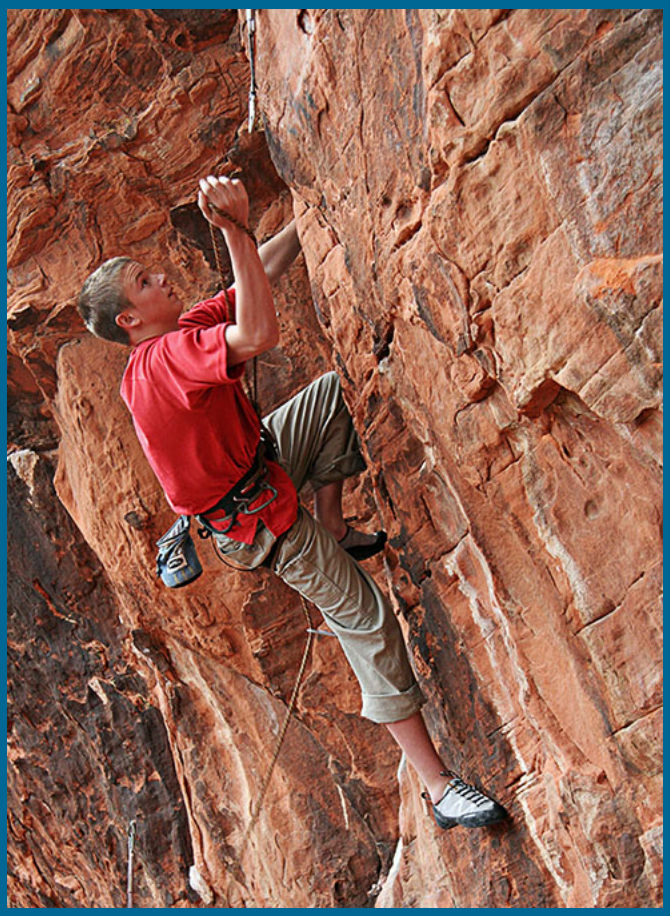
Esercizi svolti di Meccanica e Termodinamica



Un esercizio al giorno

Giancarlo Cella
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare sez. Pisa

Versione del 9 ottobre 2013

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/` or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Ringraziamenti

Ringrazio gli studenti Paolo Alfano, Marco Bellomo, Giuseppe Castiglione, Alessio Ceccotti, Giancecco Ceccotti (che mi ha dato lo spunto per gli Esercizi 5.139, 5.140 e 5.141), Lorenzo Dania, Davide Decataldo, Gennaro Marco Devincenzis, Michael De Nuccio, Sara Fasolino, Emanuele Martini, Paolo Mazza, Carmelo Mordini, Bruno Moriconi, Mattia Rattazzi, Rosario Russo, Andrea Schillaci, Stefano Silvestri, Lorenzo Vivaldi per avermi fatto notare errori nel testo e/o per avere suggerito degli esercizi.

Indice

I Basi 12

1 Analisi dimensionale 13
- 1.1 Periodo di un pendolo ⋆ . . . 13
- 1.2 Studio sperimentale del periodo del pendolo ⋆ . . . 15
- 1.3 Pendolo sulla luna ⋆ . . . 19

2 Vettori 20
- 2.1 Triplo prodotto vettoriale ⋆ . . . 20
- 2.2 Matrice di rotazione ⋆⋆⋆ . . . 21
- 2.3 Il prodotto vettoriale come operatore ⋆ . . . 23

II Meccanica 24

3 Cinematica 25
- 3.1 Profondità di un pozzo ⋆⋆ . . . 25
- 3.2 Lunghezza di una traiettoria ⋆⋆ . . . 27
- 3.3 Raggiungere un oggetto che accelera ⋆⋆ . . . 28
- 3.4 Moto periodico in un piano a velocità nota ⋆⋆ . . . 30
- 3.5 Vertici di un poligono ⋆⋆⋆ . . . 31
- 3.6 Farfalle kamikaze ⋆⋆⋆ . . . 33
- 3.7 Raggiungere una boa ⋆⋆⋆ . . . 34
- 3.8 Preda e predatore ⋆⋆ . . . 37
- 3.9 Otto volante ⋆⋆ . . . 38
- 3.10 Moto nel piano: accerazione e velocità noti in modulo. ⋆⋆$\mathcal{S}$ . . . 40
- 3.11 Una traiettoria in coordinate polari ⋆$\mathcal{S}$ . . . 41
- 3.12 Caduta di una moneta ⋆⋆$\mathcal{S}$ . . . 43
- 3.13 Lancette dell'orologio ⋆ . . . 45
- 3.14 Il problema dello spazzaneve ⋆⋆ . . . 46
- 3.15 Rotolamento puro e traiettorie ⋆⋆ . . . 48

4 Statica 49
- 4.1 Pila di mattoni ⋆⋆⋆ . . . 49
- 4.2 Equilibrio ed energia potenziale ⋆⋆ . . . 51

5 Dinamica punto materiale **54**
5.1 Doppio piano inclinato ⋆ . . . 54
5.2 Moto su una spirale ⋆⋆ . . . 57
5.3 Moto viscoso ⋆⋆ . . . 60
5.4 Un problema inverso ⋆ . . . 62
5.5 Moto periodico ⋆⋆ . . . 63
5.6 Attraversamento di una buca ⋆⋆ . . . 65
5.7 Moto su una guida con attrito ⋆ . . . 67
5.8 Moto su un anello con attrito ⋆⋆ . . . 68
5.9 Oscillatore con attrito ⋆⋆ . . . 69
5.10 Asta incernierata ⋆⋆ . . . 71
5.11 Disco rotante ⋆⋆ . . . 73
5.12 Oscillatore armonico forzato ⋆⋆ . . . 75
5.13 Oscillazioni isocrone ⋆⋆⋆ . . . 77
5.14 Catena che cade ⋆⋆ . . . 79
5.15 Carrucola ⋆⋆ . . . 81
5.16 Carrucola II ⋆⋆ . . . 82
5.17 Carrucola III ⋆⋆ . . . 83
5.18 Oscillatore e forza $F = \alpha t$ ⋆⋆ . . . 84
5.19 Oscillatore e forza $F = \alpha t^2$ ⋆⋆ . . . 85
5.20 Doppio piano inclinato con attrito ⋆ . . . 86
5.21 Carrucola e pedana mobile ⋆⋆ . . . 87
5.22 Catena chiusa di masse ⋆⋆ . . . 90
5.23 Caduta quasi libera ⋆ . . . 92
5.24 Pedana mobile ⋆⋆ . . . 93
5.25 Urto massa-pedana ⋆⋆ . . . 95
5.26 Filo che si avvolge ⋆⋆ . . . 96
5.27 Molle in serie e in parallelo ⋆ . . . 98
5.28 Oscillatore con massa appoggiata ⋆⋆ . . . 99
5.29 Carrucola e moto relativo ⋆⋆ . . . 100
5.30 Urto tra una massa e un sistema composto ⋆⋆ . . . 101
5.31 Urto anelastico con sistema composito ⋆⋆ . . . 102
5.32 Massima compressione ⋆⋆ . . . 103
5.33 Sbarra vincolata ⋆⋆ . . . 104
5.34 Urto multiplo ⋆⋆ . . . 106
5.35 Moto su una guida parabolica ⋆⋆ . . . 107
5.36 Oscillatore forzato con attrito ⋆⋆⋆ . . . 109
5.37 Caduta da un dirupo ⋆⋆ . . . 111
5.38 Diffusione da una buca ⋆⋆ . . . 112
5.39 Molla e attrito ⋆ . . . 114
5.40 Carrucola con attrito ⋆⋆⋆ . . . 115
5.41 Oscillatori accoppiati ⋆⋆⋆ . . . 118
5.42 Oscillatore ⋆⋆ . . . 120
5.43 Molla con massa non trascurabile. Analisi approssimata. ⋆⋆⋆ . . . 122

5.44 Oscillazione in una guida parabolica ⋆⋆ 123
5.45 Oscillazioni di un manubrio ⋆⋆ 124
5.46 Moto libero in coordinate generali ⋆⋆ 126
5.47 Lancio di un proiettile da una pedana mobile ⋆⋆ 127
5.48 Giro della morte su guida mobile ⋆⋆ 128
5.49 Sistema oscillante ⋆⋆ 130
5.50 Pendolo in regime di alta energia ⋆⋆⋆ 131
5.51 Pendolo doppio ⋆⋆⋆ 132
5.52 Urto non istantaneo tra una massa e un sistema composto ⋆⋆⋆ 135
5.53 Molle multiple ⋆⋆ 138
5.54 Orbite circolari su un cono ⋆ 139
5.55 Catena di oscillatori ⋆⋆⋆ 140
5.56 Pendolo mobile ⋆⋆ 142
5.57 Pendolo sospeso ⋆⋆⋆ 144
5.58 Superare una pedana ⋆ 146
5.59 Urti e attrito ⋆⋆⋆ 147
5.60 Campo di forze I ⋆ 149
5.61 Campo di forze II ⋆ 150
5.62 Campo di forze III ⋆⋆ 151
5.63 Moto in un campo centrale I ⋆⋆ 153
5.64 Moto in un campo centrale II ⋆⋆ 155
5.65 Periodo del pendolo ⋆⋆⋆ 157
5.66 Oscillazioni forzate ⋆⋆⋆ 159
5.67 Slitta verticale ⋆⋆ 161
5.68 Pendolo sferico ⋆⋆ 164
5.69 Pendolo sferico piccolo momento angolare ⋆⋆ 166
5.70 Pendolo sferico grande momento angolare ⋆⋆ 167
5.71 Cambiamento parametri orbita ⋆⋆ 168
5.72 Precessione di un'orbita ⋆⋆⋆ 170
5.73 Uscire da una bottiglia ⋆⋆ 172
5.74 Moto su un toro ⋆⋆⋆ 176
5.75 Pendolo nello spazio delle fasi ⋆⋆ 180
5.76 Moto su una guida ellittica ⋆⋆ 184
5.77 Macchina di Atwood: effetti della massa del filo ⋆⋆⋆ 186
5.78 Pendolo invertito ⋆⋆ 189
5.79 Urto con un piano inclinato ⋆⋆ 192
5.80 Urto di un manubrio ⋆⋆ 194
5.81 Il grande attrattore ⋆⋆⋆ 196
5.82 Razzo in un campo gravitazionale costante ⋆⋆ 200
5.83 Razzo vincolato ⋆⋆ 201
5.84 Razzo a più stadi ⋆⋆ 203
5.85 Forze di marea ⋆⋆ 204
5.86 Massima forza di marea ⋆⋆⋆ 206
5.87 Pendolo non ideale ⋆⋆ 210

5.88 Moto di una scodella ⋆⋆ 213
5.89 Urto contro una sfera ⋆⋆⋆ 215
5.90 Perturbazione di un oscillatore armonico ⋆⋆⋆ 220
5.91 Pendolo modificato ⋆⋆⋆ 224
5.92 Accelerazione massima su disco rotante ⋆⋆ 227
5.93 Caduta in un fossato ⋆⋆ 229
5.94 Piccole oscillazioni I ⋆⋆ 231
5.95 Materia oscura ⋆⋆ 233
5.96 Urti istantanei e attrito ⋆⋆ 235
5.97 Attrito e paradossi ⋆⋆⋆ 238
5.98 Moto in un campo centrale III ⋆⋆⋆ 240
5.99 Orbita nel sistema rotante ⋆⋆ 243
5.100 Il problema di Keplero ⋆⋆ 245
5.101 Oscillatore forzato e transiente ⋆⋆ 253
5.102 Piccole perturbazioni di un'orbita circolare ⋆⋆⋆ 255
5.103 Oscillatore bidimensionale forzato ⋆⋆ 258
5.104 Caduta su una scodella ⋆⋆ 259
5.105 Problema di Keplero: costanti del moto ⋆⋆⋆ 262
5.106 Sistema solare su un cono ⋆⋆ 265
5.107 Pendolo urtato da un proiettile ⋆⋆ 269
5.108 Moto su superficie di rotazione ⋆⋆ 272
5.109 Cambio di orbita ⋆⋆ 274
5.110 Formica su un giradischi ⋆⋆ 277
5.111 Urto con una massa vincolata elasticamente ⋆⋆ 280
5.112 Urto tra una particella e un pendolo ⋆⋆ 283
5.113 Caduta di una struttura ⋆⋆ 285
5.114 Un pendolo su un blocco mobile ⋆⋆ 288
5.115 Urto con un cuneo mobile ⋆⋆ 290
5.116 Doppia cerniera mobile ⋆⋆ 292
5.117 Massa su guida circolare e molla ⋆⋆ 295
5.118 Modello di urto non istantaneo ⋆⋆ 297
5.119 Carrucola su cuneo ⋆⋆ 299
5.120 Massa su guida circolare e molla II ⋆⋆ 303
5.121 Orbita di un satellite ⋆⋆ 305
5.122 Nibiru ⋆⋆$\mathcal{S}$ 308
5.123 Un pendolo in un ascensore ⋆⋆$\mathcal{S}$ 312
5.124 Urto contro un corpo composito ⋆⋆$\mathcal{S}$ 315
5.125 Un problema inverso in campo centrale ⋆⋆$\mathcal{S}$ 317
5.126 Cilindro spinto in discesa ⋆⋆⋆ 319
5.127 Masse e molla: identificare un errore ⋆⋆ 324
5.128 Proiettile con attrito viscoso: traiettoria ⋆⋆ 326
5.129 Carrello con massa scorrevole ⋆⋆ 328
5.130 Carrello triangolare ⋆⋆ 330
5.131 Sistema a tre corpi: energia nel sistema del centro di massa ⋆ 332

5.132 Nastro trasportatore ⋆⋆ . . . 334
5.133 Propulsione a reazione “istantanea” ⋆⋆ . . . 336
5.134 Perdita di energia di un oscillatore ⋆⋆ . . . 338
5.135 Energia di un oscillatore forzato a regime ⋆⋆ . . . 340
5.136 Risposta alla risonanza e fattore di qualità ⋆⋆ . . . 342
5.137 Forzante periodica per $t > 0$ ⋆⋆ . . . 343
5.138 Fermare un oscillatore⋆⋆ . . . 344
5.139 Molla con massa distribuita I ⋆⋆ . . . 346
5.140 Molla con massa distribuita II ⋆⋆ . . . 348
5.141 Molla con massa distribuita III ⋆⋆⋆⋆ . . . 350
5.142 Molecola triangolare ⋆⋆⋆ . . . 359
5.143 Pendolo inclinato ⋆⋆ . . . 359

6 Dinamica del corpo rigido **361**
6.1 Tensore di inerzia di un cubo I ⋆ . . . 361
6.2 Tensore di inerzia di un cubo II ⋆⋆ . . . 362
6.3 Tensore di inerzia e rotazioni ⋆⋆⋆ . . . 363
6.4 Tensore di inerzia e traslazioni ⋆⋆⋆ . . . 364
6.5 Teorema di Steiner ⋆⋆ . . . 365
6.6 Cilindro su un piano inclinato . . . 366
6.7 Moto su un cono in presenza di gravità ⋆⋆⋆ . . . 367
6.8 Carrucola ⋆⋆ . . . 368
6.9 JoJo ⋆⋆ . . . 369
6.10 Campo di velocità di un corpo rigido ⋆⋆ . . . 370
6.11 Tensore di inerzia di un parallelepipedo ⋆⋆ . . . 373
6.12 Tensore di inerzia di una lamina rettangolare ⋆⋆ . . . 374
6.13 Tensore di inerzia di una lamina ⋆⋆ . . . 375
6.14 Disuguaglianze tra elementi del tensore di inerzia ⋆⋆ . . . 376
6.15 Tensore di inerzia di una distribuzione lineare di massa ⋆⋆ . . . 377
6.16 Cilindro lanciato su un piano ⋆⋆ . . . 378
6.17 Sbarra su rulli rotanti ⋆⋆ . . . 379
6.18 Tensore di inerzia di una sfera ⋆⋆ . . . 381
6.19 Energia di un sistema di corpi rigidi ⋆⋆ . . . 382
6.20 Cilindro su piano inclinato ⋆⋆ . . . 384
6.21 Sistema di carrucole e corpi rigidi ⋆⋆ . . . 387
6.22 Sistema di carrucole ⋆⋆ . . . 389
6.23 Contatto tra corpi rigidi ⋆⋆ . . . 391
6.24 Momento di inerzia e proiezioni I ⋆⋆ . . . 392
6.25 Momento di inerzia e proiezioni II ⋆⋆ . . . 393
6.26 Tensore di inerzia corpo composto ⋆⋆ . . . 395
6.27 Trottola simmetrica ⋆⋆⋆ . . . 397
6.28 Scontro tra cubetti di ghiaccio ⋆⋆ . . . 401
6.29 Moto su una sbarra rotante ⋆⋆ . . . 404
6.30 Piccole oscillazioni di metà cilindro ⋆⋆⋆ . . . 407

6.31 Piccole oscillazioni metà cilindro, niente attrito ⋆⋆ 411
6.32 Centro di massa metà cilindro ⋆⋆ 413
6.33 Giro della morte per una sfera ⋆⋆ 414
6.34 Campo di velocità di una moneta ⋆⋆⋆ 417
6.35 Trottola "bloccata" nel piano ⋆⋆ 420
6.36 Trottola simmetrica: discussione delle soluzioni ⋆⋆⋆ 422
6.37 Caduta di un manubrio ⋆⋆ 424
6.38 Scambio di momento angolare ⋆⋆ 428
6.39 Rotolamento puro di un cono ⋆⋆ 430
6.40 Un carrello in discesa ⋆⋆ 433
6.41 Oscillazioni forzate di un'asta ⋆⋆ 436
6.42 Distacco di una bacchetta rotante ⋆⋆ 439
6.43 Un altro giro della morte ⋆⋆ 442
6.44 Sbarra in guida circolare, vincolo bilatero ⋆⋆ 445
6.45 Urto con un'asta sul fondo di una scodella ⋆⋆ 447
6.46 Oscillatore con carrucole e corpi rigidi ⋆⋆ 450
6.47 Ancora sulla caduta di un manubrio ⋆⋆ 453
6.48 Caduta di due aste incernierate ⋆⋆ 455
6.49 Pendolo fisico con contrappeso ⋆⋆ 457
6.50 Un carretto in discesa ⋆⋆ 460
6.51 Caduta di una torre ⋆⋆⋆ 462
6.52 Cilindro vincolato ad una molla ⋆⋆$\mathcal{S}$ 466
6.53 Urto tra un triangolo e un quadrato ⋆⋆ 468
6.54 Cilindro vincolato ad una molla sul bordo ⋆⋆ 471
6.55 Centro di massa e momento di inerzia di un triangolo ⋆⋆ 474
6.56 Urto con una sbarra incastrata ⋆⋆ 477
6.57 Urto anelastico contro un pendolo fisico ⋆⋆ 479
6.58 Tre cilindri in equilibrio ⋆⋆ 481
6.59 Sistema di punti materiali equivalenti ad una sfera ⋆⋆⋆ 484
6.60 Tiro al piattello ⋆⋆ 487
6.61 Cilindro in caduta su un piano inclinato ⋆⋆ 489
6.62 Distacco da una calotta sferica ⋆⋆ 492
6.63 Piccole oscillazioni di un cilindro parabolico ⋆⋆⋆ 494
6.64 Caduta di una ruota esagonale lungo un pendio ⋆⋆⋆ 498
6.65 Urto tra una massa e un sistema con cilindro rotante ⋆⋆ 502
6.66 Urto di un settore cilindrico ⋆⋆ 505
6.67 Energia persa e rotolamento puro ⋆⋆ 507

7 Dinamica dei fluidi **509**
7.1 Ventosa ⋆⋆ 509
7.2 Secchio rotante ⋆⋆ 511
7.3 Tubo piegato ⋆⋆ 513
7.4 Equilibrio di un cilindro immerso in un liquido ⋆⋆⋆ 515
7.5 Campo di velocità I ⋆⋆ 519

7.6 Recipiente conico forato ⋆⋆ . . . 520
7.7 Svuotamento di un serbatoio ⋆⋆ . . . 522
7.8 Traslocare un acquario ⋆⋆ . . . 524
7.9 Diavoletto di Cartesio ⋆⋆ . . . 526
7.10 Estrazione di una provetta ⋆⋆ . . . 529
7.11 Estrazione di una provetta, considerazioni energetiche. ⋆⋆ . . . 531
7.12 Tempo di svuotamento di un contenitore ⋆ . . . 533

III Termodinamica 535

8 Trasmissione del calore 536
8.1 Sfera radiante ⋆⋆ . . . 536
8.2 Sbarra conducibilità variabile ⋆⋆ . . . 538
8.3 Tre corpi in contatto termico ⋆⋆ . . . 539
8.4 Sbarra conduttrice ⋆⋆ . . . 544
8.5 Equazione del calore unidimensionale ⋆⋆ . . . 546
8.6 Fluttuazione di temperatura su una sbarra ⋆⋆ . . . 547
8.7 Una soluzione particolare dell'equazione del calore unidimensionale ⋆⋆⋆ . 549
8.8 Temperatura a regime di una sbarra radioattiva ⋆⋆ . . . 552
8.9 Resistenza termica di una scala (semi)infinita ⋆⋆ . . . 554

9 Trasformazioni termodinamiche 555
9.1 Adiabaticità e velocità di una trasformazione ⋆⋆⋆ . . . 555
9.2 Rendimento di un ciclo di Carnot ⋆ . . . 558
9.3 Ciclo di Carnot con gas di fotoni ⋆⋆ . . . 560
9.4 Ciclo Brayton ⋆ . . . 563
9.5 Ciclo Diesel ⋆ . . . 564
9.6 Ciclo Ericsson ⋆ . . . 566
9.7 Ciclo Otto ⋆ . . . 567
9.8 Ciclo Stirling ⋆ . . . 568
9.9 Differenziale esatto ⋆⋆⋆ . . . 569
9.10 Calore specifico gas perfetto ⋆⋆ . . . 571
9.11 Trasformazione ciclica irreversibile ⋆⋆ . . . 572
9.12 Sistema termodinamico a tre corpi ⋆⋆⋆ . . . 575
9.13 Lavoro da un termos di caffè ⋆⋆ . . . 578
9.14 Lavoro da un termos di caffè II ⋆⋆ . . . 581
9.15 Lavoro da un termos di caffè III ⋆⋆ . . . 584
9.16 Lavoro estraibile da un sistema chiuso ⋆⋆ . . . 586
9.17 Massima potenza di un ciclo di Carnot ⋆⋆⋆ . . . 589
9.18 Trasferimento di calore tra un corpo e un bagno termico ⋆⋆$\mathcal{S}$ . . . 592
9.19 Tre modi per sciogliere una massa di ghiaccio ⋆⋆$\mathcal{S}$ . . . 595
9.20 Trasformazione termodinamica con attrito ⋆⋆$\mathcal{S}$ . . . 597
9.21 Effetto della capacità termica di un recipiente ⋆$\mathcal{S}$ . . . 601

9.22 Acqua e ghiaccio a pressione costante ⋆⋆$\mathcal{S}$ 604
9.23 Cilindro con gas e molla non lineare ⋆⋆$\mathcal{S}$ 607
9.24 Congelamento di una provetta ⋆⋆ 609
9.25 Calori specifici di un gas di Van der Waals ⋆⋆⋆ 611
9.26 Raffreddare un corpo, scaldarne un altro ⋆⋆$\mathcal{S}$ 613
9.27 Recipiente a due scomparti ⋆⋆$\mathcal{S}$ 615
9.28 Massimo riscaldamento e raffreddamento ⋆⋆ 618
9.29 Lavoro estraibile da due corpi: studio grafico ⋆⋆ 620
9.30 Adiabatica di un elastico ⋆⋆ 623
9.31 Stati accessibili ⋆⋆ 626
9.32 Riscaldamento massimo di un corpo ⋆⋆ 629
9.33 Dummy 632

Parte I.

Basi

1. Analisi dimensionale

1.1. Periodo di un pendolo ⋆

Mediante considerazioni dimensionali determinare la dipendenza della frequenza di oscillazione f di un pendolo inizialmente in posizione verticale dai parametri rilevanti per il problema, ossia

- la lunghezza ℓ del pendolo
- la sua massa m
- l'accelerazione di gravità g
- la velocità iniziale v_0

Soluzione

I parametri in gioco sono la massa del pendolo m, la sua lunghezza ℓ, l'accelerazione di gravità g e la velocità iniziale v_0. Vogliamo con essi costruire una grandezza delle dimensioni di un tempo, cioè

$$[m^\alpha \ell^\beta g^\gamma v_0^\delta] = M^\alpha L^{\beta+\gamma+\delta} T^{-2\gamma-\delta} = T \tag{1.1.1}$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta+\gamma+\delta &= 0 \\ -2\gamma-\delta &= 1 \end{aligned}$$

che può essere risolto nella forma

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{1-\delta}{2} \\ \gamma &= -\frac{1+\delta}{2} \end{aligned}$$

con δ arbitrario. Quindi qualsiasi combinazione del tipo

$$\ell^{\frac{1-\delta}{2}} g^{-\frac{1+\delta}{2}} v_0^\delta = \left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ha le dimensioni di un tempo. La soluzione per il periodo sarà quindi della forma

$$T = f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1.1.2}$$

dove f è una funzione arbitraria del parametro adimensionale

$$\Pi_1 = \frac{v_0^2}{\ell g}$$

Questa funzione esprime una possibile dipendenza (che in effetti esiste) del periodo di oscillazione di un pendolo dalla sua ampiezza. Il principio di isocronia delle oscillazioni, valido approssimativamente per piccole ampiezze, ci dice che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = C \tag{1.1.3}$$

dove C è una costante strettamente maggiore di zero. Risolvendo le equazioni del moto si troverebbe che la formula è corretta, e che $C = (2\pi)^{-1}$.

1.2. Studio sperimentale del periodo del pendolo ⋆

Per studiare sperimentalmente la dipendenza del periodo del pendolo dai suoi parametri si fanno 50 diversi misure, variando le caratteristiche del pendolo e la sua velocità iniziale. Il pendolo viene sempre lanciato dalla posizione verticale.

Le misure sono riportate nella tabella posta di seguito (che per convenienza è possibile scaricare in formato ASCII all'indirizzo `http://www.df.unipi.it/~cella/ueg/PENDOLO.dat`).

Si chiede di

- Rappresentare in un grafico il periodo T in funzione di $\sqrt{\ell/g}$
- Trovare due combinazioni adimensionali indipendenti di T, g, v_0, ℓ e m e rappresentare la prima in funzione della seconda su un grafico.
- Commentare il risultato dei due grafici precedenti. Dire in particolare se quanto ottenuto ha qualche relazione con la funzione $f(x)$ definita nell'Esercizio 1.1.
- In alcuni dei casi considerati il pendolo stava compiendo "piccole" oscillazioni? Come sarebbe possibile dare una risposta quantitativa?

# misura	v_0 (ms^{-1})	ℓ (m)	m (kg)	T (s)
1	0.10	6.72	2.28	5.22
2	0.21	1.42	8.84	2.41
3	0.95	9.37	8.69	6.23
4	1.10	6.10	6.81	5.05
5	1.72	9.06	8.68	6.19
6	2.09	9.03	0.48	6.22
7	1.29	2.33	8.07	3.18
8	1.67	3.61	5.79	3.96
9	2.11	3.52	6.92	3.96
10	3.57	9.5	2.09	6.51
11	2.86	4.54	4.33	4.54
12	4.30	9.44	4.79	6.57
13	5.11	9.98	9.62	6.83
14	4.82	8.67	5.36	6.37
15	4.91	6.87	1.41	5.74
16	5.30	7.14	6.05	5.89
17	3.77	3.17	4.79	3.96
18	6.84	9.52	9.89	6.89
19	6.43	7.76	3.26	6.26
20	4.04	2.69	9.66	3.72
21	7.54	8.71	0.55	6.73
22	3.02	1.23	1.15	2.56

23	8.00	7.84	7.04	6.51
24	5.46	3.52	6.44	4.38
25	9.39	9.12	2.27	7.15
26	7.49	5.63	6.15	5.64
27	7.15	4.72	6.76	5.21
28	9.10	6.78	9.49	6.35
29	9.35	7.08	8.76	6.50
30	8.95	5.84	7.95	6.00
31	8.17	4.58	8.60	5.37
32	9.83	6.12	3.74	6.29
33	5.48	1.82	9.53	3.46
34	6.97	2.70	1.17	4.30
35	9.49	4.86	2.52	5.80
36	9.94	5.05	7.35	5.99
37	4.98	1.19	1.14	2.96
38	2.60	0.31	9.42	1.53
39	8.16	2.82	7.47	4.74
40	6.11	1.51	1.71	3.53
41	8.99	3.10	6.35	5.17
42	9.80	3.62	7.35	5.63
43	5.94	1.25	5.67	3.41
44	6.70	1.49	1.80	3.87
45	8.73	2.50	0.29	5.06
46	4.59	0.65	2.54	2.71
47	7.94	1.85	2.13	4.81
48	8.47	2.05	3.09	5.24
49	7.47	1.49	6.25	5.14
50	6.28	1.04	9.55	4.50

Soluzione

Il periodo T misurato è rappresentato in funzione del valore di $\sqrt{\ell/g}$ in Figura 1.1.

Per il secondo grafico richiesto una possibile scelta di parametri adimensionali indipendenti è

$$\begin{aligned} \Pi &= T\sqrt{\frac{g}{\ell}} \\ \Pi_1 &= \frac{v_0}{\sqrt{\ell g}} \end{aligned}$$

e il valore di Π ricavato dai dati è rappresentato in funzione di Π_1 in Figura 1.2.

La combinazione Π_1 è il periodo misurato in unità $\sqrt{\ell/g}$, invece Π_1 è la velocità misurata in unità $\sqrt{g\ell}$.

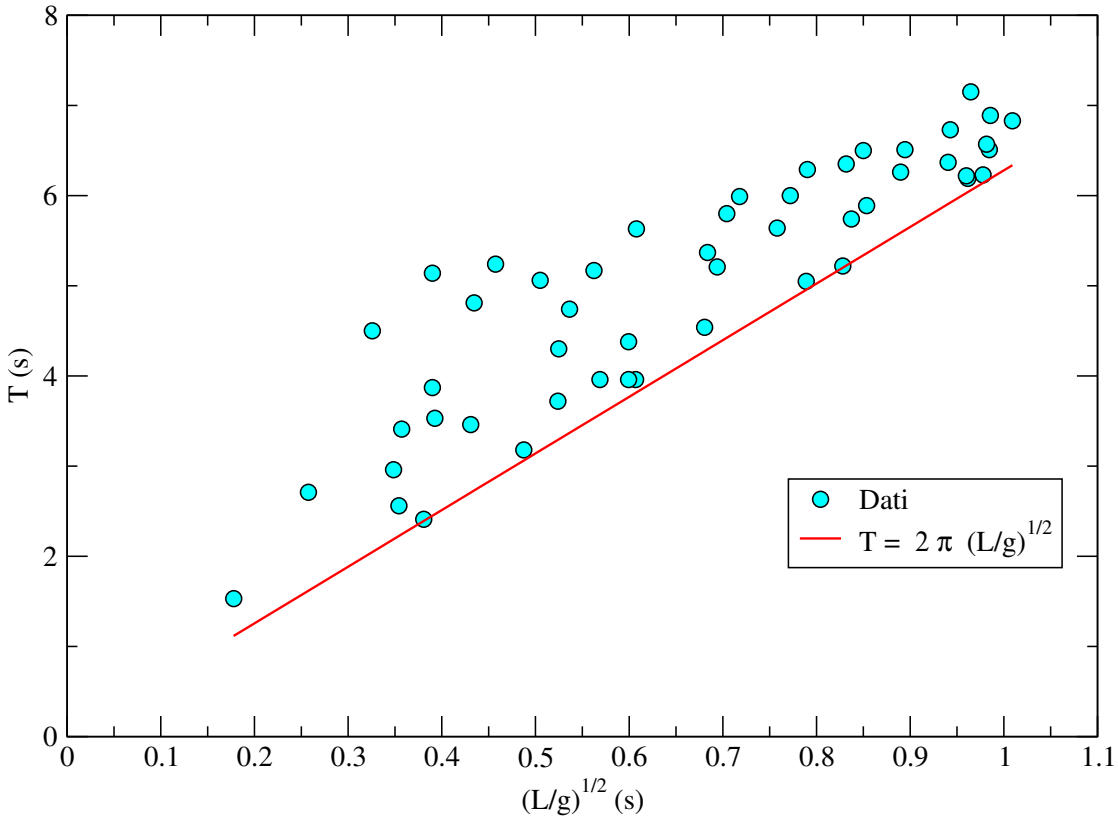


Figura 1.1.: I periodi T_i in funzione di $\sqrt{\ell_i/g}$ per i dati in tabella (cerchi). Per confronto, è riportata la retta $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Osservando i due grafici si nota che nel primo (Figura 1.1) i dati non si dispongono su un'unica curva, cosa che accade per il secondo (Figura 1.2).

La ragione di questo è che, come è possibile vedere studiando il moto del pendolo (o come possiamo dedurre dall'analisi dimensionale condotta nell'Esercizio 1.1), il periodo è proporzionale a $\sqrt{\ell/g}$ solo per piccole oscillazioni. In quel particolare regime si può dimostrare che vale la legge

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1.2.1}$$

rappresentata in Figura 1.1 dalla retta rossa. Come si vede alcuni dati corrispondono alla (1.2.1), negli altri casi il periodo è sistematicamente maggiore.

Nel secondo grafico vediamo che i dati si allineano apparentemente su una curva ben definita. In effetti l'analisi dimensionale ci dice che per i parametri adimensionali che abbiamo scelto deve valere (vedere l'Equazione (1.1.2))

$$\Pi = f\left(\Pi_1^2\right)$$

e quindi abbiamo rappresentato nel grafico la funzione $y = f(x^2)$. Nel limite $\Pi_1 \to 0$ che

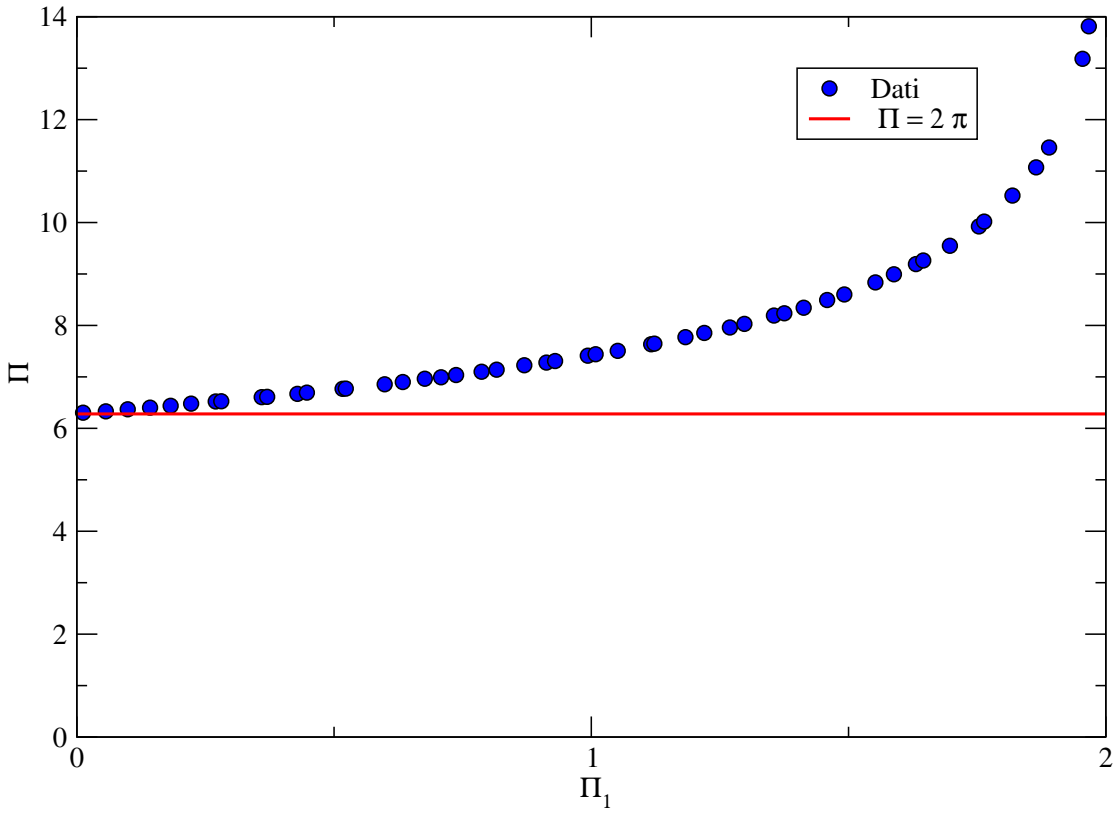


Figura 1.2.: Il valori Π_i ricavati dai dati in tabella in funzione dei valori Π_{1i}. Per confronto è riportata in rosso la costante 2π.

corrisponde alle piccole oscillazioni vediamo che

$$\lim_{\Pi_1 \to 0} f\left(\Pi_1^2\right) = 2\pi$$

in accordo con le considerazioni precedenti. Per quantificare tutto questo basta osservare dal grafico in Figura 1.2 che il valore di Π si allontana da 2π tanto più quanto maggiore è il valore di Π_1.

1.3. Pendolo sulla luna ⋆

Un pendolo di massa $m = 10^{-1}\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $\ell = 1\,\mathrm{m}$ viene lanciato sulla terra ($g = 9.822\,\mathrm{ms}^{-2}$) dalla posizione di equilibrio con una velocità iniziale $v_0 = 5\ \mathrm{ms}^{-1}$. In queste condizioni il periodo di oscillazione è $T = 2.1\,\mathrm{s}$. Sulla superficie della luna l'accelerazione gravitazionale vale $1.625\,\mathrm{ms}^{-2}$. Determinare sulla base di argomenti dimensionali come potrebbe essere costruito un nuovo pendolo e come dovrebbe essere lanciato (cioè quali valori dovrebbero avere ℓ, m, v_0) per ottenere lo stesso periodo di oscillazione.

Soluzione

Riprendendo l'analisi svolta nell'esercizio 1.1 sappiamo che vale

$$T = f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sulla luna vale $g' = \lambda g$, dove

$$\lambda = \frac{1.625}{9.822} \simeq 0.165$$

Dato che il periodo deve essere lo stesso, dovremo scegliere dei nuovi parametri ℓ', m' e v_0' in modo da avere

$$f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}} = f\left(\frac{v_0'^2}{\ell' g'}\right)\sqrt{\frac{\ell'}{g'}}$$

Dato che non conosciamo la forma di $f(x)$, dobbiamo imporre separatamente le due condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{g} &= \frac{\ell'}{g'} \\ \frac{v_0^2}{\ell g} &= \frac{v_0'^2}{\ell' g'} \end{aligned}$$

Come si vede la massa non gioca alcun ruolo. Invece dalla prima relazione segue che

$$\ell' = \frac{g'}{g}\ell = \lambda\ell$$

e sostituendo nella seconda abbiamo

$$v_0'^2 = \frac{\ell' g'}{\ell g} v_0^2 = \lambda^2 v_0^2$$

Di conseguenza possiamo scegliere la massa arbitrariamente, ma dobbiamo ridurre la lunghezza del pendolo e la velocità iniziale di un fattore λ (circa 1/6). Notare che

$$\frac{v_0^2}{g\ell} \simeq 2.54$$

e quindi non ci aspettiamo di essere nel regime di piccole oscillazioni, nel quale potremmo trascurare la dipendenza del periodo dalla velocità iniziale.

CC BY NC SA

2. Vettori

2.1. Triplo prodotto vettoriale ⋆

Dimostrare l'identità

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c} \tag{2.1.1}$$

Soluzione

Supponiamo che i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ siano paralleli. Potremo allora porre $\vec{b} = \lambda \vec{c}$. Sostituendo otteniamo

$$\lambda \vec{a} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{c}) = \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{c} - \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{c} \tag{2.1.2}$$

che è banalmente verificata. Se invece $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono linearmente indipendenti potremo scrivere

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = A \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) + B\vec{b} + C\vec{c} \tag{2.1.3}$$

dove A deve essere uno scalare dipendente linearmente dal solo $\vec{a}$, B uno scalare dipendente linearmente da $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e C uno scalare dipendente linearmente da $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Non è possibile costruire uno scalare dipendente linearmente dal solo $\vec{a}$. Invece possiamo prendere B proporzionale a $\vec{a} \cdot \vec{c}$ e C proporzionale a $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Quindi

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = k_1\, (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} + k_2 \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c} \tag{2.1.4}$$

dove k_1 e k_2 sono costanti numeriche. Prendendo $\vec{b} = \vec{c}$ troviamo

$$0 = k_1 \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b} + k_2 \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b} \tag{2.1.5}$$

e quindi $k_1 + k_2 = 0$. Infine prendendo $\vec{a} = \hat{z}$, $\vec{b} = \hat{y}$ e $\vec{c} = \hat{z}$ otteniamo

$$\hat{z} \wedge (\hat{y} \wedge \hat{z}) = k_1\, (\hat{z} \cdot \hat{z})\, \vec{y} - k_1\, (\hat{z} \cdot \hat{y})\, \hat{z} \tag{2.1.6}$$

cioè

$$\hat{z} \wedge \hat{x} = k_1 \vec{y} \tag{2.1.7}$$

da cui $k_1 = 1$.

2.2. Matrice di rotazione ⋆⋆⋆

Scrivere esplicitamente la matrice $\boldsymbol{R}$ che rappresenta una rotazione di un'angolo θ attorno ad un asse determinato dal versore $\hat{n}$. Questo significa che dato un vettore $\vec{v}$ qualsiasi

$$\vec{v}' = \boldsymbol{R}\vec{v}$$

rappresenta il vettore ruotato. Considerare in particolare i casi $\hat{n} = \hat{x}$, $\hat{n} = \hat{y}$ e $\hat{n} = \hat{z}$.

Soluzione

Come è implicito nel fatto che può essere rappresentata con una matrice, la rotazione è un'operazione lineare. Cerchiamo quindi di determinare il più generale vettore legato linearmente a $\vec{v}$, tenendo presente che abbiamo a disposizione solo $\hat{n}$ e θ per costruirlo. Esso dovrà perciò essere della forma

$$\vec{v}' = A\left(\hat{n}, \theta, \vec{v}\right)\hat{n} + B\left(\hat{n}, \theta\right)\vec{v} + C\left(\hat{n}, \theta\right)\hat{n} \wedge \vec{v}$$

dove A, B e C dovranno essere degli scalari. Infatti $\vec{v}$ e $\hat{n} \wedge \vec{v}$ sono gli unici due vettori linearmente indipendenti che è possibile costruire, dato che oggetti più generali come $\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \hat{v})$ e simili si riducono ad essi utilizzando l'identità dimostrata nell'Esercizio (2.1).

Veniamo adesso ai tre scalari. A dovrà essere lineare in $\vec{v}$, e quindi della forma

$$A\left(\hat{n}, \theta, \vec{v}\right) = a\left(\theta\right)\hat{n} \cdot \vec{v}$$

mentre dovrà essere $B(\hat{n}, \theta) = b\left(\theta\right)$ e $C\left(\hat{n}, \theta\right) = c(\theta)$. Di conseguenza

$$\vec{v}' = a\left(\theta\right)\left(\hat{n} \cdot \vec{v}\right)\hat{n} + b\left(\theta\right)\vec{v} + c\left(\theta\right)\hat{n} \wedge \vec{v}$$

Possiamo adesso determinare le funzioni a, b e c considerando alcuni casi particolari.

Anzitutto, se $\vec{v} = \hat{n}$ dovrà essere anche $\vec{v}' = \hat{n}$, dato che la rotazione lascia invariato un vettore allineato con l'asse di rotazione. Sostituendo otteniamo

$$\hat{n} = a\left(\theta\right)\hat{n} + b\left(\theta\right)\hat{n}$$

e quindi $a + b = 1$.

Consideriamo adesso $\hat{n} = \hat{z}$ e $\hat{n} = \hat{x}$. Abbiamo

$$\vec{v}' = b\left(\theta\right)\hat{x} + c\left(\theta\right)\hat{z} \wedge \hat{x} = b\left(\theta\right)\hat{x} + c\left(\theta\right)\hat{y}$$

ma sappiamo che se applichiamo una rotazione di un angolo θ attorno all'asse $\hat{z}$ il versore $\hat{x}$ diviene

$$\hat{x} \to \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$

di conseguenza

$$\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} = b\left(\theta\right)\hat{x} + c\left(\theta\right)\hat{y}$$

CC BY NC SA

e quindi

$$\begin{aligned} b(\theta) &= \cos\theta \\ c(\theta) &= \sin\theta \end{aligned}$$

Il risultato finale è

$$\vec{v}' = [1-\cos\theta]\,(\hat{n}\cdot\vec{v})\,\hat{n} + \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\hat{n}\wedge\vec{v}$$

Determiniamo adesso la matrice $\boldsymbol{R}$ che corrisponde a questa trasformazione. Rendendo espliciti gli indici abbiamo

$$v_i' = [\cos\theta\delta_{ik} + (1-\cos\theta)\,n_i n_k]\,v_k + \sin\theta\epsilon_{ijk}n_j v_k$$

dove si sottoindende la somma sulle coppie di indici ripetuti. Di conseguenza

$$R_{ik} = [\cos\theta\delta_{ik} + (1-\cos\theta)\,n_i n_k] + \sin\theta\epsilon_{ijk}n_j$$

ed esplicitamente

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)\,n_x^2 & -\sin\theta\,n_z + (1-\cos\theta)\,n_x n_y & \sin\theta\,n_y + (1-\cos\theta)\,n_x n_z \\ \sin\theta\,n_z + (1-\cos\theta)\,n_z n_y & \cos\theta + (1-\cos\theta)\,n_y^2 & -\sin\theta\,n_x + (1-\cos\theta)\,n_y n_z \\ -\sin\theta\,n_y + (1-\cos\theta)\,n_x n_z & \sin\theta\,n_x + (1-\cos\theta)\,n_y n_z & \cos\theta + (1-\cos\theta)\,n_z^2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso i casi particolari richiesti. Per $\hat{n} = \hat{x}$ vale $n_x = 1$, $n_y = n_z = 0$ e quindi

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Analogamente per $\hat{n} = \hat{y}$ abbiamo $n_y = 1$ e $n_x = n_z = 0$, quindi

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Infine per $\hat{n} = \hat{z}$, da $n_z = 1$ e $n_x = n_y = 0$ segue

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CC BY NC SA

2.3. Il prodotto vettoriale come operatore ⋆

Dato un vettore fissato $\vec{\omega}$, possiamo definire una funzione che agisce su un vettore qualsiasi $\vec{v}$ e lo trasforma in un altro

$$\vec{f}_{\vec{\omega}}(\vec{v}) \equiv \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Si tratta di una funzione lineare (dimostratelo), che quindi può essere rappresentata dall'azione di una matrice che chiameremo $\mathbf{\Omega}_{\vec{\omega}}$ su $\vec{v}$

$$\vec{f}_{\vec{\omega}}(\vec{v}) = \mathbf{\Omega}_{\vec{\omega}}\,\vec{v}$$

Determinate esplicitamente gli elementi di $\mathbf{\Omega}_{\vec{\omega}}$.

Soluzione

La linearità si verifica immediatamente:

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{\vec{\omega}}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right) &= \vec{\omega}\wedge\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\\
&= \alpha\vec{\omega}\wedge\vec{a}+\beta\vec{\omega}\wedge\vec{b}\\
&= \alpha\vec{f}_{\vec{\omega}}(\vec{a})+\beta\vec{f}_{\vec{\omega}}\left(\vec{b}\right)
\end{aligned}$$

Scriviamo l'equazione che definisce $\mathbf{\Omega}_{\vec{\omega}}$, cioè

$$\mathbf{\Omega}_{\vec{\omega}}\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

rendendo esplicite le componenti abbiamo

$$\begin{pmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & \Omega_{xz}\\ \Omega_{yx} & \Omega_{yy} & \Omega_{yz}\\ \Omega_{zx} & \Omega_{zy} & \Omega_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y v_z-\omega_z v_y\\ \omega_z v_x-\omega_x v_z\\ \omega_x v_y-\omega_y v_x\end{pmatrix}$$

e confrontando le due espressioni vediamo che deve essere

$$\mathbf{\Omega}_{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix}$$

CC BY NC SA

Parte II.

Meccanica

3. Cinematica

3.1. Profondità di un pozzo ⋆⋆

Per determinare la profondità di un pozzo si lancia un sasso al suo interno, e si misura dopo quanto tempo si sente il suono dell'urto sul fondo. Detta $v_s = 340\,\mathrm{m/s}$ la velocità del suono e $\tau = 2\,s$ il tempo misurato determinare tale profondità. Che errore si commette trascurando l'effetto della velocità finita del suono?

Soluzione

Il tempo τ è dato dalla somma del tempo di caduta τ_c per il sasso e del tempo impiegato dal suono τ_s per tornare all'osservatore. La caduta avviene, trascurando gli attriti, con moto uniformemente accelerato quindi

$$h = \frac{1}{2} g \tau_c^2$$

cioè .

$$\tau_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Il suono si muove con velocità costante, quindi

$$\tau_s = \frac{h}{v_s}\,.$$

Il tempo misurato sarà dunque

$$\tau = \tau_c + \tau_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}\,.$$

Questa è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\sqrt{h}$

$$h + \sqrt{\frac{2v_s^2}{g}}\,\sqrt{h} - v_s\tau = 0$$

che ammette come unica soluzione accettabile (perché positiva)

$$\sqrt{h} = -\sqrt{\frac{v_s^2}{2g}} + \sqrt{\frac{v_s^2}{2g} + v_s\tau} = \frac{\tau\sqrt{g/2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2g\tau}{v_s}}} \tag{3.1.1}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$\begin{aligned} \tau\sqrt{g/2} &\simeq 4.43\,m^{1/2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2g\tau}{v_s}} &\simeq 1.03 \end{aligned}$$

e quindi $h = 18.5\,m$. Trascurare la velocità finita del suono equivale a porre uguale a 1 il denominatore della Eq.(3.1.1) , e quindi ad una correzione del 6%.

CC BY NC SA

3.2. Lunghezza di una traiettoria ⋆⋆

Una particella si muove nel piano in un'orbita descritta da

$$\vec{R}(t) = a\hat{e}_x \cos\omega t + b\hat{e}_y \sin\omega t\,.$$

Mostrare che si tratta di un'orbita ellittica, calcolare il tempo necessario per un'orbita completa ed esprimere la sua lunghezza come integrale definito (senza calcolarlo).

Soluzione

Possiamo riscrivere la legge oraria nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t \\ y(t) &= b\sin\omega t \end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che rappresenta una ellisse avente gli assi coincidenti con quelli coordinati, di lunghezza $2a$ e $2b$. Il tempo necessario a percorrere una intera orbita è chiaramente il periodo di $\vec{R}(t)$, ossia

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Per quanto riguarda la lunghezza, possiamo calcolare la velocità:

$$\vec{V}(t) = -a\omega\sin\omega t\,\hat{e}_x + b\omega\cos\omega t\,\hat{e}_y$$

e integrare il suo modulo nel tempo per un periodo:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^T |\vec{V}(t)|dt = \int_0^T \sqrt{a^2\omega^2\sin^2\omega t + b^2\omega^2\cos^2\omega t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\,du\,. \end{aligned}$$

Questo integrale non si esprime in termini di funzioni elementari, a parte il caso banale $a = b$ (traiettoria circolare) nel quale si trova $\ell = 2\pi a$.

3.3. Raggiungere un oggetto che accelera ⋆⋆

Un'automobile parte da ferma con moto uniformemente accelerato, e accelerazione a. Dopo un tempo τ si lancia un proiettile che si può supporre in moto con velocità costante v_0. Determinare la minima velocità v_0 necessaria a colpire l'automobile, in funzione di a e τ. Si può considerare il moto puramente unidimensionale.

Soluzione

Le leggi orarie di automobile e proiettile si possono scrivere nella forma

$$s_A(t) = \frac{1}{2}at^2$$
$$s_P(t) = v_0(t-\tau)\,.$$

Proiettile e automobile si incontrano al tempo determinato da $s_A(t) = s_P(t)$, con $t > \tau$. Il tutto è rappresentato graficamente in Figura 3.1.

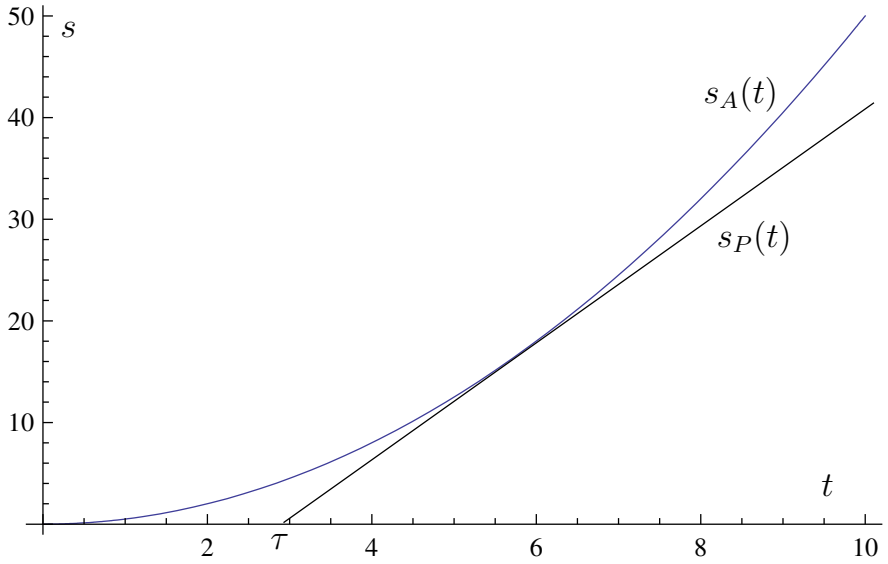


Figura 3.1.: Figura per il problema.

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}at^2 - v_0(t-\tau) = 0\,.$$

La velocità minima corrisponde alla condizione di tangenza tra retta e parabola,

$$\Delta = v_0^2 - 2av_0\tau = 0$$

cioè $v_0 = 0$ oppure $v_0 = 2a\tau$. La prima possibilità corrisponde a un tempo $t = 0$, e quindi deve essere esclusa. La seconda corrisponde a

$$t^2 - 4\tau(t-\tau) = 0$$

cioè

$$t = 2\tau\,.$$

CC BY NC SA

3.4. Moto periodico in un piano a velocità nota ⋆⋆

Una particella si muove in un piano orizzontale e al tempo $t = 0$ si trova nell'origine. Le velocità agli istanti successivi sono rappresentate nei grafici in Figura 3.2, che si ripetono periodicamente. Trovare la traiettoria.

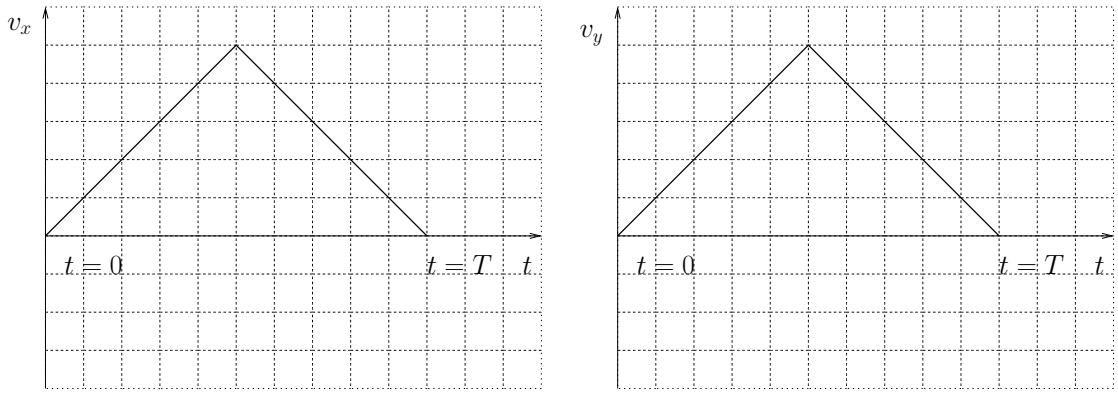


Figura 3.2.: Figura per il problema. Le velocità sono rappresentate solo tra $t = 0$ e $t = T$, in seguito si ripetono periodicamente. La velocità massima è v_{max}.

Soluzione

Il moto è identico nella direzione x e in quella y. Inoltre la velocità è sempre non negativa. Di conseguenza la traiettoria sarà la semiretta

$$x = y, \qquad x > 0\,.$$

Più in dettaglio, tra $t = 0$ e $t = T/2$ avremo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 \\ y &= \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

con

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v_{max}}{T}\,.$$

Tra $t = T/2$ e $t = T$ avremo

$$\begin{aligned} x &= \frac{T}{4}v_{max} + v_{max}\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2}a\left(t - \frac{T}{2}\right)^2 \\ y &= \frac{T}{4}v_{max} + v_{max}\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2}a\left(t - \frac{T}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

e analogamente negli intervalli successivi.

CC BY NC SA

3.5. Vertici di un poligono ⋆⋆⋆

N punti materiali sono inizialmente posti nei vertici di un poligono regolare con N lati, a una distanza R del centro. Istante per istante ciascun punto di muove con velocità costante v nella direzione del successivo preso in senso orario. Trovare le traiettorie di ciascun punto.

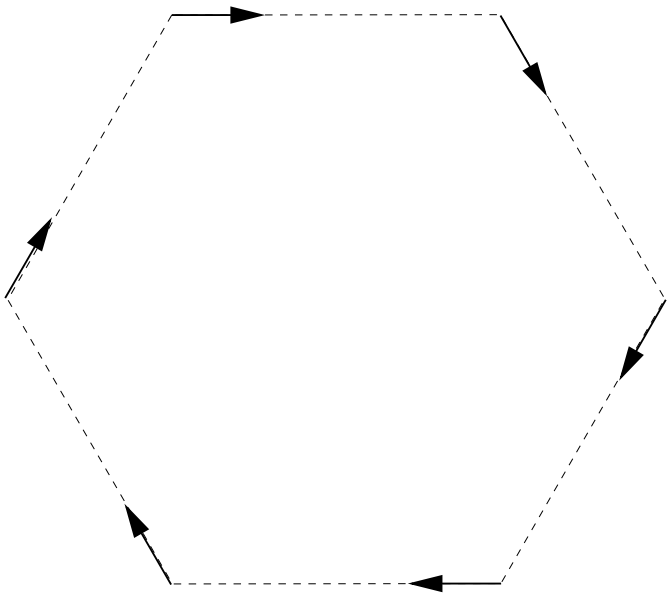


Figura 3.3.: Figura per il problema, nel caso $N = 6$.

Soluzione

Ad ogni istante possiamo scrivere la velocità di un punto nella forma

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

ma per ragioni di simmetria i punti saranno sempre ai vertici di un poligono regolare, ruotato e contratto rispetto al precedente. Allora dovrà essere

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -v\cos\alpha \\ r\dot{\theta} &= v\sin\alpha \end{aligned}$$

dove α è l'angolo tra la velocità e il vettore che unisce il centro del poligono con il vertice considerato,

$$\alpha = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) .$$

Dalle due equazioni otteniamo subito

$$\frac{\dot{r}}{\cos\alpha} + \frac{r\dot{\theta}}{\sin\alpha} = 0$$

ossia

$$\tan\alpha\frac{\dot{r}}{r} = -\dot{\theta}$$

da cui

$$\tan\alpha\frac{d}{dt}\log r = -\frac{d}{dt}\theta$$

e integrando

$$\log r = -\frac{1}{\tan\alpha}\theta + C\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo infine

$$r = r_0 e^{-\frac{1}{\tan\alpha}(\theta-\theta_0)}$$

che descrive una spirale. Notare che questa si restringe verso il centro tanto più lentamente quanto più N è grande. Nel limite $N \to \infty$ il poligono diviene una circonferenza, e ciascun punto si muove su una traiettoria circolare.

3.6. Farfalle kamikaze ⋆⋆⋆

Per spiegare il motivo che porta una farfalla notturna a cadere a spirale sulla fiamma di una candela, si può fare l'ipotesi che normalmente esse facciano riferimento alla luce della luna per guidarsi, mantenendo costante l'angolo tra la direzione di provenienza di questa e la propria direzione di volo. Mostrare che questa è una strategia suicida se la luce di riferimento è quella di una fiamma vicina. Perchè invece funziona se la luce è molto lontana?

Soluzione

Possiamo scrivere la velocità nella forma

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{e}_r + R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = -v\cos\alpha\hat{e}_r + v\sin\alpha\hat{e}_\theta$$

dove v è il modulo della velocità (non necessariamente costante) e α l'angolo fissato tra la direzione del moto e la direzione della sorgente. Da questo segue

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v\cos\alpha \\ R\dot{\theta} &= -v\sin\alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R}\tan\alpha\,.$$

Integrando abbiamo

$$R = R_0 e^{-\frac{\theta}{\tan\alpha}}$$

che per $\tan\alpha > 0$ rappresenta una spirale logaritmica attorno all'origine. Se R_0 è molto grande la traiettoria diviene essenzialmente rettilinea.

CC BY NC SA

3.7. Raggiungere una boa ⋆⋆⋆

Un nuotatore vuole raggiungere una boa posta ad una distanza d dalla riva. Si mette a nuotare verso di essa riuscendo a mantenere una velocità costante in modulo v_N rispetto all'acqua. É però presente una corrente diretta parallelamente alla riva di modulo v_C. Discutere la traiettoria del nuotatore nei tre casi $v_C > v_N$, $v_C = v_N$ e $v_C < v_N$.

Soluzione

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nella boa, come in Figura. Supponendo che il nuotatore parta dalla riva in un punto di coordinate $(0, d)$ possiamo scrivere la sua velocità nella forma

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -v_N \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} - v_C \hat{e}_x$$

ossia, componente per componente,

$$\frac{dx}{dt} = -v_N \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - v_c$$
$$\frac{dy}{dt} = -v_N \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

da cui otteniamo immediatamente una equazione per la traiettoria ($\beta = v_C/v_N$)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \beta\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,.$$

Introduciamo la nuova variabile $u(x) = x(y)/y$ e usando l'identità

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(yu) = y\frac{du}{dy} + u$$

possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$y\frac{du}{dy} = \beta\sqrt{1+u^2}$$

che si integra immediatamente per separazione delle variabili:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \beta \int \frac{dy}{y}$$

da cui, ponendo $u = \sinh s$

$$s = \beta \log y + \beta \log C$$

dove C è una costante di intregrazione. Quindi

$$\frac{x}{y} = u = \sinh s = \sinh\left[\log (Cy)^\beta\right]$$

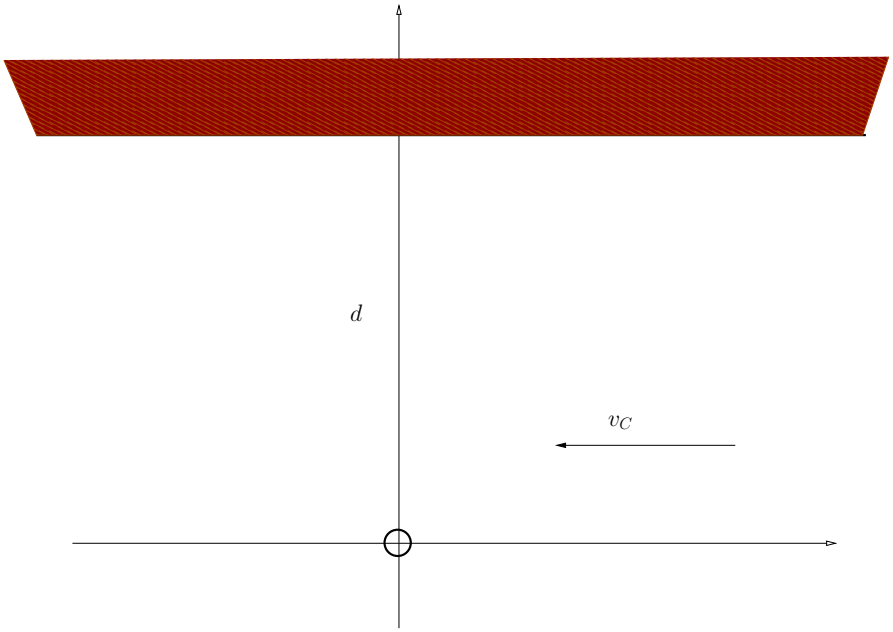


Figura 3.4.: Sistema di coordinate per il problema.

ossia

$$x = \frac{1}{2}\left[C^{\beta}y^{1+\beta} - C^{-\beta}y^{1-\beta}\right]$$

La costante di integrazione si determina imponendo le condizioni iniziali $x = 0$, $y = d$, e otteniamo

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{\beta+1} - \left(\frac{d}{y}\right)^{\beta-1}\right].$$

Studiamo adesso i tre diversi casi.

Per $v_C < v_N$ possiamo porre $\beta = 1 - \epsilon$ con $0 < \epsilon < 1$. Abbiamo allora

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{2-\epsilon} - \left(\frac{y}{d}\right)^{\epsilon}\right]$$

e quindi x tende a zero per $y \to 0$. Questo significa che il nuotatore raggiunge la boa.

Nel caso $v_c = v_N$ abbiamo $\beta = 1$ e quindi

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{2} - 1\right].$$

La traiettoria è quindi parabolica e il nuotatore non riesce a raggiungere la boa, ma arriva nel punto $(-d/2, 0)$ continuando a nuotare contro corrente senza muoversi.

Nel caso $v_c > v_N$ abbiamo $\beta = 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e quindi

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{2+\varepsilon} - \left(\frac{d}{y}\right)^{\varepsilon}\right].$$

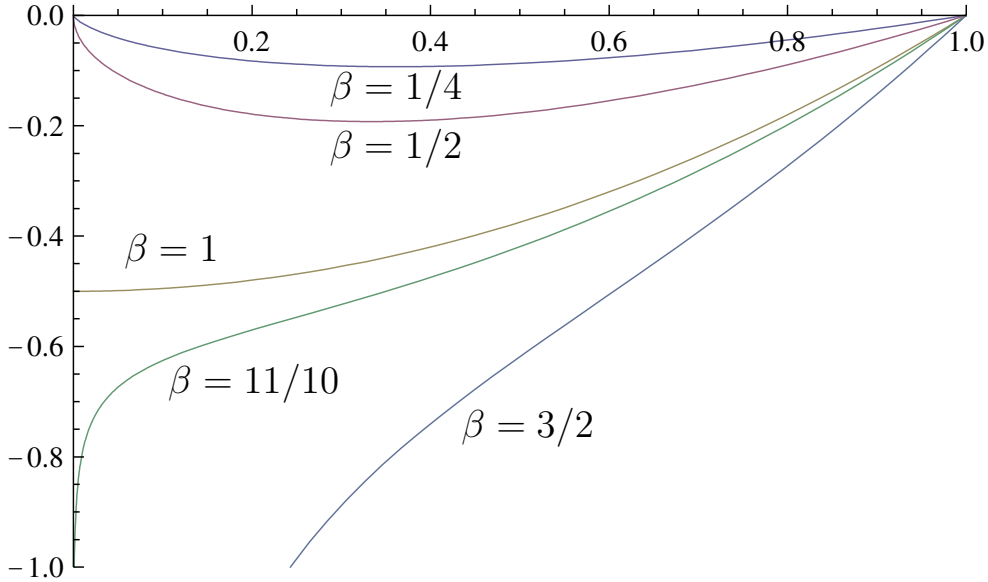


Figura 3.5.: Traiettorie per particolari valori di β. L'asse x del problema è verticale, $d = 1$.

Segue che per $y \to 0$ la coordinata x assume valori arbitrariamente grandi in modulo e negativi. Questo significa che il nuotatore è trascinato dalla corrente.

3.8. Preda e predatore ⋆⋆

Un coniglio si muove arbitrariamente nel piano mantenendo il modulo della sua velocità v_c costante. Una volpe lo insegue muovendosi anche essa con velocità costante in modulo v_v, dirigendosi istante per istante nella direzione del coniglio.

Dimostrare che indipendentemente dalla traiettoria scelta dal coniglio esso verrà raggiunto in un tempo finito se $v_v > v_c$.

Soluzione

Sia $\vec{R}_c$ la posizione del coniglio e $\vec{R}_v$ quella della volpe. Il quadrato della loro distanza si può scrivere come

$$\ell^2 = \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right|^2$$

e la sua derivata temporale come

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2\left(\vec{R}_c - \vec{R}_v\right) \cdot \left(\frac{d\vec{R}_c}{dt} - \frac{d\vec{R}_v}{dt}\right) .$$

Ma sappiamo che la velocità della volpe si scrive

$$\frac{d\vec{R}_v}{dt} = v_v \frac{\vec{R}_c - \vec{R}_v}{\left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right|}$$

e sostituendo otteniamo

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2\left(\vec{R}_c - \vec{R}_v\right) \cdot \frac{d\vec{R}_c}{dt} - 2v_v \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right| .$$

Possiamo scrivere inoltre

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2v_c \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right| \cos\phi - 2v_v \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right|$$

dove ϕ è l'angolo tra la velocità del coniglio e il vettore $\left(\vec{R}_c - \vec{R}_v\right)$. In conclusione otteniamo

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2\left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right| (v_c \cos\phi - v_v) \leq 2\ell\,(v_c - v_v)$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\frac{d\ell}{dt} \leq (v_c - v_v)$$

ossia

$$\ell \leq \ell_0 + (v_c - v_v)t\,.$$

Da questo segue che il coniglio verrà raggiunto ad un tempo

$$t \leq \frac{\ell_0}{v_v - v_c}\,.$$

3.9. Otto volante ⋆⋆

Un punto materiale si muove nel piano su una guida descritta dall'equazione

$$y = A \sin kx$$

mantendo costante la propria velocità lungo x, $v_x = v_0$.

Calcolare il valore massimo e minimo del modulo della velocità, e il valore massimo e minimo del modulo della accelerazione. Riportare sulla traiettoria i punti corrispondenti a questi valori.

Soluzione

Il quadrato del modulo della velocità vale

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

ma

$$\dot{y} = Ak\dot{x} \cos kx$$

da cui

$$v^2 = v_0^2 \left(1 + A^2 k^2 \cos^2 kx\right) .$$

I valore minimo è quindi $v_{min} = v_0$, che si ottiene quando

$$x = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right)$$

mentre il massimo vale $v_{max} = v_0\sqrt{1 + A^2k^2}$ e si ottiene per

$$x = \frac{m\pi}{k} .$$

L'accelerazione è solo lungo y e vale

$$\ddot{y} = -Ak^2\dot{x}^2 \sin kx = -Ak^2 v_0^2 \sin kx$$

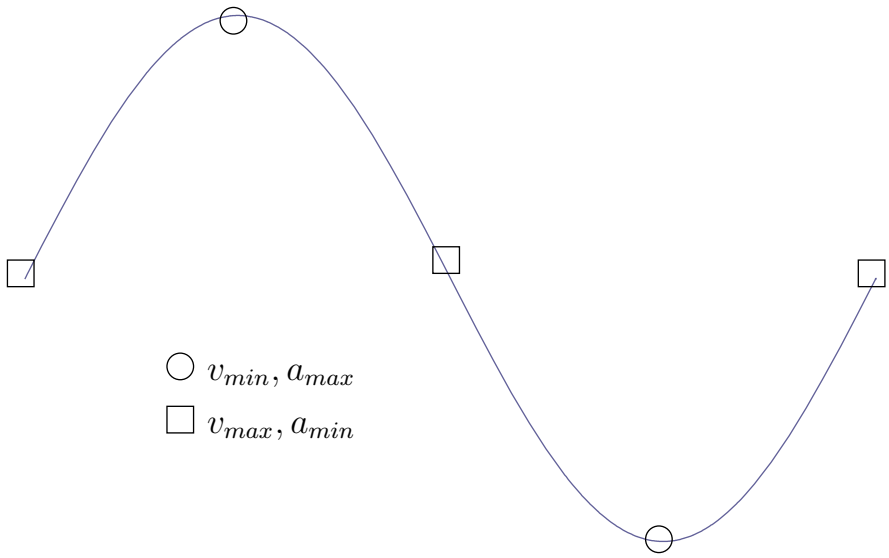
e i valori massimi e minimi del suo modulo sono

$$a_{min} = 0, \qquad x = \frac{m\pi}{k}$$

$$a_{max} = Ak^2 v_0^2, \qquad x = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) .$$

Le posizioni di questi punti sono indicate in figura.

CC BY NC SA


v_{min}, a_{max}
v_{max}, a_{min}

3.10. Moto nel piano: accerazione e velocità noti in modulo. $\star\star\mathcal{S}$

Un punto materiale si muove in un piano con un'accelerazione e una velocità il cui modulo è dato da $|\vec{a}| = a$ e $|\vec{v}| = v$.

1. Se $a(t) = a_0$ e $v(t) = v_0$, con a_0 e v_0 costanti, quanto vale l'angolo tra velocità e accelerazione?

2. Per le stesse accelerazioni e velocità della domanda precedente determinare la traiettoria.

3. Supponendo che per $t > 0$ il modulo della velocità valga $v(t) = \beta t$, con β costante positiva, come si deve scegliere $a(t)$ affinchè la traiettoria sia identica a quella precedentemente determinata?

Soluzione[1]

1. Se il modulo della velocità è costante, allora l'accelerazione tangenziale alla traiettoria deve essere nulla. Quindi l'accelerazione è perpendicolare alla velocità.

2. Per quanto visto al punto precedente l'accelerazione tangenziale è nulla. Quindi il modulo dell'accelerazione è uguale al modulo dell'accelerazione normale, da cui

$$a_0 = \frac{v_0^2}{\rho}$$

   dove ρ è il raggio di curvatura della traiettoria, che è quindi costante. Il moto è quindi circolare uniforme, e la traiettoria una circonferenza di raggio $R = v_0^2/a_0$.

3. Per avere ancora un moto circolare dovrà essere

$$a^2(t) = \dot{v}(t)^2 + \frac{v^4(t)}{R^2} = \beta^2 + \frac{a_0^2}{v_0^4}\beta^4 t^4$$

[1] Scritto del 20/1/2012

CC BY NC SA

3.11. Una traiettoria in coordinate polari $\star\mathcal{S}$

La traiettoria di una particella nel piano è descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{d}{\cos\theta}$$

dove $d > 0$ è una costante assegnata.

1. Rappresentare graficamente la traiettoria in un piano cartesiano.
2. Determinare il vettore accelerazione in coordinate polari, in funzione di θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.
3. Determinare $r(t)$ sapendo che il vettore velocità è costante ed ha modulo V, e che $r(0) = d$.

Può essere utile ricordare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

Soluzione[2]

Domanda 1 L'equazione si può porre nella forma

$$d = r\cos\theta = x$$

segue che la traiettoria è una retta verticale a una distanza d dall'origine.

Domanda 2 Dato che la traiettoria è rettilinea, l'accelerazione vale

$$\vec{a} = \ddot{y}\hat{e}_y$$

Dato che

$$y = r\sin\theta = d\tan\theta$$

troviamo

$$\dot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$$

e

$$\ddot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\ddot{\theta} + \frac{2d\sin\theta}{\cos^3\theta}\dot{\theta}^2$$

e dato che

$$\hat{e}_y = \hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta$$

troviamo

$$\vec{a} = \frac{d}{\cos^2\theta}\left(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\tan\theta\right)(\hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta)$$

[2] Primo esercizio scritto Fisica I del 10 settembre 2010

Domanda 3 Per il vettore velocità abbiamo

$$\vec{v} = \dot{y}\hat{e}_y = \pm V\hat{e}_y$$

Segue immediatamente che

$$\begin{aligned} x &= d \\ y &= y(0) \pm Vt \end{aligned}$$

e quindi

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{d^2 + (y(0) \pm Vt)^2}$$

che imponendo $r(0) = d$ si riduce a

$$r(t) = \sqrt{d^2 + V^2t^2}$$

Alternativamente si può scrivere

$$\frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = V$$

ed integrando

$$d\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = Vt$$

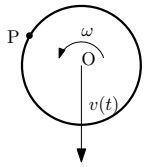
da cui ($\theta(0) = 0$ dato che $r(0) = d$)

$$d\tan\theta(t) = Vt$$

ma

$$r = \frac{d}{\cos\theta} = d\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{d^2 + V^2t^2}$$

3.12. Caduta di una moneta ⋆⋆$\mathcal{S}$



Il centro di una moneta di raggio R, inizialmente fermo, cade con accelerazione costante $\vec{a} = -g\hat{y}$ verso il basso come in figura. La moneta inoltre ruota con una velocità angolare costante ω.

1. Scrivere il modulo della velocità del punto P posto sul bordo della moneta in funzione del tempo, sapendo che all'istante iniziale si trova sulla verticale del centro O, al di sopra di esso.

2. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con velocità nulla, se esiste.

3. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con accelerazione nulla, se esiste.

Soluzione[3]

Domanda 1

Il moto del punto P sarà dato dalla composizione del moto circolare uniforme attorno ad O e di quello uniformemente accelerato di quest'ultimo. Quindi, ponendo la posizione iniziale di O nell'origine di un sistema di coordinate,

$$\begin{aligned} x &= -R\sin\omega t \\ y &= R\cos\omega t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e derivando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\cos\omega t \\ \dot{y} &= -R\omega\sin\omega t - gt \end{aligned}$$

da cui otteniamo il modulo della velocità

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + g^2t^2 + 2R\omega gt\sin\omega t}$$

[3] Prova scritta 8 febbraio 2012

CC BY NC SA

Domanda 2

Dato il centro di massa si muove ad un dato istante con una velocità $\vec{v} = -gt\hat{y}$ un punto della moneta potrà essere fermo solo se questa velocità verticale è compensata da quella del suo moto circolare. Questo può accadere solo sul diametro orizzontale della moneta, dove la velocità del moto circolare non ha componenti orizzontali. Inoltre indicando con d la posizione sul diametro relativa ad O di P dovrà essere

$$\omega d - gt = 0$$

e quindi $d = gt/\omega$. Il punto cercato esisterà solo per $d \leq R$, e quindi per $t < \omega R/g$.

Domanda 3

In questo caso è l'accelerazione del moto circolare che deve compensare quella uniforme del centro di massa. Quindi il punto si troverà sul diametro verticale della moneta (dove l'accelerazione centripeta non ha componenti orizzontali) e dovrà essere

$$-\omega^2 d - g = 0$$

dove d è ancora la posizione sul diametro di P relativa ad O. In conclusione

$$d = -\frac{g}{\omega^2}$$

ed il punto cercato esisterà sempre, a condizione che $\omega^2 > g/R$.

CC BY NC SA

3.13. Lancette dell'orologio ⋆

Alle tre del pomeriggio l'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti di un orologio formano un angolo di $\pi/2$. Calcolare dopo quanto tempo le lancette si sovrappongono.

Soluzione

La velocità angolare della lancetta dei minuti è

$$\omega_m = \frac{2\pi}{60 \times 60}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

e quella della lancetta delle ore

$$\omega_o = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

L'angolo che ciascuna lancetta forma con la verticale è data da

$$\begin{aligned} \theta_m &= \omega_m t \\ \theta_o &= \frac{\pi}{2} + \omega_o t \end{aligned}$$

dove t è il tempo trascosro dalle tre del pomeriggio. Le due lancette si sovrappongono quando $\theta_m = \theta_o$, cioè quando

$$\omega_m t = \frac{\pi}{2} + \omega_o t$$

e risolvendo troviamo

$$t = \frac{\pi/2}{\omega_m - \omega_o} = \frac{10800}{11}\,\mathrm{s} \simeq 16\,\mathrm{min}\,22\,\mathrm{s}$$

CC BY NC SA

3.14. Il problema dello spazzaneve ⋆⋆

Questo problema o una sua variante è molto noto. Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve.

Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. Si vuole sapere a che ora ha iniziato a nevicare.

Soluzione

Poniamo $t = 0$ a mezzogiorno. Detto $t_0 < 0$ l'instante nel quale inizia a nevicare, avremo che l'altezza della neve aumenterà secondo la legge

$$h \propto (t - t_0)$$

La velocità dello spazzaneve sarà data di conseguenza da

$$v = \frac{\mathcal{L}}{t - t_0}$$

dove $\mathcal{L}$ è una costante non nota con le dimensioni di una lunghezza. Lo spazio percorso nelle prime due ore di lavoro sarà dunque

$$s_1 = \int_0^\tau \frac{\mathcal{L}}{t - t_0} dt = \mathcal{L} \log \frac{t_0 - \tau}{t_0}$$

dove $\tau = 2\,\mathrm{h}$. Nelle due ore successive avremo invece

$$s_2 = \int_\tau^{2\tau} \frac{\mathcal{L}}{t - t_0} dt = \mathcal{L} \log \frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau}$$

A noi interessa determinare t_0. Dividendo membro a membro le due relazioni precedenti troviamo

$$\frac{\log \frac{t_0 - \tau}{t_0}}{\log \frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau}} = \frac{s_1}{s_2}$$

e dato che $s_1/s_2 = 2$ troviamo

$$\log \frac{t_0 - \tau}{t_0} = 2 \log \frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau}$$

ossia

$$\frac{t_0 - \tau}{t_0} = \left(\frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau} \right)^2$$

Riordinando i termini abbiamo

$$(t_0 - \tau)^3 = t_0 (t_0 - 2\tau)^2$$

ossia, espandendo e semplificando,

$$t_0^2\tau - t_0\tau^2 - \tau^3 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$t_0 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\tau$$

e solo quella negativa è accettabile. Di conseguenza

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\tau \simeq -1\,\mathrm{h}\,14\,\mathrm{min}10\,\mathrm{s}$$

quindi ha iniziato a nevicare alle $10_h : 45_{min} : 50_s$.

CC BY NC SA

3.15. Rotolamento puro e traiettorie ⋆⋆

Un cilindro di raggio R rotola senza strisciare all'interno di una cavità, anche essa cilindrica, di raggio $2R$. Inizialmente il cilindro si trova nella posizione in Figura 3.6. Determinare la traiettoria del punto P appartenente al cilindro inizialmente al centro della cavità.

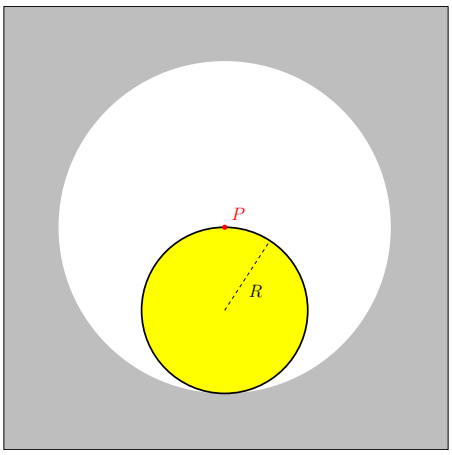


Figura 3.6.: Il cilindro (in giallo) di raggio R e la cavità cilindrica (di raggio $2R$) che lo contiene.

Soluzione

Il centro del cilindro si muove su una circonferenza di raggio R centrata sulla cavità: indichiamo con α l'angolo di rotazione. Indichiamo invece con β l'angolo di rotazione del cilindro su se stesso. Rispetto ad un sistema di coordinate con origine al centro della cavità le coordinate del punto P saranno:

$$\begin{aligned} x_P &= -R\cos\alpha + R\cos\beta \\ y_P &= R\sin\alpha - R\sin\beta \end{aligned}$$

La condizione di puro rotolamento mette in relazione gli angoli α e β. Per trovare questa relazione possiamo osservare che la velocità del punto di contatto tra cilindro e cavità vale

$$v = R\dot{\alpha} + R\dot{\beta}$$

ma questa velocità deve essere nulla, per cui $\dot{\alpha} = -\dot{\beta}$. Integrando troviamo

$$\alpha = -\beta + C$$

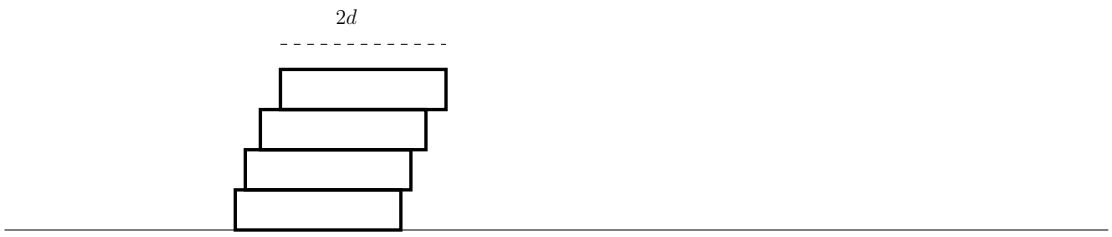
e dato che inizialmente $\alpha = \beta = 0$ abbiamo $C = 0$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} x_P &= 0 \\ y_P &= 2R\sin\alpha \end{aligned}$$

e il punto P si muove sul diametro orizzontale della cavità, $x_P = 0$ e $-2R \leq y_P \leq 2R$.

4. Statica

4.1. Pila di mattoni ⋆⋆⋆



Si vogliono sovrapporre N mattoni di lunghezza $2d$ in modo da ottenere una pila in equilibrio come in figura (per il caso $N = 4$). Quale è la massima separazione orizzontale ottenibile tra il centro di massa del mattone più in basso e quello del mattone più in alto?

Soluzione

Indichiamo con x_k la posizione del centro di massa del blocco k-simo ($k = 0, \cdots N-1$ partendo dal basso) rispetto a una origine fissata. Definiamo inoltre q_k la posizione del centro di massa dell'insieme di tutti i blocchi a partire dal k-simo compreso. Avremo

$$q_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k}^{N-1} x_k \,.$$

Per avere equilibrio tutti i q_k dovranno essere compresi tra gli estremi del blocco $k-1$-simo, cioè

$$x_{k-1} - d \leq q_k \leq x_{k-1} + d \quad \forall k \in \{2, \cdots N\} \,.$$

Possiamo inoltre porre senza perdere di generalità $x_0 = 0$. Dobbiamo quindi massimizzare x_{N-1} variando $x_1, \cdots x_{N-1}$ e tenendo conto dei vincoli precedenti. Dato che x_{N-1} è una funzione lineare dei parametri il suo valore massimo dovrà saturare tutte le disuguaglianze precedenti, e quindi dovrà essere

$$q_k = x_{k-1} + d \tag{4.1.1}$$

o più esplicitamente (ponendo senza perdere di generalità $x_0 = 0$)

$$\begin{gathered}
\frac{1}{N-1}\left(x_1 + \cdots + x_{N-1}\right) = d \\
\frac{1}{N-2}\left(x_2 + \cdots + x_{N-1}\right) = x_1 + d \\
\cdots \\
\frac{1}{N-k}\left(x_k + \cdots + x_{N-1}\right) = x_{k-1} + d \\
\cdots \\
x_{N-1} = x_{N-2} + d
\end{gathered}$$

ossia

$$\begin{gathered}
\left(x_1 + \cdots + x_{N-1}\right) = (N-1)\, d \\
\left(x_2 + \cdots + x_{N-1}\right) = (N-2)\left(x_1 + d\right) \\
\cdots \\
\left(x_k + \cdots + x_{N-1}\right) = (N-k)\left(x_{k-1} + d\right) \\
\cdots \\
x_{N-1} = x_{N-2} + d
\end{gathered}$$

Sottraendo membro a membro da ciascuna equazione quella successiva abbiamo

$$\begin{gathered}
x_1 = \frac{d}{N-1} \\
x_2 = \frac{d}{N-2} + x_1 \\
\cdots \\
x_k = \frac{d}{N-k} + x_{k-1} \\
\cdots \\
x_{N-1} = x_{N-2} + d
\end{gathered}$$

Otteniamo in conclusione

$$x_{N-1} = d \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \tag{4.1.2}$$

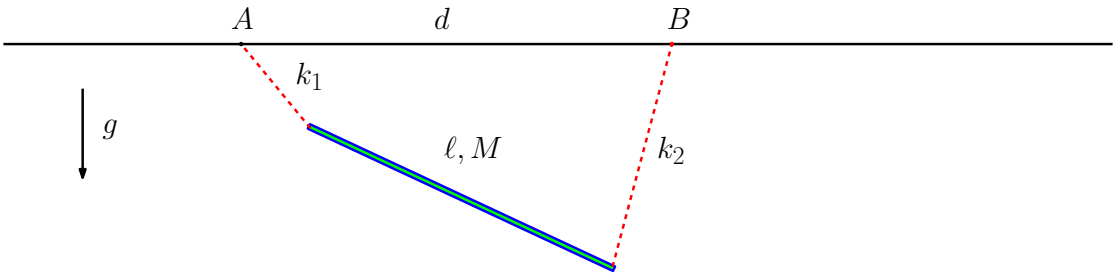
Notare che questa serie diverge per $N \to \infty$, quindi con un numero sufficiente di blocchi è possibile avanzare in orizzontale quanto si vuole. Il numero di blocchi richiesti cresce però esponenzialmente con la distanza desiderata, infatti

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \log N + \gamma + \epsilon_N \tag{4.1.3}$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni ($\gamma = 0.57721\cdots$) e ϵ_N un termine che tende a zero con N.

CC BY NC SA

4.2. Equilibrio ed energia potenziale ⋆⋆



Una sbarra di lunghezza ℓ e massa M è sospesa al soffitto tramite due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche k_1, k_2 . Ciascuna molla è collegata ad un estremo della sbarra, e la distanza tra i punti A, B a cui sono fissate al soffitto vale d (vedere figura). Determinare l'angolo che la sbarra forma con la direzione orizzontale nella posizione di equilibrio e la posizione del centro di massa

- minimizzando l'energia potenziale
- risolvendo le equazioni di equilibrio

Soluzione

Utilizziamo come coordinate l'ascissa e l'ordinata x, y del centro di massa della sbarra e l'angolo che la sbarra forma con la direzione orizzontale. Ponendo un sistema di riferimento con origine nel punto medio tra A e B scriviamo l'energia potenziale come

$$U = Mgy + \frac{k_1}{2}\left[\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2\right] + \frac{k_2}{2}\left[\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2\right]$$

Determiniamo il minimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= Mg + k_1\left(y - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) + k_2\left(y + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= k_1\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\right) + k_2\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{d}{2}\right) = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= k_1\frac{\ell}{2}\left[\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\right)\sin\theta - \left(y - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)\cos\theta\right] + k_2\frac{\ell}{2}\left[-\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{d}{2}\right)\sin\theta + \left(y + \frac{\ell}{2}\mathrm{s}\right.\right.
\end{aligned}$$

Dalle prime due equazioni otteniamo

$$\begin{aligned}
y &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\sin\theta - \frac{Mg}{k_1 + k_2} \\
x &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{d}{2}
\end{aligned}$$

CC BY NC SA

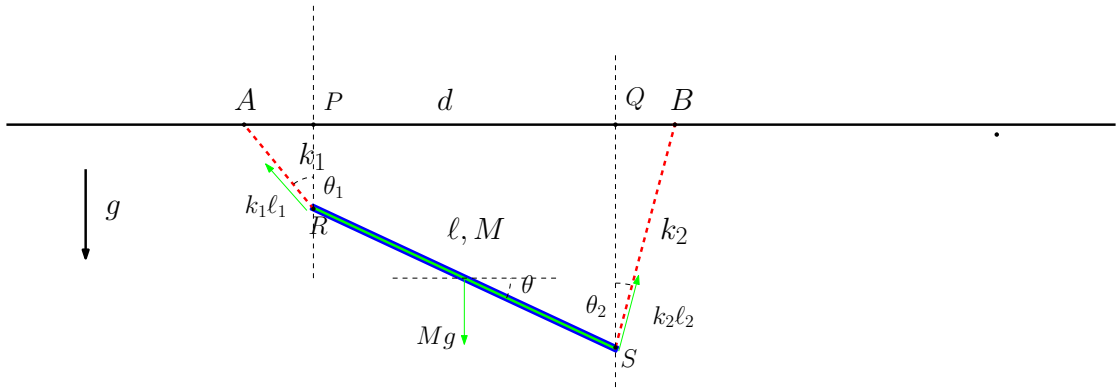


Figura 4.1.: Diagramma delle forze applicate alla sbarra. Tutti gli angoli sono presi positivi nel verso antiorario.

Notare che se $k_1 = k_2$ si ha $y = -\frac{Mg}{2k_1}$ e $x = 0$. Sostituendo nella terza equazione troviamo l'angolo

$$\tan\theta = \frac{Mg}{4d}\frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2}$$

che possiamo utilizzare per calcolare x e y. Possiamo ad esempio riscrivere le relazioni precedenti nella forma

$$\begin{aligned} y &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} - \frac{Mg}{k_1 + k_2} \\ x &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{d}{2} \end{aligned}$$

e sostituire.

Proviamo a scrivere invece le condizioni di equilibrio. Il diagramma delle forze che agiscono sulla sbarra è in Figura 4.1

Scriviamo la somma di tutte le forze orizzontali.

$$F_x = k_2\left(x_B - x_S\right) + k_1\left(x_A - x_R\right)$$

Ma se teniamo conto che

$$\begin{aligned} x_B - x_S &= \frac{d}{2} - x - \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ x_A - x_R &= -\frac{d}{2} - x + \frac{\ell}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

vediamo che

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Analogamente per la somma di tutte le forze orizzontali abbiamo

$$F_y = k_2\left(y_B - y_S\right) + k_1\left(y_A - y_R\right) - Mg$$

e dato che

$$\begin{aligned} y_B - y_S &= y + \frac{\ell}{2}\sin\theta \\ y_A - y_R &= y - \frac{\ell}{2}\sin\theta \end{aligned}$$

vediamo che

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Infine scriviamo la somma dei momenti scegliendo come polo il centro di massa. Abbiamo

$$\begin{aligned} M &= -k_2\left(x_B - x_S\right)\frac{\ell}{2}\sin\theta + k_1\left(x_A - x_R\right)\frac{\ell}{2}\sin\theta \\ &+ k_2\left(y_B - y_S\right)\frac{\ell}{2}\cos\theta - k_1\left(y_A - y_R\right)\frac{\ell}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

e vediamo che

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Le condizioni di equilibrio si riducono quindi alle condizioni per il minimo del potenziale determinate precedentemente.

5. Dinamica punto materiale

5.1. Doppio piano inclinato ⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi sulla superficie in Figura5.1, composta da due piani inclinati (con diverso angolo di inclinazione) separati da un piano orizzontale. Senza fare uso di principi di conservazione mostrare che in assenza di attrito se il punto materiale viene lasciato andare sul primo piano ad una altezza h_1, si ferma sul secondo ad una altezza $h_2 = h_1$.

Figura 5.1.: Figura esercizio

Soluzione

Il moto sui piani inclinati sarà uniformemente accelerato. Dato che il moto è rettilineo l'accelerazione è parallela al piano, e possiamo determinarla considerando la proiezione della forza di gravità e della reazione vincolare in tale direzione. In assenza di attrito la reazione vincolare è normale al piano, quindi non contribuisce, e possiamo scrivere in modulo

$$ma = mg \sin\theta_i$$

Lo spazio percorso sul primo piano inclinato e la velocità saranno quindi date da

$$\begin{aligned} \ell_1(t) &= \frac{1}{2} g \sin\theta_1 \, t^2 \\ v_1(t) &= g \sin\theta_1 t \end{aligned}$$

da cui possiamo determinare il tempo di arrivo sul piano orizzontale

$$\ell_1(t_{1,f}) = \frac{1}{2} g \sin\theta_1 t_{1,f}^2 = \frac{h_1}{\sin\theta_1}$$

cioè

$$t_{1,f} = \frac{1}{\sin\theta_1} \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

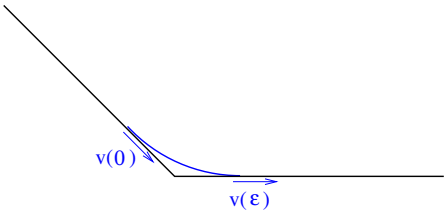


Figura 5.2.: Il raccordo regolarizzato tra piano inclinato e orizzontale.

e la velocità

$$v_{1,f} = v_1(t_{1,f}) = \sqrt{2gh_1}\,.$$

Notare che questo risultato non dipende dalla inclinazione del piano. Passando sul piano orizzontale il modulo della velocità non cambierà (giustificheremo al termine dell'esercizio questa affermazione) e la massa si muoverà con velocità costante fino al secondo piano inclinato, a cui arriverà a $t = t_{2,i}$. Passando su quest'ultimo il modulo della velocità rimarrà ancora una volta invariato, e avremo adesso un modo decelerato che potrà essere descritto

$$\begin{aligned} \ell_2(t) &= v_{1,f}(t - t_{2,i}) - \frac{1}{2} g \sin\theta_2 (t - t_{2,i})^2 \\ v_2(t) &= v_{1,f} - g \sin\theta_2 (t - t_{2,i})\,. \end{aligned}$$

L'altezza massima si raggiungerà ad un tempo $t_{2,f}$ determinato da $v_2(t_{2,f}) = 0$ cioè

$$(t_{2,f} - t_{2,i}) = \frac{v_{1,f}}{g \sin\theta_2}$$

e lo spazio percorso sarà

$$\ell_2(t_{2,f}) = \frac{1}{2} \frac{v_{1,f}^2}{g \sin\theta_2} = \frac{h_1}{\sin\theta_2}$$

corrispondente ad una altezza finale

$$h_2 = \ell_2(t_{2,f}) \sin\theta_2 = h_1\,.$$

Resta da giustificare la conservazione del modulo della velocità nella transizione piano inclinato-piano orizzontale e viceversa. Osserviamo che a un dato istante il punto materiale è sottoposto alla forza di gravità e a una reazione vincolare che sappiamo essere normale al vincolo (assenza di attrito). Nel punto di raccordo la normale al piano non è ben definita, e il problema diviene ambiguo. Discuteremo il significato di questa ambiguità in un prossimo problema. Per adesso la elimineremo modificando la superficie in un intorno piccolo quanto vogliamo dello spigolo, in modo da renderlo sufficientemente liscio (Figura 5.2).

Allora la reazione vincolare sarà ben definita ad ogni istante, e non potrà contribuire in nessun caso alla accelerazione nella direzione tangenziale al piano. Quindi avremo (usando il fatto che la derivata del versore tangente $\hat{\tau}$ è ad esso perpendicolare)

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \hat{\tau}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \hat{\tau} + \vec{v} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \hat{\tau} = \vec{g} \cdot \hat{\tau}$$

da cui segue che

$$\vec{v} \cdot \hat{\tau}(\epsilon) = \vec{v} \cdot \hat{\tau}(0) + \int_0^\epsilon \vec{g} \cdot \hat{\tau}\, dt$$

dove ϵ è il tempo che la particella passa sulla parte "lisciata" del raccordo. Poichè possiamo prendere ϵ piccolo quanto vogliamo segue che

$$\vec{v} \cdot \hat{\tau}(\epsilon) = \vec{v} \cdot \hat{\tau}(0).$$

5.2. Moto su una spirale ⋆⋆

Una particella materiale di massa m è libera di muoversi in presenza di una forza di gravità $\vec{F}_g = -mg\hat{e}_z$ su un vincolo privo di attrito dalla forma a spirale, descritto dalle equazioni parametriche

$$x(\varphi) = \rho\cos\varphi \tag{5.2.1a}$$
$$y(\varphi) = \rho\sin\varphi \tag{5.2.1b}$$
$$z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\varphi \tag{5.2.1c}$$

dove ρ, h sono costanti positive fissate. Al tempo $t = 0$ vale $\varphi = 0$ e la particella è ferma. Determinare la legge oraria del moto e la reazione vincolare $\vec{N}$.

Soluzione

Il punto materiale è sottoposto alla forza di gravità e alla reazione vincolare $\vec{N}$. L'equazione del moto sarà dunque

$$m\vec{a} = -mg\hat{e}_z + \vec{N} \tag{5.2.2}$$

In assenza di attrito la reazione vincolare è perpendicolare alla spirale, condizione che possiamo scrivere come $\vec{N}\cdot\hat{\tau} = 0$ dove $\hat{\tau}$ è il versore tangente alla traiettoria. Questo significa che se consideriamo l'accelerazione nella direzione $\hat{\tau}$ avremo

$$m\vec{a}\cdot\hat{\tau} = -mg\hat{e}_z\cdot\hat{\tau} + \vec{N}\cdot\hat{\tau} = -mg\hat{e}_z\cdot\hat{\tau}$$

d'altra parte l'angolo tra la verticale e la tangente alla traiettoria è costante, quindi l'accelerazione tangenziale è costante, uguale a quella di un punto materiale su un piano inclinato nello stesso modo. Per verificare questo scriviamo il vettore posizione

$$\vec{R} = \rho\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\varphi\hat{e}_z$$

e la velocità

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}\hat{e}_z = \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}\hat{e}_z$$

dove abbiamo utilizzato le relazioni $\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$ e $\dot{\hat{e}}_z = 0$. Segue che

$$\hat{\tau} = \frac{2\pi\rho\hat{e}_\varphi + h\hat{e}_z}{\sqrt{(2\pi\rho)^2 + h^2}}$$

e quindi

$$\hat{\tau}\cdot\hat{e}_z = \frac{h}{\sqrt{(2\pi\rho)^2 + h^2}} = \sin\theta$$

CC BY NC SA

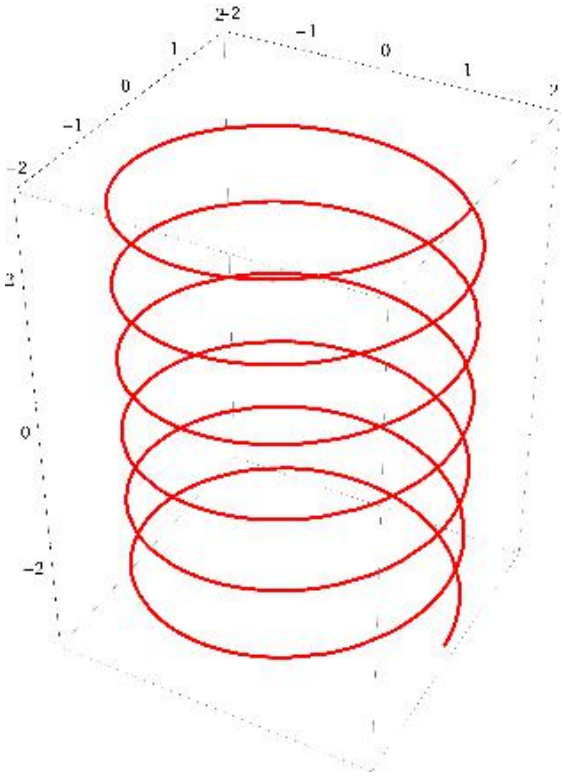


Figura 5.3.: Una parte della spirale delscritta dalle Equazioni (5.2.1a)-(5.2.1c). Si è scelto $\rho = 2$ e $h = 1$.

dove θ è l'angolo tra l'orizzontale e la tangente alla traiettoria (notare che il denominatore è lo spazio percorso ad ogni giro della spirale e il numeratore la variazione in altezza). Valutiamo adesso l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z = \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z$$

ricordando che $\dot{\hat{e}}_\varphi = \dot{\varphi}\hat{e}_\rho$. Le equazioni (5.2.2) si scrivono quindi

$$m\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z\right) = -mg\hat{e}_z + \vec{N}\,. \tag{5.2.3}$$

Proiettando nella direzione $\hat{\tau}$

$$\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z\right)\cdot\hat{\tau} = -g\hat{e}_z\cdot\hat{\tau}$$

cioè

$$\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z\right)\cdot(2\pi\rho\hat{e}_\varphi + h\hat{e}_z) = -g\hat{e}_z\cdot(2\pi\rho\hat{e}_\varphi + h\hat{e}_z)$$

e

$$\ddot{\varphi} = -g\frac{\frac{h}{2\pi}}{\rho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\,.$$

Da questo segue immediatamente

$$\dot{\varphi} = -g\frac{\frac{h}{2\pi}}{\rho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}t$$

e

$$\varphi = -\frac{1}{2}g\frac{\frac{h}{2\pi}}{\rho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}t^2\,.$$

Sostituendo nelle equazioni parametriche otteniamo le leggi orarie. Dalla Equazione (5.2.3) abbiamo

$$\vec{N} = m\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \left(\frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi} + g\right)\hat{e}_z\right)$$

e sostituendo le espressioni $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}$ ottenute precedentemente otteniamo la reazione vincolare in funzione del tempo.

CC BY NC SA

5.3. Moto viscoso ⋆⋆

In presenza di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ una particella di massa m viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0. Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza. Determinare inoltre la velocità alla quale la particella passa nuovamente dal punto di partenza, in particolare nel caso in cui v_0 è molto grande. Cosa significa "molto grande" in questo caso?

Soluzione

L'equazione del moto per il moto nella direzione verticale si scrive

$$m\frac{dv}{dt} = -\lambda v - mg\,.$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, del primo ordine, che si può risolvere con diversi metodi.

Possiamo procedere per separazione delle variabili, riscrivendola nella forma

$$\frac{1}{v + \frac{mg}{\lambda}}\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m}$$

e integrando membro a membro nel tempo:

$$\int_0^t \frac{1}{v + \frac{mg}{\lambda}}\frac{dv}{dt}dt = -\int_0^t \frac{\lambda}{m}dt\,.$$

L'integrale al membro sinistro è immediato, quello a destra lo diviene col cambio di variabile $u = v(t)$:

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{u + \frac{mg}{\lambda}}du = -\frac{\lambda}{m}t$$

ossia

$$\log\frac{v(t) + \frac{mg}{\lambda}}{v_0 + \frac{mg}{\lambda}} = -\frac{\lambda}{m}t\,.$$

Esplicitando la velocità abbiamo infine

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda} \tag{5.3.1}$$

che può essere usata per determinare il tempo t_{max} nel quale viene raggiunto l'altezza massima, risolvendo $v(t_{max}) = 0$. Si ottiene

$$e^{-\frac{\lambda}{m}t_{max}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda v_0}{mg}}, \qquad t_{max} = \frac{m}{\lambda}\log\left(1 + \frac{\lambda v_0}{mg}\right)\,.$$

Per avere lo spazio percorso integriamo direttamente la velocità:

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{m}{\lambda}\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - \frac{mg}{\lambda}t \tag{5.3.2}$$

CC BY NC SA

e sostituendo t_{max}

$$h_{max} = s(t_{max}) = \frac{mv_0}{\lambda} - \frac{m^2 g}{\lambda^2} \log\left(1 + \frac{\lambda v_0}{mg}\right) .$$

Troviamo adesso la velocità quando la particella passa nuovamente a $s = 0$. Possiamo riadattare la soluzione (5.3.2) ponendo $v_0 = 0$, e ricavare il tempo di caduta

$$s(t_0) = \frac{m^2 g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_0}\right) - \frac{mg}{\lambda}t_0 = h_{max}$$

che non è possibile risolvere esplicitamente in t_0. È chiaro però che al crescere di v_0 anche h_{max} cresce, e di conseguenza t_0. Quindi dalla (5.3.1), sempre ponendo $v_0 = 0$, otteniamo

$$v(t_0) = \frac{mg}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t_0} - \frac{mg}{\lambda} \simeq -\frac{mg}{\lambda} .$$

Questa approssimazione sarà buona quando

$$\frac{\lambda v_0}{mg} \gg \log\left(1 + \frac{\lambda v_0}{mg}\right)$$

cioè quando $v_0 \gg mg/\lambda$.

Un metodo alternativo per risolvere l'equazione differenziale è quello di cercare prima tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = 0$$

nella forma $v = Ae^{-kt}$ dove k è una costante da determinare. Sostituendo troviamo la condizione

$$k + \frac{\lambda}{m} = 0$$

e quindi un insieme di soluzioni dipendenti da un parametro arbitrario che rappresentano la soluzione generale (l'equazione è del primo ordine).

È necessario adesso aggiungere una soluzione particolare dell'equazione completa

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = -g .$$

In questo caso possiamo farci guidare dall'intuizione fisica e cercare una soluzione a velocità costante, che rappresenta la situazione in cui forze di attrito e di gravità si bilanciano. Abbiamo $v = -gm/\lambda$ e quindi otteniamo la soluzione generale nella forma

$$v(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{gm}{\lambda} .$$

Ponendo $v(t) = v_0$ troviamo $A = v_0 + gm/\lambda$ e quindi la (5.3.1).

CC BY NC SA

5.4. Un problema inverso ⋆

Una particella di massa m si muove nel piano sotto l'azione di una forza della forma

$$\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$$

dove r è la distanza dall'origine del sistema di coordinate e $\hat{e}_r$ il versore radiale. La sua legge oraria si può scrivere per $t < t_c$ nella forma

$$\begin{aligned} r(t) &= \beta(t_c - t) \\ \theta(t) &= \frac{L}{m\beta^2(t - t_c)} \,. \end{aligned}$$

Disegnare qualitativamente la traiettoria e determinare $F(r)$.

Soluzione

Mentre $t \to t_c$ la distanza dal centro diminuisce linearmente, mentre l'angolo cresce senza limite in valore assoluto. La traiettoria è quindi una spirale che viene percorsa in senso orario mentre la particella "cade" sull'origine.

Sappiamo che il moto deve obbedire al secondo principio della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e siamo in grado di calcolare l'accelerazione. Scriviamo anzitutto il vettore posizione nella forma

$$\vec{R} = r\hat{e}_r$$

e derivando otteniamo velocità e accelerazione

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \vec{a} &= \ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{m}F(r)\hat{e}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \,. \tag{5.4.1}$$

D'altra parte esplicitamente

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\beta \\ \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{L}{m\beta^2(t - t_c)^2} = -\frac{L}{mr^2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{2L}{m\beta^2(t - t_c)^3} = -\frac{2L\beta}{mr^3} \,. \end{aligned}$$

Eguagliando la parte radiale nella (5.4.1) si ottiene

$$F(r) = -\frac{L^2}{mr^3}$$

mentre la parte angolare si annulla automaticamente.

CC BY NC SA

5.5. Moto periodico ⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su un piano inclinato di lunghezza ℓ, come rappresentato in Figura 5.4. Ai due estremi del piano è posta una barriera su cui la particella rimbalza, senza modificare il modulo della propria velocità. Se v_0 è la velocità nel punto più basso determinare il periodo del moto periodico. Studiare in particolare cosa accade per grandi valori della velocità v_0.

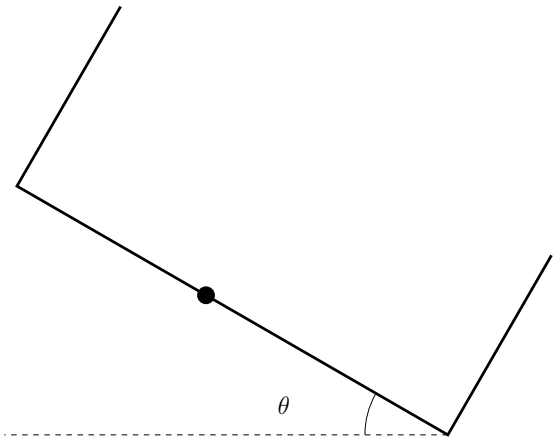


Figura 5.4.: Figura per il problema.

Soluzione

Il moto sul piano inclinato è uniformemente accelerato, con accelerazione $a = g \sin\theta$. Il periodo sarà il doppio del tempo necessario per spostarsi dal punto più basso al punto più alto. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} s(t) &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin\theta \\ v(t) &= v_0 - g t \sin\theta \,. \end{aligned}$$

La velocità si annulla al tempo

$$t' = \frac{v_0}{g \sin\theta}$$

e lo spazio percorso a tale istante vale

$$s' = s(t') = \frac{v_0^2}{2 g \sin\theta} \,.$$

Occorre distinguere due casi. Se $s' < \ell$ la particella non arriva mai alla barriera superiore, e quindi il periodo è semplicemente

$$T = 2t' = \frac{2 v_0}{g \sin\theta} \,.$$

CC BY NC SA

Questo accade se per il modulo della velocità iniziale vale

$$v_0 < \sqrt{2g\ell \sin\theta}\,.$$

Invece se $s' > \ell$ l'urto con la barriera superiore avviene quando $s(t_u) = \ell$, cioè

$$v_0 t_u - \frac{1}{2} g t_u^2 \sin\theta = \ell$$

che significa

$$g t_u^2 \sin\theta - 2v_0 t_u + 2\ell = 0$$

$$t_u = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\ell g \sin\theta}}{g \sin\theta}\,.$$

Entrambe le soluzioni sono positive, ma solo la minore è accettabile. L'altra corrisponde al tempo in cui la particella, avendo superato la barriera, è tornata su di essa dopo aver invertito il moto. Chiaramente $T = 2t_u$. Notare che quando $v_0 \gg \ell g \sin\theta$ le due soluzioni si comportano in modo molto diverso. Quella non accettabile diviene molto grande (il moto si inverte a un tempo sempre maggiore)

$$\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2\ell g \sin\theta}}{g \sin\theta} \simeq \frac{2v_0}{g \sin\theta}$$

l'altra tende al tempo necessario a percorrere il tratto ℓ con velocità costante

$$\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\ell g \sin\theta}}{g \sin\theta} \simeq \frac{\ell}{v_0}$$

il che significa che se la velocità iniziale è molto grande gli effetti dell'accelerazione sono trascurabili.

CC BY NC SA

5.6. Attraversamento di una buca ⋆⋆

In un piano orizzontale (in presenza di gravità) è praticata una scanalatura triangolare come in figura, di altezza h e apertura angolare 2θ. Un punto materiale si muove sulla superficie risultante, che può essere considerata un vincolo liscio, con spigoli sufficientemente smussati.

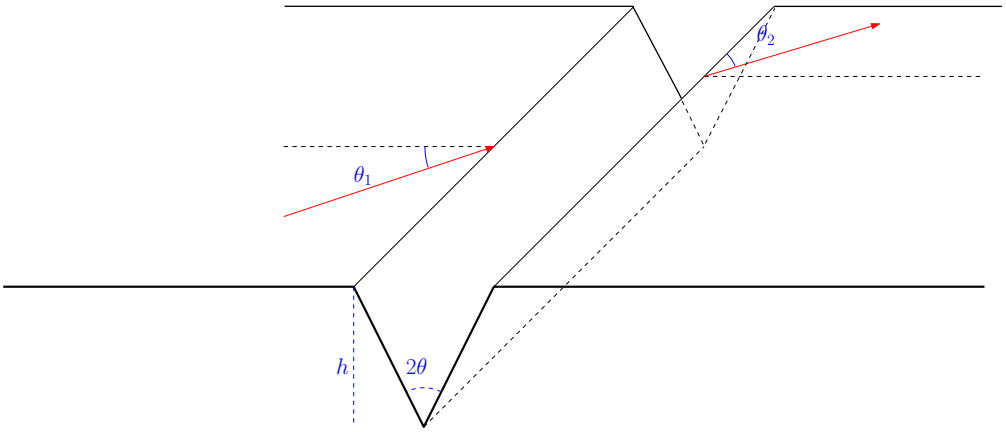


Figura 5.5.: Figura per il problema.

Dimostrare, senza utilizzare principi di conservazione, che l'angolo di uscita θ_1 e quello di entrata θ_2 nella scanalatura sono uguali. Dire inoltre se la traiettoria all'uscita della scanalatura è il prolungamento di quella in entrata.

Soluzione

Il moto sui due piani inclinati è un moto accelerato nella direzione perpendicolare alla scanalatura, con accelerazione $a = g\cos\theta$ nella fase discendente e $-a$ in quella ascendente. Nella direzione parallela avremo un moto uniforme. La legge oraria sul piano discendente sarà

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta_1\, t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y &= v_0 \sin\theta_1\, t \\ v_x &= v_0 \cos\theta_1 + a t \\ v_y &= v_0 \sin\theta_1 \end{aligned}$$

e su quello ascendente

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\theta_1 + \Delta v_x)\, t - \frac{1}{2} a t^2 \\ y &= v_0 \sin\theta_1\, t \\ v_x &= (v_0 \cos\theta_1 + \Delta v_x) - a t \\ v_y &= v_0 \sin\theta_1 \end{aligned}$$

Nel primo caso abbiamo usato un sistema di coordinate con origine nel punto di ingresso del punto materiale nel primo piano inclinato, asse x nella direzione di massima pendenza del piano e asse y parallelo alla scanalatura. Nel secondo caso l'origine è ancora nel punto di ingresso del punto materiale (questa volta nel secondo piano inclinato)¸ asse x nella direzione di massima pendenza e asse y parallelo alla scanalatura. Δv_x è l'incremento di velocità dovuto alla accelerazione sul primo piano inclinato.

Si vede facilmente che il tempo di discesa t_d è uguale a quello di salita t_s. Detta $\ell = h/\cos\theta$ la lunghezza di un piano inclinato abbiamo che t_d soddisfa

$$\ell = v_0 \cos\theta_1\, t_d + \frac{1}{2} a t_d^2$$

mentre per t_s vale

$$\ell = (\Delta v_x + v_0 \cos\theta_1)\, t_s - \frac{1}{2} a t_s^2$$

ma $\Delta v_x = a t_d$ per cui quest'ultima equazione diviene

$$\ell = v_0 \cos\theta_1\, t_s - \frac{1}{2} a t_s^2 + a t_d t_s$$

che è chiaramente verificata da $t_s = t_d$. Allora all'uscita della scanalatura avremo

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta_1 + a t_s - a t_s \\ v_y &= v_0 \sin\theta_1 \end{aligned}$$

il che significa $\theta_1 = \theta_2$.

Per rispondere alla seconda domanda notiamo che il moto in direzione trasversa è un moto uniforme con velocità $v_0 \sin\theta_1$ sia in presenza che in assenza della fenditura. Ma nel secondo caso il tempo di attraversamento è $2t_d$, nel primo sarebbe

$$t_a = \frac{2h}{v_0 \cos\theta_1} \tan\theta\,.$$

I due tempi coincidono se

$$\frac{h}{v_0 \cos\theta_1} \tan\theta = t_d = \frac{-v_0 \cos\theta_1 + \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta_1 + 2gh}}{g \cos\theta}$$

ossia (supponendo $h > 0$)

$$q \sin\theta = \frac{2q}{1 + \sqrt{1 + 2q}}, \qquad q = \frac{gh}{v_0^2 \cos^2\theta_1}\,.$$

Solo se questa ultima condizione è soddisfatta, o nel caso banale $\theta_1 = 0$, le due traiettorie risultano allineate.

CC BY NC SA

5.7. Moto su una guida con attrito ⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una guida descritta dall'equazione $y = f(x)$, in presenza di gravità e di un attrito dinamico descritto da un coefficiente μ_d. La funzione $f(x)$ è identicamente nulla per $x < 0$, e la particella viene lanciata da $x = -L$ (con $L > 0$) con velocità iniziale $v_0 > \sqrt{2g\mu_d L}$. Determinare $f(x)$ per $x > 0$ in modo tale che in tale regione per la particella valga $\ddot{y} = -g$. Cosa succede se $v_0 < \sqrt{2g\mu_d L}$?

Soluzione

Se $\ddot{y} = -g$ la particella sta accelerando liberamente verso il basso. Questo significa che l'unica forza in direzione verticale è quella di gravità, e l'attrito non contribuisce. Perchè questo accada è necessario che il modulo della reazione normale del vincolo sia nulla, cioè il vincolo deve coincidere con la traiettoria della particella in caduta libera.

Per determinare quest'ultima si deve conoscere le condizioni iniziali a $x = 0$. La velocità in quel punto sarà orizzontale, e dovrà essere

$$\begin{aligned} L &= v_0 t - \frac{1}{2} g\mu_d t^2 \\ v &= v_0 - g\mu_d t \end{aligned}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gL\mu_d}}{g\mu_s} \tag{5.7.1}$$

e sostituendo nella seconda

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gL\mu_d}\,.$$

La soluzione pertinente è quella col segno positivo. La forma della guida sarà dunque descritta parametricamente da

$$\begin{aligned} x &= t\sqrt{v_0^2 - 2gL\mu_d} \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

ossia

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g x^2}{v_0^2 - 2gL\mu_d}\,.$$

Se $v_0 < \sqrt{2g\mu_d L}$ la soluzione (5.7.1) non è reale. Questo significa che l'attrito ferma la particella prima che questa possa arrivare in $x = 0$.

5.8. Moto su un anello con attrito ⋆⋆

Una particella materiale di massa m è vincolata a muoversi su una guida circolare di raggio R, in presenza di un attrito descritto da un coefficiente μ_d. Scrivere le equazioni del moto per la particella (senza risolverle) in assenza di gravità.

Soluzione

In coordinate polari la posizione della particella si può scrivere

$$\vec{R} = R\hat{e}_r$$

e derivando due volte otteniamo l'accelerazione

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r\,.$$

Le forze in gioco sono la reazione vincolare normale alla guida,

$$\vec{N} = N\hat{e}_r$$

e l'attrito

$$\vec{F}_a = -\mu_d|N|\hat{e}_\theta\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\,.$$

Dal secondo principio della dinamica abbiamo allora

$$mR\left(\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - \dot{\theta}^2\hat{e}_r\right) = N\hat{e}_r - \mu_d|N|\hat{e}_\theta\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\,.$$

Proiettando lungo la normale otteniamo una prima equazione

$$-mR\dot{\theta}^2 = N$$

mentre la proiezione lungo $\hat{e}_\theta$ da

$$mR\ddot{\theta} = -\mu_d|N|\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} = -mR\mu_d\dot{\theta}^2\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\,.$$

Supponendo per esempio $\dot{\theta} > 0$ abbiamo

$$\ddot{\theta} = -\mu_d\dot{\theta}^2$$

che potrebbe essere integrata facilmente.

5.9. Oscillatore con attrito ⋆⋆

Studiare il moto di una massa m che si muove su un piano orizzontale vincolata ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, in presenza di attrito statico e dinamico descritto da coefficienti μ_s eμ_d.

Soluzione

Possiamo distinguere tre casi, a seconda della velocità della massa. Quando questa è nulla possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$ma = -kx + F_s$$

dove F_s è l'attrito statico. Esso compenserà la forza di richiamo della molla quando

$$k|x| < \mu_s mg$$

e quindi la massa rimarrà in equilibrio nell'intervallo

$$-\frac{\mu_s mg}{k} \leq x \leq \frac{\mu_s mg}{k} \tag{5.9.1}$$

in caso contrario verrà accelerato, e si dovranno considerare i casi che seguono.

Quando la velocità della massa è diversa da zero possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$ma + kx = \mp\mu_d mg$$

dove il segno negativo si riferisce al caso $v > 0$ e quello positivo al caso $v < 0$. In ciascun caso l'equazione del moto è quella di un oscillatore armonico sottoposto ad una forza costante:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mp\mu_d g$$

dove abbiamo posto $\omega^2 = k/m$. La soluzione generale sarà la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, cioè

$$x = A_\pm \cos\omega t + B_\pm \sin\omega t$$

e di una soluzione particolare dell'equazione completa. In questo caso possiamo vedere che la funzione costante

$$x = \mp\frac{\mu_d g}{\omega^2}$$

soddisfa il problema, la soluzione completa sarà quindi

$$x = A_\pm \cos\omega t + B_\pm \sin\omega t \mp \frac{\mu_d g}{\omega^2}\,.$$

Dobbiamo adesso raccordare la soluzione valida per $v > 0$ e quella valida per $v < 0$. Chiaramente il raccordo avverrà in un punto di inversione del moto. Immaginiamo

che inizialmente la massa sia in quiete in un punto $x = -L < -\mu_s mg/k$. Dobbiamo considereare il caso $v > 0$, e imponendo le condizioni iniziali avremo

$$x^{(0)}(t) = \left(\frac{\mu_d g}{\omega^2} - L\right) \cos \omega t - \frac{\mu_d g}{\omega^2} \,.$$

La velocità resterà positiva per mezzo periodo, $T = 2\pi/\omega$. Per $t = T/2$ la particella sarà nuovamente in quiete nel punto

$$x^{(0)}(T/2) = L - 2\frac{\mu_d g}{\omega^2} \,.$$

Se

$$x^{(0)}(T/2) = L - 2\frac{\mu_d g}{\omega^2} < \frac{\mu_d g}{\omega^2}$$

la particella si fermerà definitivamente, altrimenti da questo momento dovremo considerare il caso $v < 0$. Imponendo le condizioni $x(T/2) = x^{(0)}(T/2)$e $v(T/2) = 0$ troviamo la nuova soluzione,

$$x^{(1)}(t) = \left(L - 3\frac{\mu_d g}{\omega^2}\right) \cos \omega \left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{\mu_d g}{\omega^2}$$

che sarà valida per il successivo mezzo periodo. Avremo infine

$$x^{(1)}(T) = -L + 4\frac{\mu_d g}{\omega^2} \,.$$

Ripetendo il ragionamento vediamo che dopo ogni mezza oscillazione la distanza del punto di inversione dall'origine si ridurrà di $2\mu_d g/\omega^2$, sino a quando non verrà a trovarsi all'interno dell'intervallo (5.9.1), dove il moto terminerà.

5.10. Asta incernierata ⋆⋆

Un'asta rettilinea incernierata nel suo estremo inferiore ad un asse verticale, rispetto a cui forma un angolo fisso $\alpha < \pi/2$, ruota attorno a tale asse con velocità angolare costante ω. Sull'asta è infilato un anello di massa m che può scorrere lungo essa. Il coefficiente di attrito statico è μ_s. Determinare le posizioni di equilibrio dell'anello.

Soluzione

La posizione dell'anello si può scrivere

$$\vec{R} = \ell\hat{\tau}(t)$$

dove $\hat{\tau}$ è un versore parallelo alla guida

$$\hat{\tau}(t) = \cos\alpha\hat{e}_z + \sin\alpha\hat{e}_\rho(t)$$

e ℓ è la distanza dell'anello dalla cerniera (costante all'equilibrio). Sappiamo che $\hat{e}_\rho$ ruota con velocità angolare costante attorno all'asse. Calcoliamo velocità

$$\vec{v} = \ell\omega\sin\alpha\hat{e}_\varphi$$

e accelerazione

$$\vec{a} = -\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho\,.$$

Le forze sono quella di gravità, $F_g = -mg\hat{e}_z$, la reazione vincolare $\vec{N}$, perpendicolare all'asta:

$$\vec{N} = N\hat{n}, \quad \hat{n} = \sin\alpha\hat{e}_z - \cos\alpha\hat{e}_\rho$$

e l'attrito statico $\vec{F}_A$, parallelo ad essa

$$\vec{F}_A = F_A\hat{\tau}$$

Avremo quindi

$$-m\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho = -mg\hat{e}_z + \vec{N} + \vec{F}_A$$

e proiettando nella direzione dell'asta otteniamo

$$-m\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho\cdot\hat{\tau} = -mg\hat{e}_z\cdot\hat{\tau} + F_A$$

cioè

$$-m\ell\omega^2\sin^2\alpha = -mg\cos\alpha + F_A$$

Proiettando perpendicolarmente all'asta abbiamo invece

$$-m\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho\cdot\hat{n} = -mg\hat{e}_z\cdot\hat{n} + N$$

cioè

$$m\ell\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = -mg\sin\alpha + N$$

Sappiamo inoltre che

$$|F_A| \leq \mu_s \left|\vec{N}\right|$$

da cui

$$\left|\cos\alpha - \frac{\ell\omega^2}{g}\sin^2\alpha\right| \leq \mu_s \left|\sin\alpha + \frac{\ell\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right|$$

L'argomento del valore assoluto a destra è sempre positivo nell'intervallo considerato. Distinguiamo i due casi. Nel primo

$$\begin{aligned}\frac{\ell\omega^2}{g} &\leq \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\\ \frac{\ell\omega^2}{g} &\geq \frac{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}{\mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}\end{aligned}$$

che ha per soluzione (notare che il limite inferiore diviene negativo se $\mu_s > \tan\alpha$)

$$\frac{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}{\mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} \leq \frac{\ell\omega^2}{g} \leq \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{5.10.1}$$

Nel secondo

$$\begin{aligned}\frac{\ell\omega^2}{g} &\geq \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\\ \frac{\ell\omega^2}{g}\left(\sin^2\alpha - \mu_s\sin\alpha\cos\alpha\right) &\leq \cos\alpha + \mu_s\sin\alpha\end{aligned}$$

che ha per soluzione, nel caso $\mu_s < \tan\alpha$,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \leq \frac{\ell\omega^2}{g} \leq \frac{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \mu_s\sin\alpha\cos\alpha} \tag{5.10.2}$$

e

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \leq \frac{\ell\omega^2}{g} \tag{5.10.3}$$

per $\mu_s \geq \tan\alpha$.

Riassumendo, in assenza di attrito abbiamo un'unica posizione di equilibrio

$$\ell = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

per $0 < \mu_s < \tan\alpha$ abbiamo l'intervallo

$$\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}{\mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} \leq \ell \leq \frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \mu_s\sin\alpha\cos\alpha} \tag{5.10.4}$$

e per $\mu_s \geq \tan\alpha$ tutte le posizioni di equilibrio sono possibili.

CC BY NC SA

5.11. Disco rotante ⋆⋆

Un disco di raggio r ruota in un piano orizzontale con velocità angolare costante ω. sul disco è praticata un scanalatura diametrale, in cui può scorrere senza attrito una pallina di massa m, legata al centro mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Supponendo che sia $k > m\omega^2$ si determini il moto della pallina.

Inizialmente la pallina si trove ferma a distanza $r/2$ dal centro.

Soluzione

In un sistema inerziale il moto sarà la composizione del movimento lungo la scanalatura e dalla rotazione insieme al disco. Scrivendo la posizione della pallina in un sistema di coordinate polari abbiamo

$$\vec{R} = R\hat{e}_r$$

dove R è una funzione del tempo (da determinare), mentre sappiamo che $\hat{e}_r$ ruota con velocità angolare ω costante. Quindi abbiamo per la velocità

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{e}_r + R\omega\hat{e}_\theta$$

e per la accelerazione

$$\vec{a} = \left(\ddot{R} - R\omega^2\right)\hat{e}_r + 2\dot{R}\omega\hat{e}_\theta$$

dove sono state usate le solite relazioni $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ e $\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$. Notare che non è necessario porre alcuna restrizione su R, che potrà assumere anche valori negativi.

Le due forze in gioco saranno quella di richiamo della molla, che potremo scrivere

$$\vec{F}_m = -kR\hat{e}_r$$

e la reazione vincolare $\hat{N}$ della guida, che sappiamo ortogonale alla stessa: $\hat{e}_r \cdot \vec{N} = 0$. Le equazioni del moto sono quindi

$$m\left[\left(\ddot{R} - R\omega^2\right)\hat{e}_r + 2\dot{R}\omega\hat{e}_\theta\right] = -kR\hat{e}_r + \hat{N}\,.$$

Proiettando nella direzione radiale abbiamo

$$m\left[\left(\ddot{R} - R\omega^2\right)\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r + 2\dot{R}\omega\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r\right] = -kR\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r + \hat{N} \cdot \hat{e}_r$$

cioè

$$m\left(\ddot{R} - R\omega^2\right) = -kR$$

ossia

$$m\ddot{R} + (k - m\omega^2)R = 0\,.$$

La soluzione generali di questa equazione è una oscillazione armonica

$$R(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

CC BY NC SA

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo $A = r/2$ e $B = 0$, quindi

$$\vec{R}(t) = \frac{r}{2}\cos\Omega t\,\hat{e}_r$$

ossia, in coordinate Cartesiane,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{r}{2}\cos\Omega t\,\cos\omega t \\ y(t) &= \frac{r}{2}\cos\Omega t\,\sin\omega t \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che la scanalatura sia inizialmente allineata all'asse x.

5.12. Oscillatore armonico forzato ⋆⋆

Un oscillatore armonico si trova in quiete per $t < 0$. Da $t = 0$ a $t = T$ viene applicata una forza costante F. Trovare la legge oraria e studiare il limite $T \to 0$.

Soluzione

Scriviamo l'equazione del moto dell'oscillatore nella forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a(t)$$

dove

$$a(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F/m & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T\,. \end{cases}$$

Consideriamo la soluzione nell'intervallo $0 \le t < T$. Sappiamo che dobbiamo aggiungere alla soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

una soluzione particolare dell'equazione completa. La prima si può scrivere nella forma

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{5.12.1}$$

e si verifica facilmente che una soluzione particolare è la costante $x = \frac{F}{m\omega_0^2}$. Quindi la soluzione completa è della forma

$$x_1(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2}\,.$$

Le condizioni da imporre in $t = 0$ sono $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. Abbiamo da questo

$$x_1(t) = \frac{F}{m\omega_0^2}\left(1 - \cos\omega_0 t\right)\,. \tag{5.12.2}$$

Costruiamo adesso la soluzione per $t > T$. Adesso l'equazione del moto è omogenea, e dovremo imporre alla soluzione generale di raccordarsi con continuità, insieme alla derivata, con la (5.12.2) in $t = T$. Per semplificare i calcoli possiamo scrivere la soluzione dell'equazione omogenea nella forma

$$x_2(t) = A'\cos\omega_0\left(t - T\right) + B'\sin\omega_0\left(t - T\right)\,.$$

e quindi

$$\begin{aligned} x_2(T) = x_1(T) &= A' = \frac{F}{m\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 T) \\ \dot{x}_2(T) = \dot{x}_1(T) &= \omega_0 B' = \frac{F}{m\omega_0}\sin\omega_0 T \end{aligned}$$

da cui

$$x_2(t) = \frac{F}{m\omega_0^2}\left[(1-\cos\omega_0 T)\cos\omega_0\,(t-T) + \sin\omega_0 T\sin\omega_0\,(t-T)\right]\,.$$

L'ampiezza dell'oscillazione è data da

$$\mathcal{A} = \frac{2F}{m\omega_0^2}\sqrt{\frac{1-\cos\omega_0 T}{2}} = \frac{2F}{m\omega_0^2}\left|\sin\frac{\omega_0 T}{2}\right|\,.$$

Se l'ampiezza della forza é fissata si ha chiaramente

$$\lim_{T\to 0}\mathcal{A} = 0\,.$$

Per ottenere un limite finito si deve far variare F con T in modo che

$$\lim_{T\to 0} F\sin\frac{\omega_0 T}{2}$$

sia finito. Questo significa che $I = FT$ (il prodotto della forza per il tempo di applicazione) deve rimanere costante. In tal caso

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \lim_{T\to 0}\frac{I}{m\omega_0^2}\left[\frac{1-\cos\omega_0 T}{T}\cos\omega_0\,(t-T) + \frac{\sin\omega_0 T}{T}\sin\omega_0\,(t-T)\right] \\ &= \frac{I}{m\omega_0}\sin\omega_0 t\,. \end{aligned}$$

CC BY NC SA

5.13. Oscillazioni isocrone ⋆⋆⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi in un piano verticale su una guida senza attrito, descritta dall'equazione

$$y = f(x)\,.$$

Determinare $f(x)$ in modo tale che il moto del punto sia una oscillazione armonica di periodo T attorno $x = 0$, indipendentemente dalla sua ampiezza. È possibile ottenere questo per ampiezze comunque grandi? La soluzione è unica?

Soluzione

Supponiamo, senza perdere di generalità, che $f(0) = 0$ e consideriamo $x > 0$. Se prendiamo come coordinata lo spazio percorso lungo la curva possiamo scrivere l'energia totale del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy(s)\,.$$

Questa deve essere equivalente all'energia totale di un oscillatore armonico, quindi si deve avere

$$y(s) = K^2 s^2\,.$$

Segue che

$$\sqrt{y(u)} = K\int_0^u \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

ossia, derivando,

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{dy}{dx}\right) = K\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.$$

Possiamo risolvere questa equazione scrivendo

$$\frac{1-4K^2y}{4K^2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

ossia

$$\int_0^{4K^2y(x)} \sqrt{\frac{1-w}{w}}dw = 4K^2x\,.$$

Integrando otteniamo la traiettoria nella forma (valida per $4K^2y < 1$)

$$\sqrt{4K^2y(1-4K^2y)} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-4K^2y} = 4K^2x\,.$$

Ponendo

$$y = \frac{1}{8K^2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{4K^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

otteniamo

$$x = \frac{1}{8K^2}\left(|\sin\theta| - \theta\right)$$

CC BY NC SA

e dato che siamo interessati a $x > 0$ possiamo scrivere la traiettoria in forma parametrica come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{8K^2}(1-\cos\theta) \\ x &= \frac{1}{8K^2}(\sin\theta+\theta) \end{aligned}$$

per $\theta > 0$. Possiamo interpretare quindi la traiettoria come quella di un punto posto su una circonferenza di raggio $R = \frac{1}{8K^2}$ che ruota senza strisciare sotto il piano $y = 2R$. Possiamo ripetere le stesse considerazioni per $x < 0$, ottenendo lo stesso risultato. Avremo quindi una traiettoria complessiva descritta dalle equazioni parametriche precedenti per $-\pi < \theta < \pi$.

Esiste una ampiezza massima per l'oscillazione che si ottiene da

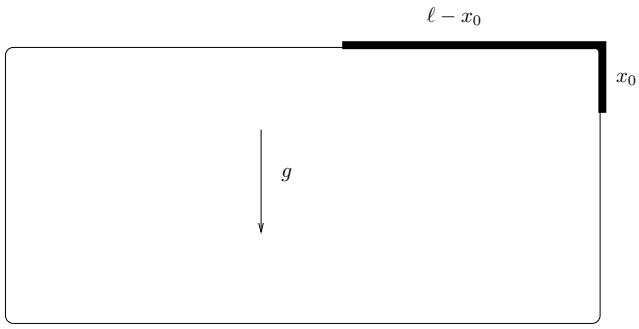
$$y < \frac{1}{4K^2}\,.$$

Si può interpretare fisicamente questo fatto tenendo presente che in una oscillazione armonica si ha una forza di richiamo (tangente alla traiettoria) proporzionale a s. Ma la massima forza di richiamo disponibile nella situazione considerata è mg, corrispondente ad una tangente verticale. Questo accade per $\theta = \pi$.

Infine osserviamo che la soluzione non è unica. Possiamo ad esempio prendere per $x > 0$ e $x < 0$ traiettorie corrispondenti a due diversi valori di K: il moto sarà sia per $x > 0$ che per $x < 0$ un moto armonico, ma con periodi diversi. Il periodo totale sarà la media dei due, e non dipenderà dalla ampiezza dell'oscillazione.

5.14. Catena che cade ⋆⋆

Un filo perfettamente flessibile, di massa m e lunghezza ℓ è vincolato a muoversi sulla superficie in figura, e pende inizialmente verticalmente per un tratto x_0. Determinare il suo moto.



Soluzione

Detta x la lunghezza del tratto verticale della catena possiamo scrivere l'energia cinetica del sistema nella forma

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

e l'energia potenziale gravitazionale come

$$U = -\left(m\frac{x}{\ell}\right) g \left(\frac{x}{2}\right)$$

dove il termine nella prima parentesi è la massa del tratto verticale, e quello nella seconda la posizione verticale del centro di massa rispetto al piano orizzontale. L'energia totale sarà

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{mg}{\ell}x^2 \,.$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} - \frac{mg}{\ell}x\dot{x} = \dot{x}\left(m\ddot{x} - \frac{mg}{\ell}x\right) = 0$$

da cui l'equazione del moto

$$\ddot{x} - \frac{g}{\ell}x = 0 \,.$$

Questa è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, cerchiamo quindi soluzioni della forma

$$x = e^{\alpha t}$$

e sostituendo troviamo l'equazione

$$\alpha^2 = \frac{g}{\ell}$$

da cui la soluzione generale

$$x = Ae^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}t}\,.$$

Imponiamo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_0 \\ v(0) &= \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,(A - B) = 0 \end{aligned}$$

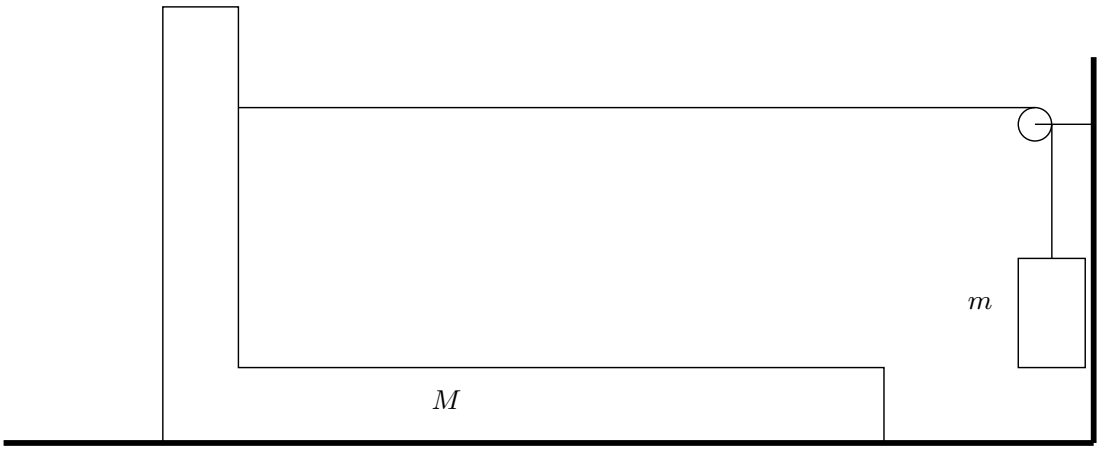
da cui $A = B = x_0/2$. Quindi

$$x = x_0 \cosh \sqrt{\frac{g}{\ell}}t\,.$$

CC BY NC SA

5.15. Carrucola ⋆⋆

Una pedana di massa M è libera di muoversi su un piano orizzontale senza attrito, ed è collegata ad una massa m da un filo inestensibile come in figura. Determinare l'accelerazione del sistema e la tensione del filo.



Soluzione

Considerando le forze orizzontali che agiscono sulla pedana, possiamo scrivere

$$M\ddot{x} = T$$

dove T è la tensione del filo. Analogamente abbiamo, per il moto verticale della massa,.

$$m\ddot{y} = T - mg\,.$$

Inoltre, dato che il filo è inestensibile, deve essere $\dot{x} = -\dot{y}$ e quindi $\ddot{x} = -\ddot{y}$. Quindi

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= T \\ m\ddot{x} &= mg - T\,. \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni otteniamo

$$(M+m)\ddot{x} = mg$$

da cui

$$\ddot{x} = \frac{mg}{M+m}\,.$$

Alternativamente possiamo scrivere l'energia totale del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$$

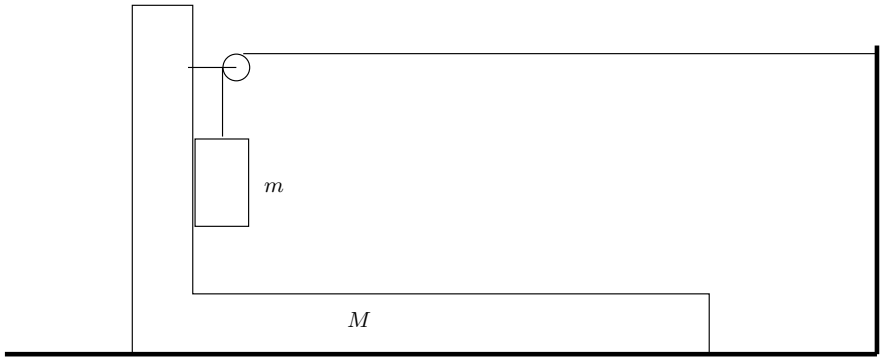
e derivando rispetto al tempo abbiamo

$$\dot{E} = \dot{x}\left[(M+m)\,\ddot{x} - mg\right] = 0$$

da cui il risultato calcolato precedentemente.

5.16. Carrucola II ⋆⋆

Calcolare l'accelerazione del sistema in figura. Il filo è inestensibile e privo di massa, così come la carrucola. La massa mobile è appoggiata alla parete verticale del carrello. Non vi sono attriti.



Soluzione

Se T è la tensione del filo potremo scrivere per la accelerazione orizzontale del centro di massa del sistema

$$(M+m)\ddot{x} = T$$

mentre l'accelerazione verticale della massa m sarà data da

$$m\ddot{y} = -mg + T\,.$$

Il legame tra le coordinate x e y sarà $x = -y + C$. La costante C si può eliminare scegliendo opportunamente l'origine del sistema). Segue che $\dot{x} = -\dot{y}$ e $\ddot{x} = -\ddot{y}$. Quindi otteniamo

$$\ddot{x} = \frac{mg}{M+2m}\,.$$

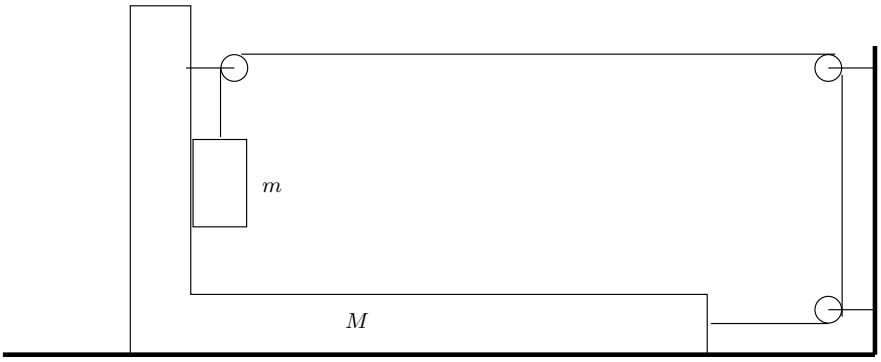
Allo stesso risultato possiamo arrivare scrivendo l'energia totale del sistema

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

e esprimendo E in funzione, ad esempio, della sola coordinata x e della sua derivata vediamo che il sistema è equivalente ad una massa $M + 2m$ sottoposta a una forza mg.

5.17. Carrucola III ⋆⋆

Nel sistema in figura il filo è inestensibile e privo di massa, la massa m è appoggiata alla parete verticale del carrello e non vi sono attriti. Calcolare l'accelerazione del sistema.



Soluzione

Detta T la tensione del filo avremo per il moto orizzontale del centro di massa del sistema

$$(M+m)\ddot{x} = 2T$$

e per il moto verticale della massa

$$m\ddot{y} = T - mg\,.$$

Abbiamo inoltre $y = -2x + C$. La costante C non è rilevante e può essere eliminata scegliendo opportunamente il sistema di coordinate. Otteniamo infine

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} &= 2T\\ -2m\ddot{x} &= T - mg\end{aligned}$$

da cui

$$\ddot{x} = \frac{2mg}{M+5m}\,.$$

Possiamo anche scrivere l'energia del sistema

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + mgy$$

ossia

$$E = \frac{1}{2}(M+5m)\dot{x}^2 - 2mgx$$

che equivale all'energia di una massa $M+5m$ su cui agisce una forza $2mg$.

5.18. Oscillatore e forza $F = \alpha t$ ⋆⋆

Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

Soluzione

Se il moto della massa è uniforme la forza totale su di essa deve essere nulla. Tale forza è data dalla somma della forza di richiamo della molla e di quella esterna applicata:

$$F = -kx + \alpha t$$

che si annulla se

$$x = \frac{\alpha t}{k}\,.$$

Questo è effettivamente un moto uniforme, corrispondente alle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ v(0) &= \frac{\alpha}{k}\,. \end{aligned}$$

L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} + kx = \alpha t\,.$$

Abbiamo già una soluzione particolare dell'equazione completa, cioè il moto uniforme determinato al punto precedente. Per avere la soluzione generale è sufficiente aggiungere la soluzione generale dell'equazione omogenea, cioè una arbitraria oscillazione libera:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\alpha t}{k}\,.$$

Si può pensare a questa soluzione generale come ad una oscillazione attorno a un punto che cambia con moto uniforme.

5.19. Oscillatore e forza $F = \alpha t^2$ ⋆⋆

Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t^2$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

Soluzione

Se il moto della massa è uniformemente accelerato la forza totale su di essa deve essere costante, ed uguale al prodotto di massa per accelerazione. Scriviamo l'equazione del moto:

$$m\ddot{x} + kx = \alpha t^2$$

e cerchiamo una soluzione del tipo

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Sostituendo otteniamo

$$ma + kx_0 + kv_0 t + \frac{1}{2} kat^2 = \alpha t^2$$

che è soddisfatta prendendo

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ a &= \frac{2\alpha}{k} \\ x_0 &= -\frac{2m\alpha}{k^2}\,. \end{aligned}$$

La soluzione generale si ottiene aggiungendo alla soluzione particolare appena determinata una arbitraria oscillazione libera (soluzione generale dell'equazione omogenea):

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{2m\alpha}{k^2} + \frac{\alpha}{k} t^2\,.$$

CC BY NC SA

5.20. Doppio piano inclinato con attrito ⋆

Una particella di massa m viene lasciata cadere su un doppio piano inclinato come in figura, partendo da fermo e da una altezza h. Se su tutto il piano è presente un attrito dinamico catatterizzato da un coefficiente μ_d calcolare sulla base di considerazioni energetiche l'altezza massima raggiunta sul piano a destra. Si supponga che lo spigolo sia regolarizzato e che su di esso non vi sia attrito.

Soluzione

All'inizio e alla fine la particella è ferma, quindi occorre considerare la sola energia potenziale. La differenza tra energia potenziale iniziale e finale deve essere uguale al lavoro fatto dalle forze di attrito. Quindi

$$mg(h - h') = F_1\ell_1 + F_2\ell_2$$

dove $F_1 = \mu_d mg\cos\theta_1$ e $F_2 = \mu_d mg\cos\theta_2$ sono le forze di attrito sul piano a sinistra e a destra rispettivamente. $\ell_1 = h/\sin\theta_1$ è il tratto percorso sul piano a sinistra e $\ell_2 = h'/\sin\theta_2$ quello percorso sul piano a destra. Abbiamo quindi

$$mg(h - h') = \mu_d mg\left(\frac{h}{\tan\theta_1} + \frac{h'}{\tan\theta_2}\right)$$

da cui

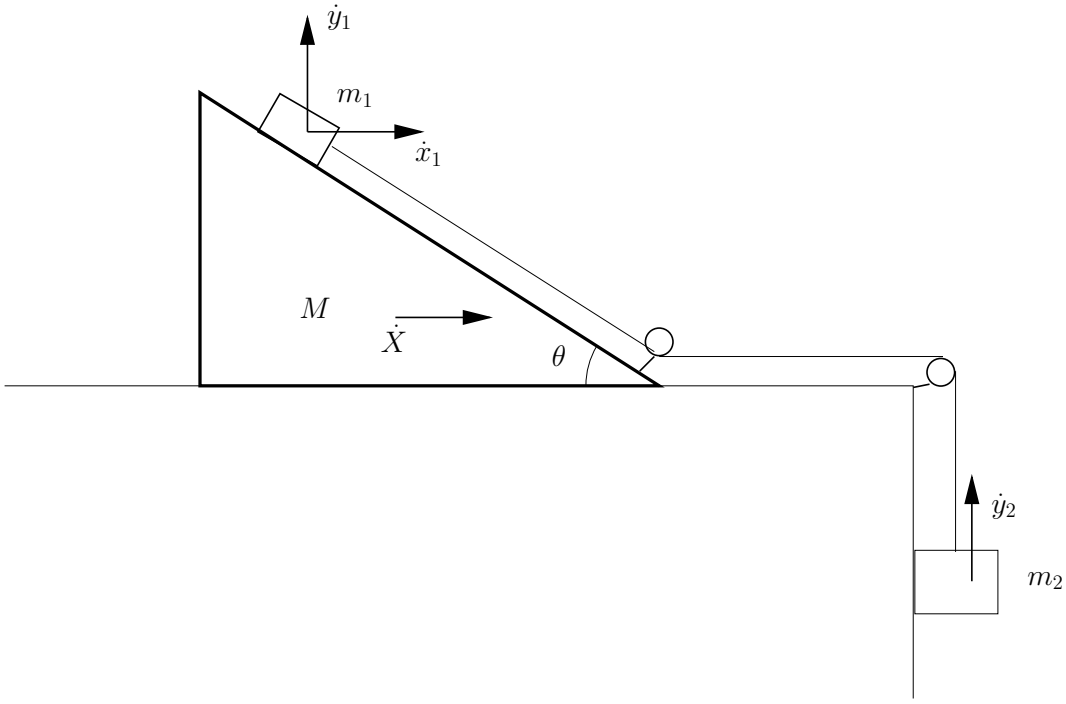
$$h'\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\theta_2}\right) = h\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta_1}\right)$$

ed infine

$$h' = h\frac{1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta_1}}{1 + \frac{\mu_d}{\tan\theta_2}} < h\,.$$

5.21. Carrucola e pedana mobile ⋆⋆

Nel sistema rappresentato in figura la pedana di massa M è solidale con la prima carrucola, ed è libera di scorrere sul piano orizzontale. Anche la massa m_1 è libera di scorrere sul piano inclinato. Non vi sono attriti, ed il filo è inestensibile. Disegnare i diagrammi delle forze per le tre masse in gioco, e determinare le loro accelerazioni.

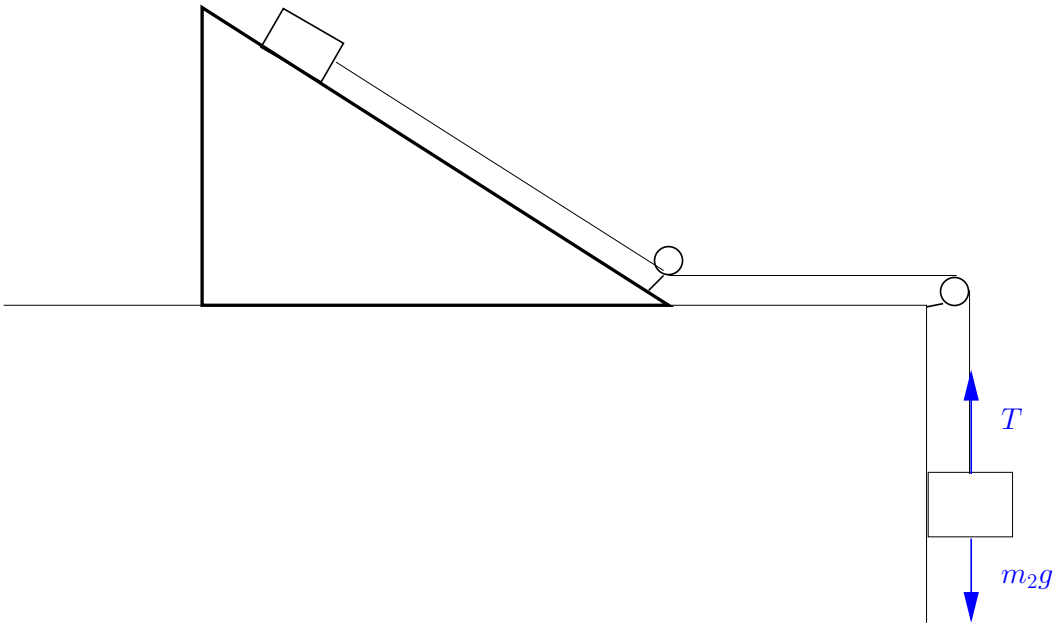


Soluzione

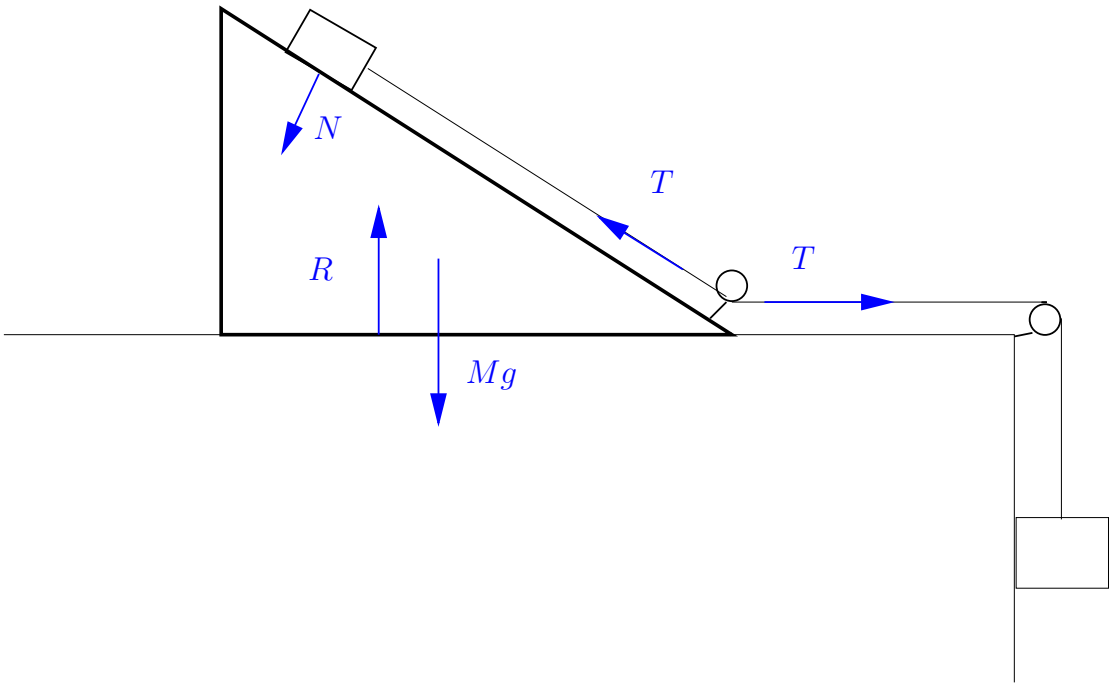
Consideriamo il diagramma delle forze per la massa m_2. Considerando il solo moto orizzontale abbiamo l'equazione

$$m_2\ddot{y}_2 = T - m_2 g$$

dove T è la tensione del filo.



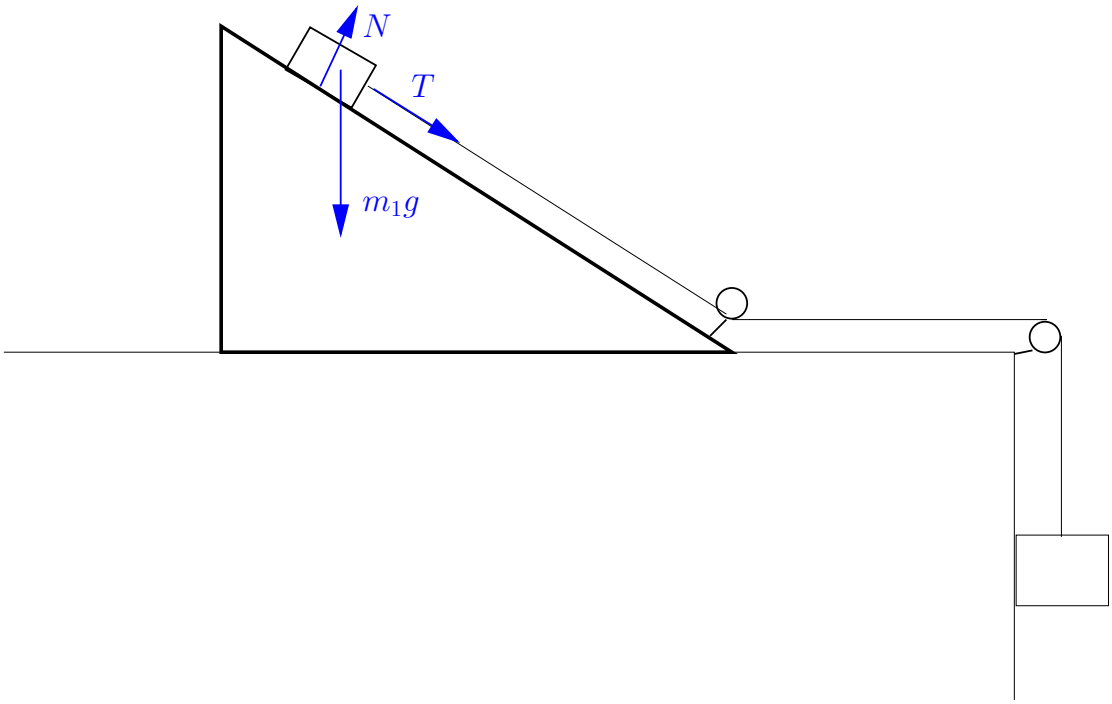
Per quanto riguarda il piano inclinato, di cui la carrucola fa parte, abbiamo il diagramma delle forze che segue



che corrisponde alle equazioni del moto

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= T - T\cos\theta - N\sin\theta \\ M\ddot{y} &= R - Mg - N\cos\theta + T\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Notare che $\ddot{y} = 0$. Consideriamo infine la massa m_1. Il diagramma delle forze è il seguente



e le relative equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= N\sin\theta + T\cos\theta \\ m_1\ddot{y}_1 &= N\cos\theta - m_1 g - T\sin\theta \end{aligned}$$

Abbiamo le 5 relazioni precedenti e le incognite $\ddot{x}$, $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$, $\ddot{y}_2$, T, N, R. Servono quindi altre due equazioni. La prima si può scrivere imponendo che l'accelerazione della massa m_1 relativa alla pedana sia inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ:

$$\tan\theta = -\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1 - \ddot{x}}\,.$$

La seconda deriva dalla inestensibilità del filo. Possiamo scrivere la lunghezza di quest'ultimo come

$$\ell = -y_2 - x + \frac{x - x_1}{\cos\theta} + \text{costante}$$

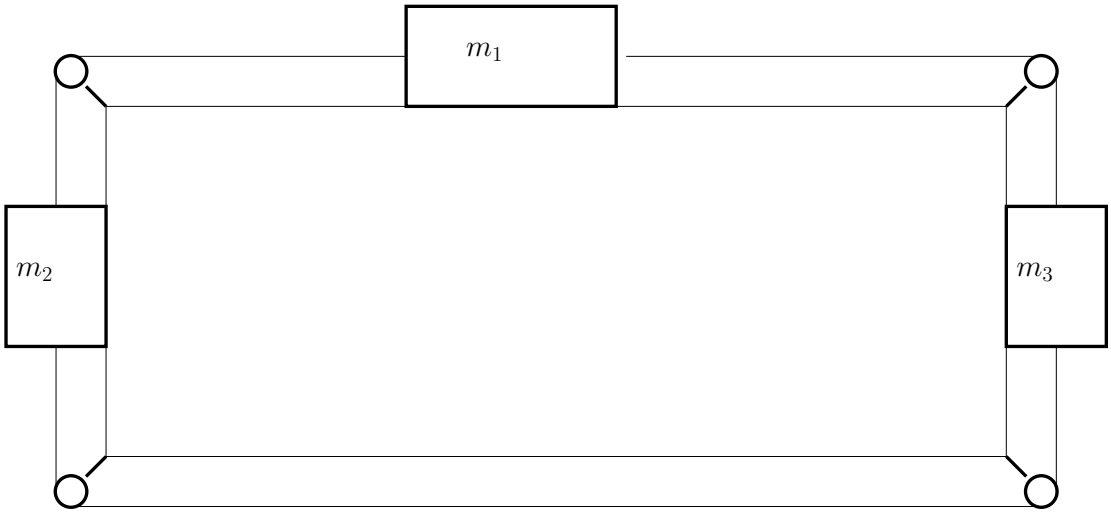
e derivando due volte rispetto al tempo otteniamo

$$(\ddot{y}_2 + \ddot{x})\cos\theta = \ddot{x} - \ddot{x}_1.$$

Abbiamo in conclusione un sistema lineare che permette di ricavare le accelerazioni incognite, insieme a T e N.

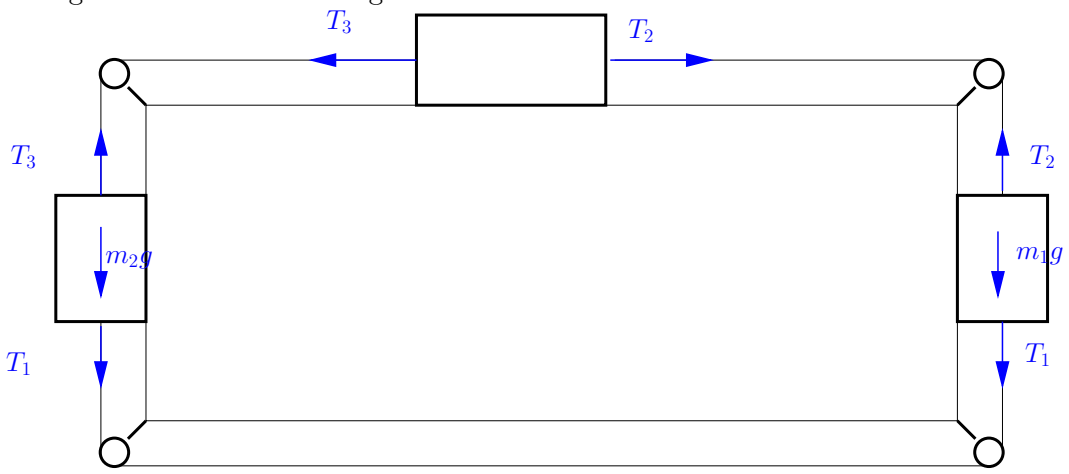
5.22. Catena chiusa di masse ⋆⋆

Nell'apparato in figura non ci sono attriti, e il filo è senza masse e inestensibile e teso. Calcolare le accelerazioni delle masse. È possibile determinare le tensioni dei fili?



Soluzione

Dal diagramma delle forze in figura



seguono le equazioni del moto

$$\begin{aligned} m_1 a &= T_2 - T_3 \\ m_2 a &= T_3 - T_1 - m_2 g \\ m_3 a &= T_1 - T_2 + m_3 g \end{aligned}$$

e sommando membro a membro troviamo l'accelerazione

$$a = \frac{(m_3 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

CC BY NC SA

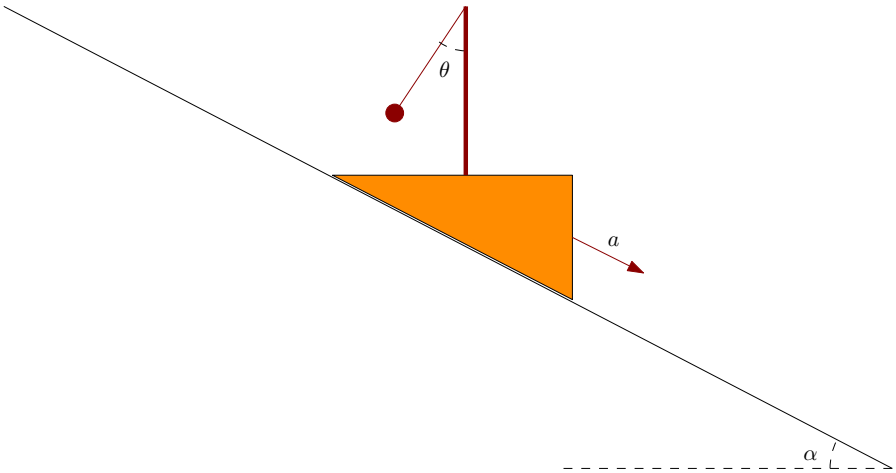
Le equazioni precedenti sono insufficienti a determinare le tensioni. Questo corrisponde al fatto che la trasformazione

$$\begin{aligned} T_1 &\rightarrow T_1 + \Delta T \\ T_2 &\rightarrow T_2 + \Delta T \\ T_3 &\rightarrow T_3 + \Delta T \end{aligned}$$

le lascia invariate.

5.23. Caduta quasi libera ⋆

Sul piano senza attrito in figura, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α, è appoggiato un cuneo di massa M. Su quest'ultimo è fissato un pendolo di massa m e lunghezza ℓ. Si osserva che, per opportune condizioni iniziali, il cuneo si muove con accelerazione costante a e l'inclinazione del pendolo rispetto all'orizzontale ha un valore costante θ. Determinare a e θ.



Soluzione

Se l'inclinazione del pendolo è costante l'accelerazione del cuneo è anche l'accelerazione del centro di massa del sistema complessivo. Questa inoltre sarà diretta parallelamente al piano inclinato, e applicando la seconda legge della dinamica la calcoliamo immediatamente:

$$\begin{aligned}(M+m)a &= (M+m)g\sin\alpha \\ a &= g\sin\alpha\end{aligned}$$

Il calcolo è perfettamente analogo a quello che si esegue per un unico corpo su un piano inclinato: l'unica forza parallela al piano è una componente della forza peso.

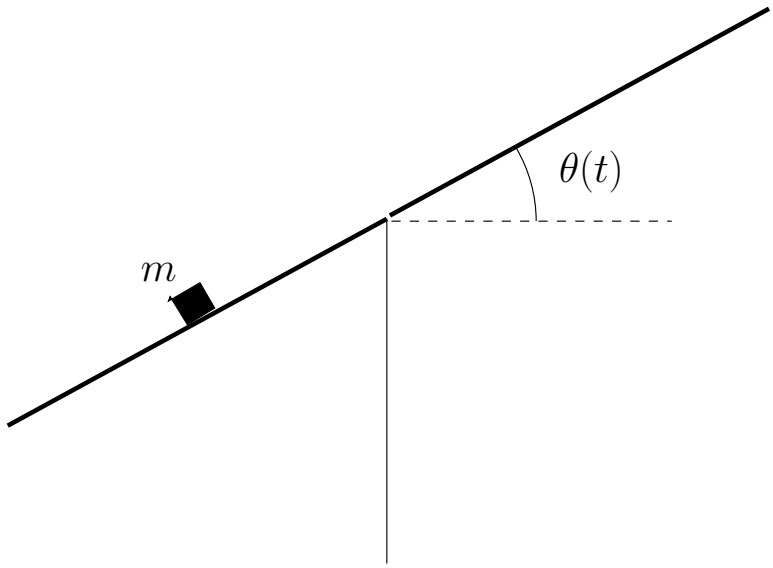
Adesso possiamo determinare l'angolo θ. Un semplice ragionamento permette di arrivare al risultato senza eseguire alcun calcolo. Se consideriamo il cuneo (includendo in esso il supporto verticale del pendolo), sappiamo già che la sua accelerazione è $a = g\sin\alpha$. Ma anche al cuneo deve applicarsi la seconda legge della dinamica, e quindi

$$Ma = Mg\sin\alpha + T_{\parallel}$$

dove $T_{\parallel}$ è la componente della forza associata alla tensione del filo parallela al piano. Ne segue che $T_{\parallel} = 0$, cioè il filo è perpendicolare al piano inclinato. In altre parole $\theta = \alpha$.

5.24. Pedana mobile ⋆⋆

La pedana in figura è inclinato di un angolo $\theta(t)$ rispetto alla orizzontale, ed ha un punto fisso. La massa m è libera di muoversi su di essa senza attrito. Determinare l'equazione del moto. Risolverla nel caso $\theta(t) = \Omega t$, e determinare se possibile le condizioni iniziali a $t = 0$ in modo da avere una oscillazione armonica.



Soluzione

Introducendo un sistema di coordinate polari centrato sul punto fisso possiamo scrivere la posizione della massa come

$$\vec{r} = x\hat{e}_r$$

dove x è la coordinata della massa sulla pedana. Derivando otteniamo la velocità

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_r + x\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

e l'accelerazione

$$\vec{a} = \left(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(x\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\,.$$

Le forze che agiscono sulla massa si scrivono

$$\vec{F} = -mg(\hat{e}_r \sin\theta + \hat{e}_\theta \cos\theta) + N\hat{e}_\theta$$

dove $N\hat{e}_\theta$ è la reazione vincolare della pedana, ad essa normale. Prendendo le componenti dirette lungo $\hat{e}_r$ di $\vec{F} = m\vec{a}$ otteniamo

$$m\left(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2\right) = -mg\sin\theta\,.$$

Nel caso $\theta = \Omega t$ abbiamo

$$\ddot{x} - \Omega^2 x = -g \sin \Omega t \,.$$

Questa è una equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Cerchiamo la soluzione generale $x_o(t)$ dell'omogenea associata

$$\ddot{x}_o - \Omega^2 x_o = 0$$

nella forma $x = e^{\alpha t}$. Troviamo come possibili soluzioni $\alpha = \pm\Omega$ e quindi

$$x_o = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} \,.$$

Determiniamo adesso una soluzione particolare dell'equazione completa, che cercheremo nella forma

$$x^* = C \sin \Omega t \,.$$

Sostituendo troviamo

$$-2\Omega^2 C = -g$$

e quindi

$$x^* = \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t \,.$$

La soluzione generale è quindi

$$x = x_o + x^* = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t$$

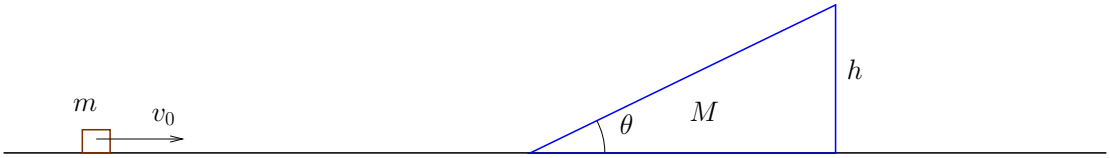
e per avere una oscillazione armonica dovrà essere $A = B = 0$. Questo significa

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ v(0) &= \frac{g}{2\Omega} \,. \end{aligned}$$

CC BY NC SA

5.25. Urto massa-pedana ⋆⋆

La massa m si muove inizialmente sul piano orizzontale privo di attrito con velocità v_0. Successivamente sale sul piano inclinato di massa M, libero anche esso di muoversi sul piano. Determinare per quali valori della velocità v_0 la massa supera il piano inclinato.



Soluzione

Sia l'energia che la quantità di moto orizzontale del sistema si conservano. Uguagliamo queste due quantità tra l'istante immediatamente precedente al contatto tra pedana e massa e l'istante in cui la massa arriva nel punto più alto della pedana:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left[(V_x+v_{x,rel})^2+v_{y,rel}^2\right]+\frac{1}{2}MV_x^2+mgh \\ mv_0 &= m\left(V_x+v_{x,rel}\right)+MV_x \end{aligned}$$

dove V_x indica la velocità del piano inclinato (orizzontale) e $v_{x,rel}$, $v_{y,rel}$ le due componenti della velocità della massa relative a quest'ultimo. Questa velocità relativa deve inoltre essere inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ

$$\frac{v_{y,rel}}{v_{x,rel}} = \tan\theta$$

ma non useremo questa ultima condizione. Utilizzando le tre relazioni si può calcolare $v_{x,rel}$, $v_{y,rel}$ e V_x, e porre ad esempio $v_{x,rel} > 0$.

Più semplicemente si può determinare la velocità necessaria a far arrivare la massa esattamente nel punto più alto della pedana. In questo caso $v_{x,rel} = v_{y,rel} = 0$ e le leggi di conservazione si scrivono

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 &= \frac{1}{2}(m+M)V_x^2+mgh \\ mv_{0,min} &= (m+M)V_{x,min} \end{aligned}$$

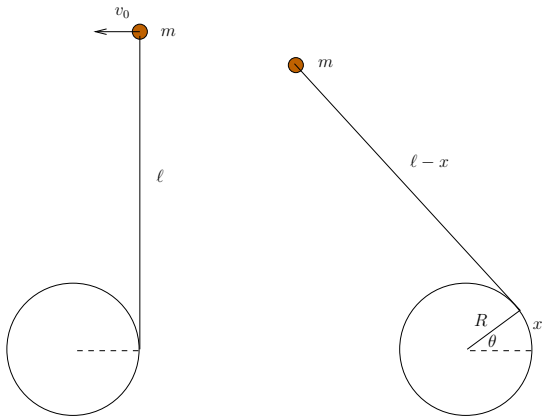
da cui segue immediatamente

$$v_{0,min} = \sqrt{2gh\frac{m+M}{M}}\,.$$

Per velocità maggiori di quella determinata il piano inclinato verrà superato. Notare che per $M \to \infty$ si ha il consueto risultato $v_{0,min} \to \sqrt{2gh}$, mentre per $M \to 0$ $v_{0,min} \to \infty$.

5.26. Filo che si avvolge ⋆⋆

Il disco in figura è fissato rigidamente ad un piano orizzontale, e ad esso è fissato un filo inestensibile di lunghezza ℓ. All'altro estremo è fissata una massa m che viene lanciata con velocità iniziale di modulo v_0 in direzione perpendicolare al filo. Calcolare la velocità della massa, la sua traiettoria e la tensione del filo in funzione del tempo.



Soluzione

La velocità della massa è sempre ortogonale al filo, quindi l'unica forza ad essa applicata (la tensione del filo) non fa lavoro. L'energia cinetica sarà quindi conservata ed il modulo della velocità sarà sempre uguale a v_0. Per quanto riguarda la tensione del filo, possiamo considerare istante per istante il moto come moto circolare con velocità v_0 attorno a un punto posto a distanza $\ell - x = \ell - R\theta$. Avremo quindi uguaglianza tra T/m e accelerazione centripeta:

$$m\frac{v_0^2}{\ell - R\theta} = T$$

quindi la tensione aumenta all'accorciarsi del filo.

Verifichiamo tutto questo in modo più formale. Introducendo un sistema di coordinate polari possiamo scrivere la posizione della massa come

$$\vec{r} = R\hat{e}_r + (\ell - R\theta)\hat{e}_\theta$$

e derivando rispetto al tempo troviamo velocità

$$\vec{v} = R\dot{\hat{e}}_r + (\ell - R\theta)\dot{\hat{e}}_\theta - R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = -\dot{\theta}(\ell - R\theta)\hat{e}_r$$

e accelerazione

$$\vec{a} = \left[R\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}(\ell - R\theta)\right]\hat{e}_r - \dot{\theta}^2(\ell - R\theta)\hat{e}_\theta\,.$$

D'altra parte la forza che agisce sulla massa si può scrivere come $\vec{F} = -T\hat{e}_\theta$ e dal secondo principio della dinamica segue

$$\begin{aligned} m\dot{\theta}^2(\ell - R\theta) &= T \\ R\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}(\ell - R\theta) &= 0\,. \end{aligned}$$

La seconda equazione si può riscrivere come

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta}(\ell - R\theta) = 0$$

ossia

$$\dot{\theta}(\ell - R\theta) = v_0 \,.$$

Sostituendo nella seconda abbiamo

$$T = \frac{mv_0^2}{\ell - R\theta} \,.$$

Per la traiettoria possiamo scrivere

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (\ell - R\theta) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

che da direttamente l'equazione in forma parametrica:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - (\ell - R\theta)\sin\theta \\ y &= R\sin\theta + (\ell - R\theta)\cos\theta \,. \end{aligned}$$

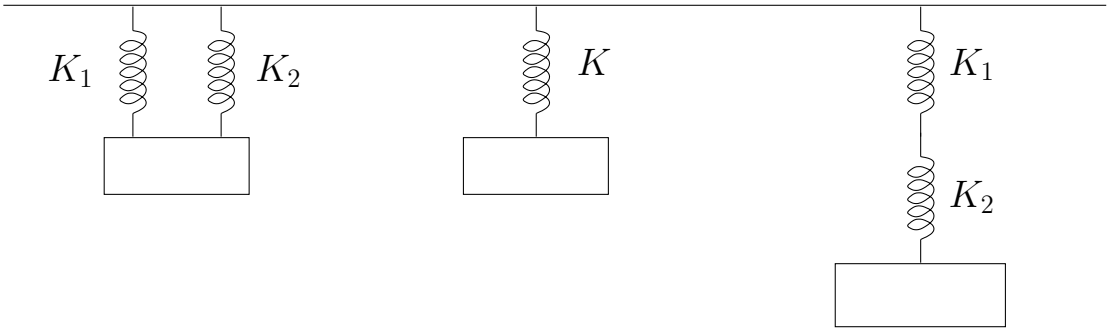
La distanza dal centro diminuisce con θ:

$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2 + (\ell - R\theta)^2 \,.$$

CC BY NC SA

5.27. Molle in serie e in parallelo ⋆

Nei sistemi rappresentati in figura tutte le molle sono di lunghezza a riposo nulla, e le masse sono identiche. Per quale valore di K il sistema al centro oscilla alla stessa frequenza di quello a sinistra? E per quale alla stessa frequenza di quello a destra?



Soluzione

Consideriamo prima di tutto il sistema a sinistra. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F_1 &= -K_1 x \\ F_2 &= -K_2 x \end{aligned}$$

perchè la deformazione delle due molle è la stessa. Da questo segue che

$$F = F_1 + F_2 = -(K_1 + K_2)x$$

e quindi $K = K_1 + K_2$. Per il sistema a sinistra vale invece

$$\begin{aligned} F &= -K_1 x_1 \\ F &= -K_2 x_2 \end{aligned}$$

da cui

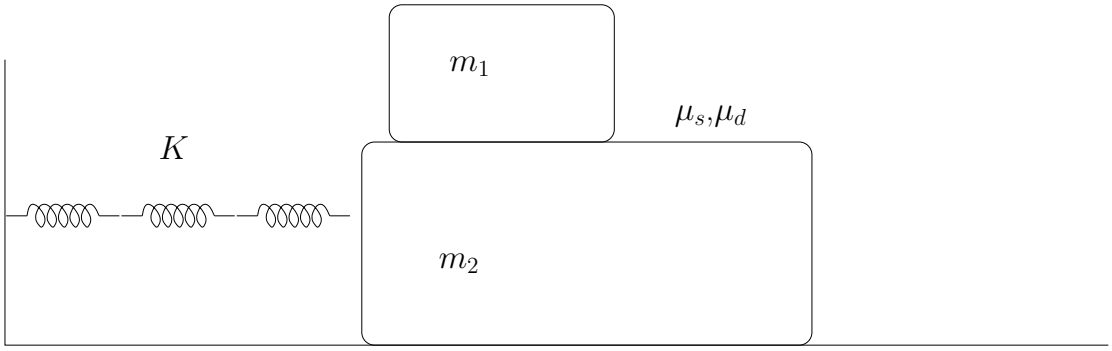
$$\frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} = -(x_1 + x_2) = -x$$

cioè

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\,.$$

5.28. Oscillatore con massa appoggiata ⋆⋆

Nel sistema in figura la molla ha costante elastica K e tra le due masse si ha un attrito caratterizzato da coefficienti statici e dinamici μ_d e μ_s. Non si ha attrito tra massa m_2 e piano orizzontale. Determinare la massima ampiezza di oscillazione per la quale la massa m_1 non slitta sulla m_2, e la frequenza di oscillazione in tale condizione.



Soluzione

Se le due massa non slittano possiamo scrivere

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F_A \\ m_1\ddot{y}_1 &= N - m_1 g = 0 \end{aligned}$$

con $|F_A| \leq \mu_s N = \mu_s m_1 g$.

Per la massa m_2 vale

$$m_2\ddot{x}_2 = -Kx_2 - F_A$$

e per non slittare deve essere $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ ossia

$$\frac{F_A}{m_1} = -\frac{K}{m_2} - \frac{F_A}{m_2}\,.$$

Segue che

$$F_A = -\frac{m_1}{m_1+m_2}Kx_2$$

ossia

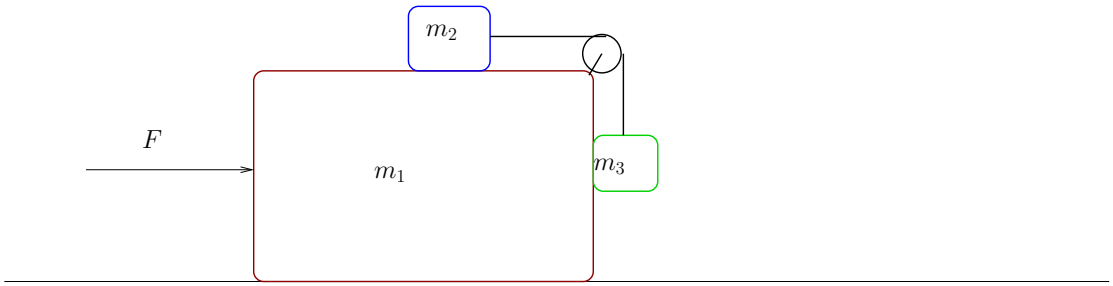
$$\frac{Km_1}{m_1+m_2}|x_2| \leq \mu_s m_1 g$$

che possiamo riscrivere come

$$-\mu_s g\frac{m_1+m_2}{K} \leq x_2 \leq \mu_s g\frac{m_1+m_2}{K}\,.$$

5.29. Carrucola e moto relativo ⋆⋆

Facendo riferimento alla figura, trovare quale forza F è necessario applicare alla massa m_1 per impedire qualsiasi accelerazione relativa tra m_1, m_2 e m_3.



Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto delle tre masse:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F - R - T \\ m_2\ddot{x}_2 &= T \\ m_3\ddot{x}_3 &= R \\ m_3\ddot{y}_3 &= T - m_3 g\,. \end{aligned}$$

Inoltre deve essere

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 &= -\ddot{y}_3 \\ \ddot{x}_1 &= \ddot{x}_3 \end{aligned}$$

e sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F - R - T \\ m_2\ddot{x}_2 &= T \\ m_3\ddot{x}_1 &= R \\ m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= T - m_3 g \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (m_1 + m_3)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 &= F \\ m_3\ddot{x}_1 - (m_3 + m_2)\ddot{x}_2 &= -m_3 g\,. \end{aligned}$$

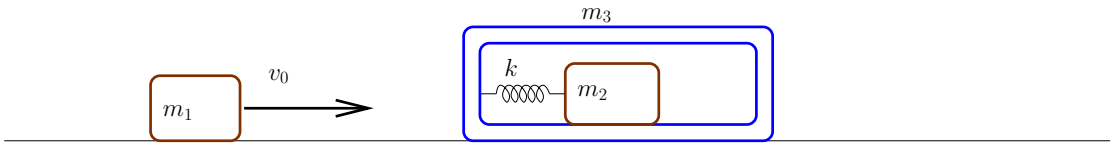
Le due accelerazioni $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ saranno uguali quando

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)\,\frac{m_3}{m_2} g\,.$$

CC BY NC SA

5.30. Urto tra una massa e un sistema composto ⋆⋆

Nel sistema in figura la massa m_1 urta elasticamente il sistema composto dalle masse m_2 e m_3. Queste ultime sono collegate da una molla di costante elastica k. Trovare le velocità finali della massa m_1 e del centro di massa del sistema $m_2 + m_3$, nell'ipotesi che l'urto avvenga in un tempo molto breve.



Soluzione

Se l'urto avviene in un tempo molto preve possiamo trascurare lo spostamento della massa m_3, di conseguenza la molla non viene compressa e nessuna forza agisce sulla massa m_2. Abbiamo quindi un normale urto elastico tra la massa m_1 e la massa m_3, descritto dalla conservazione di energia e quantità di moto:

$$\begin{aligned} m_1 v_0 &= m_1 v_1 + m_3 v_3 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} v_0 - v_1 &= \frac{m_3}{m_1} v_3 \\ v_0 + v_1 &= v_3 \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_3} v_0 \\ v_1 &= \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} v_0 \,. \end{aligned}$$

Dopo l'urto la velocità del centro di massa del sistema $m_2 + m_3$ si conserva, e vale

$$v_{cm} = \frac{v_3 m_3}{m_2 + m_3} = \frac{2 m_1 m_3}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)} v_0 \,.$$

5.31. Urto anelastico con sistema composito ⋆⋆

Si faccia riferimento al sistema descritto nel problema 5.30. Se le masse m_1 e m_3 rimangono a contatto calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema e l'energia dissipata durante l'urto.

Soluzione

Possiamo utilizzare la conservazione della quantità di moto per scrivere

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_3) v_{1+3}$$

dato che la molla, come nel caso precedente, non interviene durante l'urto. Abbiamo quindi

$$v_{1+3} = \frac{m_1}{m_1 + m_3} v_0$$

e la variazione dell'energia sarà

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_3) v_{1+3}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)} v_0^2 \,. \end{aligned}$$

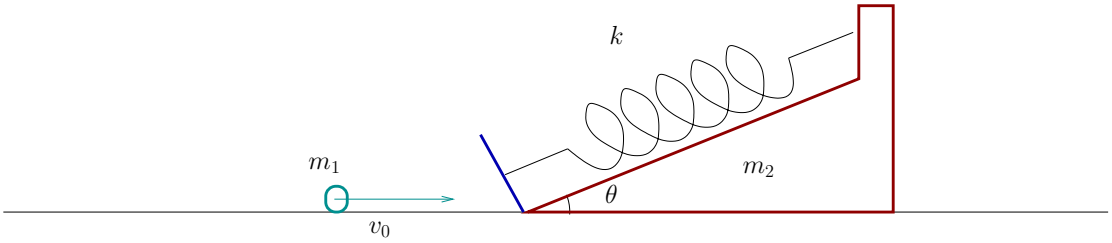
La velocità finale del centro di massa sarà

$$v_{cm} = \frac{(m_1 + m_3) v_{1+3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2 + m_3}$$

cioè la quantità di moto iniziale diviso la massa totale.

5.32. Massima compressione ⋆⋆

Nel sistema in figura la massa m_1 è lanciata inizialmente con velocità v_0. La molla di lunghezza a riposo uguale alla lunghezza del piano inclinato è libera di contrarsi, e il piano inclinato è libero di spostarsi sul piano orizzontale. Non vi sono attriti. Calcolare la massima contrazione della molla, e la massima velocità del piano inclinato.



Soluzione

Usiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale. Detta δ la contrazione della molla abbiamo

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + m_1 g\delta\sin\theta + \frac{1}{2}k\delta^2$$

e

$$m_1 v_0 = (m_1+m_2)V$$

dove è stato usato il fatto che nel momento di massima contrazione le masse m_1 e m_2 hanno la stessa velocità. Da questo segue

$$\delta^2 + 2\frac{m_1 g\sin\theta}{k}\delta - \frac{1}{k}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_0^2 = 0$$

e quindi ($\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ è la massa ridotta del sistema)

$$\delta = \frac{m_1 g\sin\theta}{k}\left(\sqrt{1+\frac{\mu k}{m_1^2 g^2\sin^2\theta}v_0^2} - 1\right)$$

dove è stata scelta la soluzione $\delta > 0$. Per valori molto grandi della velocità l'effetto della molla è dominante:

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\mu}{k}}v_0$$

mentre per valori piccoli è la gravità a limitare la contrazione:

$$\delta \simeq \frac{\mu}{2m_1 g\sin\theta}v_0^2\,.$$

Per ottenere le approssimazioni precedenti si è utilizzato $\sqrt{1+x} \simeq \sqrt{x}$ per $x \gg 1$ e $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ per $x \ll 1$. La massima velocità del piano inclinato si ha chiaramente quando la massa m_1 è separata da esso. In questo caso valgono le normali formule dell'urto elastico, che danno

$$v_1 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0\,.$$

5.33. Sbarra vincolata ⋆⋆

L'asta rappresentata in Figura 5.6, di massa m e lunghezza ℓ, ha un estremo vincolato a muoversi su una guida verticale e l'altro su una guida orizzontale. Inizialmente θ è molto piccolo. Determinare il punto della sbarra che raggiunge la massima velocità v_{max} nella caduta (da $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$), e calcolare v_{max}.

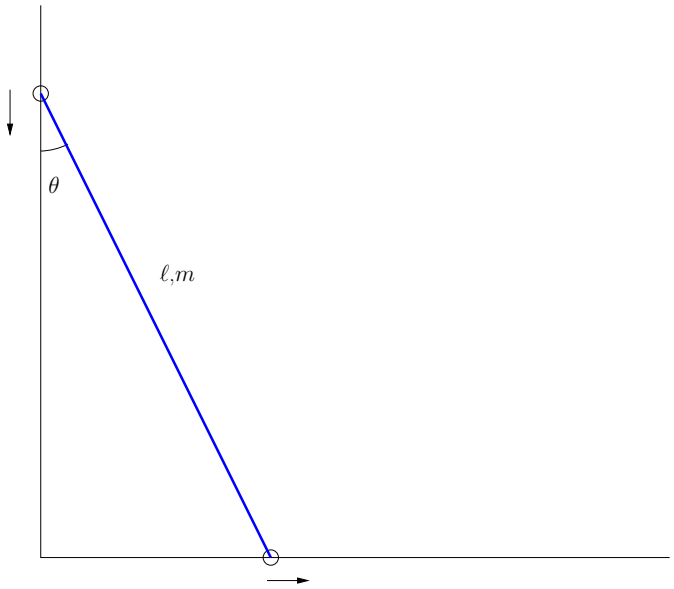


Figura 5.6.: La sbarra vincolata in una configurazione intermedia tra quella iniziale e quella finale.

Soluzione

Dato l'angolo θ possiamo scrivere la posizione di un tratto infinitesimo sulla sbarra posto a una distanza r fissata dal giunto verticale come

$$\vec{r} = \ell \cos\theta \hat{e}_y + r\hat{e}_r$$

dove $0 \leq r \leq \ell$. La velocità sarà data da

$$\vec{v} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_y + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

ed il suo modulo quadro

$$v^2 = \dot{\theta}^2\left[r^2 + \ell\left(\ell - 2r\right)\sin^2\theta\right] .$$

Notare che la coordinata r non è stata derivata. Possiamo ora scrivere l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2}\int v^2(r)\,dm = \frac{1}{2}\frac{m}{\ell}\int_0^\ell \left(r^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\ell r\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)dr$$

ossia

$$T = \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\theta}^2 \,.$$

Per l'energia potenziale abbiamo

$$U = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

che poteva ottenersi direttamente usando la posizione del centro di massa. Usando la conservazione dell'energia troviamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell}(1-\cos\theta)$$

Per un fissato valore di θ il punto più veloce dell'asta corrisponde al massimo di v^2 rispetto a r in $0 \le r \le \ell$, cioè $r = \ell$ se $\theta < \pi/4$ e $r = 0$ se $\theta > \pi/4$. La relativa velocità vale

$$\begin{aligned} v^2 &= \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta = 3g\ell(1-\cos\theta)\cos^2\theta \qquad \theta < \pi/4 \\ v^2 &= \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = 3g\ell(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta) \qquad \theta > \pi/4 \,. \end{aligned}$$

Il massimo assoluto di questa espressione si ha per $\theta = \pi/2$, quindi

$$\begin{aligned} r_{max} &= 0 \\ v^2_{max} &= 3g\ell \end{aligned}$$

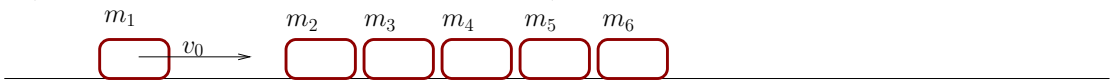
cioè il giunto fissato sulla guida verticale si muove più velocemente di ogni altro punto, e questo avviene quando la sbarra è verticale.

5.34. Urto multiplo ⋆⋆

Determinare le velocità finali delle masse nel sistema in figura, supponendo tutti gli urti istantanei e elastici, se

$$m_k = \gamma^k m$$

con $\gamma > 0$. Considerare in particolare il caso $\gamma = 1$.



Soluzione

In un urto elastico tra una massa m e una m' se la prima è inizialmente in moto con velocità v_0 e la seconda è ferma immediatamente dopo l'urto si ha

$$\begin{aligned} v &= \frac{m - m'}{m' + m} v_0 \\ v' &= \frac{2m}{m + m'} v_0 \,. \end{aligned}$$

Quindi, tenuto conto che nel nostro caso il rapporto tra una massa e quella precedente è γ si trova

$$\begin{aligned} v &= \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} v_0 \\ v' &= \frac{2}{1 + \gamma} v_0 \,. \end{aligned}$$

Supponiamo che ciascuna massa urti la successiva una sola volta. L'espressione generale per la velocità è

$$v_k = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \left(\frac{2}{1 + \gamma} \right)^{k-1} v_0$$

ad eccezione della massa più a destra, per la quale

$$v_k = \left(\frac{2}{1 + \gamma} \right)^{k-1} v_0 \,.$$

Le caso particolare $\gamma = 1$ tutte le masse sono ferme, salvo l'ultima che si muove con velocità v_0.

5.35. Moto su una guida parabolica ⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una guida della forma descritta dall'equazione

$$y = -\frac{x^2}{a}$$

dove $a > 0$ è un parametro assegnato della dimensione di una lunghezza. Se la particella si trova inizialmente in $x = 0$ con velocità positiva molto piccola, è possibile il distacco dalla guida?

Soluzione

Se scriviamo la reazione vincolare nella forma $R\hat{n}$, dove $\hat{n}$ è il versore normale al vincolo nel punto dato, la condizione di distacco è $R < 0$. L'equazione del moto nella direzione normale $\hat{n}$ si scrive

$$m\frac{v^2}{\rho} = -mg\cos\theta + R$$

dove ρ è il raggio di curvatura della parabola nel punto dato e θ la sua inclinazione rispetto alla verticale. Dall'equazione della guida segue che

$$dy = -\frac{2x}{a}dx$$

da cui

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}}}\,.$$

Per il raggio di curvatura abbiamo la formula

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{2}{a}\frac{1}{\left[1+\frac{4x^2}{a^2}\right]^{3/2}}$$

e quindi

$$R = \frac{mg}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}}} - \frac{2m}{a}\frac{v^2}{\left[1+\frac{4x^2}{a^2}\right]^{3/2}}\,.$$

Il modulo quadro della velocità si determina usando la conservazione dell'energia:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

da cui

$$v^2 = \frac{2g}{a}x^2$$

e sostituendo troviamo

$$R = \frac{mg}{\sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2}}}$$

che risulta essere sempre positivo.

5.36. Oscillatore forzato con attrito ⋆⋆⋆

Un oscillatore forzato è descritto dall'equazione

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = F(t)$$

dove λ parametrizza l'attrito viscoso presente e $F(t)$ é un'onda quadra di ampiezza F_0 e periodo T:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & kT < t \leq \left(k + \frac{1}{2}\right) T \\ -F_0 & \left(k + \frac{1}{2}\right) T < t \leq (k+1)T \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Trovare se possibile una soluzione $x(t)$ periodica in $-\infty < t < \infty$ e discuterne l'unicità.

Soluzione

Determiniamo la soluzione generale nel periodo dell'onda quadra corrispondente a $k = 0$. Tra $t = 0$ e $t = T/2$ l'equazione si riduce a

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = F_0$$

che ammette come soluzione generale

$$x_0(t) = A_0 e^{\alpha t} + A_0^* e^{\alpha^* t} + \frac{F_0}{k}$$

dove α, α^* sono le soluzioni complesse coniugate di

$$m\alpha^2 + 2\lambda\alpha + k = 0\,.$$

Analogamente tra $t = T/2$ e $t = T$ l'equazione diviene

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = -F_0$$

con soluzione che scriviamo nella forma

$$x_0'(t) = B_0 e^{\alpha(t-T/2)} + B_0^* e^{\alpha^*(t-T/2)} - \frac{F_0}{k}\,.$$

Dobbiamo imporre la continuità della soluzione e della sua derivata in $t = T/2$. Abbiamo un sistema lineare

$$\begin{aligned} A_0 e^{\alpha T/2} + A_0^* e^{\alpha^* T/2} + \frac{F_0}{k} &= B_0 + B_0^* - \frac{F_0}{k} \\ \alpha A_0 e^{\alpha T/2} + \alpha^* A_0^* e^{\alpha^* T/2} &= \alpha B_0 + \alpha^* B_0^* \end{aligned}$$

che ha per soluzione

$$B_0 = A_0 e^{\alpha T/2} + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha}\frac{F_0}{k}\,.$$

Se adesso scriviamo la soluzione tra $t = pT$ e $t = pT + T/2$ nella forma

$$x_p(t) = A_p e^{\alpha(t-pT)} + A_p^* e^{\alpha^*(t-pT)} + \frac{F_0}{k}$$

e imponiamo la continuità di soluzione e derivata in $t = T$ troviamo

$$A_1 = e^{\alpha T} A_0 + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right)$$

e ripetendo il ragionamento per $t = pT$

$$A_p = e^{\alpha T} A_{p-1} + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right) .$$

Possiamo risolvere questa relazione ricorsiva scrivendo

$$A_p = e^{\alpha p T} A_0 + \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right) \frac{1 - e^{\alpha p T}}{1 - e^{\alpha T}}$$

che risulta valida anche per $p < 0$. Se α ha una parte reale negativa, come accade in presenza di attrito, abbiamo evidentemente che per $p \to -\infty$ i coefficienti A_p divergono. Fa eccezione il caso in cui

$$A_0 = \frac{2\alpha^*}{\alpha^* - \alpha} \frac{F_0}{k} \left(e^{\alpha T/2} - 1 \right) \frac{1}{1 - e^{\alpha T}}$$

per il quale

$$A_p = A_0$$

e che corrisponde chiaramente a una soluzione periodica.

5.37. Caduta da un dirupo ⋆⋆

Una particella di massa m si muove su una superficie descritta dall'equazione

$$z = F(y)$$

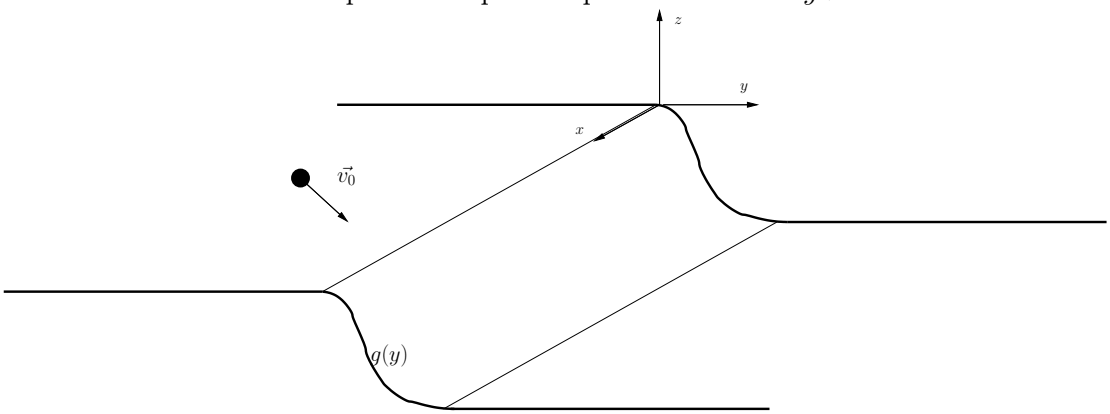
dove

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ g(y) & 0 \le y \le L \\ -h & y > L \end{cases}$$

e $g(y)$ è una funzione sufficientemente regolare e decrescente, con $g(0) = g'(0) = 0$, $g(L) = -h$, $g'(L) = 0$ che non è necessario specificare. Inizialmente la particella si trova in $y < 0$ e

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta\, \hat{x} + v_0 \sin\theta\, \hat{y}\,.$$

Determinare la velocità della particella quando questa si trova in $y > L$.



Soluzione

Le uniche forze esterne sono quella di gravità $-mg\hat{e}_z$ e la reazione vincolare, perpendicolare ovunque a $\hat{e}_x$ e al moto della particella. Si conserva quindi la quantità di moto lungo x e l'energia totale. Possiamo scrivere di conseguenza

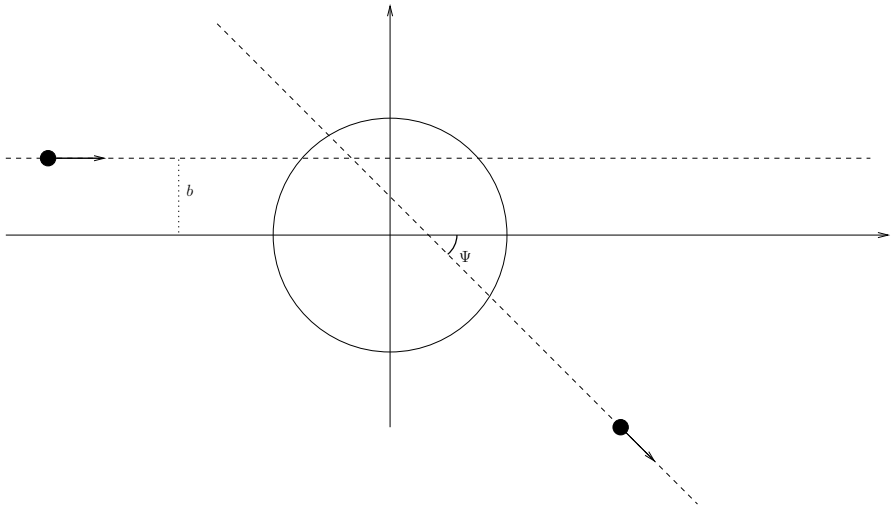
$$\begin{aligned} mv_0 \cos\theta &= mu_x \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(u_x^2 + u_y^2\right) - mgh \end{aligned}$$

dove u_x, u_y sono le componenti della velocità per $y > L$. Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} u_x &= v_0 \cos\theta \\ u_y &= \sqrt{v_0^2(1 - \cos^2\theta) + 2gh}\,. \end{aligned}$$

CC BY NC SA

5.38. Diffusione da una buca ⋆⋆



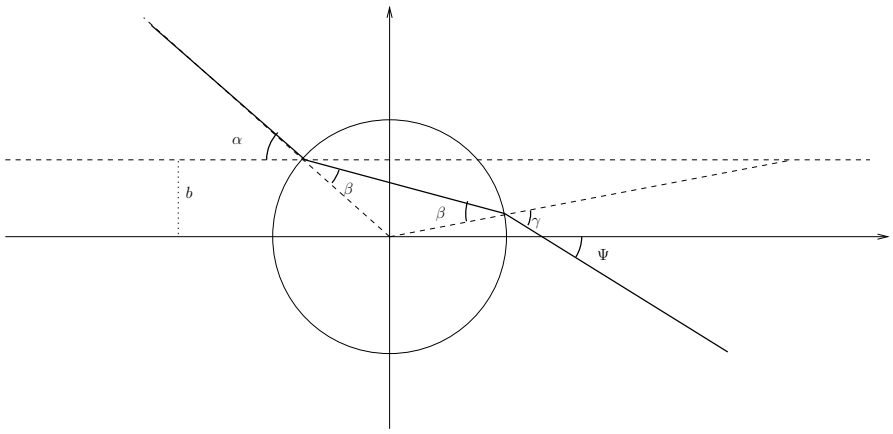
In un piano orizzontale è praticata una cavità circolare, di raggio R e profondità h. I bordi della cavità sono arrotondati, ed un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie risultante. Inizialmente il punto materiale si muove all'esterno della cavità, con velocità di modulo v_0 e parametro d'urto b, come in figura.

Determinare le quantità conservate, e l'angolo di diffusione Ψ all'uscita della buca, in funzione dei parametri specificati.

Soluzione

Le quantità conservate sono l'energia totale (cinetica più potenziale gravitazionale) e la componente verticale del momento angolare rispetto al centro della buca. Quest'ultima si conserva perchè le forze che agiscono sulla particella sono normali al piano (forza di gravità sempre, e reazione vincolare quando la particella non è sul bordo della buca) oppure radiali (reazione vincolare quando la particella si trova sul bordo). Nel primo caso il momento della forza non ha componente verticale, nel secondo caso è nullo.

All'interno e all'esterno della buca la particella si muoverà di moto rettilineo uniforme. Resta da determinare come i diversi pezzi di traiettoria si raccordano tra di loro.



Facendo riferimento alla figura, è anzitutto chiaro che $\alpha = \gamma$. Questo perchè, come vedremo tra breve, le due leggi di conservazione precedentemente citate sono sufficienti a determinare univocamente β in funzione di α. Inoltre

1. Data una soluzione $\vec{r}(t)$ che soddisfa alle equazioni del moto, anche la soluzione invertita nel tempo $\vec{r}(-t)$ le soddisfa (le forze dipendono solo dalla posizione)

2. Invertendo nel tempo una soluzione l'entrata nella buca diventa una uscita da essa. Quindi la legge che lega α e β è la stessa che lega γ a β.

Eguagliamo adesso la conservazione dell'energia e del momento angolare, tra un istante nel quale la particella è fuori dalla buca e uno in cui si trova al suo interno. Abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \tag{5.38.1}$$

e

$$-mv_0 b = -mvR\sin\beta \tag{5.38.2}$$

Dall'equazione (5.38.2) segue

$$v = \frac{v_0 b}{R\sin\beta} \tag{5.38.3}$$

Ricavando v^2 dalla conservazione dell'energia e sostituendo abbiamo quindi quindi (tenendo conto che $b/R = \sin\alpha$)

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = 1 + \frac{2gh}{v_0^2} \tag{5.38.4}$$

Inoltre abbiamo $\Psi = 2(\alpha - \beta)$. Da notare che si sarebbe potuto utilizzare anche la conservazione della componente tangenziale al bordo della buca della quantità di moto, ottenendo la relazione

$$mv_0 \sin\alpha = mv\sin\beta \tag{5.38.5}$$

equivalente alla (5.38.2).

5.39. Molla e attrito ⋆

Due masse m_1 e m_2 su un piano orizzontale sono collegate tra loro da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k.

Determinare la massima distanza a cui le masse possono rimanere in equilibrio in presenza di un attrito statico con coefficiente μ_s.

Soluzione

Le forze che agiscono sulla massa m_1 e m_2 quando la molla è lunga ℓ sono

$$\begin{aligned} F_1 &= -k\ell + F_{A,1} \\ F_2 &= k\ell + F_{A,2} \end{aligned}$$

dove

$$|F_{A,i}| \leq \mu_s m_i g \,.$$

Devono essere quindi soddisfatte le due condizioni

$$\begin{aligned} \mu_s m_1 g &\geq k\ell \\ \mu_s m_2 g &\geq k\ell \end{aligned}$$

e quindi

$$\ell_{max} = \frac{\mu_s g}{k} \min\left(m_1, m_2\right) \,.$$

CC BY NC SA

5.40. Carrucola con attrito ⋆⋆⋆

Tra un filo e la carrucola rappresentata in Figura 5.7 (da considerare immobile) si ha un attrito descritto da coefficienti μ_s, μ_d. Ai due estremi del filo sono appese delle masse m_1 e m_2. Per quali valori di m_1, m_2 il sistema è in equilibrio? In tale condizione, quanto vale la tensione del filo in funzione dell'angolo θ?

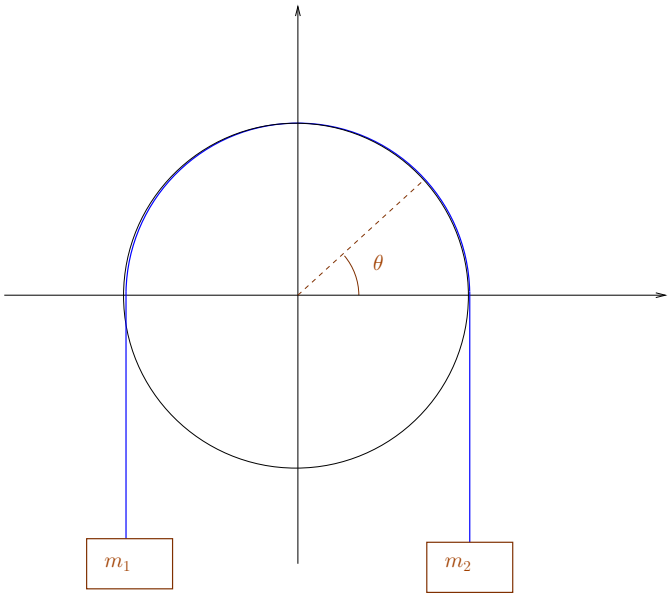


Figura 5.7.: La carrucola considerata nel problema.

Soluzione

Consideriamo le forze che agiscono su un tratto infinitesimo del filo (Figura 5.8). Abbiamo all'equilibrio

$$0 = -T(\theta + d\theta)\hat{\tau}(\theta + d\theta) + T(\theta)\hat{\tau}(\theta) + dN(\theta)\hat{n}(\theta) + dF_A(\theta)\hat{\tau}(\theta) \tag{5.40.1}$$

dove $T(\theta)$ è la tensione del filo, $dN(\theta)$ la reazione vincolare normale e $dF_A(\theta)$ la forza di attrito, con

$$|dF_A(\theta)| \leq \mu_s dN(\theta)\,. \tag{5.40.2}$$

Sviluppando possiamo scrivere

$$\frac{d}{d\theta}\left(T(\theta)\hat{\tau}(\theta)\right) = \frac{dN(\theta)}{d\theta}\hat{n}(\theta) + \frac{dF_A(\theta)}{d\theta}\hat{\tau}(\theta)\,.$$

Espandendo la derivata otteniamo

$$\frac{dT}{d\theta}\hat{\tau} + T\frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = \frac{dN}{d\theta}\hat{n} + \frac{dF_A}{d\theta}\hat{\tau}\,.$$

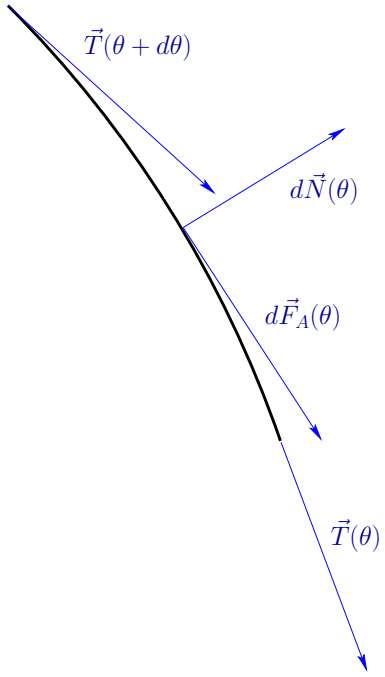


Figura 5.8.: Le forze che agiscono su un tratto del filo compreso tra θ e $\theta + d\theta$.

Proiettando nelle direzioni tangenti e normali abbiamo le due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\theta} &= \frac{dF_A}{d\theta} \\ T &= -\frac{dN}{d\theta} \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = -\hat{n}\,.$$

Usando il valore massimo e minimo della forza di attrito possiamo scrivere

$$-\mu_s|T| \leq \frac{dT}{d\theta} \leq \mu_s|T|\,. \tag{5.40.3}$$

Integrando abbiamo

$$T(0)e^{-\mu_s\theta} \leq T(\theta) \leq T(0)e^{\mu_s\theta}$$

ossia, dato che $T(0) = m_2 g$ e $T(\pi) = m_1 g$,

$$e^{-\mu_s\pi} \leq \frac{m_1}{m_2} \leq e^{\mu_s\pi}\,.$$

Per un valore arbitrario del rapporto delle masse che soddisfa la condizione precedente la tensione $T(\theta)$ non è univocamente determinata. Esistono molti modi infatti di soddisfare

CC BY NC SA

la (5.40.3) con le corrette condizioni al contorno. Nei casi estremi

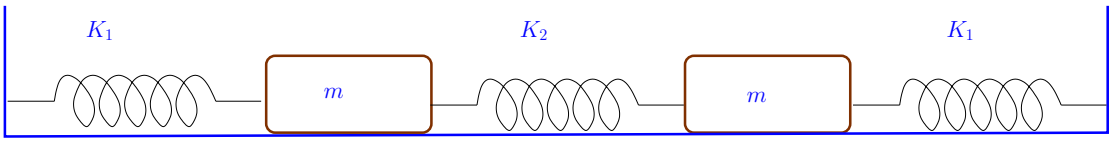
$$\frac{m_1}{m_2} = e^{\pm\mu_s\pi}$$

la soluzione è invece unica:

$$T(\theta) = m_2 g e^{\pm\mu_s\theta} \,.$$

5.41. Oscillatori accoppiati ⋆⋆⋆

Scrivere e risolvere le equazioni del moto per il sistema in figura, mostrando che è possibile scrivere il moto come somma di due modi di oscillazione indipendenti. Descrivere ciascuno di essi. La lunghezza a riposo delle molle è nulla.



Soluzione

Le equazioni del moto sono della forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 + K_2(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= K_2(x_1 - x_2) - K_1 x_2 \,. \end{aligned}$$

Conviene introdurre la notazione

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

in modo da poter riscrivere le equazioni del moto nella forma

$$m\ddot{\underline{u}} + K\underline{u} = 0$$

dove

$$K = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1 + K_2 \end{pmatrix} .$$

In analogia con il metodo usato per trattare equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti cercheremo soluzioni della forma

$$\underline{u}(t) = \underline{A} e^{\alpha t}$$

dove $\underline{A}$ è un vettore costante. Sostituendo nelle equazioni del moto abbiamo

$$\left(\alpha^2 I + \frac{1}{m} K\right) \underline{A} = 0 \,. \tag{5.41.1}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo che avrà soluzioni non banali quando ($\omega_i^2 = K_i/m$)

$$\det\left(\alpha^2 I + \frac{1}{m} K\right) = \begin{vmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2\right)^2 = \omega_2^4 \,.$$

CC BY NC SA

Questo accadrà quando

$$\alpha_1^2 = -\omega_1^2$$

oppure

$$\alpha_2^2 = -\omega_1^2 - 2\omega_2^2 \,.$$

Nel primo caso il sistema (5.41.1) diviene

$$\begin{pmatrix} \omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \underline{A}_1 = 0$$

corrispondente alla soluzione

$$\underline{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) \ .$$

In questo caso le due masse oscillano in sincrono, e la molla centrale non influenza il moto. Questo spiega la frequenza di oscillazione. Nel secondo caso abbiamo

$$\begin{pmatrix} -\omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \underline{A}_2 = 0$$

da cui

$$\underline{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(a_2 \cos \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}\, t + b_2 \sin \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}\, t \right) \ .$$

In questo caso le due masse oscillano in opposizione di fase. La soluzione generale sarà una sovrapposizione arbitraria di $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$.

5.42. Oscillatore ⋆⋆

Nel sistema in Figura 5.9 l'asta AC, $\overline{AC} = \ell$, è libera di ruotare attorno al perno posto in A, ed è di massa trascurabile. La molla ha costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre $\overline{AD} = \overline{AB} = \frac{1}{3}\ell$.

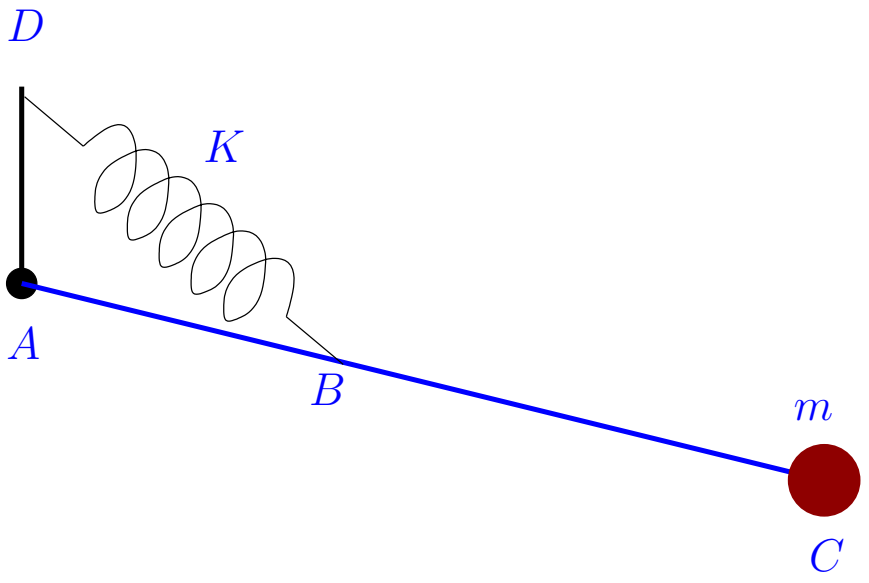


Figura 5.9.: L'oscillatore considerato nel problema.

Trovare la posizione di equilibrio e la frequenza della piccole oscillazioni attorno ad essa.

Soluzione

Introducendo come coordinata l'angolo θ dell'asta rispetto all'orizzontale possiamo scrivere l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

e l'energia potenziale

$$U = mg\ell\sin\theta + \frac{K}{2}\left[\frac{2}{9}\ell^2\left(1 - \sin\theta\right)\right].$$

La posizione di equilibrio stabile corrisponde al minimo del potenziale, che è della forma

$$U = \left(mg\ell - \frac{K}{9}\ell^2\right)\sin\theta + \text{costante}$$

avremo quindi un minimo per $\theta = -\pi/2$ se $mg\ell > K\ell^2/9$ oppure per $\theta = \pi/2$ se $mg\ell < K\ell^2/9$. Se $mg\ell = K\ell^2/9$ allora $U = 0$.

Nel primo caso scriviamo $\theta = -\pi/2 + \varepsilon$ da cui

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varepsilon}^2 + \left(mg\ell - \frac{K}{9}\ell^2\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + \text{costante} \\ &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varepsilon}^2 + \left(mg\ell - \frac{K}{9}\ell^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + \text{costante} + O(\varepsilon^4)\,. \end{aligned}$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\ell - K\ell^2/9}{m\ell^2}}\,.$$

Nel secondo caso scriviamo $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ e analogamente troviamo l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K\ell^2/9 - mg\ell}{m\ell^2}}\,.$$

5.43. Molla con massa non trascurabile. Analisi approssimata. ⋆⋆⋆

Si vuole trattare approssimativamente l'effetto della massa non nulla μ di una molla sulla frequenza di oscillazione. Per fare questo si scrive l'energia del sistema supponendo che la molla si muova nello stesso modo in cui si muoverebbe se la sua massa fosse nulla.

Usando tale metodo si determini la frequenza di oscillazione del sistema in Figura 5.10, supponendo la molla di lunghezza a riposo nulla.

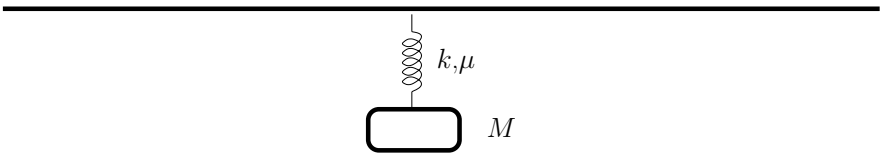


Figura 5.10.: L'oscillatore considerato nel problema, con una molla di massa non nulla μ.

Soluzione

Scriviamo l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}k\ell^2 + K_{\text{molla}}$$

dove K_{molla} è l'energia cinetica della molla, e ℓ la sua lunghezza. Parametrizziamo la posizione di un elemento della molla come

$$x = \ell u$$

con $0 \leq u \leq 1$ da cui

$$\dot{x} = \dot{\ell} u$$

e

$$dx = \ell du\,.$$

Possiamo farlo nell'approssimazione che la molla si dilati in maniera uniforme. Abbiamo allora

$$K_{\text{molla}} = \frac{1}{2}\int d\mu\, \dot{x}^2 = \frac{\mu}{2}\int_0^1 u^2\dot{\ell}^2 du = \frac{1}{2}\frac{\mu}{3}\dot{\ell}^2\,.$$

In conclusione l'energia del sistema si scrive nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{\mu}{3}\right)\dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}k\ell^2$$

che corrisponde ad un oscillatore di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M + \mu/3}}\,.$$

5.44. Oscillazione in una guida parabolica ⋆⋆

Si calcoli la frequenza di oscillazione di un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una guida descritta dall'equazione

$$y = \alpha x^2$$

con $\alpha > 0$, nella approssimazione di piccole oscillazioni attorno a $x = 0$.

Soluzione

Utilizzando come coordinata l'ascissa x del punto materiale scriviamo l'energia del sistema:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy$$

nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + 4\alpha^2 x^2\right)\dot{x}^2 + mg\alpha x^2 \,.$$

Sviluppando per piccoli valori di x, $\dot{x}$ otteniamo al secondo ordine

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\alpha x^2$$

che corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2g\alpha}\,.$$

CC BY NC SA

5.45. Oscillazioni di un manubrio ⋆⋆

Agli estremi di un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile sono fissate due masse m_1 e m_2 (vedere Figura 5.11). L'asta è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un perno posto su essa, a distanza $|x| \leq \ell$ dalla massa m_1. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile in funzione di x. È possibile interpretare le soluzioni ottenute per $|x| > \ell$?

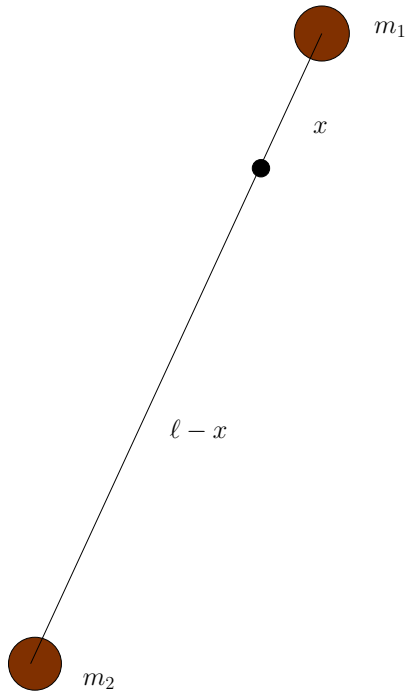


Figura 5.11.: Il manubrio considerato nel problema, libero di ruotare attorno al perno indicato dal piccolo cerchio scuro.

Soluzione

Usando come coordinata l'inclinazione θ del manubrio rispetto alla verticale possiamo scrivere l'energia del sistema come

$$E = \frac{1}{2}\left[m_1 x^2 + m_2(\ell - x)^2\right]\dot{\theta}^2 + \left[m_1 g x - m_2 g(\ell - x)\right]\cos\theta\,.$$

La posizione di equilibrio stabile corrisponde al minimo del potenziale, cioè

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \qquad \text{se} \qquad m_1 x - m_2(\ell - x) < 0 \\ \theta &= \pi \qquad \text{se} \qquad m_1 x - m_2(\ell - x) > 0 \end{aligned}$$

ossia a seconda se il perno sia sopra o sotto il centro di massa del sistema. Trattiamo il primo caso, il secondo è completamente analogo. Per piccoli valori di θ possiamo approssimare

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

da cui

$$E = \frac{1}{2}\left[m_1 x^2 + m_2(\ell - x)^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 g(\ell - x) - m_1 g x\right]\theta^2 + \text{costante}\,.$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2 g(\ell - x) - m_1 g x}{m_1 x^2 + m_2(\ell - x)^2}}\,.$$

Per $|x| > \ell$ possiamo pensare ad una estensione della sbarra esterna alle due masse, sulla quale è posto il perno. Per $x = -L$ con L molto grande abbiamo ad esempio

$$f \sim \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\,.$$

5.46. Moto libero in coordinate generali ⋆⋆

Un punto materiale è libero di muoversi nello spazio in assenza di forze. Si vuole descrivere il suo moto utilizzando 3 coordinate arbitrarie u_i, $i = 1, 2, 3$ funzioni delle coordinate cartesiane x_i e del tempo.

Scrivere le equazioni del moto per le coordinate u_i.

Soluzione

L'equazione del moto in coordinate cartesiane vale

$$m\ddot{x}_i = 0\,.$$

Immaginando queste come funzione delle coordinate generali u_i possiamo scrivere

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\dot{u}_j$$

e

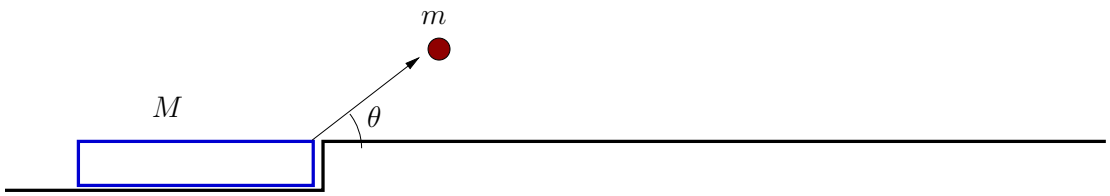
$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\ddot{u}_j + \sum_{j=1,2,3}\sum_{k=1,2,3} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j \partial u_k}\dot{u}_j\dot{u}_k$$

da cui le equazioni del moto cercate

$$m\left(\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\ddot{u}_j + \sum_{j=1,2,3}\sum_{k=1,2,3} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j \partial u_k}\dot{u}_j\dot{u}_k\right) = 0\,.$$

5.47. Lancio di un proiettile da una pedana mobile ⋆⋆

Nel sistema in figura il proiettile di massa m viene lanciato da una esplosione istantanea con un angolo θ rispetto alla orizzontale, nel sistema di riferimento solidale con la piattaforma. Detta W l'energia liberata dall'esplosione determinare per quale angolo la gittata è massima. La piattaforma di lancio ha massa M ed è libera di muoversi orizzontalmente.



Soluzione

Scriviamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale tra l'istante immediatamente precedente e successivo al lancio:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m\left[(v_0\cos\theta+V)^2+v_0^2\sin^2\theta\right]+\frac{1}{2}MV^2 \\ 0 &= MV+m\,(v_0\cos\theta+V) \end{aligned}$$

dove v_0 è il modulo della velocità del proiettile nel sistema solidale con la piattaforma. Risolvendo abbiamo

$$V=-\frac{mv_0\cos\theta}{M+m}$$

e

$$W=\frac{1}{2}m\left[\left(v_0\cos\theta-\frac{mv_0\cos\theta}{M+m}\right)^2+v_0^2\sin^2\theta\right]+\frac{1}{2}M\frac{m^2}{(M+m)^2}v_0^2\cos^2\theta$$

da cui

$$v_0^2=\frac{4(m+M)W}{m(m+2M+m\cos 2\theta)}\,.$$

Le componenti della velocità del proiettile nel sistema di laboratorio sono

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{M}{M+m}v_0\cos\theta \\ v_y &= v_0\sin\theta \end{aligned}$$

corrispondenti ad una gittata di

$$\ell=\frac{2v_xv_y}{g}=2\frac{M}{M+m}\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta=\frac{4MW\sin 2\theta}{mg(m+2M+m\cos 2\theta)}$$

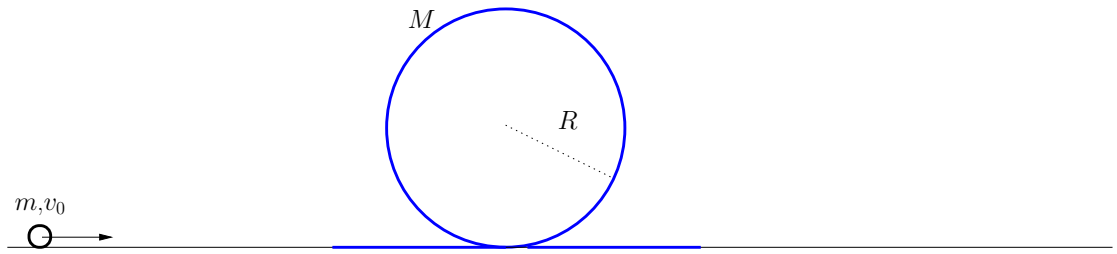
che ha un massimo quando

$$\cos 2\theta=-\frac{m}{m+2M}\,.$$

Questo corrisponde ad un angolo $\theta>\pi/4$. Per $M\gg m$ si ritrova il caso classico $\theta=\pi/4$.

5.48. Giro della morte su guida mobile ⋆⋆

La guida circolare di raggio R e massa M evidenziata in figura può muoversi liberamente in direzione orizzontale. Determinare per quale velocità v_0 il punto materiale di massa m riesce a percorrerla completamente. Di quanto si è spostata la guida dopo che questo è avvenuto?



Soluzione

Due quantità conservate in questo problema sono la quantità di moto orizzontale di tutto il sistema (non ci sono forze esterne orizzontali) e l'energia totale (non ci sono forze non conservative). Utilizzando come coordinate l'angolo θ che descrive la posizione della particella sulla guida e la coordinata X del centro di questa abbiamo

$$\begin{aligned} x &= X + R\sin\theta \\ y &= R(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= R\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} mv_0 &= M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(R\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgR(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Utilizzando la prima relazione possiamo eliminare $\dot{X}$ dalla seconda, ottenendo:

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m}\left(v_0 - R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + mgR(1-\cos\theta)\,.$$

Siamo adesso in grado di conoscere $\dot{\theta}$, $\dot{X}$ in funzione di θ. Se il vincolo della guida è bilatero per poter percorrere il giro della morte è sufficiente che $\dot{\theta} > 0$ per $\theta = \pi$. Abbiamo in generale

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mu v_0^2 - 2mgR(1-\cos\theta)}{R^2(\mu\cos^2\theta + m\sin^2\theta)}$$

e quindi deve essere

$$v_0 > \sqrt{\frac{4mgR}{\mu}}\,.$$

Se il vincolo è monolatero è invece necessario che la reazione vincolare della guida sia sempre rivolta verso il suo centro. Possiamo discutere il problema nel sistema solidale alla guida: l'equazione del moto in direzione ortogonale alla guida si scrive

$$-mR\dot{\theta}^2 = N + mg\cos\theta - m\ddot{X}\sin\theta$$

dove abbiamo tenuto conto della opportuna proiezione della forza apparente. Possiamo scrivere N in funzione di θ utilizzando le relazioni precedenti, notando che

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m}\left(v_0 - R\cos\theta\sqrt{\frac{\mu v_0^2 - 2mgR(1-\cos\theta)}{R^2(\mu\cos^2\theta + m\sin^2\theta)}}\right)\,.$$

Derivando ancora una volta, e sostituendo nuovamente $\dot{\theta}$ otteniamo infine tutto ciò che serve per porre $N(\theta) < 0$. Per quanto riguarda lo spostamento della guida, possiamo integrare $\dot{X}$:

$$L = \int \dot{X}dt = \int_0^{2\pi} \frac{m}{M+m}\left(v_0 - R\dot{\theta}\cos\theta\right)\frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

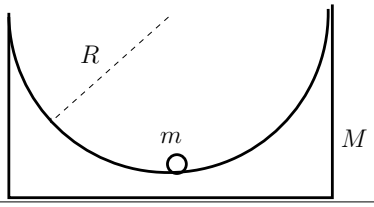
ossia

$$L = \frac{mv_0}{M+m}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{R^2(\mu\cos^2\theta + m\sin^2\theta)}{\mu v_0^2 - 2mgR(1-\cos\theta)}}\,d\theta\,.$$

CC BY NC SA

5.49. Sistema oscillante ⋆⋆

La guida in figura ha la forma di una semicirconferenza di raggio R, ha massa M ed è libera di muoversi orizzontalmente. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi al suo interno. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla sua configurazione di equilibrio stabile.



Soluzione

Usiamo come coordinate l'angolo θ che identifica la posizione della massa e la coordinata orizzontale X della guida. L'energia totale è conservata:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + mgR(1-\cos\theta)$$

e nel sistema di riferimento solidale con la posizione orizzontale del centro di massa la quantità di moto lungo x è nulla:

$$M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0\,.$$

Utilizziamo questa ultima relazione per eliminare $\dot{X}$:

$$E = \frac{1}{2}\frac{Mm^2}{(M+m)^2}R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + mgR(1-\cos\theta)\,.$$

Per piccoli valori di θ, $\dot{\theta}$ abbiamo $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ e $\sin\theta \simeq \theta$ quindi al secondo ordine

$$E = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + mgR\frac{\theta^2}{2}\,.$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m+M)g}{MR}}\,.$$

CC BY NC SA

5.50. Pendolo in regime di alta energia ⋆⋆⋆

Un pendolo di lunghezza ℓ viene lanciato dalla sua posizione di equilibrio con velocità iniziale v_0. Stimare il periodo del pendolo quando v_0 è molto grande, precisando cosa questo significhi. Mostrare che in prima approssimazione il periodo non dipende da g, e calcolare la prima correzione a questo risultato.

Soluzione

L'energia del pendolo si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

da cui

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1-\cos\theta)}\,.$$

Possiamo scrivere anche

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1-\cos\theta)}}\frac{d\theta}{dt} = 1$$

e integrando su un periodo membro a membro

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1-\cos\theta)}}\frac{d\theta}{dt}dt = T\,.$$

Introducendo come variabile di integrazione $u = \theta(t)$ abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1-\cos u)}} = T$$

dove si è tenuto conto del fatto che un periodo corrisponde a un giro completo. Ci serve il limite per grandi velocità dell'integrale precedente. Dato che $E = mv_0^2/2$ abbiamo

$$T = \frac{\ell}{v_0}\int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{2g\ell}{v_0^2}(1-\cos u)}} \simeq \frac{\ell}{v_0}\int_0^{2\pi}\left[1 + \frac{g\ell}{v_0^2}(1-\cos u)\right]du$$

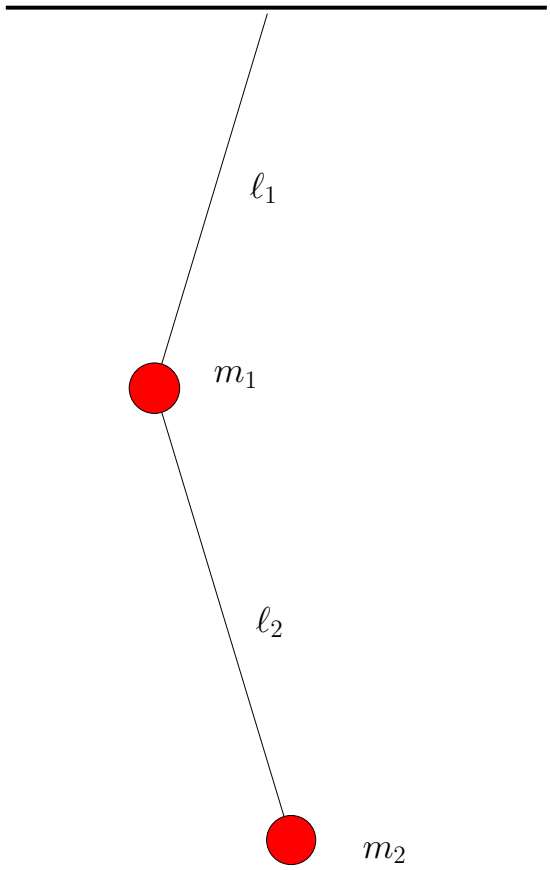
dove abbiamo utilizzato lo sviluppo $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$, valido per $\varepsilon \ll 1$. Integrando otteniamo

$$T \simeq \frac{2\pi\ell}{v_0}\left(1 + \frac{g\ell}{v_0^2}\right)\,.$$

CC BY NC SA

5.51. Pendolo doppio ⋆⋆⋆

Scrivere le equazioni del moto del pendolo doppio rappresentato in figura. Studiare le piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Soluzione

Introduciamo i due versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ allineati con la direzione dei due fili. La posizione delle due masse si scriverà allora

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \ell_1 \hat{n}_1 \\ \vec{r}_2 &= \ell_1 \hat{n}_1 + \ell_2 \hat{n}_2 \end{aligned}$$

dove, esplicitamente,

$$\hat{n}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{n}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta_2 \\ -\cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo le velocità

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \ell_1 \dot{\theta}_1 \hat{\tau}_1 \\ \vec{v}_2 &= \ell_1 \dot{\theta}_1 \hat{\tau}_1 + \ell_2 \dot{\theta}_2 \hat{\tau}_2 \end{aligned}$$

e le accelerazioni

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \ell_1\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \ell_1\dot{\theta}_1^2\hat{n}_1\\ \vec{a}_2 &= \ell_1\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \ell_1\dot{\theta}_1^2\hat{n}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2\hat{\tau}_2 - \ell_2\dot{\theta}_2^2\hat{n}_2\end{aligned}$$

con

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix}.$$

Possiamo scrivere adesso le equazioni del moto. Per la prima massa abbiamo

$$m_1\ell_1\left(\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \dot{\theta}_1^2\hat{n}_1\right) = -T_1\hat{n}_1 + T_2\hat{n}_2 - m_1g\hat{y} \tag{5.51.1}$$

e per la seconda

$$m_2\left[\ell_1\left(\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \dot{\theta}_1^2\hat{n}_1\right) + \ell_2\left(\ddot{\theta}_2\hat{\tau}_2 - \dot{\theta}_2^2\hat{n}_2\right)\right] = -T_2\hat{n}_2 - m_2g\hat{y}\,. \tag{5.51.2}$$

Le (5.51.3) e (5.51.4) sono 4 equazioni differenziali nelle incognite θ_1, θ_2, T_1 e T_2.

Per piccole oscillazioni sviluppiamo le equazioni al primo ordine nelle variabili θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$. Questo significa che possiamo porre

$$\hat{n}_1 \simeq \begin{pmatrix}\theta_1\\ -1\end{pmatrix} = -\hat{y} + \theta_1\hat{x}, \qquad \hat{n}_2 \simeq \begin{pmatrix}\theta_2\\ -1\end{pmatrix} = -\hat{y} + \theta_2\hat{x}\,,$$

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix}1\\ \theta_1\end{pmatrix} = \hat{x} + \theta_1\hat{y}, \qquad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix}1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \hat{x} + \theta_2\hat{y}\,.$$

e a meno di termini di ordine superiore le equazioni divengono

$$m_1\ell_1\ddot{\theta}_1\hat{x} = -T_1(-\hat{y} + \theta_1\hat{x}) + T_2(-\hat{y} + \theta_2\hat{x}) - m_1g\hat{y} \tag{5.51.3}$$

$$m_2\left(\ell_1\ddot{\theta}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2\right)\hat{x} = -T_2(-\hat{y} + \theta_2\hat{x}) - m_2g\hat{y}\,. \tag{5.51.4}$$

In direzione verticale questo significa

$$T_1 = (m_1 + m_2)g$$

$$T_2 = m_2g$$

cioè le tensioni non dipendono dall'angolo. In direzione orizzontale si trova

$$\begin{aligned}m_1\ell_1\ddot{\theta}_1 &= -T_1\theta_1 + T_2\theta_2\\ m_2\left(\ell_1\ddot{\theta}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2\right) &= -T_2\theta_2\end{aligned}$$

che si potevano ottenere sin dall'inizio notando che per piccole oscillazioni

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell_1\theta_1\\ x_2 &= \ell_1\theta_1 + \ell_2\theta_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= -T_1\theta_1 + T_2\theta_2 \\ F_{2,x} &= -T_2\theta_2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\ell_1\ddot{\theta}_1 = -(1+m_2/m_1)g\theta_1 + m_2/m_1 g\theta_2$$
$$\ell_1\ddot{\theta}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2\,.$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda abbiamo infine

$$\ddot{\theta}_1 + (1+\frac{m_2}{m_1})\frac{g}{\ell_1}\theta_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1}\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 - (1+\frac{m_2}{m_1})\frac{g}{\ell_2}\theta_1 + \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{\ell_2}\theta_2 = 0\,.$$

Cerchiamo delle soluzioni del tipo

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{i\Omega t}\,.$$

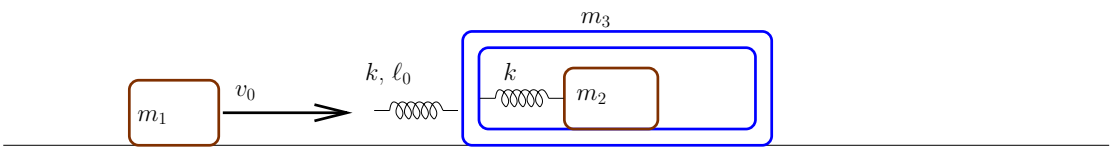
Sostituendo otteniamo ($\gamma = m_2/m_1$, $\omega_i^2 = g/\ell_i$)

$$\begin{pmatrix} (1+\gamma)\omega_1^2 - \Omega^2 & -\gamma\omega_1^2 \\ -(1+\gamma)\omega_2^2 & (1+\gamma)\,\omega_2^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che avrà soluzioni non banali solo quando il determinante della prima matrice è nullo, cioè per particolari valori di Ω legati alle frequenze dei modi di oscillazione.

5.52. Urto non istantaneo tra una massa e un sistema composto ⋆⋆⋆

Nel sistema in figura la velocità iniziale v_0 è tale da evitare il contatto tra le masse m_1 e m_3. La molla esterna ha lunghezza a riposo ℓ_0 ed è fissata alla sola massa m_3. Inoltre $m_1 = m_2 = \frac{3}{2}m_3 = m$.



Calcolare la velocità del centro di massa del sistema m_2+m_3 dopo l'urto, e confrontarla con il caso di urto elastico istantaneo.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto delle tre masse valide durante il contatto tra la molla e la massa m_1. Indicando con x_1, x_2 e x_3 le coordinate delle tre masse abbiamo

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_3 - x_1 - \ell_0)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2)$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_1 - \ell_0) - k(x_3 - x_2)\,.$$

Introducendo il vettore $\underline{q}^T = (x_1 + \ell_0, x_2, x_3)$ queste possono essere scritte nella forma

$$M\ddot{\underline{q}} + K\underline{q} = 0$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m \end{pmatrix}$$

e

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}\,.$$

Determiniamo i modi normali di vibrazione, trovando le soluzioni di

$$\left(K - \Omega^2 M\right)\underline{q} = 0\,.$$

Il determinante della matrice vale

$$\begin{vmatrix} k - \Omega^2 m & 0 & -k \\ 0 & k - \Omega^2 m & -k \\ -k & -k & 2k - \frac{2}{3}\Omega^2 m \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\Omega^6 m^3 + \frac{10}{3}\Omega^4 k m^2 - \frac{8}{3}\Omega^2 k^2 m$$

e vale zero per

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \Omega_0^2 = 0\\ \Omega^2 &= \Omega_1^2 = \frac{k}{m}\\ \Omega^2 &= \Omega_2^2 = 4\frac{k}{m}\,.\end{aligned}$$

Le corrispondenti soluzioni possono scriversi a meno di una costante moltiplicativa nella forma

$$\begin{aligned}\underline{q}_0^T &= \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}\\ \underline{q}_1^T &= \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \end{pmatrix}\\ \underline{q}_2^T &= \begin{pmatrix} -1/3, & -1/3, & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La soluzione generale delle equazioni del moto è quindi

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0\,(a_0 + b_0 t) + \underline{q}_1\,(a_1 \cos\Omega_1 t + b_1 \sin\Omega_1 t) + \underline{q}_2\,(a_2 \cos\Omega_2 t + b_2 \sin\Omega_2 t)$$

e le costanti arbitrarie si possono determinare tenendo conto che

$$\underline{q}^T(0) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \underline{q}_0 a_0 + \underline{q}_1 a_1 + \underline{q}_2 a_2$$

$$\dot{\underline{q}}^T(0) = \begin{pmatrix} v_0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \underline{q}_0 b_0 + \underline{q}_1 \Omega_1 b_1 + \underline{q}_2 \Omega_2 b_2\,.$$

Usando l'ortogonalità dei vettori $\underline{q}_i$ rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice M si trova facilmente

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

e

$$b_0 = \frac{3}{8} v_0, \qquad b_1 = -\frac{1}{2\Omega_1} v_0, \qquad b_2 = -\frac{3}{16\Omega_1} v_0$$

da cui

$$\begin{aligned}\underline{q}(t) &= \frac{3}{8}\underline{q}_0 v_0 t - \frac{1}{2}\underline{q}_1 \frac{v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t - \frac{3}{8}\underline{q}_2 \frac{v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_2 t\\ \dot{\underline{q}}(t) &= \frac{3}{8}\underline{q}_0 v_0 - \frac{1}{2}\underline{q}_1 v_0 \cos\Omega_1 t - \frac{3}{4}\underline{q}_2 v_0 \cos\Omega_2 t\,.\end{aligned}$$

Determiniamo a quale tempo t^* la massa m_1 si separa nuovamente. Questo corrisponde a $x_3 - x_1 = \ell_0$ ossia

$$x_3 - x_1 - \ell_0 = -\frac{1}{2}\frac{v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t^* - \frac{1}{4}\frac{v_0}{\Omega_1}\sin 2\Omega_1 t^* = 0$$

ossia

$$\cos\Omega_1 t^* = -1$$

La velocità del centro di massa del sistema $m_2 + m_3$ sarà data da

$$v_{23} = \frac{m_2 v_2(t^*) + m_3 v_3(t^*)}{m_2 + m_3} = \frac{3}{5} v_0\,.$$

CC BY NC SA

Se l'urto è istantaneo possiamo trascurare m_2 per calcolare le velocità immediatamente successive di m_1 e m_3. In particolare per quest'ultima si avrà

$$v_3 = \frac{2m_3}{m_1 + m_3} v_0 \tag{5.52.1}$$

e quindi

$$v_{23} = \frac{m_3 v_3}{m_2 + m_3} = \frac{8}{25} v_0 \tag{5.52.2}$$

CC BY NC SA

5.53. Molle multiple ⋆⋆

Una massa m si muove nello spazio ed è collegata ad un estremo di N molle di lunghezza a riposo nulla.

La costante elastica della molla j-sima è k_j, e l'altro estremo è fissato ad un punto $\vec{r}_j$, fisso nello spazio.

Mostrare che il sistema è equivalente ad una massa m collegata ad un'unica molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, fissata ad un punto $\vec{r}$. Calcolare k e $\vec{r}$.

Soluzione

L'energia potenziale totale del sistema è data dalla somma delle energie potenziali di ciascuna molla

$$U(\vec{r}) = \sum_i \frac{k_i}{2} |\vec{r} - \vec{r}_i|^2$$

e sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \sum_i \frac{k_i}{2} \vec{r} \cdot \vec{r} + \sum_i \frac{k_i}{2} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - \sum_i \frac{k_i}{2} 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{r} \cdot \vec{r} \sum_i k_i + \sum_i k_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - 2\vec{r} \cdot \sum_i k_i \vec{r}_i \right) \end{aligned}$$

e introducendo

$$k = \sum_i k_i$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_i k_i \vec{r}_i}{\sum k_i}$$

possiamo scrivere

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} \left(\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{R} + \vec{R} \cdot \vec{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_i k_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - \vec{R} \cdot \vec{R} \right) .$$

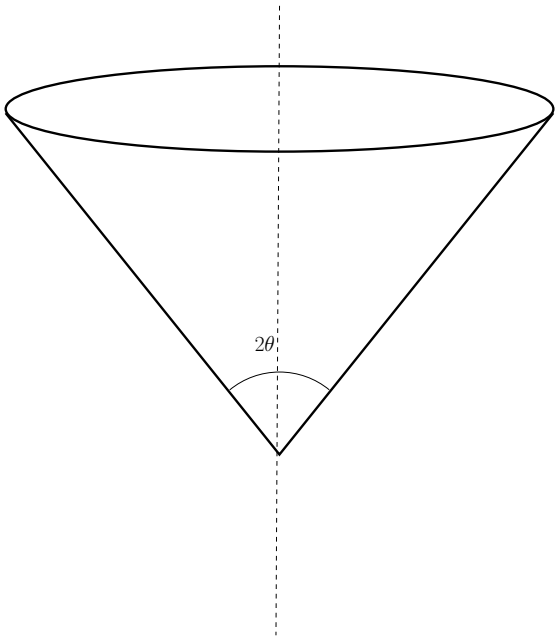
Il secondo membro è una costante irrilevante, il primo l'energia potenziale di una molla equivalente, di costante k e fissata in $\vec{R}$

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} \left| \vec{r} - \vec{R} \right|^2 .$$

CC BY NC SA

5.54. Orbite circolari su un cono ⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su un cono con asse verticale, angolo di apertura 2θ e vertice disposto verso il basso. Determinare in funzione del raggio la velocità delle possibili traiettorie circolari.



Soluzione

In un'orbita circolare l'accelerazione in direzione verticale è sicuramente nulla. Nel piano che contiene l'orbita non vi sono forze in direzione tangenziale (il vincolo è liscio) per cui il modulo della velocità è costante. Infine, le forze in direzione radiale devono essere uguali alla massa per l'accelerazione centripeta.

In formule:

$$\begin{aligned} 0 &= -mg + N\sin\theta \\ mR\dot{\omega} &= 0 \\ -mR\omega^2 &= -N\cos\theta \end{aligned}$$

dove N è la reazione vincolare. Da questo segue

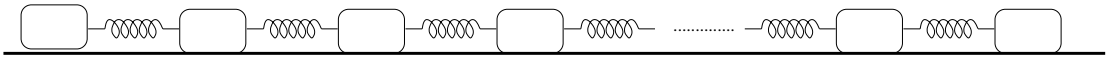
$$N = \frac{mg}{\sin\theta}$$

e quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{g\cos\theta}{R\sin\theta}}\,.$$

5.55. Catena di oscillatori ⋆⋆⋆

Si vuole modellare una molla di lunghezza ℓ, massa m e costante elastica K con una catena di N masse μ unite da $N-1$ molle di costante elastica χ, come in figura. Studiare le oscillazioni di questo sistema se le masse agli estremi sono bloccate.



Soluzione

Detta x_k la coordinata della k-sima massa riferita alla sua posizione di equilibrio abbiamo le equazioni del moto per le masse intermedie della forma

$$\mu\ddot{x}_k = \chi(x_{k-1} + x_{k+1} - 2x_k)$$

dove imponendo che la massa totale sia m abbiamo chiaramente $\mu N = m$, mentre per la costante elastica deve valere $K^{-1} = (N-1)\chi^{-1}$. Per le masse agli estremi abbiamo le equazioni modificate

$$x_1 = x_N = 0\,.$$

Utilizziamo direttamente le equazioni del moto cercando soluzioni del tipo

$$x_k(t) = u_\alpha(t)e^{i\alpha k}$$

e sostituendo nelle equazioni per le masse intermedie abbiamo

$$\mu e^{i\alpha k}\ddot{u}_\alpha + \chi\left(2 - e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right)e^{i\alpha k}u_\alpha = 0$$

ossia

$$\ddot{u}_\alpha + \frac{4\chi}{\mu}\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)u_\alpha = 0\,.$$

Questa è l'equazione di un oscillatore con

$$\omega_\alpha = 2\sqrt{\frac{\chi}{\mu}}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

e tutti i valori reali di α sono permessi. Dobbiamo però tenere ancora conto delle equazione per le masse agli estremi. Queste danno le condizioni

$$u_\alpha e^{i\alpha} = 0$$

$$u_\alpha e^{iN\alpha} = 0$$

che non possono però essere soddisfatte qualunque sia il valore di α. Possiamo però sovrapporre soluzioni corrispondenti a $\pm\alpha$, che oscillano nel tempo con la stessa frequenza. La nostra soluzione sarà quindi del tipo

$$x_k(t) = \left(Ae^{i\alpha k} + Be^{-i\alpha k}\right)u_\alpha(t)$$

CC BY NC SA

e le condizioni per gli estremi diventano

$$Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha} = 0$$

$$Ae^{i\alpha N} + Be^{-i\alpha N} = 0\,.$$

Questo sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali solo se

$$\sin\alpha(N-1) = 0$$

ossia quando

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{(N-1)}$$

con m intero. Si hanno N soluzioni indipendenti per $m = 0, \cdots, N-1$ che si scriveranno

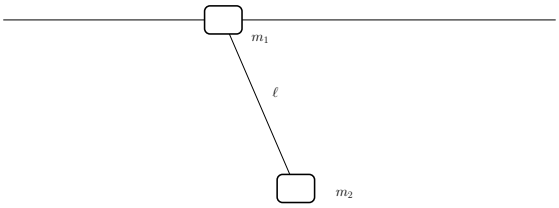
$$x_k^{(m)}(t) = u_{\alpha_m}(t)\left(e^{i\alpha_m(k-1)k} - e^{-i\alpha_m(k-1)}\right)$$

ossia

$$x_k^{(m)}(t) = A_m \sin\left[\alpha_m(k-1)\right] \cos\left(\omega_{\alpha_m} t + \varphi\right)\,.$$

5.56. Pendolo mobile ⋆⋆

Nel pendolo in figura la massa superiore è libera di muoversi orizzontalmente. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.



Soluzione

Possiamo usare come coordinate l'ascissa x della massa superiore e l'angolo di inclinazione del pendolo θ. L'energia cinetica si scrive

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]$$

ossia

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right] .$$

L'energia potenziale vale invece

$$U = -m_2 g\ell\cos\theta .$$

Si conserva inoltre la quantità di moto orizzontale, e nel sistema del centro di massa possiamo scrivere

$$m_1\dot{x} + m_2\left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0$$

da cui

$$\dot{x} = -\frac{m_2\ell\dot{\theta}\cos\theta}{m_1 + m_2} .$$

Il minimo del potenziale si ha per $\theta = 0$, e per piccole oscillazioni attorno a questa posizione di equilibrio stabile si ha

$$K \simeq \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\right]$$

$$U \simeq \frac{1}{2}m_2 g\ell\theta^2 + \text{costante}$$

$$\dot{x} \simeq -\frac{m_2\ell\dot{\theta}}{m_1 + m_2} .$$

Eliminando $\dot{x}$ tramite l'ultima relazione si trova

$$E \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right]\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 g\ell\theta^2$$

CC BY NC SA

riconoscibile come energia di un oscillatore di frequenza

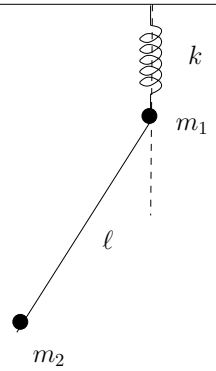
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{\mu}\frac{g}{\ell}}\,.$$

La frequenza risulta aumentata rispetto a un pendolo semplice da un fattore radice quadrata del rapporto tra m_2 e la massa ridotta del sistema:

$$\frac{m_2}{\mu} = 1 + \frac{m_2}{m_1}\,.$$

5.57. Pendolo sospeso ⋆⋆⋆

Nel sistema in figura la massa m_1 può muoversi solo verticalmente, ed è vincolata al soffitto tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Alla massa m_1 è inoltre fissato un pendolo di lunghezza ℓ e massa m_2, libero di oscillare.



Scrivere le equazioni del moto del sistema e studiare il suo comportamento per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

Studiamo il sistema in un riferimento non inerziale solidale con la massa m_1. Ci riduciamo in questo modo ad un pendolo semplice sottoposto alla forza apparente

$$\vec{F} = m_2 \ddot{y} \hat{y}$$

dove abbiamo indicato con y la posizione del punto di sospensione superiore della molla rispetto a m_1. Abbiamo allora per l'accelerazione tangenziale

$$m_2 \ell \ddot{\theta} = -m_2 (g - \ddot{y}) \sin\theta$$

e per quella radiale

$$m_2 \ell \dot{\theta}^2 = T - m_2 (g - \ddot{y}) \cos\theta \,.$$

La condizione di equilibrio per la massa m_1 è

$$0 = m_1 \ddot{y} + ky - T\cos\theta - m_1 g \,.$$

Per piccole oscillazioni attorno $\theta = 0$ queste si riducono a

$$m_2 \ell \ddot{\theta} = -m_2 g \theta$$

$$T = m_2 g - m_2 \ddot{y}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + ky = (m_1 + m_2) g \,.$$

La prima è l'equazione del moto di un pendolo di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

la seconda quella di un oscillatore con posizione di equilibrio

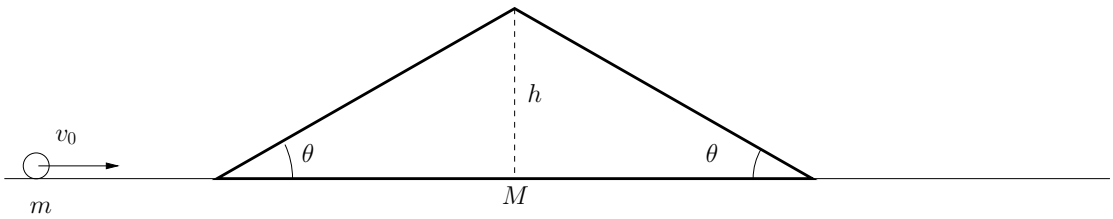
$$y_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

e frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}\,.$$

5.58. Superare una pedana ⋆

La pedana in figura, di massa M, è libera di muoversi orizzontalmente ed ha spigoli opportunamente arrotondati. La massa m ha inizialmente velocità v_0 ed è vincolata a muoversi sulla superficie orizzontale o sulla pedana. Calcolare per quale velocità iniziale la massa riesce a superare la pedana.



Soluzione

Possiamo utilizzare la conservazione della quantità di moto orizzontale del sistema e dell'energia. Nel caso limite la particella arriva nel punto più alto della pedana avendo la stessa velocità orizzontale V di quest'ultima, e velocità verticale nulla. Quindi deve essere

$$mv_0 = (m + M)V$$

e

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)V^2 + mgh\,.$$

Segue che

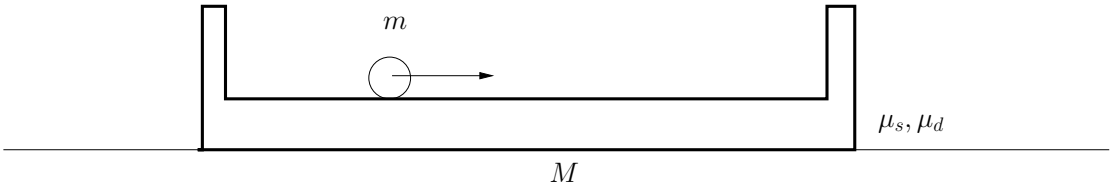
$$\frac{mM}{m + M}v_0^2 = 2mgh$$

ossia

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2mgh}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(m + M)gh}{M}}\,.$$

5.59. Urti e attrito ⋆⋆⋆

La pedana in figura di massa M è poggiata su un piano orizzontale con attrito, coefficienti μ_s e μ_d. La particella di massa $m < M$ si muove al suo interno, in assenza di attrito, con velocità iniziale v_0 rimbalzando elasticamente sulle pareti. Calcolare lo spostamento totale della pedana per $t \to \infty$. Si può considerare la separazione tra le due pareti grande a piacere. Cosa succede per $m > M$?



Soluzione

Studiamo il singolo urto. Dato che la separazione tra le due pareti è grande possiamo considerare la pedana ferma. Allora immediatamente dopo l'urto avremo le velocità

$$v = \frac{m-M}{m+M} v_0$$

e

$$V = \frac{2m}{m+M} v_0 \,.$$

L'energia cinetica della pedana sarà tutta dissipata in attrito, per cui questa percorrerà un tratto Δ determinato da

$$\frac{1}{2} M V^2 = \mu_d (m+M) g \Delta$$

cioè

$$\Delta = \frac{2Mm^2}{\mu_d g (m+M)^3} v_0^2 \,.$$

Tutto questo si ripeterà ad ogni urto, ogni volta con la velocità della particella ridotta di un fattore e lo spostamento cambiato di segno, cioè

$$v_n = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^n v_0$$

e

$$\Delta_n = (-1)^n \frac{2Mm^2}{\mu_d g (m+M)^3} v_n^2 = (-1)^n \frac{2Mm^2 v_0^2}{\mu_d g (m+M)^3} \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^{2n} .$$

Lo spostamento totale si trova sommando la serie geometrica

$$L = \frac{2Mm^2 v_0^2}{\mu_d g (m+M)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 \right]^n = \frac{2Mm^2 v_0^2}{\mu_d g (m+M)^3} \frac{1}{1 + \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2}$$

ossia

$$L = \frac{Mm}{(m+M)} \frac{m}{m^2+M^2} \frac{v_0^2}{\mu_d g} \,.$$

Se $m > M$ la massa non inverte il proprio moto dopo l'urto, e anche i successivi avverranno dalla stessa parte. Quindi tutta l'energia viene dissipata da spostamenti della pedana nello stesso verso, e quindi

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \mu_d (M+m) g L$$

da cui

$$L = \frac{m v_0^2}{2\mu_d (m+M) g} \,.$$

Questa espressione coincide con la precedente per $m = M$.

5.60. Campo di forze I ⋆

Un campo di forze nel piano è della forma

$$\begin{aligned} F_x &= Ax^m \\ F_y &= Ay^m \end{aligned}$$

con m e $A \neq 0$ costanti. Per quali valori di m e A si tratta di un campo centrale? Si tratta di un campo conservativo?

Soluzione

Il campo sarà centrale se della forma

$$\vec{F} = f(x, y)\vec{r}\,.$$

Dovrà quindi essere

$$Ax^{m-1} = Ay^{m-1}$$

e quindi $m = 1$.

Se la forza è conservativa deve essere possibile scriverla a partire di una funzione potenziale, deve cioè essere

$$\begin{aligned} F_x &= Ax^m = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= Ay^m = -\frac{\partial U}{\partial y}\,. \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione in x e la seconda in y otteniamo

$$U = -\frac{A}{m+1}x^{m+1} + f_1(y)$$

e

$$U = -\frac{A}{m+1}y^{m+1} + f_2(x)$$

che sono compatibili se

$$U = -\frac{A}{m+1}(y^{m+1} + x^{m+1}) + C$$

dove C è una costante arbitraria. Quindi la forza è conservativa $\forall m$.

CC BY NC SA

5.61. Campo di forze II ⋆

Sotto quali condizioni il campo di forze nel piano

$$F_x = ax + by \tag{5.61.1}$$
$$F_y = cx + dy \tag{5.61.2}$$

è conservativo? Calcolare in tali casi il potenziale. Sotto quali condizioni è un campo centrale?

Soluzione

Per essere conservativo deve valere

$$F_x = ax + by = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{5.61.3}$$
$$F_y = cx + dy = -\frac{\partial U}{\partial y}\,. \tag{5.61.4}$$

Integrando la prima equazione in x abbiamo

$$U = -\frac{a}{2}x^2 - bxy + g(y) \tag{5.61.5}$$

dove g è una funzione arbitraria. Derivando rispetto a y otteniamo

$$F_y = bx - g'(y) \tag{5.61.6}$$

che è consistente con la seconda equazione solo se

$$b = c \tag{5.61.7}$$
$$g'(y) = dy \tag{5.61.8}$$

e quindi il potenziale sarà della forma

$$U = -\frac{a}{2}x^2 - \frac{d}{2}y^2 - bxy\,. \tag{5.61.9}$$

Il campo sarà centrale se

$$\vec{F} = f(x,y)\vec{r} \tag{5.61.10}$$

e scrivendo

$$F_x = x\left(a + b\frac{y}{x}\right) \tag{5.61.11}$$
$$F_y = y\left(c\frac{x}{y} + d\right) \tag{5.61.12}$$

troviamo che deve essere

$$a + b\frac{y}{x} = c\frac{x}{y} + d \tag{5.61.13}$$

da cui $b = c = 0$ e $a = d$. Notare che il campo è conservativo, e il potenziale vale

$$U = -\frac{a}{2}\left(x^2 + y^2\right)\,. \tag{5.61.14}$$

CC BY NC SA

5.62. Campo di forze III ⋆⋆

Mostrare che un campo centrale nel piano della forma

$$\vec{F} = f(r,\theta)\vec{r} \tag{5.62.1}$$

è conservativo se e solo se la funzione f non dipende da θ.

Soluzione

Supponiamo

$$\vec{F} = f(r)\vec{r} \tag{5.62.2}$$

e mostriamo che il campo è conservativo. Dovrà essere

$$F_x = f(r)x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{5.62.3}$$

$$F_y = f(r)y = -\frac{\partial U}{\partial y}\,. \tag{5.62.4}$$

Questo è possibile prendendo

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} u f(u) du \tag{5.62.5}$$

come si verifica direttamente:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = r f(r)\frac{x}{r} \tag{5.62.6}$$

e similmente per y.

Mostriamo adesso che se f dipende da θ il campo non può essere conservativo. Se per assurdo lo fosse, il lavoro del campo di forze su un qualsiasi percorso chiuso dovrebbe essere nullo. Ma considerando il percorso in Figura 5.12 questo significherebbe che la quantità

$$L_{r_1\to r_2}(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)\, r\, dr \tag{5.62.7}$$

deve essere indipendente da θ, dato che

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{x} = L_{r_1\to r_2}(\theta_1) - L_{r_1\to r_2}(\theta_2)\,. \tag{5.62.8}$$

Questo significa che per r_1 e r_2 arbitrari deve essere

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial\theta}\, r\, dr = 0 \tag{5.62.9}$$

cioè

$$\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial\theta} = 0 \tag{5.62.10}$$

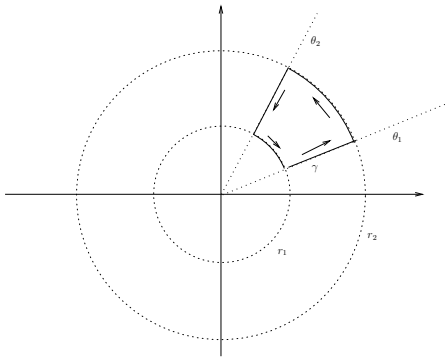
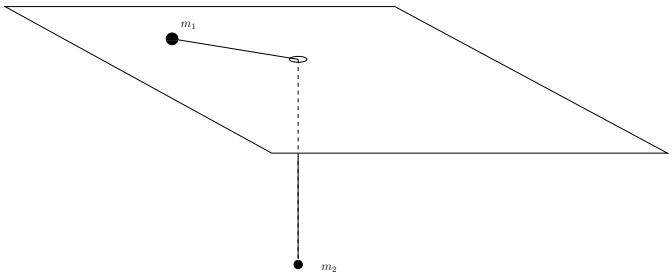


Figura 5.12.: Un possibile percorso chiuso sul quale calcolare il lavoro del campo di forze. Gli unici contributi non nulli sono sui tratti di percorso radiale, dato che sugli altri la forza è perpendicolare allo spostamento.

BY NC SA

5.63. Moto in un campo centrale I ⋆⋆

Una particella di massa $m_1$può muoversi liberamente su un piano orizzontale privo di attrito. Viene fissata tramite un filo inestensibile di lunghezza ℓ ad un'altra massa che può muoversi solo verticalmente come in figura. Il filo attraversa il piano tramite un piccolo foro senza attrito.



Classificare le possibili orbite del sistema.

Soluzione

Il sistema ha due quantità conservate, l'energia totale e il momento angolare della massa m_1 rispetto al foro. L'energia si conserva perchè le forze vincolari non fanno lavoro. Il momento angolare perchè il momento della forza applicata alla particella m_1 (la tensione del filo) rispetto al polo scelto è nulla.

Usando coordinate polari per descrivere la posizione della massa m_1 possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2 g r \tag{5.63.1}$$

e per la componente z del momento angolare della particella m_1 abbiamo

$$L_z = m_1 r^2\dot{\theta}\,. \tag{5.63.2}$$

Possiamo utilizzare quest'ultima legge di conservazione per eliminare $\dot{\theta}$ dall'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r \tag{5.63.3}$$

e il problema diviene equivalente al moto unidimensionale di una particella in un potenziale efficace

$$U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r \tag{5.63.4}$$

Dal relativo grafico (Figura 5.13) si conclude che se $L_z \neq 0$ non è possibile la caduta sul centro, ed inoltre tutte le orbite sono limitate. In particolare si avranno orbite circolari di raggio r_0 quando E coinciderà con il minimo del potenziale effettivo, cioè

$$\frac{L_z^2}{m_1 r^3} = m_2 g \tag{5.63.5}$$

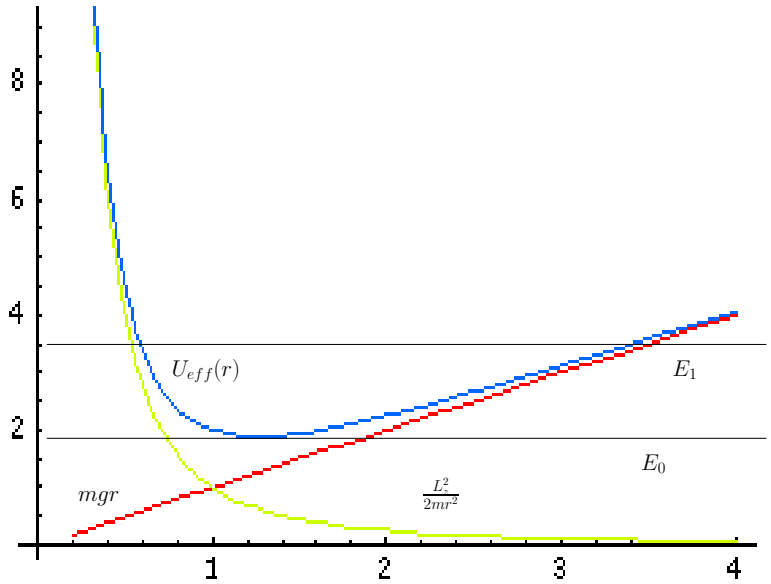


Figura 5.13.: Il potenziale effettivo (in azzurro) e i due termini che lo compongono: il potenziale gravitazionale originario (in rosso) e il potenziale centrifugo (in giallo).

ossia

$$m_1 r\dot{\theta}^2 = m_2 g \tag{5.63.6}$$

che è ovviamente la usuale relazione tra forza radiale e accelerazione centripeta.

5.64. Moto in un campo centrale II ⋆⋆

Determinare le orbite di una particella nel piano sottoposta a un potenziale armonico

$$U = \frac{k}{2} r^2 \tag{5.64.1}$$

usando coordinate polari.

Soluzione

Si conservano il momento angolare e l'energia totale. Queste quantità si scrivono nelle coordinate scelte nella forma

$$L = mr^2\dot{\theta} \tag{5.64.2}$$

e

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kr^2 \tag{5.64.3}$$

ed utilizzando la prima relazione per eliminare la velocità angolare nell'energia otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{5.64.4}$$

Sempre dal momento angolare otteniamo la regola

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{5.64.5}$$

e possiamo riscrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{5.64.6}$$

Introduciamo adesso una nuova variabile della forma

$$s = \frac{1}{r^2} - \beta \tag{5.64.7}$$

ottenendo

$$E(s+\beta) = \frac{L^2}{8m}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}k + \frac{L^2}{2m}(s+\beta)^2 \tag{5.64.8}$$

Possiamo scegliere β in modo da eliminare il termine del primo ordine in s:

$$\beta = \frac{Em}{L^2} \tag{5.64.9}$$

da cui

$$E' = \frac{E^2 m}{2L^2} - \frac{k}{2} = \frac{L^2}{8m}\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}s^2 \tag{5.64.10}$$

Questa può essere vista come l'energia E' di un oscillatore armonico per il quale

$$T = \pi \tag{5.64.11}$$

da cui otteniamo

$$s = \frac{1}{r^2} - \frac{Em}{L^2} = \sqrt{\frac{2mE'}{L^2}} \cos(2\theta + \varphi) \tag{5.64.12}$$

L'orbita è chiaramente chiusa. La scelta di φ equivale chiaramente ad una rotazione dell'orbita, e ci limitiamo a considerare $\varphi = 0$. Possiamo allora scrivere

$$r^2 = \frac{\frac{L^2}{mE}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)} \cos(2\theta)} \tag{5.64.13}$$

che è l'equazione di un'ellisse centrata sull'origine come segue da

$$r^2 \left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)} \cos(2\theta)\right] = \frac{L^2}{mE} \tag{5.64.14}$$

ossia

$$\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)}\right] x^2 + \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{L^2 k}{mE^2}\right)}\right] y^2 = \frac{L^2}{mE} \tag{5.64.15}$$

Notare che

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \geq \frac{1}{2} k r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \geq \sqrt{\frac{kL^2}{m}} \tag{5.64.16}$$

da cui

$$\frac{kL^2}{mE^2} \leq 1 \tag{5.64.17}$$

L'uguaglianza corrisponde a un'orbita circolare.

5.65. Periodo del pendolo ⋆⋆⋆

Determinare la prima correzione al periodo di un pendolo rispetto alla formula valida per piccole oscillazioni.

Soluzione

Dall'espressione dell'energia totale del pendolo

$$E = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

si trova

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}\left[E - mg\ell(1-\cos\theta)\right]}} = \pm 1$$

e integrando arriviamo alla formula per il periodo

$$T = 4\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2}\left[1 - \frac{2mg\ell}{E}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}}$$

dove θ_{max} è il massimo angolo di oscillazione, corrispondente al valore che annulla il denominatore dell'integrando. Introducendo la variabile

$$u = \sqrt{\frac{2mg\ell}{E}}\sin\frac{\theta}{2}$$

abbiamo

$$du = \sqrt{\frac{mg\ell}{2E}}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \sqrt{\frac{mg\ell}{2E}}\sqrt{1 - \frac{E}{2mg\ell}u^2}d\theta$$

da cui

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{E}{2mg\ell}u^2}}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,.$$

Sviluppando al primo ordine in $\frac{E}{mg\ell}$ abbiamo

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\left(1 + \frac{E}{4mg\ell}u^2\right)\,.$$

Usando gli integrali

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4}$$

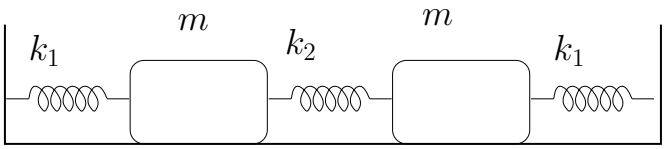
otteniamo infine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{E}{8mg\ell}\right) .$$

Possiamo esprimere questo risultato in funzione dell'ampiezza di oscillazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_{max}^2\right) .$$

5.66. Oscillazioni forzate ⋆⋆⋆



Nel sistema in figura è presente un attrito viscoso γ proporzionale alla velocità relativa tra le due masse. Alla massa più a sinistra è inoltre applicata una forza

$$F = F_0 \cos \Omega t \,.$$

Calcolare la risposta in ampiezza del sistema. Supponendo che la forza sia presente solo da $t > 0$ mostrare che in generale il transiente non sarà mai trascurabile.

Soluzione

Possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= F_0 \cos \Omega t \\ m\ddot{x}_2 + \gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_1 x_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Cerchiamo soluzioni della forma

$$x_i = \mathrm{Re} Z_i e^{i\Omega t} \,.$$

Estendendo le equazioni del moto al campo complesso e sostituendo otteniamo il sistema algebrico

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 z_1 + i\Omega\gamma(z_1 - z_2) + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) &= F_0 \\ -m\Omega^2 z_2 + i\Omega\gamma(z_2 - z_1) + k_2(z_2 - z_1) + k_1 z_2 &= 0 \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) z_1 - \left(k_2 + i\Omega\gamma\right) z_2 &= F_0 \\ -\left(i\Omega\gamma + k_2\right) z_1 + \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) z_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -\left(k_2 + i\Omega\gamma\right) \\ 0 & \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) & -\left(k_2 + i\Omega\gamma\right) \\ -\left(i\Omega\gamma + k_2\right) & \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) \end{vmatrix}}$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) & F_0 \\ -\left(i\Omega\gamma + k_2\right) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) & -\left(k_2 + i\Omega\gamma\right) \\ -\left(i\Omega\gamma + k_2\right) & \left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right) \end{vmatrix}}$$

CC BY NC SA

ossia

$$z_1 = \frac{F_0\left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right)}{\left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right)^2 - \left(i\Omega\gamma + k_2\right)^2}$$

$$z_2 = \frac{F_0\left(k_2 + i\Omega\gamma\right)}{\left(-m\Omega^2 + i\Omega\gamma + k_1 + k_2\right)^2 - \left(i\Omega\gamma + k_2\right)^2}\,.$$

Il numeratore di queste espressioni può essere fattorizzato ed abbiamo

$$z_1 = -\frac{F_0\left(m\Omega^2 - i\Omega\gamma - k_1 - k_2\right)}{\left(m\Omega^2 - k_1\right)\left(m\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - k_1 - 2k_2\right)}$$

$$z_2 = \frac{F_0\left(k_2 + i\Omega\gamma\right)}{\left(m\Omega^2 - k_1\right)\left(m\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - k_1 - 2k_2\right)}$$

e calcolando il modulo di queste espressioni otteniamo la risposta in ampiezza

$$|z_1| = \sqrt{\frac{\left(m\Omega^2 - k_1 - k_2\right)^2 + \Omega^2\gamma^2}{\left(m\Omega^2 - k_1 - 2k_2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\,\frac{F_0}{|m\Omega^2 - k_1|}$$

$$|z_2| = \sqrt{\frac{k_2^2 + \Omega^2\gamma^2}{\left(m\Omega^2 - k_1 - 2k_2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\,\frac{F_0}{|m\Omega^2 - k_1|}\,.$$

Notare che il denominatore si annulla per il valore reale della frequenza

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{k_1}{m}}.$$

Questo indica la presenza di un modo di oscillazione non smorzata nell'evoluzione libera del sistema. L'interpretazione fisica è che le due masse possono oscillare in fase con velocità relativa nulla, ed in questo caso non sono presenti effetti dissipativi. Per questo motivo non sarà possibile in generale trascurare la presenza di un transiente, anche per tempi molto grandi.

5.67. Slitta verticale ⋆⋆

Su una slitta di massa M e dimensioni trascurabili è montato un condotto liscio che permette il passaggio di una pallina di massa m, lanciata verso la slitta con velocità iniziale v_0 parallela all'orizzontale dalla stessa quota ad una distanza d (vedere Figura 5.14). La slitta è libera di muoversi senza attrito su un binario verticale e viene lasciata andare al momento del lancio.

1. In assenza di gravità, calcolare le velocità finali di slitta e pallina.
2. In presenza di gravità, sotto quali condizioni la pallina entra nel tubo?
3. In presenza di gravità, per quale valore di v la slitta si ferma subito dopo l'urto?

Soluzione

Domanda 1

In assenza di gravità si conserva l'energia cinetica totale e la quantità di moto verticale). Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{Y}^2 \tag{5.67.1}$$

e

$$0 = m\dot{y} + M\dot{Y}\,. \tag{5.67.2}$$

Ricaviamo $\dot{y}$ dalla seconda relazione

$$\dot{y} = -\frac{M}{m}\dot{Y} \tag{5.67.3}$$

e sostituendo nella prima otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{m}\left(M+m\right)\dot{Y}^2 \tag{5.67.4}$$

e quindi

$$\dot{Y} = \pm\sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}v_0^2} \tag{5.67.5}$$

e

$$\dot{y} = \mp\sqrt{\frac{M}{(M+m)}v_0^2}\,. \tag{5.67.6}$$

La soluzione con $\dot{Y} < 0$, $\dot{y} > 0$ non è chiaramente accettabile.

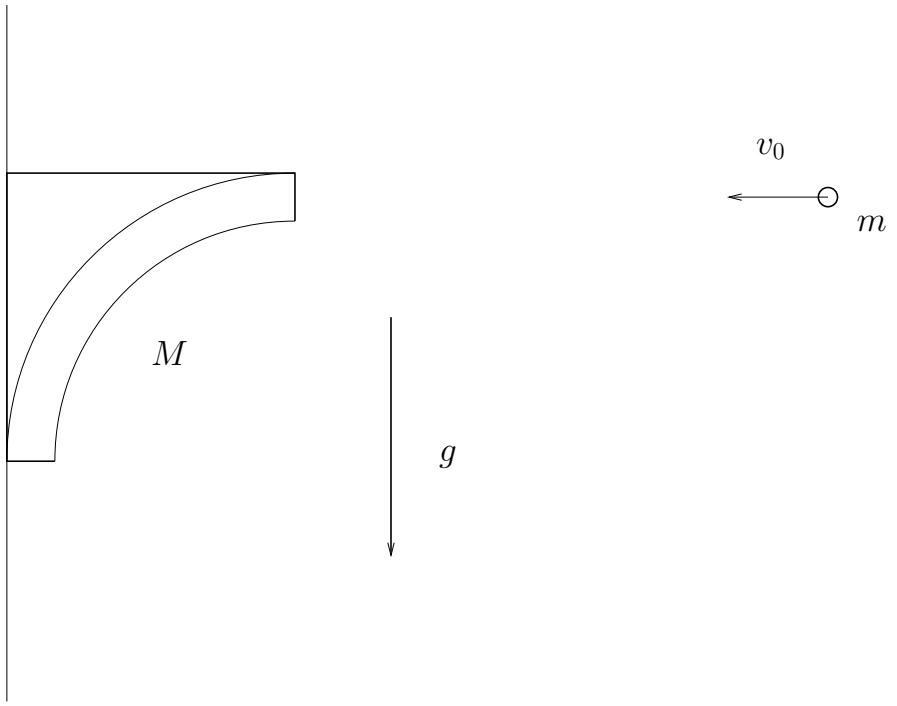


Figura 5.14.: Slitta verticale.

Domanda 2

In presenza di gravità la particella si muove con accelerazione costante g diretta verso il basso e con velocità costante in orizzontale. La slitta si muove verso il basso con accelerazione g. Le leggi orarie si scrivono quindi

$$x = d - v_0 t \tag{5.67.7}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{5.67.8}$$

$$X = 0 \tag{5.67.9}$$

$$Y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{5.67.10}$$

e dato che il moto verticale di slitta e particella è identico, la pallina entra sempre nel tubo.

Domanda 3

Dato che le dimensioni della slitta sono trascurabili, l'interazione tra slitta e particella avviene pure in un tempo trascurabile. Questo significa che la forza di gravità sarà trascurabile durante l'urto rispetto alla forza impulsiva tra slitta e particella. In altre parole, tra l'istante immediatamente precedente e quello immediatamente successivo al contatto

tra particella e slitta varrà la conservazione della quantità di moto verticale totale (l'unica forza verticale non trascurabile è quella impulsiva interna) e la conservazione dell'energia cinetica totale (lo spostamento verticale di slitta e particella sono trascurabili).

L'interazione avviene all'istante

$$t = \frac{d}{v_0} \tag{5.67.11}$$

e in tale istante (prima dell'urto) l'energia cinetica del sistema vale

$$K = \frac{1}{2}M\left(-g\frac{d}{v_0}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left[v_0^2 + \left(-g\frac{d}{v_0}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(M+m\right)\frac{g^2d^2}{v_0^2} + \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{5.67.12}$$

e la quantità di moto verticale totale

$$P_y = -\frac{\left(M+m\right)gd}{v_0}\,. \tag{5.67.13}$$

Eguagliando alle stesse quantità dopo l'urto abbiamo

$$K = \frac{1}{2}M\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{5.67.14}$$

e

$$P_y = -M\dot{Y} - m\dot{y}\,. \tag{5.67.15}$$

Siamo interessati al caso $\dot{Y} = 0$, quindi deve essere

$$\frac{1}{2}\left(M+m\right)\frac{g^2d^2}{v_0^2} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{5.67.16}$$

e

$$-\frac{\left(M+m\right)gd}{v_0} = -m\dot{y}\,. \tag{5.67.17}$$

Ricavando $\dot{y}$ dalla seconda relazione e sostituendo nella prima abbiamo

$$\left(M+m\right)\frac{g^2d^2}{v_0^2} + mv_0^2 = m\left[\frac{(M+m)gd}{mv_0}\right]^2 \tag{5.67.18}$$

che risulta verificata quando

$$v_0^2 = gd\sqrt{\frac{M(M+m)}{m^2}}\,. \tag{5.67.19}$$

CC BY NC SA

5.68. Pendolo sferico ⋆⋆

Discutere le traiettorie di un pendolo sferico, cioè di una particella vincolate nello spazio da un filo inestensibile di lunghezza ℓ.

Soluzione

Conviene descrivere il sistema in coordinate sferiche. Possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

e l'energia potenziale

$$U = mgz = mg\ell\cos\theta\,.$$

Osserviamo che sulla particella agiscono due forze: la forza peso e la reazione vincolare della superficie. Possiamo scrivere

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_z - N\hat{e}_r$$

ma dato che

$$\vec{r} = \ell\hat{e}_r$$

abbiamo

$$\vec{M} = \vec{r}\wedge\vec{F} = -mg\ell\hat{e}_r\wedge\hat{e}_z - N\ell\hat{e}_r\wedge\hat{e}_r$$

da cui segue che $\vec{M}\cdot\hat{e}_z = 0$. Quindi il momento delle forze non ha componenti verticali e la componente z del momento angolare si conserva:

$$L_z = m\ell^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\,.$$

Utilizziamo questa relazione per riscrivere l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

dove

$$U_{eff}(\theta) = mg\ell\cos\theta + \frac{L_z^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} = mg\ell\left(\cos\theta + \frac{\beta^2}{1-\cos^2\theta}\right)\,.$$

Per comodità abbiamo introdotto la variabile adimensionale

$$\beta^2 = \frac{L_z^2}{2m^2\ell^3 g}\,.$$

Il grafico qualitativo è riportato in Figura 5.15, per diversi valori di β.

CC BY NC SA

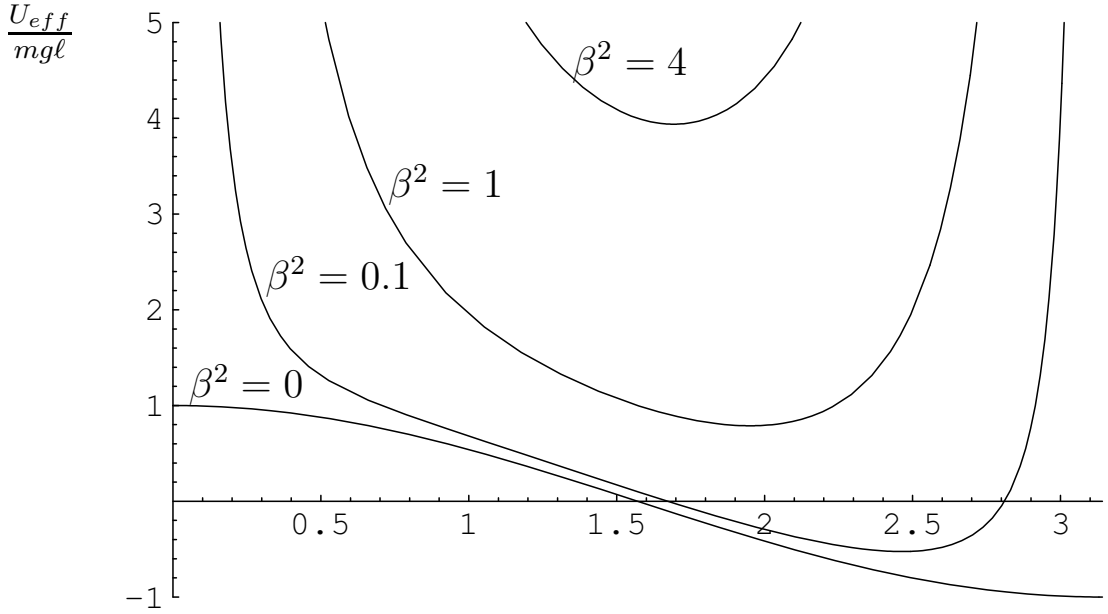


Figura 5.15.: Potenziale effettivo per il pendolo sferico.

5.69. Pendolo sferico piccolo momento angolare ⋆⋆

Studiare le orbite circolari del pendolo sferico nel limite di piccolo momento angolare, cioè quando $\beta \ll 1$ nella notazione dell'esercizio precedente.

Soluzione

Introducendo $x = \cos\theta$ abbiamo

$$U_{eff}(\theta) = mg\ell\left(x + \frac{\beta^2}{1-x^2}\right).$$

Possiamo studiare il potenziale effettivo in $-1 \leq x \leq 1$. Avremo un minimo dove

$$(1-x^2)^2 + 2\beta^2 x = 0$$

e occorrerebbe determinare la radice di questa equazione tale che $-1 \leq x \leq 1$. La formula essatta è complicata, ma se $\beta \ll 1$ (piccolo momento angolare) possiamo scrivere approssimativamente

$$x = x_0 + \beta x_1$$

dove x_0 è la soluzione a $\beta = 0$ e x_1 una prima correzione. Avremo

$$(1-x_0^2)^2 - 4\beta x_0 x_1(1-x_0^2) + \beta^2(2x_0 - 2x_1^2 + 6x_0^2x_1^2) + O(\beta^3) = 0$$

e identificando i termini al primo e al secondo ordine abbiamo

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm 1 \\ 4x_1^2 &= 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$x \simeq -1 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}.$$

La posizione di minimo è quindi leggermente spostata rispetto alla verticale.

5.70. Pendolo sferico grande momento angolare ⋆⋆

Studiare le orbite circolari del pendolo sferico nel limite di grande momento angolare, cioè quando $\beta \gg 1$ nella notazione dell'esercizio precedente.

Soluzione

Introducendo $x = \cos\theta$ abbiamo

$$U_{eff}(\theta) = mg\ell\beta^2 \left(\frac{x}{\beta^2} + \frac{1}{1-x^2} \right) .$$

Il minimo si avrà per

$$\frac{1}{\beta^2} \left(1 - x^2\right)^2 + 2x = 0 .$$

Questa volta $\beta^{-1} \ll 1$ e quindi dall'approssimazione $x = x_0 + \beta^{-1} x_1$ otteniamo

$$2x_0 + \frac{1}{\beta} \left(1 - 2x_0^2 + x_0^4 + 2x_1\right) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) = 0$$

da cui $x_0 = 0$ e $x_1 = -1/2$. Segue che

$$x = \cos\theta = -\frac{1}{2\beta}$$

cioè

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\beta} .$$

L'orbita circolare sarà quindi leggermente al di sotto del cerchio massimo orizzontale.

CC BY NC SA

5.71. Cambiamento parametri orbita ⋆⋆

Un pianeta di massa m é in orbita circolare (raggio R_0) attorno ad una stella di massa M. Ad un certo istante la stella espelle verso l'esterno una parte ΔM della sua massa, concentrandola in un guscio sferico di raggio $r(t)$ crescente. Supponendo di poter trascurare l'effetto dell'urto del materiale sul pianeta calcolare l'eccentricità dell'orbita quando $r(t) > R_0$. Si assuma $M - \Delta M \gg m$.

Soluzione

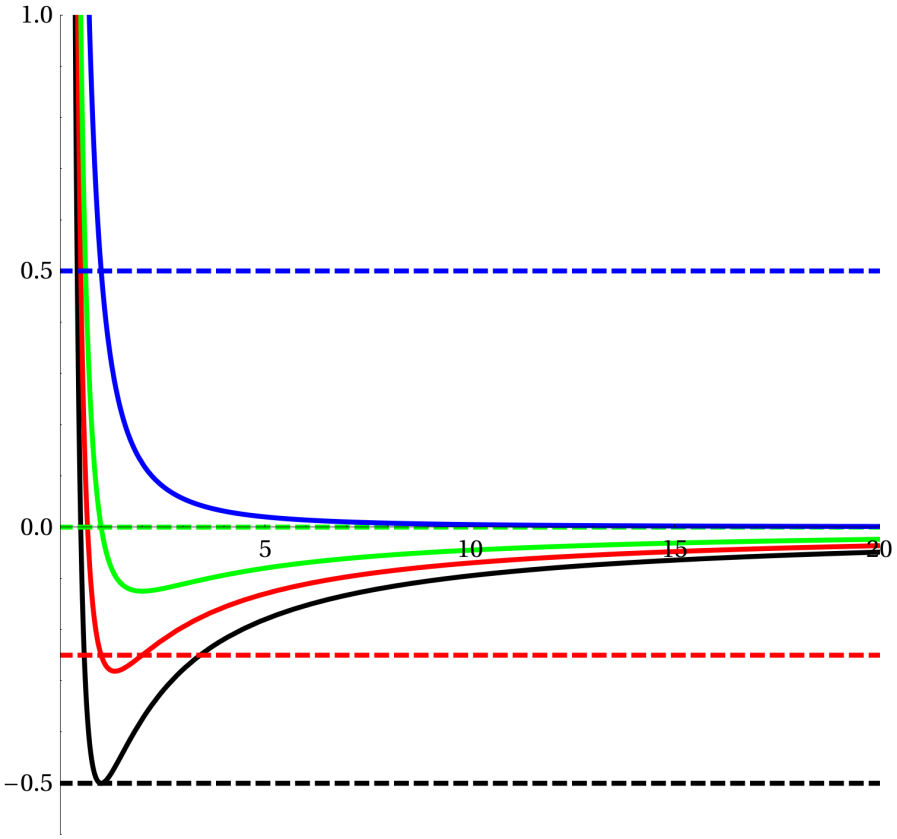


Figura 5.16.: Il valore dell'energia totale in unità k/R_0 (retta orizzontale tratteggiata) e del potenziale efficace (curva continua) dopo l'espulsione della massa in funzione di r/R_0. Le differenti curve si riferiscono a $\Delta M/M = 0$ (nessuna espulsione, nero) $\Delta M/M = 1/4$ (rosso) $\Delta M/M = 1/2$ (verde) $\Delta M/M = 1$ (massa completamente espulsa,blu). Notare che una intersezione è sempre a $r = R_0$.

Per semplicità poniamo $k = GMm$ e $k' = k - \Delta k$ con $\Delta k = G\Delta Mm$. Possiamo

scrivere l'energia del pianeta nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

Se la particella si trova in un'orbita circolare di raggio R_0 allora

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}(R_0) = -\frac{L^2}{mR_0^3} + \frac{k}{R_0^2} = 0$$

cioè

$$L^2 = kmR_0$$

Al momento in cui il guscio sferico di massa supera l'orbita il momento angolare non cambia, e la velocità radiale rimane nulla. Quindi l'energia vale

$$E' = \frac{L^2}{2mR_0^2} - \frac{k'}{R_0} = \frac{k}{2R_0} - \frac{k'}{R_0}$$

e il nuovo potenziale efficace

$$U'_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k'}{r} = \frac{kR_0}{2r^2} - \frac{k'}{r}$$

Il raggio massimo e minimo saranno determinati dalle soluzioni di $E' = U'_{eff}$ cioè

$$\frac{k}{2R_0} - \frac{k'}{R_0} = \frac{kR_0}{2r^2} - \frac{k'}{r}$$

Riordinando i termini abbiamo

$$\frac{kR_0}{2}\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}\right) = k'\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)$$

Eliminando la soluzione banale $R = R_0$ troviamo infine

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{2k'}{k} - 1\right)\frac{1}{R_0} = \left(1 - 2\frac{\Delta k}{k}\right)\frac{1}{R_0}$$

Notiamo che $\Delta k/k$ è la variazione relativa della massa della stella. Se $\Delta k/k < 1/2$ otteniamo una nuova orbita ellittica, in caso contrario la nuova orbita è illimitata. Possiamo calcolare direttamente l'eccentricità usando la formula

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E'L^2}{mk'^2}} = \sqrt{1 + \frac{2R_0}{k}\left(\frac{k}{2R_0} - \frac{k'}{R_0}\right)} = \sqrt{\frac{2\Delta k}{k}}$$

ossia

$$e = \sqrt{\frac{2\Delta M}{M}} \tag{5.71.1}$$

La formula conferma che abbiamo un ellisse per $\Delta M/M < 1/2$, una parabola per $\Delta M/M = 1/2$ ed un'iperbole per $1/2 < \Delta M/M < 1$. Il caso $\Delta M/M = 1$ corrisponde ad una traiettoria rettilinea, dato che tutta la massa è stata espulsa e non vi sono più forze gravitazionali, che possiamo interpretare anche come iperbole degenere.

CC BY NC SA

5.72. Precessione di un'orbita ⋆⋆⋆

Studiare le orbite limitate di un punto materiale in un potenziale della forma

$$U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}$$

dove r è la distanza dall'origine di un sistema di coordinate e $\alpha > 0$. Mostrare che il punto di massimo e di minimo avvicinamento al centro precede per $\varepsilon \neq 0$ e calcolare l'angolo di precessione.

Soluzione

Dato che si conserva l'energia totale e il momento angolare rispetto all'origine del sistema di coordinate, sappiamo che il moto avviene in un piano e possiamo descriverlo utilizzando coordinate polari. Abbiamo allora

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$$

e

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Possiamo anzitutto scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$$

ed eliminare $\dot{\theta}$ utilizzando la conservazione del momento angolare

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2m} + \epsilon\right)\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

ottenendo un'equazione che lega r a θ, e permette in linea di principio di ottenere la traiettoria. Introduciamo adesso la nuova coordinata $u = 1/r$: sostituendo nell'equazione precedente otteniamo

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2m} + \epsilon\right)u^2 - \alpha u$$

che formalmente è l'energia di un oscillatore armonico soggetto ad una forza costante. In effetti se deriviamo rispetto a θ otteniamo

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{m}\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(\frac{L^2}{m} + 2\epsilon\right)u\frac{du}{d\theta} - \alpha\frac{du}{d\theta}$$

che si deve annullare dato che E si conserva. Questo accade nei due casi

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= 0 \\ \frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(\frac{L^2}{m} + 2\epsilon\right)u &= \alpha \end{aligned}$$

CC BY NC SA

Il primo corrisponde ad una traiettoria circolare, $r = 1/u =$ costante. Concentriamoci sul secondo, che ha per soluzione generale

$$u = A\cos(\beta\theta + \phi) + \alpha\left(\frac{L^2}{m} + 2\epsilon\right)^{-1}$$

dove A e ϕ sono costanti arbitrarie da determinare con le condizioni al contorno, e

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{2m\epsilon}{L^2}}$$

Chiaramente un cambiamento di ϕ equivale ad una rotazione globale dell'orbita, possiamo quindi fissare $\phi = 0$ senza perdere di generalità. I punti di massimo e minimo avvicinamento corrisponderanno ai minimi e ai massimi del coseno, e quindi a

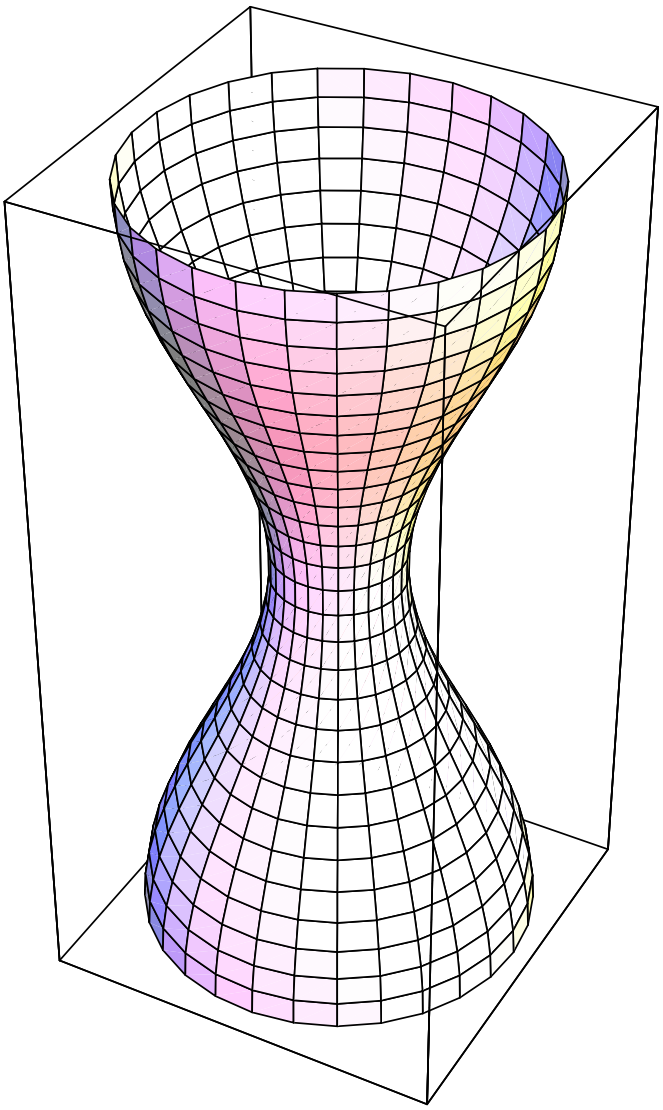
$$\beta\theta = k\pi$$

e quindi ad ogni giro questi avanzeranno di un angolo

$$\delta\theta = 2\pi\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$$

che si annulla per $\epsilon = 0$.

5.73. Uscire da una bottiglia ⋆⋆



Un punto materiale è vincolato a muoversi su una superficie liscia descritta in coordinate cilindriche dall'equazione

$$\rho = a + b \cos kz$$

con $a > b > 0$ (vedere figura). Studiare le possibili orbite in assenza di gravità, verificando in particolare l'esistenza di orbite limitate e circolari.

Soluzione

L'unica forza in gioco è la reazione vincolare, normale alla superficie liscia. Dato che la velocità della particella è sempre tangente alla superficie tale forza non può fare lavoro,

si conserva quindi l'energia cinetica. Questo significa che il modulo della velocità della particella rimane costante.

Inoltre per motivi di simmetria la forza è contenuta nel piano definito dall'asse z e dal vettore posizione del punto materiale, e quindi il suo momento non può avere componenti lungo z. Esplicitamente, la reazione vincolare sarà del tipo

$$\vec{N} = N_\rho \hat{e}_\rho + N_z \hat{e}_z$$

cioè priva di componenti nella direzione di $\hat{e}_\phi$. Dato che il vettore posizione è

$$\vec{R} = z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho$$

si verifica subito che

$$\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{N} = (N_\rho \hat{e}_\rho + N_z \hat{e}_z) \wedge (z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho)$$

ossia

$$\vec{M} = (zN_z - \rho N_\rho)(\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho)$$

(notare che $\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi$). Di conseguenza si conserva la componente z del momento angolare

$$L_z = m\rho^2\dot{\phi}$$

Quindi l'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Possiamo eliminare $\dot{\phi}$ usando la conservazione di L_z, e usare la condizione di appartenenza al piano per eliminare ρ e

$$\dot{\rho} = -bk\dot{z}\sin kz$$

ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + b^2k^2\sin^2 kz\right)\dot{z}^2 + U_{eff} \tag{5.73.1}$$

con

$$U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m\left(a + b\cos kz\right)^2}$$

Dato che il primo termine al membro destro della (5.73.1) deve essere positivo abbiamo che il moto può avvenire solo nella regione in cui $U_{eff}(z) < E$. Rappresentando graficamente il potenziale effettivo (Figura (5.17)) che è una funzione periodica di z, troviamo che esistono orbite a z costante, per un valore dell'energia

$$E = \min U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m\left(a + b\right)^2}$$

che corrisponde al minimo del potenziale effettivo. Dato che ρ è funzione di z, queste saranno anche orbite circolari.

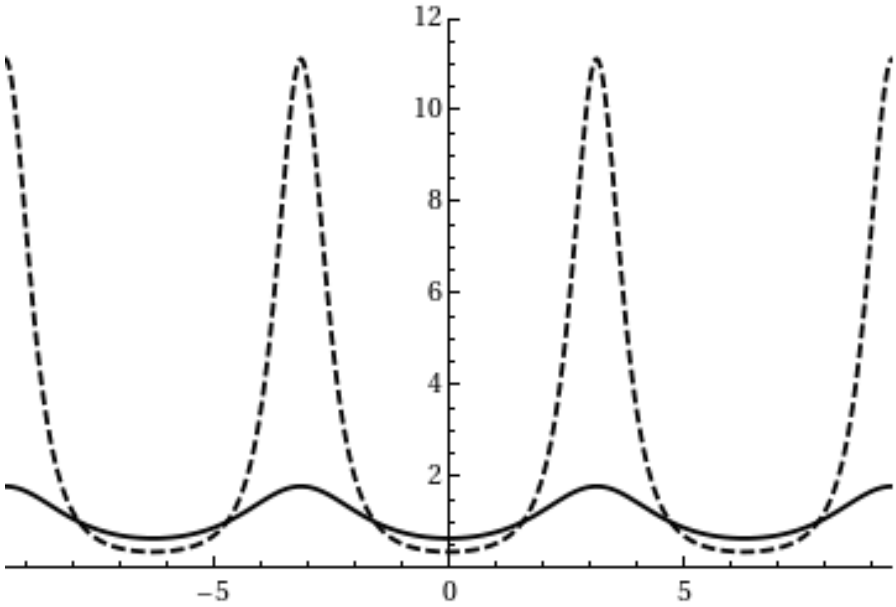


Figura 5.17.: Sulle ordinate, il potenziale effettivo in unità $\frac{L_z^2}{2ma^2}$. Sulle ascisse, kz. In nero, il potenziale effettivo per $b/a = 1/4$ (linea continua) e per $b/a = 7/10$ (linea tratteggiata). Per un fissato valore del momento angolare, la barriera da superare cresce quando b si avvicina ad a (bottiglia molto "strozzata").

Se

$$\min U_{eff} < E < \max U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m\left(a-b\right)^2}$$

avremo orbite limitate. Infine per

$$E > \max U_{eff}$$

avremo orbite illimitate.

Consideriamo infine due casi particolari.

Se $L_z = 0$ allora $\dot{\phi} = 0$, e $U_{eff} = 0$. La particella si muove quindi longitudinalmente lungo la superficie.

Se $E = \max U_{eff}$ la particella si avvicina alla z corrispondente al massimo del potenziale effettivo. Per capire cosa accada in questo caso conviene approssimare l'energia in un intorno di tale massimo. Poniamo ad esempio $z = \pi/k + \delta$, e sostituendo otteniamo

$$\frac{L_z^2}{2m\left(a-b\right)^2} = \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_z^2}{2m\left(a-b\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{bk^2L_z^2}{m\left(a-b\right)^3}\delta^2$$

che possiamo integrare scrivendo

$$\dot{\delta} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\frac{bk^2L_z^2}{m^2\left(a-b\right)^3}\delta^2}$$

e quindi

$$t = \pm\int_{\delta(0)}^{\delta(t)}\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2m^2\left(a-b\right)^3}{bk^2L_z^2}}d\delta$$

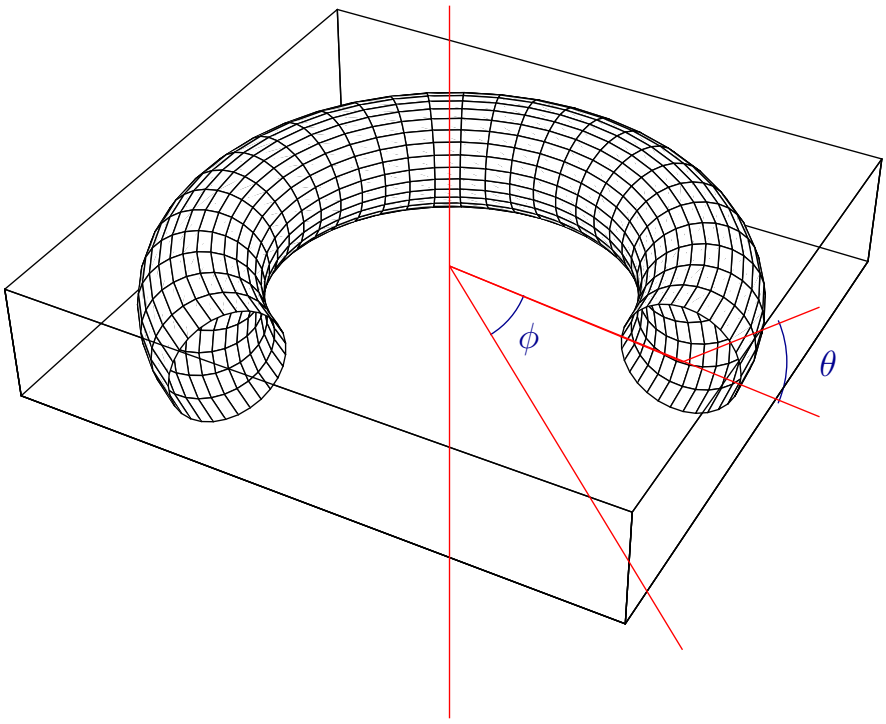
Dato che l'integrale diverge se $\delta(t) \to 0$, la particella arriverà al massimo del potenziale effettivo in un tempo infinito.

5.74. Moto su un toro ⋆⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie del toro in figura, descritto dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Verificare la conservazione del momento angolare in direzione z, e determinare le traiettorie.



Soluzione

La conservazione del momento angolare in direzione z discende dal fatto che l'unica forza in gioco (la reazione vincolare, normale alla superficie) ha sempre un momento con componente z nulla. Utilizziamo le coordinate θ, ϕ per descrivere la posizione del punto sulla superficie. Possiamo costruire due versori tangenti alla superficie derivando $\vec{r}$ rispetto ad esse e normalizzando:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo completare la base introducendo il versore

$$\hat{e}_n = \hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_\phi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

normale alla superficie. La terna di versori introdotta è, come si verifica facilmente, ortonormale. Nel seguito ci serviranno le loro derivate rispetto al tempo, che valgono

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi + \dot{\theta}\hat{e}_n \\ \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\cos\theta\hat{e}_n \\ \frac{d\hat{e}_n}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{e}_\theta - \cos\theta\dot{\phi}\hat{e}_\phi \end{aligned}$$

Scriviamo adesso il vettore posizione come

$$\vec{r} = -R\sin\theta\hat{e}_\theta - (r + R\cos\theta)\,\hat{e}_n$$

e derivando otteniamo la velocità

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + (R + r\cos\theta)\,\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

e l'accelerazione

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\dot{\phi}^2\,(R + r\cos\theta)\sin\theta + r\ddot{\theta}\right]\hat{e}_\theta \\ &+ \left[(R + r\cos\theta)\,\ddot{\phi} - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\right]\hat{e}_\phi \\ &+ \left[r\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\cos\theta\,(R + r\cos\theta)\right]\hat{e}_n \end{aligned}$$

Dato che non si hanno forze tangenti alla superficie l'accelerazione nelle direzioni $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ sono nulle, per cui

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2\,(R + r\cos\theta)\sin\theta + r\ddot{\theta} &= 0 \\ (R + r\cos\theta)\,\ddot{\phi} - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

CC BY NC SA

La seconda può essere integrata direttamente, dopo aver moltiplicato per $m\left(R+r\cos\theta\right)$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(R+r\cos\theta\right)^2\dot{\phi}\right]=0$$

ma questa è proprio la conservazione del momento angolare in direzione z, dato che $R+r\cos\theta$ è la distanza da tale asse e $\dot{\phi}$ la componente z della velocità angolare

$$L_z=m\left(R+r\cos\theta\right)^2\dot{\phi}$$

Scriviamo adesso l'energia cinetica, che si conserva:

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\theta}^2+\left(R+r\cos\theta\right)^2\dot{\phi}^2\right]$$

Possiamo eliminare $\dot{\phi}$ utilizzando la conservazione del momento angolare, ottenendo

$$E=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+\frac{L_z^2}{2mR^2\left(1+\frac{r}{R}\cos\theta\right)^2}$$

che permette lo studio qualitativo del moto in θ. Il potenziale effettivo è rappresentato in Figura 5.18. Abbiamo una soluzione con $\theta=0$ (corrispondente al minimo del potenziale effettivo) in cui la particella resta sul bordo esterno del toro, compiendo un moto circolare uniforme con velocità angolare

$$\dot{\phi}=\frac{L_z}{m\left(R+r\right)^2}$$

Per valori dell'energia intermedi tra il massimo e il minimo θ oscilla tra un valore massimo e il suo opposto, la traiettoria è quindi una oscillazione centrata sul bordo esterno del toro, accompagnata da un'avanzamento di ϕ. Infine per valori dell'energia maggiori del massimo θ aumenta (o diminuisce) senza limite. La traiettoria è quindi una spirale che si avvolge al toro.

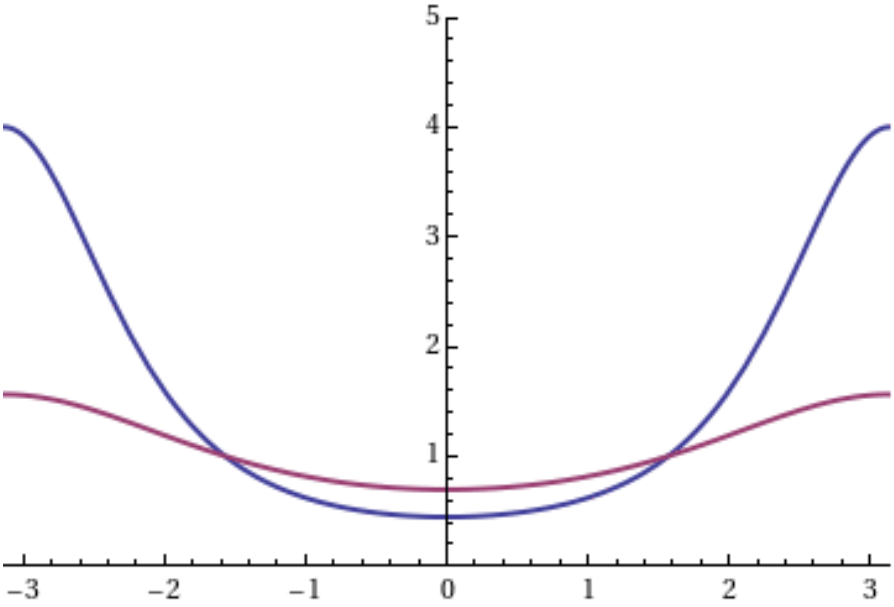


Figura 5.18.: Il potenziale effettivo in unità $\frac{L_z^2}{2mR^2}$ in funzione di θ per $r/R = 0.2$ (in rosso) e r/R=0.5 (in blu).

5.75. Pendolo nello spazio delle fasi ⋆⋆

Si condideri un pendolo di lunghezza ℓ e massa m. Detto θ l'angolo che il pendolo forma rispetto alla verticale e ω la sua velocità angolare

1. Mostrare che le equazioni del moto si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= f(\omega, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= g(\omega, \theta) \end{aligned}$$

   e determinare le funzioni f e g.

2. Determinare le possibili traiettorie del pendolo nel piano ω, θ nella forma

$$G(\omega, \theta) = 0$$

   dove G è una opportuna funzione, rappresentarle graficamente e discuterne il significato.

3. Trovare la $G(\omega, \theta)$ che corrisponde alle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \omega(0) &= \omega_0 \end{aligned}$$

   scegliendo per ω_0 il minimo valore che permette al pendolo di raggiungere la posizione $\theta = \pi$. Mostrare che tale posizione viene raggiunta in un tempo infinito (si supponga che la massa sia vincolata ad una sbarretta rigida).

Soluzione

Domanda 1

L'equazione del moto del pendolo si può scrivere immediatamente in coordinate polari scrivendo $\vec{F} = m\vec{a}$ per la componente tangenziale alla traiettoria. Per un moto circolare l'accelerazione tangenziale vale $\ell\ddot{\theta}$ e la componente tangenziale della forza $-mg\sin\theta$, da cui

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\,.$$

Dato che $\omega = \dot{\theta}$ sostituendo nella precedente relazione troviamo subito

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta = f(\omega, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega = g(\omega, \theta)\,. \end{aligned}$$

CC BY NC SA

Domanda 2

Dividendo membro a menbro le equazioni scritte precedentemente si trova subito che

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{f(\omega,\theta)}{g(\omega,\theta)} = -\frac{g}{\ell}\frac{\sin\theta}{\omega}\,.$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili che si può integrare direttamente:

$$\int \omega d\omega = -\frac{g}{\ell}\int \sin\theta d\theta$$

da cui

$$\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta - C = G(\omega,\theta) = 0$$

dove C è una costante arbitraria. Possiamo scrivere allora

$$\omega = \pm\sqrt{2\left(C + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)}\,.$$

Osserviamo che il luogo dei punti che soddisfano questa relazione è simmetrico rispetto agli assi $\omega = 0$ e $\theta = 0$. Inoltre si ripete periodicamente lungo θ con periodo 2π, sarà quindi sufficiente studiarlo tra $\theta = -\pi$ e $\theta = \pi$.

Occorre distinguere diversi casi:

1. Se $C < -\frac{g}{\ell}$ la quantità sotto radice è sempre negativa, e non esiste nessuna traiettoria.

2. Se $-\frac{g}{\ell} \leq C \leq \frac{g}{\ell}$ solo alcuni valori di θ sono possibili, più precisamente quelli per i quali
$$\cos\theta > -\frac{\ell}{g}C\,.$$

3. Per $C > \frac{g}{\ell}$ tutti i valori di θ sono possibili.

Alcune possibili traiettorie sono rappresentate in Figura5.19. Le curve chiuse ($C < 1$) rappresentano moti oscillatori, le altre corrispondono ai casi nei quali il pendolo, avendo energia sufficientemente elevata, ruota sempre nello stesso verso (senso orario per la traiettoria con $\omega < 0$ e senso antiorario per quella con $\omega > 0$).

Problema 3

Date le condizioni iniziali la traiettoria deve passare dal punto $(\theta,\omega) = (0,\omega_0)$, deve cioè essere

$$G(\omega_0, 0) = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{g}{\ell} - C = 0$$

che significa

$$C = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{g}{\ell}\,.$$

CC BY NC SA

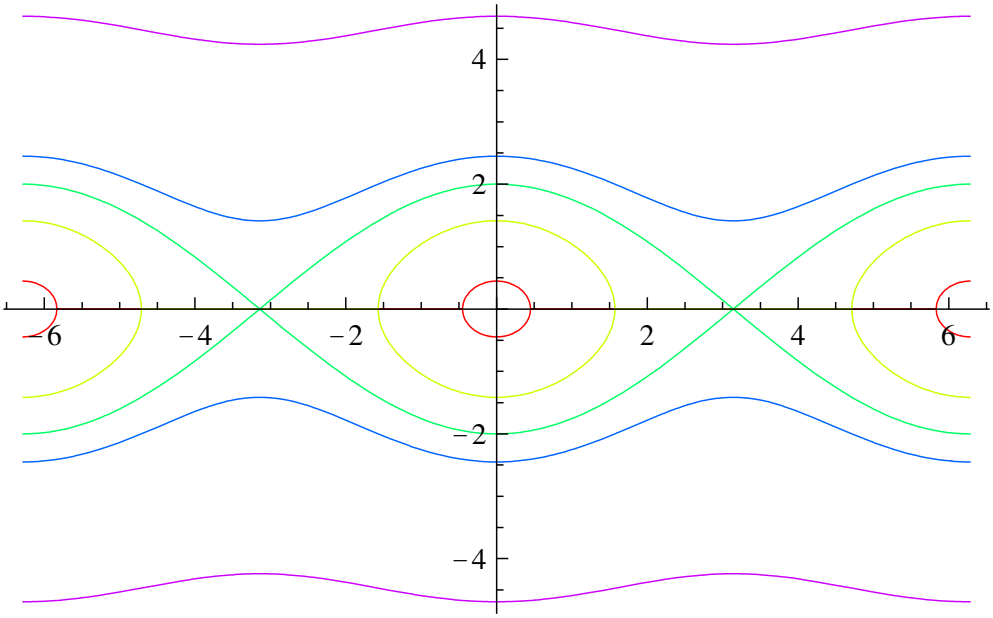


Figura 5.19.: Alcune possibili traiettorie, corrispondenti a $C = -9/10$ (rossa), $C = 0$ (gialla) $C = 1$ (verde) $C = 2$ (blu) e $C = 10$ (viola). L'asse orizzontale corrisponde a θ, quello verticale a ω e si è scelto $g/\ell = 1$.

Per determinare ω_0 si può imporre che l'energia cinetica iniziale sia esattamente uguale alla differenza tra energia potenziale in $\theta = \pi$ e $\theta = 0$, cioè

$$\frac{1}{2} m\ell^2\omega_0^2 = 2mg\ell$$

da cui

$$\omega_0^2 = \frac{4g}{\ell}$$

e quindi

$$C = \frac{g}{\ell}\,.$$

In altre parole la traiettoria vale

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}\,(1+\cos\theta)}$$

che corrisponde alla curva verde in figura. Per calcolare il tempo necessario a raggiungere la posizione $\theta = \pi$ si può considerare l'equazione precedente come un'equazione differenziale. Scegliendo il segno positivo abbiamo

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\,(1+\cos\theta)} = \sqrt{\frac{4g}{\ell}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

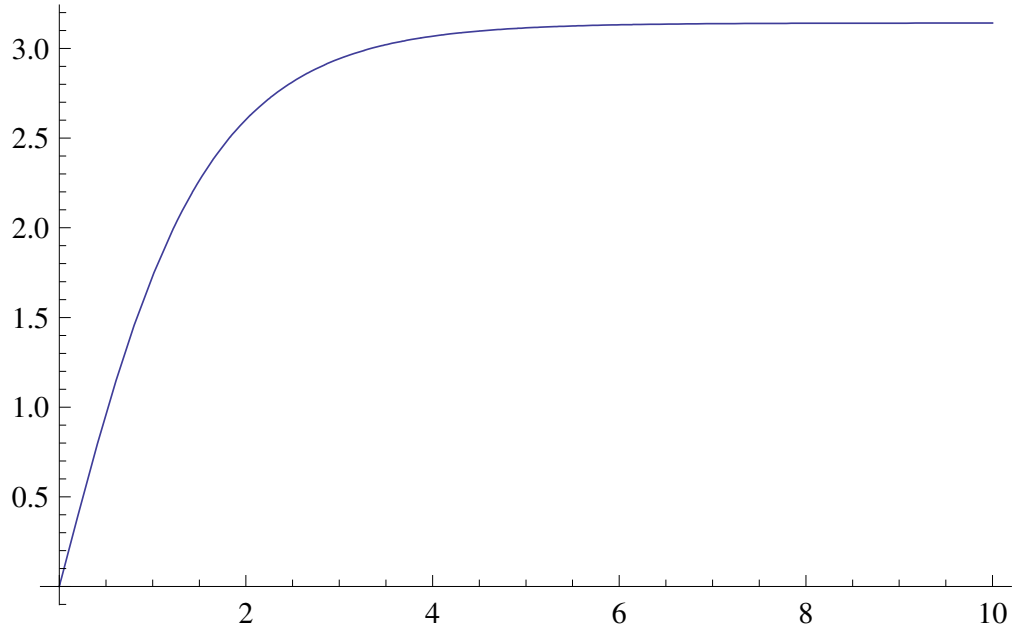


Figura 5.20.: La legge oraria $\theta(t)$ nel caso particolare considerato nella terza domanda.

ma possiamo separare le variabili e integrare, ottenendo

$$\sqrt{\frac{4g}{\ell}} \int_0^t dt = \int_0^{\theta^*} \frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \,.$$

Il membro destro è proporzionale al tempo impiegato per arrivare a $\theta^\star$, ma è evidente che il membro sinistro tende a $+\infty$ quando θ^* tende a π. In questo caso particolare è possibile integrare esplicitamente anche il secondo membro. Si ottiene

$$\sqrt{\frac{4g}{\ell}} t = 4 \operatorname{arctanh}\left(\tan\frac{\theta(t)}{4}\right)$$

oppure

$$\tan\frac{\theta(t)}{4} = \tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \,.$$

L'angolo in funzione del tempo è rappresentato in Figura 5.20.

5.76. Moto su una guida ellittica ⋆⋆

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi nel piano su una guida ellittica descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}$$

con velocità iniziale v_0.

Determinare la reazione vincolare della guida in funzione di θ, e il raggio di curvatura della traiettoria. Discutere il caso particolare $a = b = R$.

Soluzione

Dato che in assenza di attrito la guida non può esercitare forze nella direzione tangente il modulo della velocità si conserva e quindi vale sempre v_0. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} &= b\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

da cui ricaviamo il versore tangente alla traiettoria:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$$

e inoltre

$$v_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right) . \tag{5.76.1}$$

Il vettore velocità si può scrivere nella forma $\vec{v} = v_0\hat{\tau}$. Possiamo allora calcolare l'accelerazione:

$$\vec{a} = v_0\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{v_0\dot{\theta}}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\left[\begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -b\sin\theta \end{pmatrix} - \frac{\left(a^2 - b^2\right)\sin\theta\cos\theta}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}\right] .$$

Svolgendo i calcoli e utilizzando l'equazione (5.76.1) troviamo

$$\vec{N} = m\vec{a} = -\frac{mabv_0^2}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^2}\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix} .$$

Notare che l'accelerazione è normale alla traiettoria: $\vec{N}\cdot\hat{\tau} = 0$, possiamo quindi estrarre dall'espressione precedente il versore normale:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$$

e scrivere

$$\vec{N} = -\frac{mabv_0^2}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}\hat{n} .$$

CC BY NC SA

Confrontando con l'espressione dell'accelerazione normale in termini del raggio di curvatura, v_0^2/ρ, troviamo

$$\rho = \frac{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^{3/2}}{ab}\,.$$

Utilizzando coordinate polari possiamo trovare la componente radiale della reazione vincolare:

$$N_r = \vec{N} \cdot \hat{e}_r = -\frac{mabv_0^2 \left(b\cos^2\theta + a\sin^2\theta\right)}{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^2}$$

e la componente diretta come $\hat{e}_\theta$:

$$N_\theta = \vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = -\frac{mabv_0^2 \left(b - a\right)\sin\theta\cos\theta}{\left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)^2}\,.$$

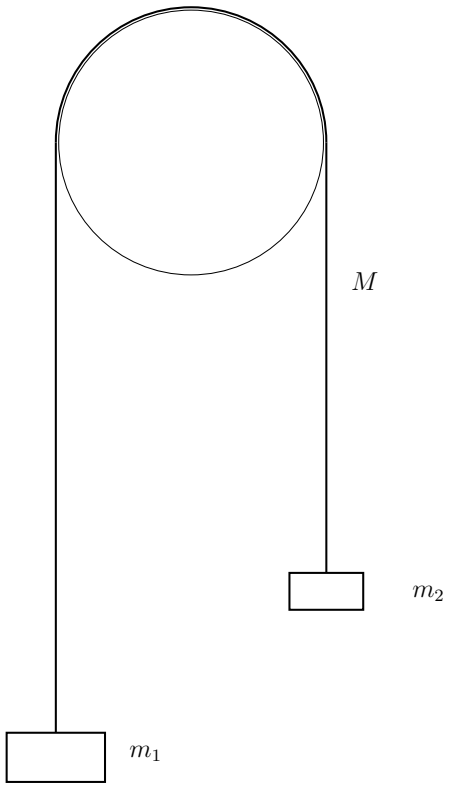
Il caso particolare $a = b = R$ corrisponde a una guida circolare di raggio R. Abbiamo

$$\vec{N} = -\frac{mv_0^2}{R}\hat{e}_r$$

e

$$\rho = R\,.$$

5.77. Macchina di Atwood: effetti della massa del filo ⋆⋆⋆



Nella macchina di Atwood in figura il filo è inestensibile, ma di massa M non trascurabile. Non vi sono attriti. Si vuole determinare il moto del sistema.

Soluzione

Data l'inestensibilità del filo, il modulo della accelerazione delle masse e di ciascun elemento del filo sarà lo stesso. Possiamo allora scrivere

$$m_1 a = T_1 - m_1 g \tag{5.77.1}$$

e

$$-m_2 a = T_2 - m_2 g \tag{5.77.2}$$

dove T_1 e T_2 sono le tensioni del filo alle masse.

Consideriamo adesso un tratto infinitesimo del filo: avremo

$$\mu d\ell \vec{a}(\ell) = -\mu d\ell g \hat{y} + T(\ell + d\ell)\,\hat{\tau}(\ell + d\ell) - T(\ell)\hat{\tau}(\ell) + N(\ell)\,\hat{n}(\ell) d\ell \tag{5.77.3}$$

dove $\mu = M/L$, e abbiamo parametrizzato con ℓ la posizione lungo il filo ($\ell = 0$ corrisponde alla connessione con la massa m_1, $\ell = L$ alla connessione con la massa m_2). Il versore

$\hat{\tau}$ è tangente la filo nel punto considerato, quello $\hat{n}$ è normale. Inoltre N rappresenta la reazione normale della carrucola. Sviluppando al primo ordine in $d\ell$ otteniamo

$$\mu\left[a\hat{\tau}(\ell)-\frac{v^2}{\rho}\hat{n}(\ell)\right]=-\mu g\hat{y}+N(\ell)\hat{n}(\ell)+\frac{d}{d\ell}\left[T(\ell)\hat{\tau}(\ell)\right]\,. \tag{5.77.4}$$

Notare che abbiamo scomposto l'accelerazione del filo in componenti tangenti e normali, e che il raggio di curvatura del filo vale $\rho=R$ sulla carrucola e $\rho=\infty$ nei tratti rettilinei. Sviluppando la derivata e ricordando che

$$\frac{d\hat{\tau}}{d\ell}=-\frac{1}{\rho}\hat{n} \tag{5.77.5}$$

otteniamo

$$\mu\left[a\hat{\tau}(\ell)-\frac{v^2}{\rho}\hat{n}(\ell)\right]=-\mu g\hat{y}+N(\ell)\hat{n}(\ell)+\frac{dT(\ell)}{d\ell}\hat{\tau}(\ell)-\frac{1}{\rho}T(\ell)\hat{n}(\ell)\,. \tag{5.77.6}$$

Prendendo il prodotto scalare con $\hat{\tau}$ di ambo i membri otteniamo

$$\mu a=-\mu g\hat{y}\cdot\hat{\tau}+\frac{dT(\ell)}{d\ell} \tag{5.77.7}$$

che integrata tra tra gli estremi da

$$T_2-T_1=\mu aL+\mu g\int_0^L\hat{y}\cdot\hat{\tau}d\ell\,. \tag{5.77.8}$$

Il tratto che si avvolge sulla carrucola non contribuisce all'ultimo integrale, che si riduce quindi a

$$T_2-T_1=\mu aL+\mu g\left(\ell_1-\ell_2\right) \tag{5.77.9}$$

dove ℓ_1 e ℓ_2 sono le lunghezze dei tratti verticali del filo.

Questa è l'ultima equazione che ci serviva. Dalle prime due che abbiamo scritto otteniamo

$$(m_1+m_2)a=T_1-T_2+\left(m_2-m_1\right)g \tag{5.77.10}$$

e quindi

$$a=\frac{m_2+\mu\ell_2-m_1-\mu\ell_1}{(m_1+m_2+M)}g\,. \tag{5.77.11}$$

Teniamo conto adesso del fatto che

$$L=\ell_1+\ell_2+\pi R \tag{5.77.12}$$

e che

$$\ddot{\ell}_2=a\,. \tag{5.77.13}$$

Abbiamo quindi

$$\ddot{\ell}_2-\frac{2\mu g}{(m_1+m_2+M)}\ell_2=\frac{m_2-m_1-\mu\left(L-\pi R\right)}{(m_1+m_2+M)}g\,. \tag{5.77.14}$$

CC BY NC SA

Questa equazione ammette come soluzione particolare

$$\ell_2 = \ell_{2,0} = \frac{m_1 - m_2 + M\left(1 - \pi\frac{R}{L}\right)}{2M} L \tag{5.77.15}$$

che rappresenta una configurazione di equilibrio. La soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{\ell}_2 - \frac{2\mu g}{(m_1 + m_2 + M)} \ell_2 = 0 \tag{5.77.16}$$

è invece

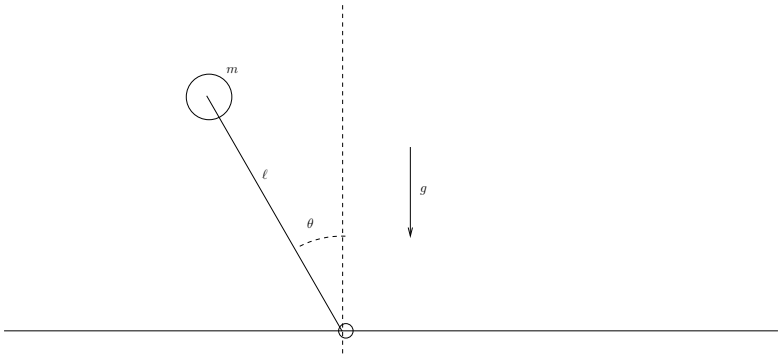
$$\ell_2(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t} \tag{5.77.17}$$

con

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\mu g}{m_1 + m_2 + M}}\,. \tag{5.77.18}$$

La soluzione generale sarà quindi

5.78. Pendolo invertito ⋆⋆



Il pendolo invertito in figura è costituito da una massa m fissata su un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'asta può ruotare attorno all'altro estremo, ma è soggetta ad un momento proporzionale alla sua deviazione dalla verticale,

$$M = -k\theta\,. \tag{5.78.1}$$

Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità, in funzione dei parametri dati.

Soluzione

Scelta come coordinata l'angolo θ, la seconda equazione cardinale

$$\frac{dL}{dt} = M \tag{5.78.2}$$

per la componente del momento angolare ortogonale al piano della figura si può scrivere

$$\frac{d}{dt} m\ell^2\dot{\theta} = -k\theta + mg\ell\sin\theta \tag{5.78.3}$$

ossia

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\left(\sin\theta - \frac{k}{mg\ell}\theta\right)\,. \tag{5.78.4}$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono ai valori di θ per i quali l'espressione tra parentesi si annulla. Possiamo determinarle graficamente studiando le intersezioni tra le curve

$$y = \sin\theta \tag{5.78.5}$$

$$y = q\theta \tag{5.78.6}$$

al variare del parametro adimensionale

$$q = \frac{k}{mg\ell}\,, \tag{5.78.7}$$

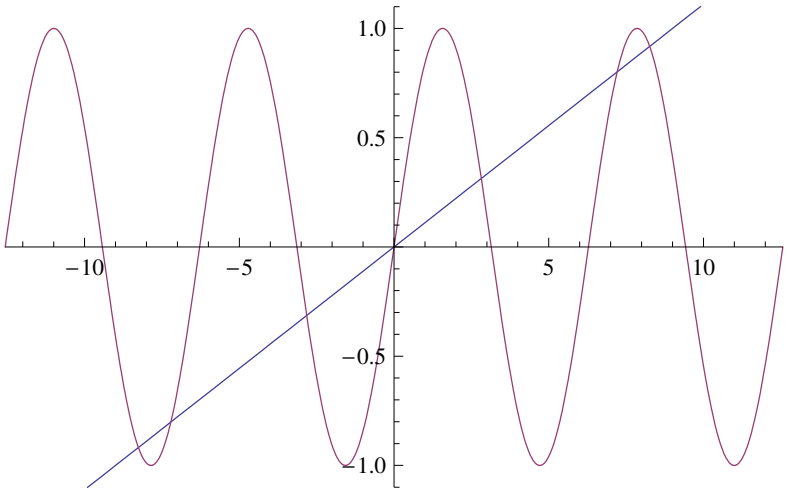
CC BY NC SA

con $q \geq 0$. Per qualsiasi valore di q abbiamo la soluzione $\theta = 0$. Per determinare la stabilità di questa configurazione di equilibrio possiamo sviluppare l'equazione del moto attorno al primo ordine intorno ad essa, $\sin\theta \simeq \theta$, ottenendo

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}(1-q)\,\theta \tag{5.78.8}$$

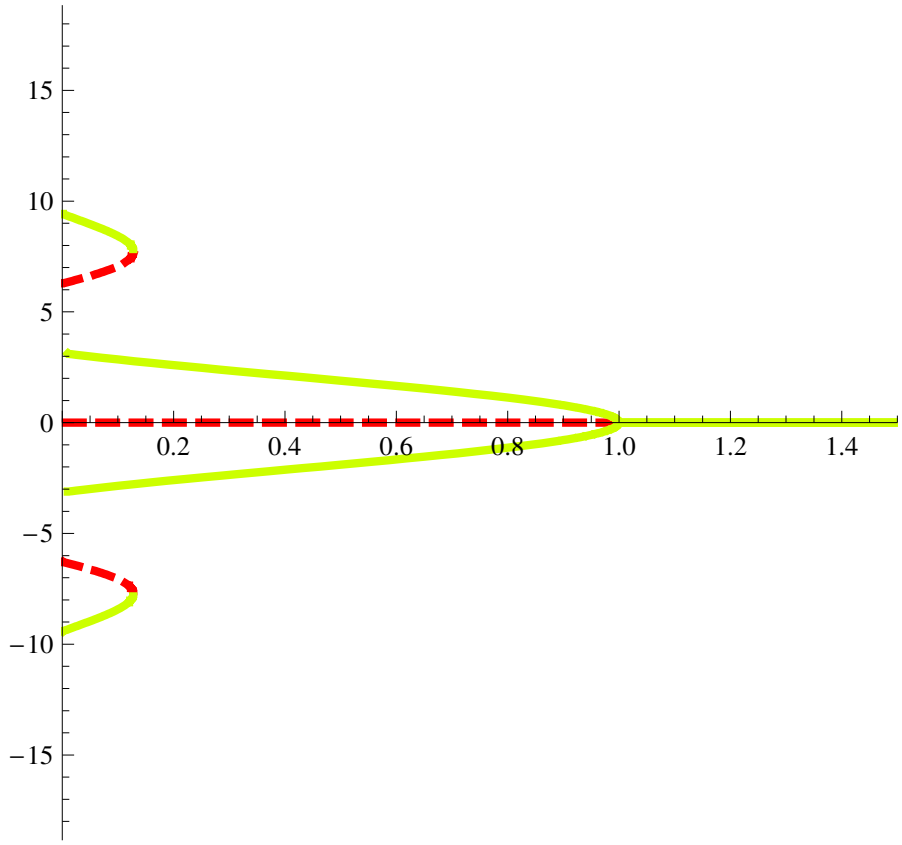
che corrisponde ad un oscillatore stabile solo quando $q > 1$.

Per $q > 1$ la posizione di equilibrio trovata è anche l'unica. Al diminuire di q sono possibili altre intersezioni, come evidente dalla Figura seguente, che corrisponde al caso $q = 1/9$.



Possiamo determinare direttamente da un grafico di questo tipo la stabilità di una posizione di equilibrio. Infatti il segno del momento applicato al sistema è dato dalla differenza tra la sinusoide e la retta. In figura, l'intersezione per $\theta = 0$ corrisponde a equilibrio instabile, le successive per $\theta > 0$ si alternano tra stabili e instabili.

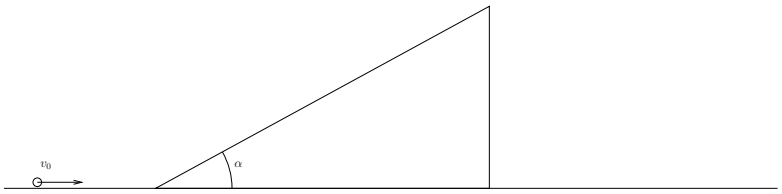
Possiamo riassumere le conclusioni nel grafico che segue. Sulle ordinate abbiamo il valore di θ all'equilibrio, sulle ascisse q.



Le soluzioni stabili sono rappresentate da una linea continua, quelle instabili da una linea tratteggiata. Abbiamo rappresentato solo le 7 posizioni di equilibrio più vicine a $\theta = 0$: da notare che le 4 più lontane corrispondono a una configurazione nella quale $|\theta| > 2\pi$.

$$\ell_2(t) = \ell_{2,0} + Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}\,. \tag{5.78.9}$$

5.79. Urto con un piano inclinato ⋆⋆



Il piano inclinato in figura, di massa M, è vincolato a muoversi su un piano orizzontale privo di attrito. Su di esso viene lanciata una pallina di massa m che si muove inizialmente nel piano con velocità v_0, e non è ad esso vincolata. Calcolare l'angolo θ che la velocità della pallina forma con l'orizzontale dopo l'urto, tenendo conto del fatto che la giunzione tra piano inclinato e piano orizzontale non è arrotondata e che l'urto avviene in un tempo molto breve.

Soluzione

L'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema si conservano. Inoltre, dato che l'urto avviene in un tempo molto breve, l'unica forza non trascurabile applicata alla pallina è la reazione normale alla superficie del piano inclinato. Durante l'urto quindi si conserverà la componente della quantità di moto della pallina parallela al piano inclinato.

Abbiamo quindi la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2}MV^2 \tag{5.79.1}$$

dove si è tenuto conto che immediatamente dopo l'urto la posizione della pallina non è cambiata, e che quindi non è necessario includere l'energia potenziale gravitazionale. Per la conservazione della quantità di moto orizzontale sarà

$$mv_0 = mv_x + MV \tag{5.79.2}$$

ed infine per la componente della quantità di moto della pallina parallela al piano inclinato

$$mv_0 \cos\alpha = m\left(v_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha\right) . \tag{5.79.3}$$

Ricavando V dalla seconda relazione abbiamo ($\gamma = M/m$)

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{\gamma}\left(v_0 - v_x\right)^2 \tag{5.79.4}$$

$$v_0 = v_x + v_y \tan\alpha \tag{5.79.5}$$

ossia

$$\left(v_x + v_y \tan\alpha\right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{\gamma}v_y^2 \tan^2\alpha\,. \tag{5.79.6}$$

Risolvendo per $\tan\theta = v_y/v_x$ otteniamo le due soluzioni

$$\tan\theta = 0 \tag{5.79.7}$$

e

$$\tan\theta = \frac{2\tan\alpha}{1-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\tan^2\alpha}\,. \tag{5.79.8}$$

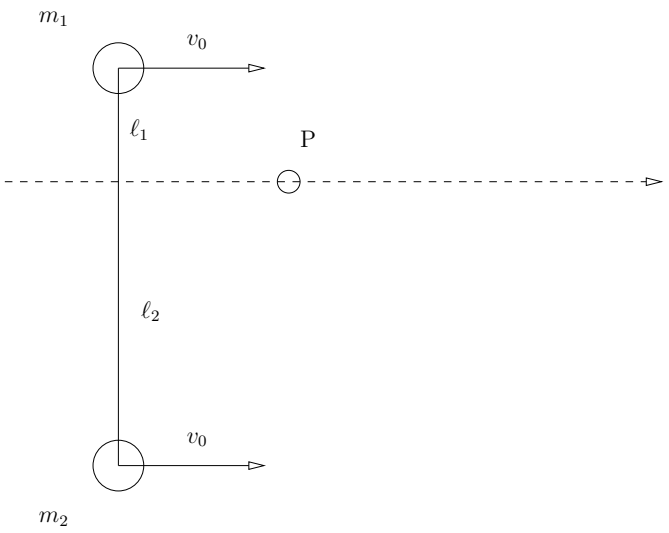
Solo quest'ultima è fisicamente accettabile. Nel caso particolare da considerare $\gamma \to \infty$, e quindi

$$\tan\theta \to \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \tan 2\alpha \tag{5.79.9}$$

cioè l'angolo di incidenza con il piano inclinato è uguale a quello di riflessione, come ci si aspetta se la pedana è ferma.

CC BY NC SA

5.80. Urto di un manubrio ⋆⋆



Il manubrio in figura è costituito da due masse puntiformi m_1 e m_2, unite da una barra di lunghezza $\ell = \ell_1 + \ell_2$ di massa trascurabile. Inizialmente si muove traslando rigidamente con velocità v_0, urta quindi un perno P posto a una distanza ℓ_1 dalla massa superiore, e vi rimane attaccato, libero però di ruotare. Calcolare la velocità angolare finale del manubrio e l'energia dissipata nell'urto.

Soluzione

Vale la conservazione del momento angolare $\vec{L}$ rispetto al perno, dato che le uniche forze esterne sono applicate in esso al manubrio, e quindi hanno braccio nullo. Consideriamo in particolare la componente di $\vec{L}$ normale al piano in cui si muove il manubrio. Inizialmente questa vale

$$-m_1 v_0 \ell_1 + m_2 v_0 \ell_2 \tag{5.80.1}$$

ed alla fine

$$m_1 \omega \ell_1^2 + m_2 \omega \ell_2^2 \tag{5.80.2}$$

dove ω è la velocità angolare finale. Equagliando queste due espressioni si ottiene

$$\omega = \frac{(m_2\ell_2 - m_1\ell_1)v_0}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\,. \tag{5.80.3}$$

Quindi il manubrio ruoterà in senzo antiorario se $m_2\ell_2 > m_1\ell_1$, in senso orario se $m_2\ell_2 < m_1\ell_1$ e non ruoterà affatto se $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$. Queste alternative corrispondono ad un urto del perno sopra, sotto o in corrispondenza del centro di massa del manubrio. L'energia dissipata si calcola come differenza tra energia cinetica iniziale e finale:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_0^2 - \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \omega^2 \tag{5.80.4}$$

ossia,

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(m_2\ell_2-m_1\ell_1\right)^2}{\left(m_1\ell_1^2+m_2\ell_2^2\right)}v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(m_1+m_2\right)\left(m_1\ell_1^2+m_2\ell_2^2\right)-\left(m_2\ell_2-m_1\ell_1\right)^2}{\left(m_1\ell_1^2+m_2\ell_2^2\right)}v_0^2 \tag{5.80.5}$$

ed infine

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2\left(\ell_1+\ell_2\right)^2}{\left(m_1\ell_1^2+m_2\ell_2^2\right)}v_0^2\,. \tag{5.80.6}$$

CC BY NC SA

5.81. Il grande attrattore ⋆⋆⋆

Supponiamo di avere a disposizione una massa M di plastilina: possiamo modellarla nella forma voluta, ma non possiamo cambiare la sua densità ρ. Vogliamo capire che forma dobbiamo dargli per rendere massima l'attrazione gravitazionale esercitata su un punto materiale di massa m.

Soluzione

Poniamo il punto materiale nell'origine di un sistema di coordinate. Qualunque sia la soluzione del problema, con una rotazione del sistema potremo allineare la forza attrattiva totale con l'asse z. Da questo segue che un elemento dM della massa di plastilina posto nalle posizione $\vec{r}$ darà un contributo utile alla forza totale uguale a

$$dF_z = -G\frac{mdM}{r^3}\vec{r}\cdot\hat{z}$$

dato che la somma di tutte le componenti perpendicolari a $\hat{z}$ si dovrà annullare. Usando coordinate sferiche questo significa

$$dF_z = -G\frac{mdM}{r^2}\cos\theta$$

Possiamo spostare l'elemento dM mantenendo dF_z costante se ci muoviamo sulla superficie

$$r^2 = -K\cos\theta$$

dove K è una costante definita da

$$K^{-1} = \frac{1}{Gm}\frac{dF_z}{dM}$$

Chiaramente K^{-1} è proporzionale all'importanza del contributo di dM. Al variare di K avremo diverse superfici, invarianti per rotazioni attorno all'asse z. Alcune di queste sono rappresentate in Figura 5.21.

Avendo a disposizione una massa M totale converrà iniziare a riempire le superfici a K più piccolo (ma positivo). Per determinare il valore di K corrispondente alla superficie più grande completamente riempita basterà imporre che la massa totale in essa contenuta sia quella a disposizione, cioè

$$\rho\int dV = M$$

ossia

$$\rho\int\int\int r^2 dr d\cos\theta d\phi = M$$

Integriamo su ϕ e scriviamo esplicitamente i limiti di integrazione di quanto resta

$$2\pi\rho\int_{-1}^{0} d\cos\theta\int_0^{\sqrt{-K\cos\theta}} dr\, r^2 = M$$

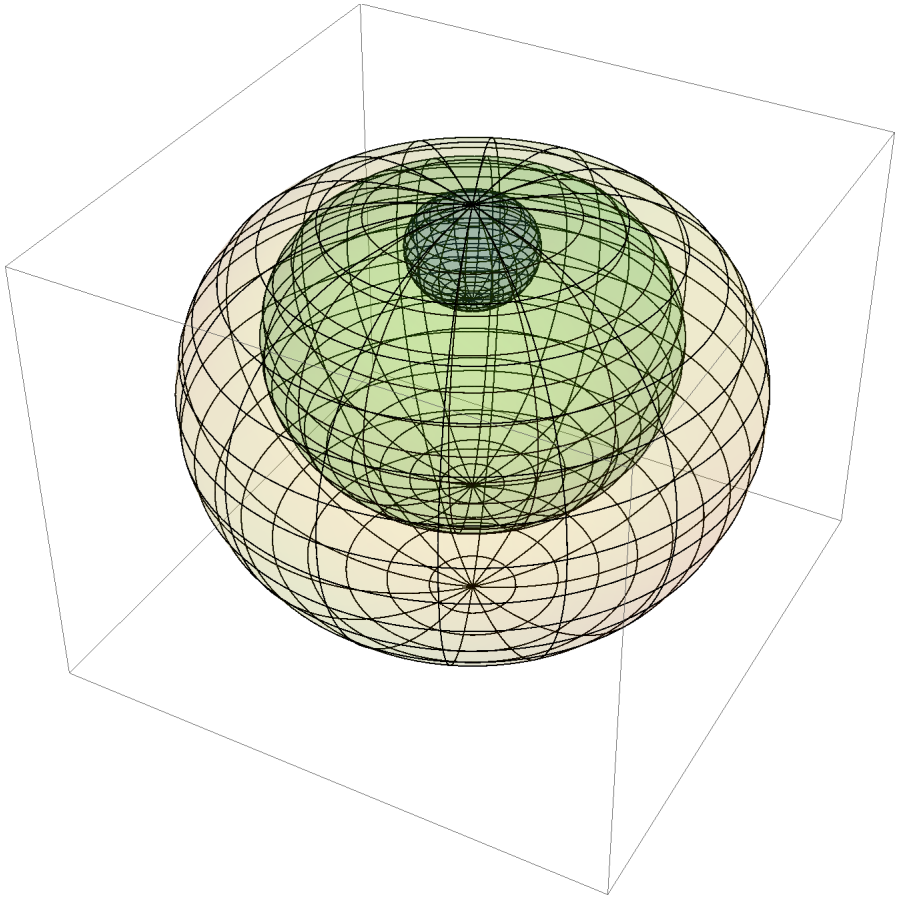


Figura 5.21.: Le superfici $r^2 = -K\cos\theta$. Dalla più piccola alla più grande corrispondono a $K = 1/10, 1, 2$. L'origine del sistema di riferimento è nel punto in comune.

da cui

$$\frac{4}{15}\pi\rho K^{3/2} = M$$

Otteniamo infine che K scala come la potenza $2/3$ del volume della plastilina

$$K = \left(\frac{15M}{4\pi\rho}\right)^{2/3} = \left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{2/3}$$

Possiamo infine calcolare la forza attrattiva ottenuta, scrivendo

$$\begin{aligned}
F_z &= -Gm \int \frac{dM}{r^2} \cos\theta \\
&= -Gm\rho \int \frac{\cos\theta}{r^2} r^2 dr d\cos\theta d\phi \\
&= -2\pi Gm\rho \int_{-1}^{0} \cos\theta d\cos\theta \int_0^{\sqrt{-K\cos\theta}} dr \\
&= \frac{4\pi}{5} Gm\rho\sqrt{K} \\
&= \frac{4\pi G}{5} m\rho \left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

Possiamo confrontare questo risultato con ciò che si otterrebbe con una distribuzione sferica di plastilina,

$$F_z = \frac{GmM}{R^2} = \frac{4\pi G}{5} m\rho \left(\frac{V}{4\pi}\frac{125}{9}\right)^{1/3}$$

che risulta minore di un fattore $(25/27)^{1/3} \simeq 0.97$. Per maggiore chiarezza riportiamo in Figura 5.22 le sezioni trasversali delle superfici.

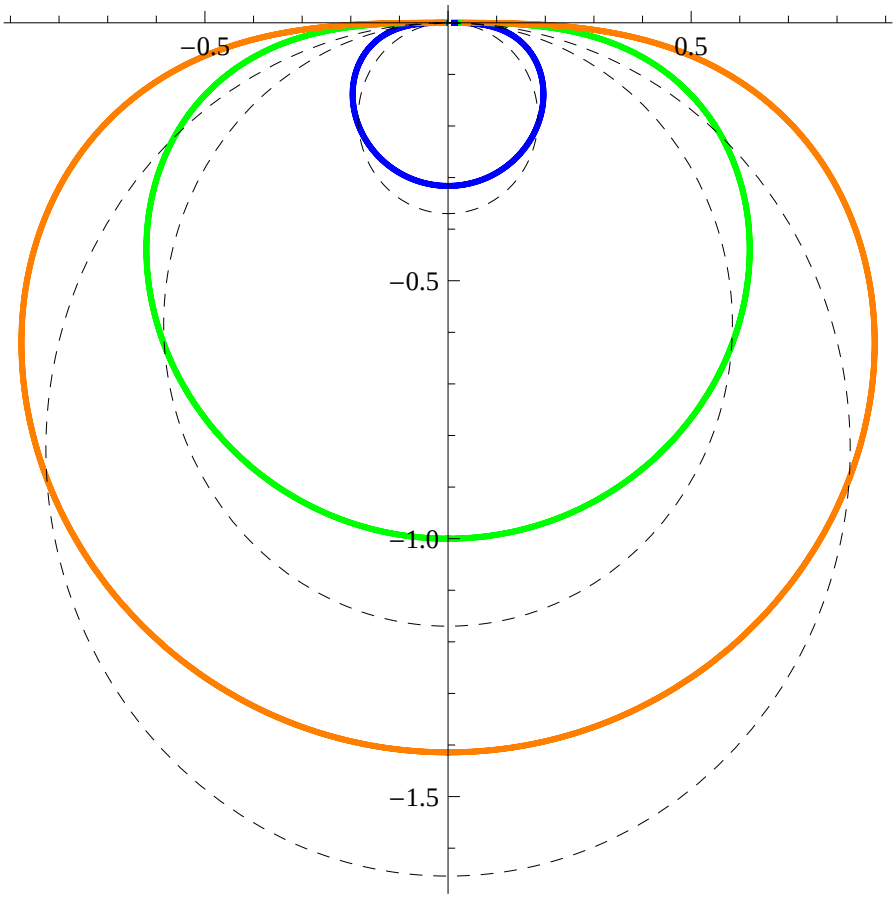


Figura 5.22.: Le sezioni trasverse delle superfici riportate in Figura 5.21 per $K = 1/10$ (blu), $K = 1$ (verde) e $K = 10$ (arancio). Le linee tratteggiate corrispondono alle sfere di uguale volume.

5.82. Razzo in un campo gravitazionale costante ⋆⋆

Studiare il moto di un razzo in un campo gravitazionale costante. La massa iniziale del missile è M_0. Il sistema di propulsione emette una massa costante di gas Γ per unità di tempo, ad una velocità $-u$ relativa al razzo. Determinare in particolare sotto quali condizioni il razzo riesce a sollevarsi da terra.

Soluzione

La quantità di moto del sistema al tempo t, escludendo il gas espulso fino a quell'istante, è

$$P(t) = M(t)V(t)$$

La quantità di moto al tempo $t + dt$ vale invece, tenendo conto del gas espulso tra t e $t + dt$,

$$P(t + dt) = [M(t) - \Gamma(t)dt]\, V(t + dt) + [-u + V(t)]\, \Gamma(t)dt$$

dove abbiamo considerato una massa espulsa per unità di tempo $\Gamma = -\dot{M}$ non necessariamente costante. La variazione della quantità di moto è uguale all'impulso delle forze esterne

$$P(t + dt) - P(t) = -M(t)gdt$$

da cui

$$[M(t) - \Gamma(t)dt]\left[V(t) + \dot{V}(t)dt\right] + [-u + V(t)]\, \Gamma(t)dt - M(t)V(t) = -M(t)gdt$$

Sviluppando e omettendo i termini del secondo ordine si ottiene

$$M(t)\dot{V}(t) = \Gamma(t)u - M(t)g$$

Vediamo che il razzo si solleverà dal suolo se

$$\Gamma(0)u > M_0 g$$

Passiamo adesso all'integrazione delle equazioni del moto. Abbiamo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{u\Gamma(t)}{M_0 - \int_0^t \Gamma(t')dt'} - g$$

ed integrando otteniamo

$$V(t) = \int_0^t \frac{u\Gamma(t')}{M_0 - \int_0^{t'} \Gamma(t'')dt'} dt' - gt$$

che posto di conoscere $\Gamma(t)$ e di saper calcolare gli integrali al membro destro da una soluzione completa del problema. Considerando Γ costante in particolare abbiamo

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t \frac{u\Gamma}{M_0 - \Gamma t'} dt' - gt \\ &= -u \log\left(1 - \frac{\Gamma t}{M_0}\right) - gt \end{aligned}$$

5.83. Razzo vincolato ⋆⋆

Un razzo di massa iniziale M_0 è fissato ad un estremo di un'asta di massa trascurabile e lunghezza ℓ, perpendicolarmente ad essa, come in Figura 5.23. L'asta può ruotare liberamente attorno all'altro estremo in un piano orizzontale. All'accensione il razzo è fermo, e da quel momento il gas viene espulso con una velocità relativa costante $-u$. Determinare la velocità del razzo in funzione della massa di gas espulso.

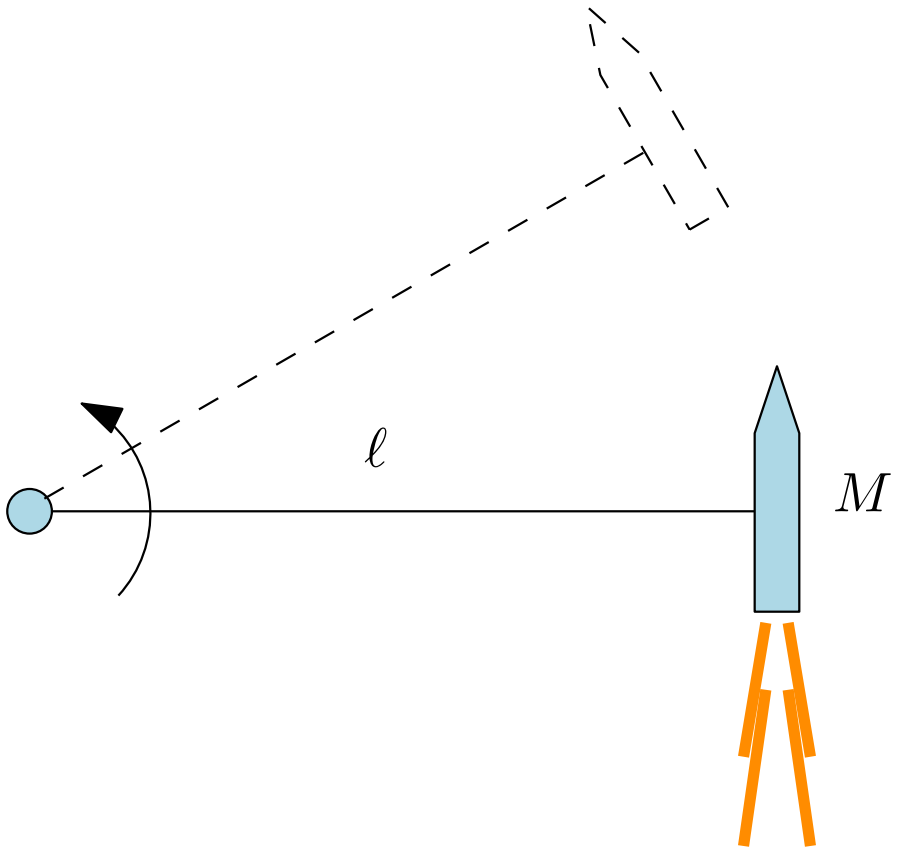


Figura 5.23.: Razzo vincolato.

Soluzione

Nella situazione considerata il momento angolare del sistema composto dall'asta, dal razzo e dal gas espulso si conserva, dato che il vincolo non può esercitare un momento di forza. Calcoliamo il momento angolare del missile ad un dato istante, tenendo conto del gas non ancora espulso:

$$L = M\ell V$$

Se ad un istante successivo calcoliamo il momento angolare del missile e del gas espulso nel frattempo, dobbiamo trovare lo stesso valore. Indicando con dM la variazione della

massa del missile abbiamo

$$L = (M + dM)\,\ell\,(V + dV) - dM\ell\,(V - u)$$

ed uguagliando troviamo, trascurando variazioni del secondo ordine,

$$MdV\ell + dM\ell u = 0$$

ossia

$$\int_{V(0)}^{V(m)} dV = -u \int_{M_0}^{M_0 - m} \frac{dM}{M}$$

dove abbiamo indicato con m la massa di gas espulso. Integrando troviamo

$$V(m) = V(0) - u \log\left(1 - \frac{m}{M_0}\right)$$

5.84. Razzo a più stadi ⋆⋆

Un razzo non può chiaramente utilizzare tutta la sua massa come propellente. Supponiamo che il rapporto tra la massa totale e quella utilizzabile sia $\gamma < 1$, e che la velocità di espulsione relativa al missile sia $-u$. La strategia più semplice per un razzo di massa iniziale M_0 è quella di espellere tutta la massa disponibile γM_0, raggiungendo una certa velocità finale.

Un'altra possibilità è quella di dividere il missile in due stadi di massa $M_0/2$. Si espelle quindi tutto la massa $\gamma M_0/2$ del primo stadio, raggiungendo una velocità V_1. A questo punto quanto rimane del primo stadio (massa $(1-\gamma)M_0/2$) viene abbandonato e si procede espellendo la rimanente massa disponibile (ancora $\gamma M_0/2$). Calcolare la velocità finale raggiunta in questo caso, e dire se è maggiore o minore di quella precedente.

Soluzione

Utilizzando la prima strategia si raggiunge una velocità finale data da

$$V_f = -u \log \frac{(1-\gamma)\, M_0}{M_0} = -u \log (1-\gamma)$$

Con la seconda strategia al momento dell'abbandono del primo stadio si ha

$$V_1 = -u \log \frac{(1-\gamma/2)\, M_0}{M_0}$$

e al termine avremo

$$\begin{aligned} V_f' &= -u \log \frac{(1-\gamma/2)\, M_0}{M_0} - u \log \frac{(1-\gamma)\, M_0/2}{M_0/2} \\ &= -u \log \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - u \log (1-\gamma) \end{aligned}$$

che è maggiore di quella ottenuta nel primo caso di

$$V_f' - V_f = -u \log \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$$

CC BY NC SA

5.85. Forze di marea ⋆⋆

Un osservatore libero di muoversi sotto l'azione di un campo gravitazionale esterno indipendente dalla posizione non avverte nessun disagio, per quanto intenso il campo possa essere. La ragione è che ogni elemento del suo corpo viene accelerato nello stesso modo. In un campo gravitazionale dipendente dalla posizione questo non è vero: la forza che agisce sui piedi può essere diversa da quella che agisce sulla testa e il corpo viene posto in tensione. L'effetto in condizioni normali è piccolo: stimate la tensione subita dal vostro corpo in caduta libera sulla superficie terrestre (trascurate l'attrito dell'aria) e confrontatela con quella che, secondo voi, dovrebbe essere una tensione dolorosa.

Soluzione

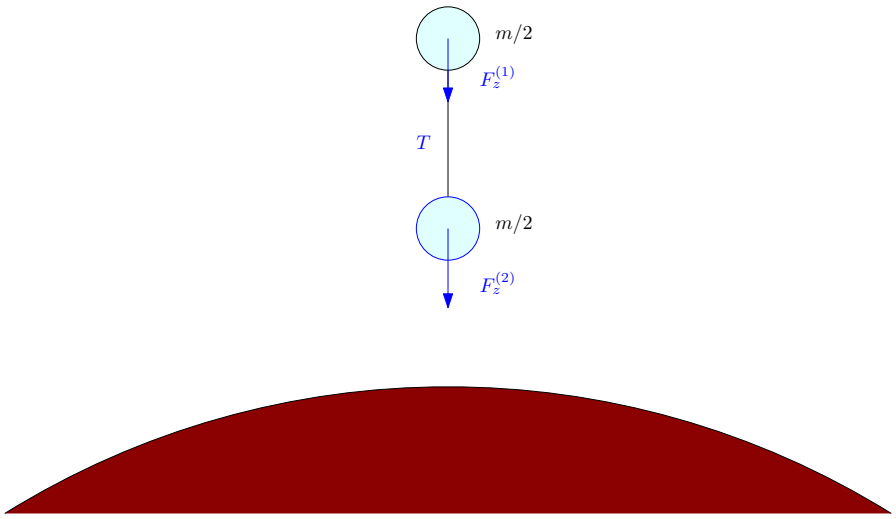


Figura 5.24.: Calcolo della tensione su un corpo in un campo gravitazionale.

Consideriamo il semplice modello in Figura 5.24. La massa è distribuita sui due corpi (testa e piedi), uniti da una sbarra che per semplicità immaginiamo priva di massa. L'equazione del moto del primo corpo è

$$m_1 a = F_z^{(1)} - T$$

e per il secondo

$$m_2 a = F_z^{(2)} + T$$

dove si è tenuto conto che l'accelerazione è la stessa, e T è la tensione. A noi interessa la tensione, che vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{m_1}F_z^{(1)} - \frac{1}{m_2}F_z^{(2)}\right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(-g\left(z\right) + g\left(z+h\right)\right) \end{aligned}$$

dove

$$g(z) = -\frac{GM_T}{z^2}$$

è l'accelerazione di gravità ad una distanza z dal centro della terra (se z è maggiore del raggio terrestre R_T) e M_T è la massa della terra. In prima approssimazione quindi

$$\begin{aligned} T &\simeq \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial g}{\partial z}h = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{3GM_T}{z^3}h \\ &= 3\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{GM_T}{z^2}\right)\left(\frac{h}{z}\right) \\ &\simeq 3\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(\frac{h}{R_T}\right) \end{aligned}$$

e ponendo $m_1 = m_2 = 40\,\mathrm{kg}$, $h = 1.8\,\mathrm{m}$ otteniamo

$$T \simeq 3 \times 20\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \times \frac{1.8\,\mathrm{m}}{6.3 \times 10^6\,\mathrm{m}} \simeq 1.7 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

La tensione è depressa rispetto alla forza peso di un fattore molto piccolo, il rapporto h/R_T tra l'altezza del corpo e il raggio della terra. Per avere un termine di confronto, l'ordine di grandezza di una tensione dolorosa è lo stesso del peso del corpo, $\sim 10^3\,\mathrm{N}$.

CC BY NC SA

5.86. Massima forza di marea ⋆⋆⋆

Avendo a disposizione un volume V della stessa plastilina di densità ρ del problema 5.81 la si vuole disporre, questa volta, in modo da rendere massima la variazione

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

in un punto dato, dove F_z indica la componente z della forza attrattiva generata dalla plastilina. Una possibile applicazione è una versione scientificamente avanzata del banco di stiramento in Figura 5.25.

Figura 5.25.: Il banco di stiramento, uno strumento di tortura usato nel medio evo, ma di origini ben più antiche.

Determinare la forma da dare alla plastilina, e stimare la massa necessaria a rendere l'apparato utile al suo scopo, considerando $\rho = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Conviene utilizzare un materiale più o meno denso?

Soluzione

Immaginiamo una massa m all'origine di un sistema di coordinate. La forza che una massa dM posta in $\vec{r}$ esercita su di essa sarà

$$\vec{F} = \frac{GmdM}{r^3}\vec{r}$$

CC BY NC SA

e quindi

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{GmdM}{r^3} z \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} &= GmdM \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5} \right) \end{aligned}$$

Esprimiamo quest'ultima quantità in coordinate sferiche:

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = GmdM \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right)$$

Analogamente a quanto visto nell'esercizio 5.81 il contributo della massa dM a $\partial F_z/\partial z$ sarà lo stesso per tutti i punti appartenenti alla superficie

$$r^3 = K\left(1 - 3\cos^2\theta\right)$$

dove

$$K = GmdM \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right)^{-1}$$

è una costante tanto più piccola quanto maggiore è il contributo. Per rendere massimo $\partial F_z/\partial z$ dovremo determinare la superficie capace di contenere tutta la massa disponibile corrispondente al minimo valore positivo di K.

Notiamo che il massimo valore di $\partial F_z/\partial z$ corrisponde ad una azione di compressione esercitata sul corpo posto vicino all'origine (la testa a $z > 0$ viene spinta verso l'alto, i piedi a $z < 0$ verso il basso).

Per ottenere una trazione dobbiamo chiederci invece quale sia la configurazione corrispondente ad un $\partial F_z/\partial z$ massimo in valore assoluto ma negativo. In questo caso è sufficiente trovare la superficie capace di contenere tutta la massa disponibile corrispondente al valore di K più piccolo in valore assoluto, ma negativo. Il grafico per le superfici corrispondenti ad entrambi i casi (per $K = 1$ e $K = -1$) sono riportati in Figura 5.26.

Analogamente a quanto visto nell'esercizio 5.81 sommiamo i contributi di tutta la massa contenuta all'interno di una superficie data. Questo significa per $K > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial z} &= Gm\rho \int \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right) dV \\ &= 2\pi Gm\rho \int d\cos\theta \int_0^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} dr \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r} \right) \\ &= 2\pi Gm\rho \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right) \int_0^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

Una particolarità di questa espressione è che l'integrale sulla coordinata radiale è divergente. Il significato di tutto questo è che il contributo della massa vicina a $r = 0$ è dominante, e questo permette di ottenere un valore grande quanto vogliamo di $\partial F_z/\partial z$

CC BY NC SA

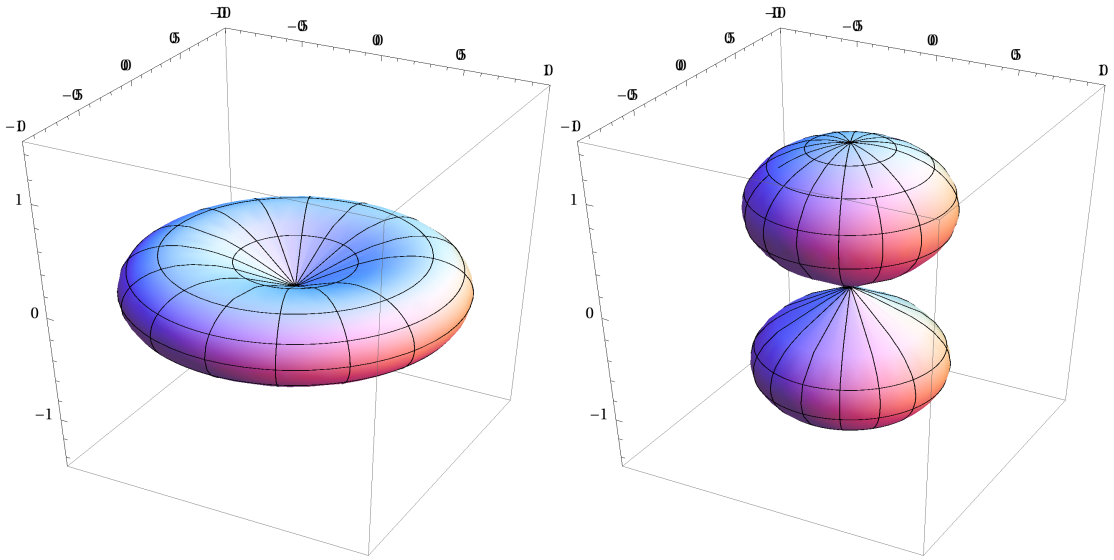


Figura 5.26.: A sinistra, la distribuzione di massa che rende massimo e positivo $\partial F_z/\partial z$ nell'origine. A destra, la distribuzione che rende massimo in valore assoluto ma negativo $\partial F_z/\partial z$. La prima superficie corrisponde a $K = 1$, la seconda a $K = -1$.

con qualsiasi massa a disposizione. Sembra quindi che sia possibile costruire un banco di stiramento estremamente efficace a poco prezzo. In realtà è chiaro che in pratica questo non funziona: per un utilizzo pratico abbiamo bisogno di una regione sufficientemente ampia priva di massa in cui alloggiare il torturato. Quindi l'integrale precedente deve essere modificato in

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = 2\pi G m \rho \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right) \int_{r_{min}}^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} \frac{dr}{r}$$

che non è più divergente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{2\pi}{3} G m \rho \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \left(1 - 3\cos^2\theta\right) \log \frac{K\left(1 - 3\cos^2\theta\right)}{r_{min}^3} \\ &= \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} G m \rho \left(\log \frac{4K}{r_{min}^3} - \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

CC BY NC SA

Per calcolare K valutiamo il volume complessivo

$$\begin{aligned} V &= \int d\phi \int d\cos\theta \int r^2 dr \\ &= 2\pi \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} d\cos\theta \int_{r_{min}}^{\left[K\left(1-3\cos^2\theta\right)\right]^{1/3}} r^2 dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left[K\left(1-3\cos^2\theta\right) - r_{min}^3\right] d\cos\theta \\ &= \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} K - \frac{4\pi r_{min}^3}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

da cui

$$K = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} V + \frac{3}{2} r_{min}^3 \simeq \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} V$$

Per ottenere un banco efficace dovremo avere

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} r_{min} > mg$$

e quindi

$$\frac{G\rho r_{min}}{g} \left[\log\left(\frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \frac{V}{r_{min}^3} + 6\right) - \frac{5}{3}\right] > \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}$$

Dato che il fattore

$$\alpha = \frac{G\rho r_{min}}{g} \simeq 7 \times 10^{-9} \left(\frac{\rho}{10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}\right) \left(\frac{r_{min}}{1\,\mathrm{m}}\right)$$

è molto piccolo, è chiaro che per ottenere il risultato voluto dovremo avere un volume totale enormemente più grande di r_{min}^3, dato che il logaritmo dovrà essere $O\left(\alpha^{-1}\right)$, quindi il dispositivo è del tutto irrealizzabile. Aumentare la densità può aiutare: all'interno di una stella di neutroni $\rho \simeq 10^{18}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ e quindi $\alpha \simeq 7 \times 10^6$. In questo caso, supponendo di poter applicare l'espressione per la forza gravitazionale di Newton, sarebbe sufficiente avere

$$V \gtrsim 2 r_{min}^3$$

Considerazioni analoghe si possono fare nel caso $K < 1$.

5.87. Pendolo non ideale ⋆⋆

Un punto materiale di massa m è sospeso ad un punto fisso da una molla con lunghezza di riposo ℓ_0 e costante elastica k. Per semplicità si può supporre che il moto avvenga in un piano verticale. Studiare le piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione

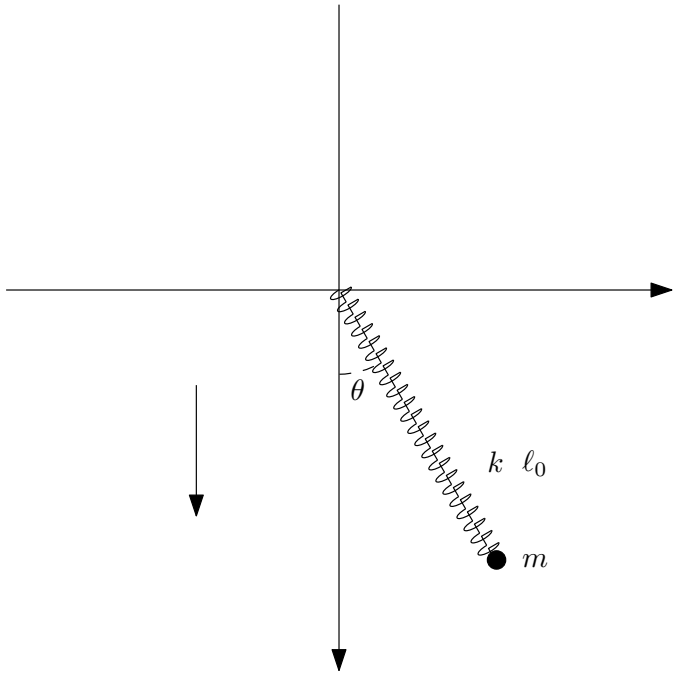


Figura 5.27.: Coordinate polari utilizzate per descrivere il pendolo.

Conviene utilizzare coordinate polari per specificare la posizione del punto materiale rispetto all'origine. L'estremo opposto della molla è fissato in quest'ultima (Figura 5.27). Possiamo allora scrivere le equazioni del moto nella direzione radiale e tangenziale nella forma

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = mg\cos\theta - k\left(r - \ell_0\right) \tag{5.87.1}$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = -mg\sin\theta \tag{5.87.2}$$

La posizione di equilibrio si trova annullando nelle equazioni precedenti velocità e accelerazioni. Deve quindi essere

$$\sin\theta = 0 \tag{5.87.3}$$

$$\cos\theta = \frac{k}{mg}\left(r - \ell_0\right) \tag{5.87.4}$$

e troviamo le due soluzioni

$$(r,\theta) = \left(\ell_0 - \frac{mg}{k}, \pi\right) \tag{5.87.5}$$

e

$$(r,\theta) = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}, 0\right) \tag{5.87.6}$$

Studiamo piccole oscillazioni attorno alla prima introducendo due nuove coordinate

$$\theta = \pi + \delta\theta \tag{5.87.7}$$

$$r = \ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r \tag{5.87.8}$$

legate agli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio scelta. Sostituendo nelle equazioni del moto abbiamo

$$m\left[\delta\ddot{r} - \left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r\right)\delta\dot{\theta}^2\right] = mg\cos(\pi+\delta\theta) - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r - \ell_0\right) \tag{5.87.9}$$

$$m\left[\left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + \delta r\right)\delta\ddot{\theta} + 2\delta\dot{r}\delta\dot{\theta}\right] = -mg\sin(\pi+\delta\theta) \tag{5.87.10}$$

Trascurando tutte le quantità di ordine maggiore del primo rispetto alle piccole variazioni e utilizzando le approssimazioni $\sin(\pi+\delta\theta) \simeq -\delta\theta$ e $\cos(\pi+\delta\theta) \simeq -1$ otteniamo

$$m\delta\ddot{r} = -k\delta r \tag{5.87.11}$$

$$m\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)\delta\ddot{\theta} = mg\delta\theta \tag{5.87.12}$$

La seconda equazione non corrisponde a piccole oscillazioni se, come supporremo, $\ell_0 > mg/k$. In effetti la sua soluzione generale è del tipo

$$\delta\theta(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} \tag{5.87.13}$$

con

$$k = \sqrt{\frac{g}{\ell_0 - \frac{mg}{k}}} \tag{5.87.14}$$

e questo permette di concludere che il punto di equilibrio studiato non è stabile.

Passiamo allora alla seconda soluzione di equilibrio. Questa volta le "piccole" coordinate saranno definite da

$$\theta = \delta\theta \tag{5.87.15}$$

$$r = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \delta r \tag{5.87.16}$$

e sostituendo come nel caso precedente nelle equazioni del moto troviamo

$$m\left[\delta\ddot{r} - \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} + \delta r\right)\delta\dot{\theta}^2\right] = mg\cos(\delta\theta) - k\left(\ell_0 + \frac{mg}{k} + \delta r - \ell_0\right) \tag{5.87.17}$$

$$m\left[\left(\ell_0 + \frac{mg}{k} + \delta r\right)\delta\ddot{\theta} + 2\delta\dot{r}\delta\dot{\theta}\right] = -mg\sin(\delta\theta) \tag{5.87.18}$$

Questa volta utilizzeremo le approssimazioni $\sin\delta\theta \simeq \delta\theta$ e $\cos\delta\theta \simeq 1$. Trascurando nuovamente prodotti di quantità piccole avremo

$$m\delta\ddot{r} = -k\delta r \tag{5.87.19}$$

$$m\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)\delta\ddot{\theta} = -mg\delta\theta \tag{5.87.20}$$

Entramble le equazioni descrivono oscillatori armonici, ed hanno per soluzioni generali

$$\delta r(t) = A\cos\omega_r t + B\sin\omega_r t \tag{5.87.21}$$

$$\delta\theta(t) = C\cos\omega_\theta t + D\sin\omega_\theta t \tag{5.87.22}$$

con

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.87.23}$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{\ell_0 + \frac{mg}{k}}} \tag{5.87.24}$$

Abbiamo quindi una oscillazione radiale, la cui frequenza dipende dalla costante di richiamo della molla, e una oscillazione tangenziale. Per la seconda la frequenza è identica a quella di un pendolo di lunghezza $\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}$, cioè alla lunghezza della molla nella posizione di equilibrio.

Le due oscillazioni sono indipendenti, e nel limite $k \to \infty$, che ci aspettiamo corrisponda al caso di un filo inestensibile, la frequenza di oscillazione radiale tende pure all'infinito, mentre quella tangenziale diviene la frequenza di un pendolo di lunghezza ℓ_0.

5.88. Moto di una scodella ⋆⋆

Una scodella di massa M e sezione S può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale $V_x > 0$ e una verticale $V_y < 0$. Inoltre la massa di acqua che arriva su una superficie S fissa sul terreno è costante e vale Γ.

Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, e che questa si inizialmente ferma, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella.

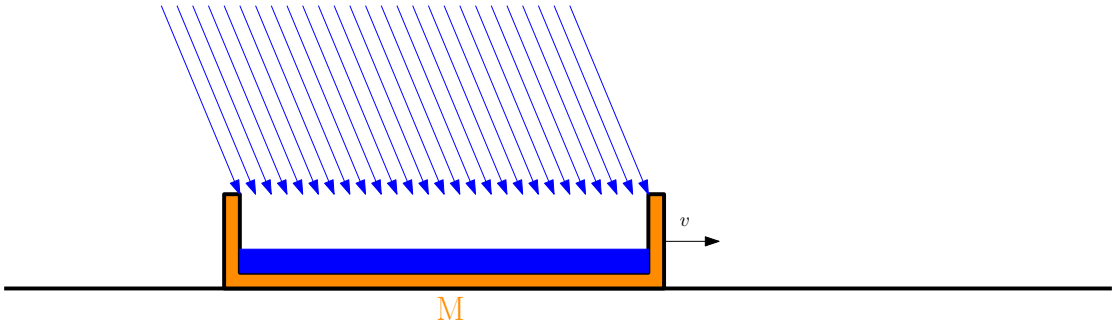


Figura 5.28.: La scodella ha una sezione orizzontale S, la pioggia cade su di essa con un angolo determinato dalle componenti orizzontali e verticali della velocità. Se la scodella è ferma, la massa di acqua raccolta in un'unità di tempo è costante e vale Γ.

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto la massa di pioggia raccolta per unità di tempo da una scodella che si sta muovendo con velocità v. Questa è la massa contenuta nel cilindro rappresentato dall'insieme dei vettori in Figura 5.28, con base S e altezza uguale alla componente verticale della velocità della pioggia. Dato che quest'ultima non cambia al variare della velocità della scodella, otterremo ancora Γ.

Scriviamo la quantità di moto della scodella al tempo $t + dt$. Esso sarà dato da

$$P = (M + m(t + dt))\, v(t + dt)$$

dove $m(t + dt)$ è la pioggia raccolta a quell'istante. Al tempo t questa dovrà essere uguale alla quantità di moto della scodella più quella (orizzontale) della pioggia raccolta nell'intervallo dt successivo:

$$P = (M + m(t))\, v(t) + \Gamma V_x dt$$

Eguagliando queste due espressioni troviamo

$$(M + m(t))\, v(t) + \Gamma V_x dt = (M + m(t + dt))\, v(t + dt)$$

Usando il fatto che $m(t+dt) = m(t) + \Gamma dt$ possiamo scrivere

$$(M + m(t))\, v(t) + \Gamma V_x dt = (M + m(t) + \Gamma dt)\,(v(t) + \dot{v}(t)dt)$$

ossia, trascurando i termini di ordine superiore al primo

$$(M + m)\,\dot{v} = \Gamma\,(V_x - v)$$

A questo punto possiamo scrivere ($\Gamma = dm/dt$)

$$(M + m)\,\Gamma \frac{dv}{dm} = \Gamma\,(V_x - v)$$

che si può integrare direttamente:

$$\int_0^{v(m)} \frac{1}{V_x - v'} dv' = \int_0^m \frac{1}{M + m'} dm'$$

ottenendo

$$-\log \frac{V_x - v(m)}{V_x} = \log \frac{M + m}{M}$$

e quindi

$$v(m) = \frac{m}{M + m} V_x$$

Questa soluzione fornisce la velocità della scodella in funzione della massa della pioggia raccolta. Come si vede per grandi valori di m $v \to V_x$: questo si interpreta facilmente tenendo condo che quando $v = V_x$ la pioggia cade verticalmente nel sistema di riferimento solidale con la scodella, che diviene anche un sistema di riferimento inerziale. Notanto che $m = \Gamma t$ possiamo anche scrivere la velocità della scodella in funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{\Gamma t}{M + \Gamma t} V_x$$

5.89. Urto contro una sfera ⋆⋆⋆

Dei proiettili, schematizzabili come punti materiali, si muovono con velocità $\vec{v} = -v_0\hat{z}$ e sono distribuiti uniformemente, nel senso che il numero di proiettili che attraversano una superficie qualsiasi ortogonale all'asse $\hat{z}$ è dato da

$$N = \Phi S \Delta t$$

dove S è l'area della superficie, Φ una costante e Δt l'intervallo di tempo considerato. I proiettili rimbalzano elasticamente su una sfera di raggio r fissa nell'origine del sistema di coordinate. Calcolare il numero di urti che avvengono in un secondo e mostrare che i proiettili vengono deviati uniformemente in tutte le direzioni, nel senso che i proiettili deviati che attraversano una qualsiasi parte di una superficie sferica di raggio $R \gg r$ è data da

$$N' = \Phi' S' \Delta t$$

Nella formula precedente S' è l'area della parte di superficie sferica considerata e Φ' è una costante. Calcolare inoltre Φ'.

Soluzione

Un proiettile urterà la sfera se si troverà all'interno del cilindro di raggio r avente con l'asse nella direzione $\hat{z}$. Tante particelle attraverseranno una sezione trasversa di questo cilindro, tanti saranno gli urti. Quindi avremo

$$N_{urti} = \Phi \pi r^2$$

urti al secondo. Notare che il numero di particelle che attraversano la sezione trasversa è anche il numero di particelle contenute nel cilindro di base πr^2 e altezza $v_0 \Delta t$, quindi $N_{urti} = \rho v_0 \pi r^2$ e $\Phi = \rho v_0$ dove ρ è la densità di volume dei proiettili.

Nell'urto elastico il proiettile viene deviato specularmente. Supponiamo infatti che $\hat{n}$ sia il versore normale alla superficie della sfera nel punto di impatto, abbiamo due leggi di conservazione. L'energia, dato che l'urto è elastico

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_f^2$$

e la quantità di moto del proiettile parallela alla superficie, che possiamo ottenere sottraendo alla quantità di moto totale quella perpendicolare alla superficie, $\vec{p}_\perp = m\vec{v}_\perp = m\left(\vec{v} \cdot \hat{n}\right)\hat{n}$

$$\vec{p}_\parallel = m\vec{v}_\parallel = m\left[\vec{v} - \left(\vec{v} \cdot \hat{n}\right)\hat{n}\right]$$

In questo caso si tratta in realtà di due quantità conservate, dato che $\vec{p}_\parallel$ ha due componenti indipendenti. Abbiamo quindi le equazioni

$$\begin{aligned} \vec{v}_{0\parallel} &= \vec{v}_{f\parallel} \\ v_0^2 &= v_f^2 \end{aligned}$$

Se separiamo le velocità in componenti perpendicolari e parallele la conservazione dell'energia da

$$\left(\vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0\parallel}\right)^2 = \left(\vec{v}_{f\perp} + \vec{v}_{f\parallel}\right)^2$$

e quindi, sviluppando e tenendo conto che componenti parallele e perpendicolari sono ortogonali tra loro,

$$v_{0\perp}^2 + v_{0\parallel}^2 = v_{f\perp}^2 + v_{f\parallel}^2$$

Usando la seconda legge di conservazione troviamo quindi

$$v_{0\perp}^2 = v_{f\perp}^2$$

cioè

$$\vec{v}_{f\perp} = \pm\vec{v}_{0\perp}$$

In quest'ultimo passaggio abbiamo potuto derivare l'uguaglianza (a meno di un segno) dei vettori dall'uguaglianza dei moduli dato che la direzione di un vettore perpendicolare alla superficie è fissato univocamente. In conclusione

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{f\parallel} + \vec{v}_{f\perp} = \vec{v}_{0\parallel} \pm \vec{v}_{0\perp}$$

Entrambe le velocità finali soddisfano le condizioni di conservazione che abbiamo posto, ma quella con il segno positivo (corrispondente ad una velocità inalterata) non sono rilevanti per il nostro problema. Abbiamo quindi esplicitamente

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{0\parallel} - \vec{v}_{0\perp} = \vec{v}_0 - 2\left(\vec{v}_0 \cdot \hat{n}\right)\hat{n}$$

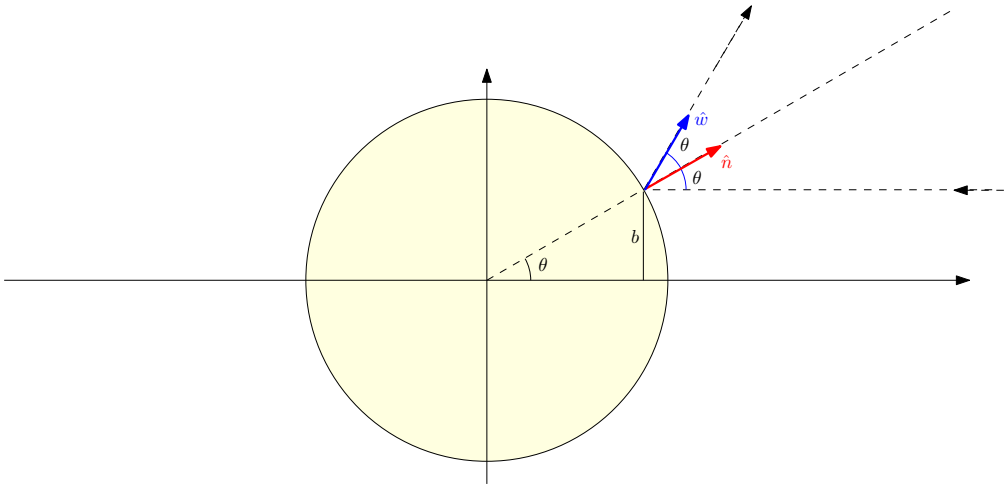


Figura 5.29.: La relazione tra particelle entranti e particelle uscenti. La particella si avvicina alla sfera muovendosi parallelamente all'asse z, ad una distanza b da esso.

Questa è la legge di riflessione speculare: la traiettoria dopo l'urto giace nel piano determinato dalla traiettoria prima dell'urto e dalla normale $\hat{n}$. Inoltre l'angolo tra la

traiettoria e la normale è lo stesso prima e dopo l'urto. Se utilizziamo coordinate sferiche vediamo che la traiettoria della particella dopo l'urto è data da in funzione del parametro $s > 0$ da

$$\vec{r}' = r\hat{n} + s\hat{w}$$

dove $\hat{n}$ è il versore radiale nel punto di impatto,

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mentre $\hat{w}$ è nella direzione del moto dopo l'urto. Dalla costruzione in Figura 5.29 vediamo che possiamo scrivere $\hat{w}$ nella forma

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} \sin 2\theta\cos\phi \\ \sin 2\theta\sin\phi \\ \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

e che $b = r\sin\theta$, detta b la distanza tra la traiettoria iniziale della particella e l'asse $\hat{z}$.

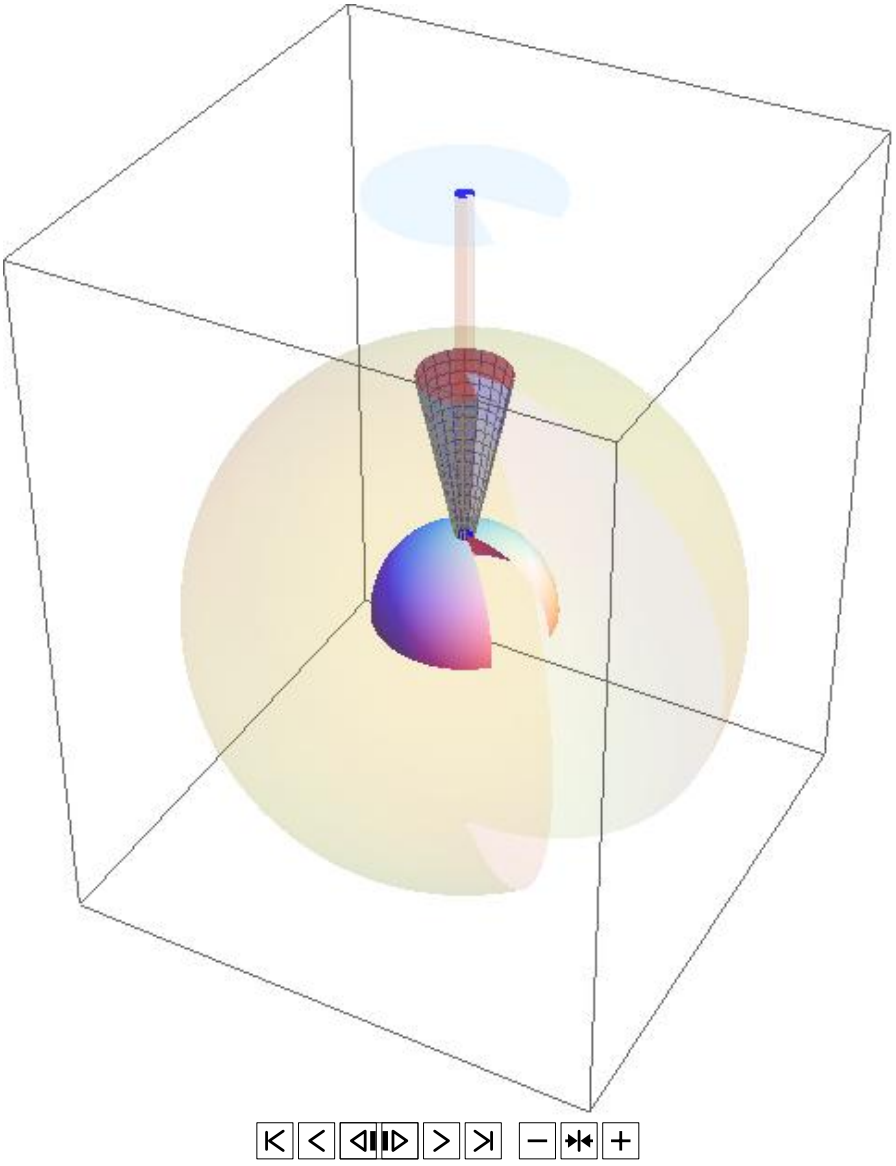


Figura 5.30.: La relazione tra particelle entranti e particelle uscenti. Il fascio in ingresso con sezione a corona circolare (in azzurro, area $\Delta S = \pi[(b+\Delta b)^2 - b^2]$) viene trasformato nell'area a forma di anello $\Delta S'$ sulla sfera esterna di raggio R. Nell'animazione (è necessario Acrobat per vederla) l'area ΔS viene mantenuta costante, e si può verificare che anche $\Delta S'$ si mantiene approssimativamente costante. Questo non è esattamente vero perchè la condizione $R \gg r$ non è particolarmente rispettata nella figura ($R/r = 3$).

Al variare del punto di impatto θ varia nell'intervallo $0 < \theta < \pi/2$ e ϕ in $0 < \phi < 2\pi$. Quindi $\theta' = 2\theta$ varia in $0 < \theta' < \pi$ ed il versore $\hat{w}$ varia sull'intera sfera unitaria (vedere Figura 5.30).

Considerando un elemento infinitesimo di una superficie ortogonale all'asse z, che potremo scrivere come

$$\begin{aligned} dS &= b\,db\,d\phi = r\sin\theta\,d\left(r\sin\theta\right)\,d\phi \\ &= r^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

il numero di particelle che la attraverseranno prima dell'urto nel tempo Δt sarà ($b < r$ è d'ora in poi sottointeso)

$$dN = \Phi dS\Delta t = \Phi\Delta t\,r^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi$$

Possiamo riscrivere questa quantità nella forma

$$\begin{aligned} dN &= \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\Phi\Delta t\,R^2 2\sin 2\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\Phi\Delta t\,\left[R^2 d\cos\theta' d\phi\right] \end{aligned}$$

e notare che l'espressione tra parentesi quadre è l'elemento di superficie infinitesima dS' su una sfera di raggio R. Dato che per $R \gg r$ le traiettorie delle particelle dopo l'urto sono approssimativamente radiali, $\vec{r}' \simeq s\hat{w}$, tutte le particelle che attraversano la superficie dS attraversano successivamente dS', e quindi potremo scrivere

$$dN = \Phi' dS'\Delta t$$

con

$$\Phi' = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\Phi$$

Notare che integrando su tutta la sfera abbiamo

$$N = \Phi' 4\pi R^2\Delta t = \Phi\pi r^2\Delta t = N_{urti}$$

cioè il numero di urti in un intervallo di tempo è uguale al numero di particelle che attraversano la superficie sferica.

5.90. Perturbazione di un oscillatore armonico ⋆⋆⋆

Un oscillatore armonico è ottenuto collegando una massa m ad un punto fisso mediante una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante di richiamo k. Il moto è unidimensionale, e la massa si trova inizialmente nella posizione di equilibrio con velocità v_0. La legge oraria è ben nota:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$.

Si aggiunge adesso una nuova molla, in parallelo a quella precedente, anch'essa di lunghezza a riposo trascurabile e costante di richiamo $\epsilon k \ll k$, e si vuole calcolare la nuova legge oraria, mantenendo le stesse condizioni iniziali.

Anche in questo caso la soluzione esatta è facilmente calcolabile. Si vuole però procedere in modo diverso. Supponendo che la soluzione possa essere approssimata da uno sviluppo in potenze di ϵ

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots$$

vogliamo provare a determinare $x_0(t)$ e $x_1(t)$ sostituendo lo sviluppo nell'equazione del moto ed eguagliando i termini dello stesso ordine in ϵ.

Confrontare il risultato approssimato con la soluzione esatta: si può dire che l'approssimazione sia buona se $\epsilon \ll 1$? Dare una spiegazione di ciò che succede.

Soluzione

L'equazione del moto del sistema si può scrivere nella forma

$$m\ddot{x} + (1+\epsilon)\, kx = 0$$

che ha per soluzione esatta con le condizioni iniziali volute

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega'} \sin \omega' t$$

dove $\omega' = \sqrt{(1+\epsilon)}\omega$.

Sostituiamo adesso la soluzione approssimata troncata al primo ordine in ϵ

$$m\left(\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1\right) + (1+\epsilon)\, k\left(x_0 + \epsilon x_1\right) = 0$$

ed eguagliamo i termini formalmente dello stesso ordine in ϵ. Otteniamo le due equazioni

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$$

e

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\omega^2 x_0$$

con $\omega^2 = k/m$. La soluzione generale della prima è data da

$$x_0(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

e sostituendo nella seconda otteniamo

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\omega^2 \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right)$$

che rappresenta un oscillatore armonico forzato alla sua stessa frequenza naturale. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è identica alla precedente, resta da determinare una soluzione particolare. Verifichiamo che questa è della forma

$$x_p(t) = Ct \cos \omega t + Dt \sin \omega t$$

Infatti derivando due volte otteniamo

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega \left[(Ct\omega - 2D) \cos \omega t + (2C + Dt\omega) \sin \omega t\right]$$

e sostituendo

$$-\omega \left[(Ct\omega - 2D) \cos \omega t + (2C + Dt\omega) \sin \omega t\right] + \omega^2 \left(Ct \cos \omega t + Dt \sin \omega t\right) = -\omega^2 \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right)$$

da cui

$$2D \cos \omega t - 2C \sin \omega t = -\omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t$$

e quindi

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2}\omega A \\ C &= \frac{1}{2}\omega B \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione generale sarà

$$x(t) \simeq x_0(t) + \epsilon x_1(t) = \left(A + \frac{\epsilon}{2} B\omega t\right) \cos \omega t + \left(B - \frac{\epsilon}{2} A\omega t\right) \sin \omega t$$

Imponiamo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} x(0) &= A = 0 \\ \dot{x}(0) &= \frac{1}{2} B \left(2 + \epsilon\right) \omega = v_0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_0(t) + \epsilon x_1(t) &= \frac{2v_0}{(2+\epsilon)\,\omega} \left(\sin \omega t + \epsilon \omega t \cos \omega t\right) \\ &= \frac{v_0}{\omega} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \sin \omega t + \epsilon \omega t \cos \omega t\right] + O\left(\epsilon^2\right) \end{aligned}$$

Già da questa espressione finale possiamo iniziare a capire quanto sia valida la soluzione approssimata ottenuta. Infatti ci attendiamo che il termine $O(\epsilon)$ debba essere una piccola correzione rispetto a quello $O(1)$. Ma questo non è vero: infatti per quanto piccolo possa

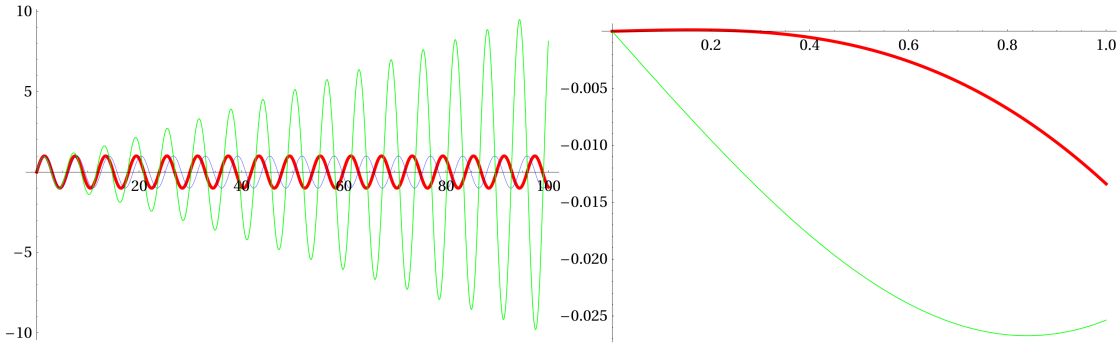


Figura 5.31.: A sinistra, il confronto tra la soluzione esatta (in rosso), quella approssimata all'ordine zero $x_0(t)$ (in blu) e quella approssimata al primo ordine $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ (in verde). Sono stati scelti i valori $\epsilon = 10^{-1}$, $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ e $v_0 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, e il tempo sulle ascisse è espresso in secondi. A destra, la differenza tra $x_0(t)$ e la soluzione esatta (in verde) e tra $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ e la soluzione esatta (in rosso) per $0 < t < 1$ con la stessa scelta di parametri.

essere ϵ vediamo che per tempi abbastanza grandi (tali che $\omega t > \epsilon^{-1}$) il secondo termine tra parentesi quadre diviene dominante.

Una conferma viene dal confronto tra i grafici della soluzione esatta (in rosso) e di quella approssimata in Figura 5.31 a sinistra. Come si vede l'approssimazione al primo ordine in ϵ $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$, riportata in verde, sembra addirittura peggiore di quella all'ordine zero $x_0(t)$ riportata in blu.

Cerchiamo di capire perchè. Se espandiamo formalmente la soluzione esatta in ϵ, dovremmo ottenere quella approssimata. Ora, possiamo iniziare scrivendo

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \frac{v_0}{\omega} \sin\left(\sqrt{1+\epsilon}\omega t\right)$$

e dato che $\epsilon \ll 1$ sarà sicuramente una buona approssimazione $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$ da cui

$$x(t) \simeq \frac{v_0}{\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\epsilon\omega t\right)$$

Se procediamo meccanicamente, dovremmo adesso espandere il seno nella forma

$$\sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\epsilon\omega t\right) \simeq \sin\omega t + \frac{1}{2}\epsilon\omega t \cos\omega t \tag{5.90.1}$$

ed in effetti otterremmo la soluzione approssimata $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ (dopo aver cancellato un termine $O(\epsilon^2)$. Il problema è che affinchè l'approssimazione (5.90.1) sia accurata non è sufficiente $\epsilon \ll 1$. Occorre infatti che la correzione alla fase del seno sia piccola,

$$\frac{1}{2}\epsilon\omega t \ll 2\pi$$

e questo smette di essere vero per tempi abbastanza grandi, comunque piccolo sia ϵ. Possiamo riassumere la discussione dicendo che in realtà la variabile "piccola" nella quale ha senso espandare la soluzione non è ϵ bensì $\epsilon\omega t$.

Ci si può chiedere infine se la soluzione al primo ordine sia in qualche modo più accurata di quella di ordine zero. Da quanto visto è facile rispondere che l'approssimazione $x_0+\epsilon x_1$ sarà migliore della x_0 nel regime $\epsilon\omega t \ll 1$. Ad esempio prendendo $\epsilon = 10^{-2}$ e $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ci attendiamo un errore piccolo per $t \ll 10$ s. Questo è confermato dal grafico a destra in Figura 5.31, dove sono riportate la differenza tra $x_0(t)$ e la soluzione esatta (in verde) e la differenza tra $x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ e la soluzione esatta (in rosso) per $0 < t < 1$ con questa stessa scelta di parametri. Vediamo che in effetti l'errore al primo ordine è minore di quello all'ordine zero.

5.91. Pendolo modificato ⋆⋆⋆

Il pendolo in Figura 5.32, di lunghezza ℓ e massa m, è sospeso nel punto in cui si congiungono due semicirconferenze di raggio R. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio. Come cambia la risposta se invece di due semicirconferenze si considerano due curve qualsiasi, ma con tangente verticale al punto di sospensione e raggio di curvatura R?

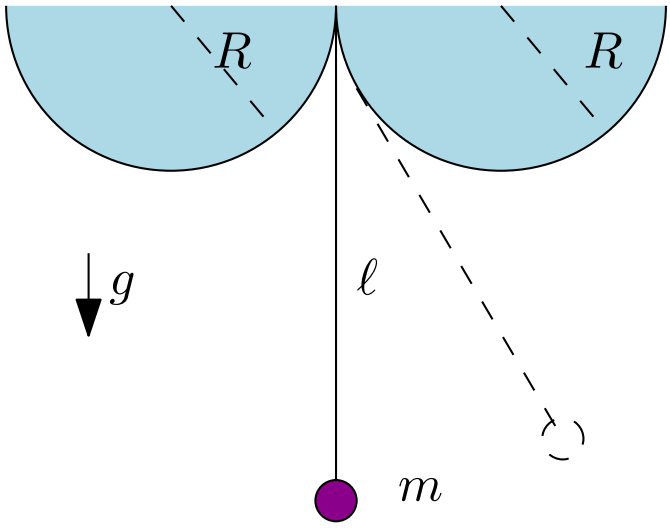


Figura 5.32.: Il pendolo modificato descritto nel problema. Durante l'oscillazione una parte del filo si appoggia ad una delle due semicirconferenze.

Soluzione

Usiamo come coordinata l'angolo θ di inclinazione del filo rispetto alla verticale.

Ponendo l'origine nel punto di sospensione le coordinate della massa si scrivono

$$\begin{aligned} x &= R(1-\cos\theta) + (\ell - R\theta)\sin\theta = \ell\theta - \frac{1}{2}R\theta^2 + O\left(\theta^3\right) \\ y &= -R\sin\theta - (\ell - R\theta)\cos\theta = -\ell + \frac{1}{2}\ell\theta^2 + O\left(\theta^3\right) \end{aligned}$$

per $\theta > 0$ e

$$\begin{aligned} x &= -R(1-\cos\theta) + (\ell + R\theta)\sin\theta = \frac{1}{2}R\theta^2 + \ell\theta + O\left(\theta^3\right) \\ y &= R\sin\theta - (\ell + R\theta)\cos\theta = -\ell + \frac{1}{2}\ell\theta^2 + O\left(\theta^3\right) \end{aligned}$$

per $\theta < 0$. I valori approssimati valgono per piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$. Sempre

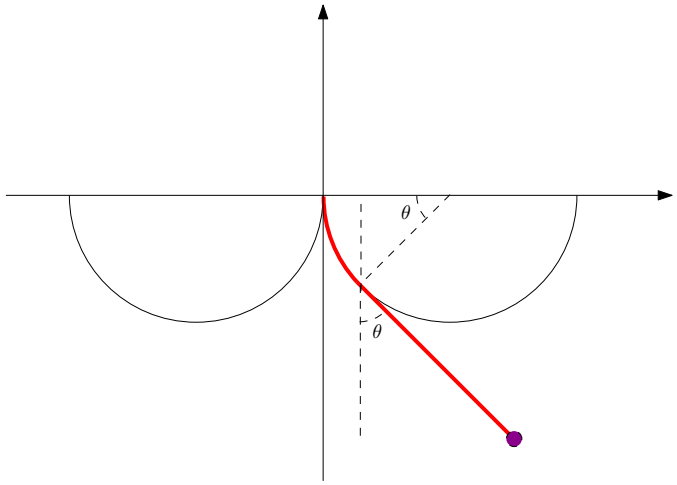


Figura 5.33.: Il pendolo modificato descritto nel problema. Durante l'oscillazione una parte del filo si appoggia ad una delle due semicirconferenze.

per piccole oscillazioni le velocità varranno

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \ell\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\\ \dot{y} &= \ell\theta\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\end{aligned}$$

per $\theta > 0$ e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R\theta\dot{\theta} + \ell\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\\ \dot{y} &= \ell\theta\dot{\theta} + O\left(\theta^2\dot{\theta}\right)\end{aligned}$$

per $\theta < 0$. L'energia vale, per piccole oscillazioni,

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy\\ &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2\end{aligned}$$

che è identica all'energia di un pendolo semplice. Dunque le semicirconferenze non hanno alcun effetto sulle piccole oscillazioni.

Se al posto delle circonferenze si avessero due curve con tangente verticale nell'origine e raggio di curvatura (sempre nell'origine) ρ, sarebbe possibile riscrivere le coordinate della massa nella forma

$$\begin{aligned}x &= X(s) + (\ell - s)\sin\theta(s)\\ y &= Y(s) - (\ell - s)\cos\theta(s)\end{aligned}$$

dove X e Y sono le coordinate della curva e abbiamo usato come parametro la lunghezza s del filo che si appoggia ad essa. Per piccoli valori si s (e quindi di θ) avremo per $\theta > 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\frac{d^2X}{ds^2}(0)s^2 + (\ell - s)\frac{d\theta}{ds}(0)s + O(s^3) \\ y &= \frac{dY}{ds}(0)s + \frac{1}{2}\frac{d^2Y}{ds^2}(0)s^2 - \ell + s + \frac{1}{2}\ell\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 s^2 + O(s^3) \end{aligned}$$

e per la velocità

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d^2X}{ds^2}(0)s\dot{s} + \left(\ell\frac{d\theta}{ds}(0)\dot{s} - 2\frac{d\theta}{ds}(0)s\dot{s}\right) + O(s^2\dot{s}) \\ \dot{y} &= \frac{dY}{ds}(0)\dot{s} + \frac{d^2Y}{ds^2}(0)s\dot{s} + \dot{s} + \ell\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 s\dot{s} + O(s^2\dot{s}) \end{aligned}$$

ma dato che la tangente è verticale $\frac{dY}{ds}(0) = -1$, inoltre $\frac{d\theta}{ds} = \rho^{-1}$. Espressioni analoghe varranno per $\theta < 0$. Notiamo infine che vale

$$\frac{dY}{ds} = -\cos\theta$$

e che quindi

$$\frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{d\theta}{ds}\sin\theta = \frac{1}{\rho}\sin\theta$$

si annulla per $\theta = 0$. L'energia per piccole oscillazioni sarà quindi a meno di costanti

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell}{\rho}\dot{s}\right)^2 + \frac{1}{2}mg\frac{\ell}{\rho^2}s^2$$

che corrisponde ad un'equazione del moto del pendolo semplice

$$\ddot{s} + \frac{g}{\ell}s = 0$$

Quindi anche in questo caso le curve non hanno alcun effetto sul sistema per piccole oscillazioni. Notare che questo risultato è vero indipendentemente dal valore di ρ.

5.92. Accelerazione massima su disco rotante ⋆⋆

Un disco di massa M e raggio R è libero di ruotare attorno ad un asse verticale ortogonale ad esso e passante per il suo centro. Sul suo bordo si trova una macchinina di dimensioni trascurabili e massa m. Le ruote della macchinina sono bloccate in modo da vincolare quest'ultima ad un moto circolare di raggio R. Tra le ruote della macchinina e il disco si ha attrito statico, con coefficiente μ_s.

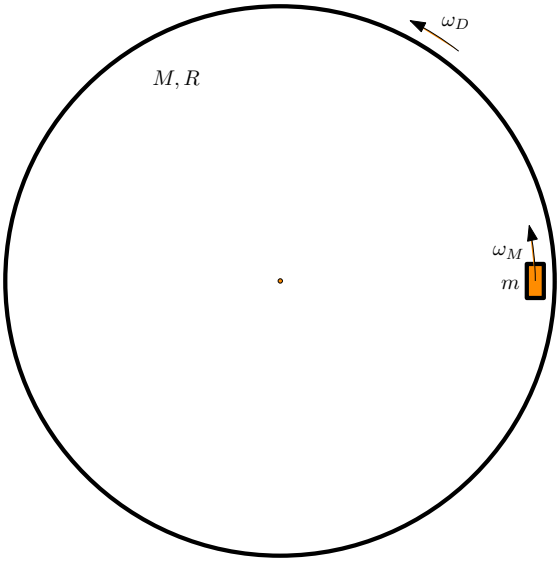


Figura 5.34.: Sia la macchinina che il disco si muovono, rispettivamente con velocità angolare $\omega_M(t)$ e $\omega_D(t)$.

Inizialmente disco e macchinina sono fermi, e l'accelerazione di quest'ultima ha in ogni istante il massimo valore che permette di mantenere l'aderenza con il disco. Ad un certo momento l'accelerazione tangenziale della macchinina si deve annullare: determinare l'angolo percorso dalla macchinina e dal disco.

Soluzione

L'unica forza orizzontale che agisce sulla macchinina è quella di attrito. La massima forza di attrito statico deve uguagliare la massa della macchinina per il modulo della sua accelerazione, che avrà una componente tangenziale $a_T = R\dot{\omega}_M$ e una componente centripeta $a_c = R\omega_M^2$

$$\mu_s mg = m\sqrt{\left(R\dot{\omega}_M\right)^2 + \left(R\omega_M^2\right)^2}$$

Inizialmente $\omega_M = 0$, quindi l'accelerazione è solo tangenziale e vale $a_T = \mu_s g$. Mano mano che ω_T aumenta l'accelerazione tangenziale deve diminuire, fino ad annullarsi quando $\mu_s g = a_c = R\omega_M^2$, cioè quando

$$\omega_M^2 = \frac{\mu_s g}{R}$$

Otteniamo quindi l'equazione differenziale

$$\dot{\omega}_M^2 + \omega_M^4 = \left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2$$

Conviene usare come variabile indipendente non il tempo ma l'angolo θ_M. In termini di questo l'equazione precedente si scrive

$$\left(\frac{d\omega_M}{d\theta_M}\right)^2 \omega_M^2 + \omega_M^4 = \left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2$$

dato che $\dot{\theta}_M = \omega_M$. Quindi

$$\omega_M \frac{d\omega_M}{d\theta_M} = \pm\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \omega_M^4}$$

ossia

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_M^2}{d\theta_M} = \pm\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \omega_M^4}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili, che possiamo integrare direttamente per ottenere l'angolo totale percorso dalla macchinina, θ_M^*

$$\int_0^{\theta_M^*} d\theta_M = \pm\frac{1}{2}\int_0^{\mu_s g/R} \frac{d\omega_M^2}{\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \omega_M^4}}$$

Introducendo la variabile $x = \omega_M^2 R/(\mu_s g)$ abbiamo

$$\theta_M^* = \pm\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{\pi}{4}$$

risultato che non dipende dalle masse o dal raggio del disco. I due segni dipendono dai due possibili versi dell'accelerazione.

Per determinare l'angolo di rotazione del disco usiamo la conservazione del momento angolare del sistema, inizialmente nullo. Abbiamo allora

$$mR^2\omega_M + I\omega_D = 0$$

e quindi, integrando e tenendo conto che inizialmente $\theta_M = \theta_D = 0$, otteniamo

$$\theta_D^* = -\frac{mR^2}{I}\theta_M^* = -2\frac{m}{M}\theta_M^* = -\frac{m}{M}\frac{\pi}{2}$$

5.93. Caduta in un fossato ⋆⋆

Un punto materiale si muove in un piano orizzontale con velocità di modulo V. Ad un certo punto arriva sul bordo di un fossato con sezione semicircolare di raggio R, perpendicolarmente ad esso. Cade nel fossato (senza rimanere aderente alla superficie) e rimbalza elasticamente in una certa posizione del fondo. Si osserva che dopo il rimbalzo la particella si muove verticalmente verso l'alto: calcolare la velocità V e la massima altezza h raggiunta.

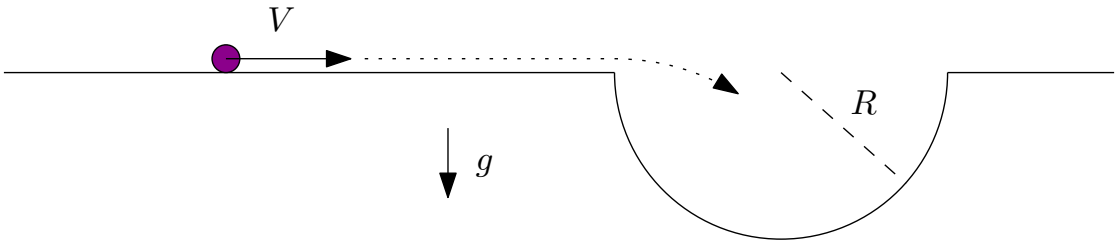


Figura 5.35.: La particella arriva sul bordo del fossato perpendicolarmente ad esso, si stacca e cade sotto l'azione della gravità.

Soluzione

L'altezza massima raggiunta rispetto al piano si trova facilmente con la conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgh$$

da cui

$$h = \frac{V^2}{2g}$$

In un sistema di riferimento con origine nel centro della circonferenza determinata dalla sezione del fossato la traiettoria del punto materiale è determinata dalle leggi orarie

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ x &= -R + Vt \end{aligned}$$

nella forma

$$y = -\frac{g}{2V^2}\left(x + R\right)^2$$

Dato che l'intersezione della traiettoria con la semicirconferenza si ottiene quando $x^2 + y^2 = R^2$, quindi conviene usare la parametrizzazione $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$. Abbiamo quindi una prima relazione

$$\sin\theta = -\frac{gR}{2V^2}\left(1 + \cos\theta\right)^2 \tag{5.93.1}$$

Dobbiamo adesso imporre che dopo l'urto la particella si muova verticalmente. La velocità $\vec{v}$ prima dell'urto è

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -gt = -\sqrt{-2gy} \\ \dot{x} &= V \end{aligned}$$

e dato che l'urto è elastico, la velocità $\vec{v}'$ immediatamente dopo è data da

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2\left(\vec{v}\cdot\hat{n}\right)\hat{n}$$

ma per ipotesi $\vec{v}'\cdot\hat{x} = 0$, cioè

$$\vec{v}\cdot\hat{x} = 2\left(\vec{v}\cdot\hat{n}\right)\left(\hat{n}\cdot\hat{x}\right)$$

Dato che

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

esplicitamente questo significa

$$2\cos^2\theta - 1 = 2\sin\theta\cos\theta\sqrt{-\frac{2gR}{V^2}\sin\theta}$$

ossia, usando la (5.93.1)

$$2\cos^2\theta - 1 = \frac{2gR}{V^2}\sin\theta\cos\theta\left(1+\cos\theta\right) \tag{5.93.2}$$

Dividendo membro a membro la (5.93.2) per la (5.93.1) otteniamo l'equazione

$$\cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{2} = 0$$

da cui

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sostituendo nella (5.93.1) otteniamo

$$V = \sqrt{gR}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^{3/4} \simeq 0.935\sqrt{gR}$$

Possiamo ora calcolare esplicitamente anche l'altezza massima raggiunta

$$h = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^{3/2} \simeq 0.437\,R$$

e verificare che dipende solo dal raggio del fossato.

5.94. Piccole oscillazioni I ⋆⋆

Sulla metà di un cilindro di raggio R è appoggiata una sbarra di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Agli estremi della sbarra sono fissate due massa uguali m. La sbarra è libera di inclinarsi rotolando senza strisciare sul cilindro, e non sono presenti attriti. Dire se la posizione di equilibrio in figura è stabile: in caso positivo calcolare la frequenza della piccole oscillazioni.

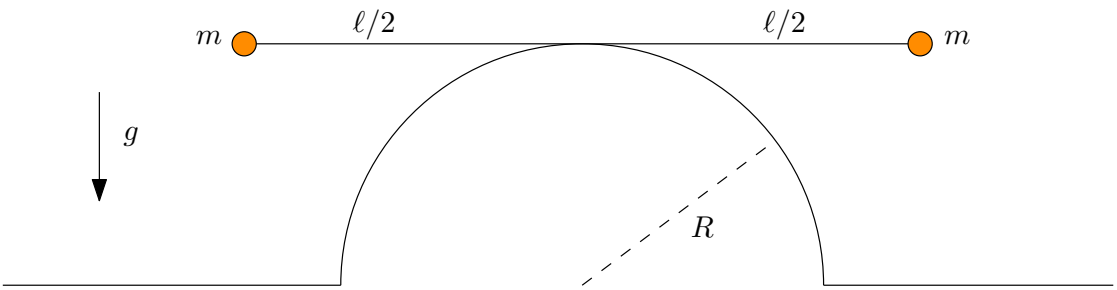


Figura 5.36.: Il punto medio della sbarra è appoggiato alla sommità del cilindro. La sbarra rotola senza strisciare, in altre parole il punto della sbarra a contatto con il cilindro è istante per istante fermo.

Soluzione

Usiamo come coordinata l'angolo tra la direzione verticale e il segmento che congiunge il centro del cilindro con il punto di contatto, come in Figura (5.37).

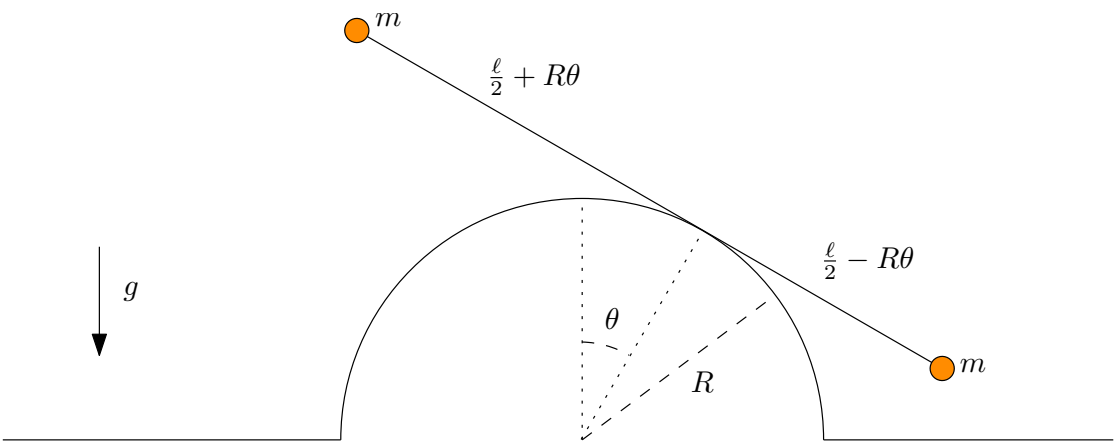


Figura 5.37.: Il punto medio della sbarra è appoggiato alla sommità del cilindro. La sbarra rotola senza strisciare, in altre parole il punto della sbarra a contatto con il cilindro è istante per istante fermo.

Scegliendo un sistema di riferimento con origine nel centro del cilindro, possiamo

scrivere le coordinate delle due masse. Per quella a sinistra vale

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\theta - \left(\frac{\ell}{2} + R\theta\right)\cos\theta \\ y_1 &= R\cos\theta + \left(\frac{\ell}{2} + R\theta\right)\sin\theta \end{aligned}$$

e per quella a destra

$$\begin{aligned} x_2 &= R\sin\theta + \left(\frac{\ell}{2} - R\theta\right)\cos\theta \\ y_2 &= R\cos\theta - \left(\frac{\ell}{2} - R\theta\right)\sin\theta \end{aligned}$$

L'energia potenziale si può scrivere adesso come

$$U(\theta) = mgy_1 + mgy_2 = 2mgR\left(\cos\theta + \theta\sin\theta\right)$$

Per piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$ abbiamo

$$U(\theta) = 2mgR\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) + O\left(\theta^4\right)$$

che ha un minimo appunto in $\theta = 0$: quindi questa posizione è di equilibrio stabile.

Per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni scriviamo l'energia cinetica. Possiamo derivare le coordinate e trovare le componenti della velocità. Più semplicemente possiamo osservare che la sbarra ruota istante per istante attorno al punto di contatto con velocità angolare $\dot{\theta}$, e quindi

$$\begin{aligned} |v_1| &= \left|\left(\frac{\ell}{2} + R\theta\right)\dot{\theta}\right| \\ |v_2| &= \left|\left(\frac{\ell}{2} - R\theta\right)\dot{\theta}\right| \end{aligned}$$

Per piccole oscillazioni possiamo trascurare i termini proporzionali al prodotto $\theta\dot{\theta}$ e quindi a meno di una costante

$$E = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2mgR\theta^2$$

che è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2mgR}{2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4gR}{\ell^2}}$$

5.95. Materia oscura ⋆⋆

In un semplice modello per una galassia ciascuna stella si muove in un'orbita circolare, sotto l'azione di un potenziale centrale $U(r)$ che tiene conto delle interazioni gravitazionali con le rimanenti. Le osservazioni mostrano che la velocità di una stella dipende dalla sua distanza dal centro della galassia come

$$V(r) = \sqrt{\frac{K}{1+\frac{r}{r_0}}} \tag{5.95.1}$$

dove K e r_0 sono costanti positive.

1. Determinare il potenziale $U(r)$ che potrebbe spiegare i dati sperimentali.
2. Studiare qualitativamente le orbite nel potenziale $U(r)$, dicendo in particolare se sono possibili orbite illimitate.
3. Supponendo che la galassia sia approssimabile con una distribuzione sferica di massa, determinarne la massa totale.

Soluzione[1]

Per un'orbita circolare di raggio r la massa per l'accelerazione centripeta deve essere uguale alla forza radiale

$$-m\frac{V^2(r)}{r} = F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Inserendo l'espressione della velocità otteniamo

$$\frac{dU}{dr} = \frac{Km}{r\left(1+\frac{r}{r_0}\right)}$$

e quindi a meno di una costante deve essere

$$U(r) = Km\log\left(\frac{2r}{r+r_0}\right)$$

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + Km\log\left(\frac{2r}{r+r_0}\right)$$

che diverge $\propto r^{-2}$ per piccoli r e tende alla costante $C_\infty = Km\log 2$ per $r \to \infty$. Esistono quindi orbite illimitate, corrispondenti a energie $E > C_\infty$. Il potenziale ha un unico minimo determinato dall'unica soluzione positiva di

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr} = \frac{Km^2r^2r_0 - L^2(r+r_0)}{mr^3\,(r+r_0)} = 0$$

[1] Prova scritta del 1/5/2009

cioè

$$r = r^* = \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 + 4Km^2r_0^2}}{2Km^2r_0}$$

corrispondente all'orbita circolare di momento angolare L (e energia $E = U_{eff}(r^*)$).

Se la distribuzione di massa della galassia è sferica deve essere

$$F_r(r) = \frac{GmM(r)}{r^2}$$

dove $M(r)$ è la parte della massa totale contenuta in una sfera di raggio r. Se confrontiamo questa espressione della forza radiale con quella ottenuta precedentemente abbiamo

$$\frac{Km}{r\left(1 + \frac{r}{r_0}\right)} = \frac{GmM(r)}{r^2}$$

La massa totale della galassia sarà dunque

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{Kr^2}{Gr\left(1 + \frac{r}{r_0}\right)} = \frac{Kr_0}{G}$$

5.96. Urti istantanei e attrito ⋆⋆

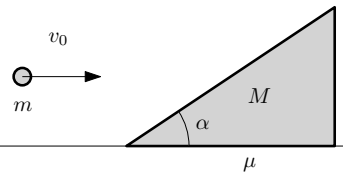


Figura 5.38.: La particella urta contro il piano inclinato: in quel momento ha una velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$.

Su un piano orizzontale è appoggiato un cuneo di massa M. Contro la sua faccia obliqua, inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale, viene lanciato un proiettile di massa m. Al momento dell'urto la velocità del proiettile è orizzontale e vale v_0 in modulo. Si sa che la forza tra il proiettile e il cuneo è conservativa e perpendicolare al piano che viene urtato.

Tra il cuneo e il piano orizzontale è presente attrito dinamico, descritto da un coefficiente μ. Non si tiene conto del possibile attrito statico: per esempio si può immaginare che la velocità iniziale del cuneo non sia esattamente nulla ma molto piccola.

Considerare il caso limite di urto istantaneo. Trovare, se ci sono, delle quantità conservate durante l'urto e calcolare le velocità finali di cuneo e proiettile.

Soluzione

Indichiamo con $R(t)$ la forza di reazione che il lato obliquo del cuneo esercita sul proiettile durante l'urto. Possiamo allora scrivere le equazioni del moto, sempre durante l'urto, nella forma

$$\begin{aligned} ma_x(t) &= -R(t)\sin\alpha \\ ma_y(t) &= R(t)\cos\alpha - mg \\ MA_x(t) &= R(t)\sin\alpha - \mu N(t) \\ 0 &= -R(t)\cos\alpha + N(t) - Mg \end{aligned} \tag{5.96.1}$$

Abbiamo indicato con a_x, a_y le componenti dell'accelerazione del proiettile, con A_x l'accelerazione del cuneo e con N la reazione normale del piano su cui il cuneo è appoggiato. Se l'interazione tra proiettile e cuneo avviene per $0 < t < \tau$ possiamo integrare le equazioni precedenti in tale intervallo , ottenendo

$$\begin{aligned} mv_x(t) &= mv_0 - I(t)\sin\alpha \\ mv_y(t) &= I(t)\cos\alpha - mgt \\ MV_x(t) &= I(t)\sin\alpha - \mu\left[I(t)\cos\alpha + Mgt\right] \end{aligned}$$

dove

$$I(t) = \int_0^t R(t')dt'$$

è l'impulso ceduto dal cuneo al proiettile al tempo t. In particolare immediatamente dopo l'urto avremo

$$\begin{aligned} v_x(\tau) &= v_0 - \frac{1}{m} I(\tau) \sin\alpha \\ v_y(\tau) &= \frac{1}{m} I(\tau) \cos\alpha - g\tau \\ V_x(t) &= \frac{1}{M} I(\tau) (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu g\tau \end{aligned} \tag{5.96.2}$$

Nel limite di urto istantaneo

$$\lim_{\tau\to 0} I(\tau) = I^*$$

resta finito, ma possiamo trascurare le forze peso. Questo si esprime dicendo che le forze peso non sono forze impulsive, cioè restano finite nel limite di urto istantaneo. Invece sia $R(t)$ che $N(t)$ sono forze impulsive, in particolare anche la forza di attrito $\mu N(t)$ lo sarà e non potrà essere trascurata.

Ad ogni modo abbiamo espresso le velocità finali in termini dell'impulso totale I^*. Per quanto riguarda le leggi di conservazione, osserviamo che dall'ipotesi che R sia normale alla superfice obliqua del cuneo segue immediatamente che si deve conservare la componente della quantità di moto del proiettile parallela ad essa. Verifichiamolo direttamente:

$$\begin{aligned} p_\parallel &= m v_x \cos\alpha + m v_y \sin\alpha \\ &= m\left(v_0 - \frac{I^*}{m}\sin\alpha\right)\cos\alpha + m\left(\frac{I^*}{m}\cos\alpha\right)\sin\alpha \\ &= m v_0 \cos\alpha \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare la variazione dell'energia cinetica

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} m \left\{ \left[v_0 - \frac{I^*}{m}\sin\alpha\right]^2 + \left[\frac{I^*}{m}\cos\alpha\right]^2 \right\} + \frac{1}{2} M \left[\frac{I^*}{M}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right]^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \frac{1}{2} I^* \left\{ I^* \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^2\right] - 2 v_0 \sin\alpha \right\} \end{aligned}$$

e della quantità di moto orizzontale totale

$$\Delta P_x = -\mu I^* \cos\alpha$$

Per quest'ultima concludiamo che non si ha conservazione, come ci si poteva aspettare dato che la forza di attrito (impulsiva) è orizzontale. Per poter dire qualcosa di più sull'energia, e per finire di calcolare le velocità finali, dobbiamo calcolare I^*. Non abbiamo ancora sfruttato il fatto che la forza R è conservativa. Calcoliamo il lavoro fatto da essa sul sistema durante l'urto, che si può scrivere come

$$L = \int_0^\tau \left[(-R\sin\alpha)\, v_x + (R\cos\alpha)\, v_y + (R\sin\alpha)\, V\right] dt$$

Ma adesso inseriamo le espressioni delle velocità durante l'urto ricavate dalle (5.96.2) ottenendo

$$L = \int_0^\tau R(t) \left\{ -v_0 \sin\alpha + \frac{1}{m} I(t) + \frac{1}{M} I(t) \left(\sin^2\alpha - \mu \cos\alpha \sin\alpha \right) \right\} dt$$

Notare che abbiamo nuovamente trascurato le forze peso, dato che siamo sempre interessati al limite di urto istantaneo. Dato che la forza è conservativa deve essere $L = 0$, quindi

$$\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin^2\alpha - \mu \cos\alpha \sin\alpha \right) \right] \int_0^\tau R(t) I(t) dt = v_0 \sin\alpha \int_0^\tau R(t) dt$$

Sappiamo già che l'integrale a destra vale I^*. Per calcolare quello a sinistra osserviamo che $R = \dot{I}$, e quindi

$$\int_0^\tau R(t) I(t) dt = \int_0^\tau \dot{I}(t) I(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left(I^2 \right) dt = \frac{1}{2} I^{*2}$$

Otteniamo infine

$$I^* = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin^2\alpha - \mu \cos\alpha \sin\alpha \right)}$$

Se sostituiamo nell'espressione per la variazione dell'energia ricavata precedentemente otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta E &= I^* \left\{ \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin\alpha - \mu \cos\alpha \right)^2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \left(\sin^2\alpha - \mu \cos\alpha \sin\alpha \right)} - 1 \right\} v_0 \sin\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \mu M^{-1} I^{*2} \left(\sin\alpha - \mu \cos\alpha \right) \cos\alpha \end{aligned}$$

Notiamo che in assenza di attrito ($\mu = 0$) l'energia si conserva. Lo stesso accade per $\alpha = \pi/2$: questo risultato in apparenza sorprendente dipende dal fatto che quando il lato obliquo del cuneo diviene verticale la reazione $N(t)$ non è più impulsiva, e quindi l'attrito si può trascurare durante l'urto.

CC BY NC SA

5.97. Attrito e paradossi ⋆⋆⋆

I risultati del problema 5.96 sembrano condurre a delle situazioni paradossali. In particolare, per certi valori del coefficiente di attrito dinamico μ il sistema può acquistare energia nell'urto ($\Delta E > 0$) e il cuneo può iniziare a muoversi nella direzione da cui proviene il proiettile. Mostrate (se possibile) che queste situazioni paradossali non si verificano, se il modello usato per la forza di attrito è ragionevole.

Soluzione

Riprendiamo dall'esercizio precedente i due risultati "incriminati". Il primo riguarda la velocità del cuneo immediatamente dopo l'urto, che riscriviamo nella forma

$$V_x(t) = 2v_0 \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu)}{\frac{M}{m} + \sin\alpha\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu)} \tag{5.97.1}$$

e il secondo la variazione dell'energia durante il medesimo

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\mu M^{-1} I^{*2}\,(\tan\alpha - \mu)\cos^2\alpha$$

Se $\mu < \tan\alpha$ non succede niente di particolare. Al contrario se $\mu > \tan\alpha$ durante l'urto apparentemente si ha sempre $\Delta E > 0$, inoltre se

$$-\frac{M}{m} < \sin\alpha\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu) < 0$$

si trova anche $V_x < 0$.

Per risolvere il paradosso osserviamo che nell'esercizio precedente le equazioni sono state scritte utilizzando due assunzioni implicite:

1. la velocità del cuneo V_x è positiva: in caso contrario la forza di attrito cambia segno
2. la reazione normale del piano è positiva: in caso contrario il cuneo si stacca da terra

Affinchè la seconda assunzione sia consistente, è necessario che $R(t) > 0$, come segue dalla quarta equazione delle (5.96.1). In particolare deve essere $I^* > 0$, ma dato che

$$I^* = \frac{2Mv_0\sin\alpha}{\frac{M}{m} + \sin\alpha\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu)}$$

questo esclude i casi in cui

$$\sin\alpha\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu) < -\frac{M}{m}$$

Tolta questa possibilità, avremo $\Delta E < 0$ se $V_x > 0$ e $\Delta E > 0$ se $V_x < 0$.

Possiamo chiederci cosa accade in realtà se le nostre equazioni predicono $V_x < 0$. Dato che abbiamo supposto, per evitare di considerare l'attrito statico, che la velocità iniziale

del cuneo fosse molto piccola ma positiva, abbiamo che se $\mu > \tan\alpha$ il cuneo si ferma per un istante durante l'urto. In questo caso non possiamo più trascurare l'attrito statico, e dobbiamo capire se a causa di questo il cuneo rimane fermo. In effetti questo avverrà se

$$F_a + R\sin\alpha = 0$$

cioè se

$$R\sin\alpha < \mu_s R\cos\alpha$$

ossia per

$$\tan\alpha > \mu_s$$

Ma dato che $\mu_s > \mu$ possiamo concludere che quando $\tan\alpha > \mu$ il cuneo sarà in realtà fermo dopo l'urto.

CC BY NC SA

5.98. Moto in un campo centrale III ⋆⋆⋆

Studiare le traiettorie di un punto materiale sul quale è applicata una forza

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^4}\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione e α una costante.

Soluzione

La forza è attrattiva se $\alpha < 0$ e repulsiva altrimenti. Dato che è anche centrale si conserva il momento angolare. Inoltre la forza è conservativa: possiamo verificare che l'energia potenziale corretta è

$$U(r) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2}$$

dato che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\alpha}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\alpha x}{r^4} = -F_x$$

e così via per le altre componenti. Quindi le quantità

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2} \\ L &= mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

sono costanti. Ricaviamo $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

e sostituendo otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 + m\alpha}{2mr^2}$$

Per studiare le traiettorie possiamo riscrivere l'espressione precedente nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{L^2 + m\alpha}{2mr^2} \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2 + m\alpha}{2mr^2} \end{aligned}$$

Introduciamo adesso la nuova variabile $u = 1/r$, da cui

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L^2 + m\alpha}{2m}\right)u^2$$

Derivando rispetto a θ otteniamo

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{m}\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(\frac{L^2 + m\alpha}{m}\right)\frac{du}{d\theta}u$$

e dato che E è costante otteniamo una equazione per la traiettoria

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{m\alpha}{L^2}\right) u = 0$$

Le caratteristiche della soluzione generale dipende dal valore di $m\alpha L^{-2}$.

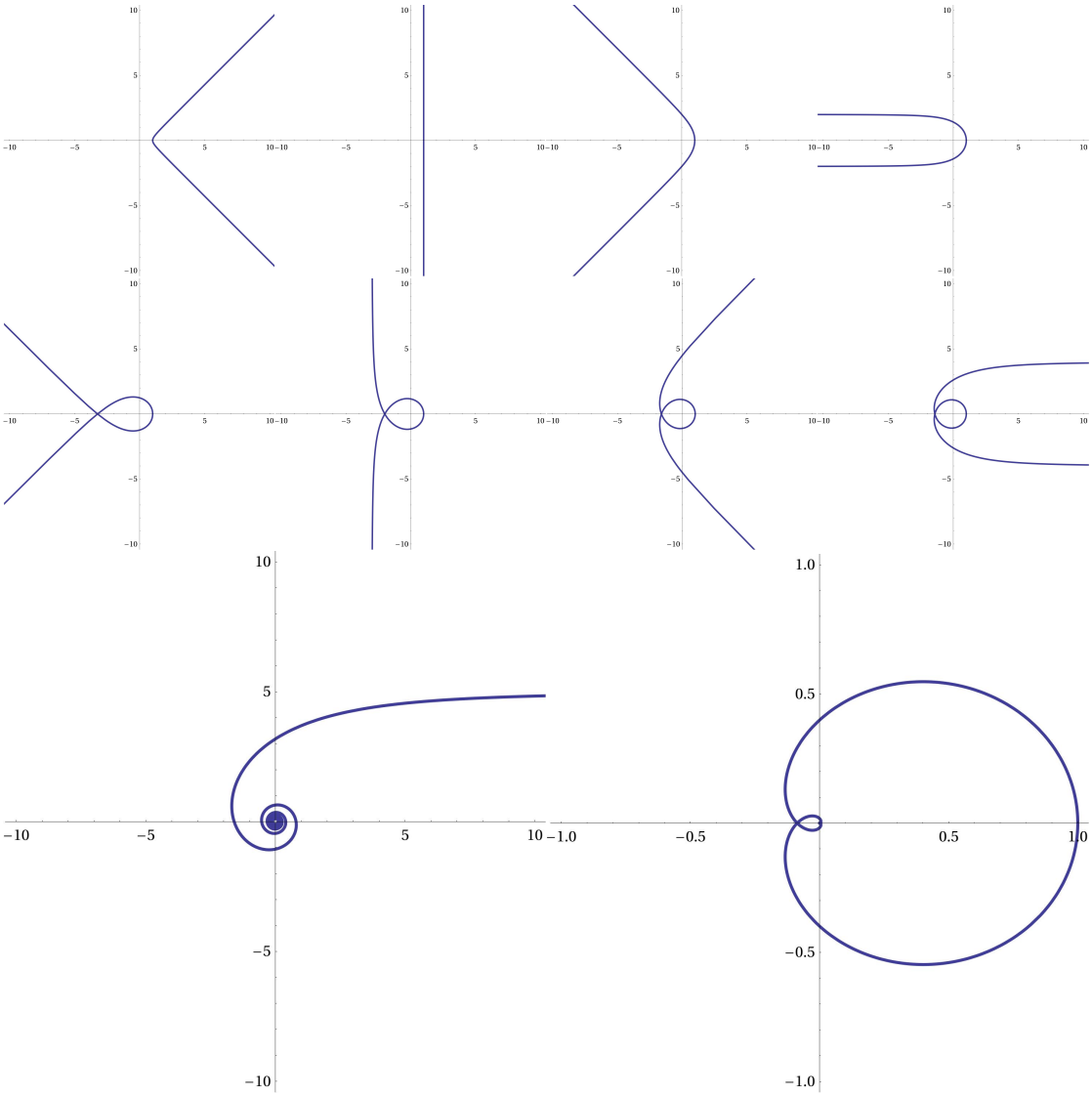


Figura 5.39.: Alcuni esempi di orbite. Le prime 8 traiettorie, da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, corrispondono al caso 1. per $k = 2/n$ e $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. La traiettoria in basso a sinistra corrisponde al caso 2. (per $a = 1/5$). La traiettoria in basso a destra corrisponde al caso 3., per $r_0 = 1$ e $k = 1$. In quest'ultimo caso non è possibile apprezzare dalla figura il numero infinito di rivoluzioni attorno all'origine.

1. Se $m\alpha L^{-2} > -1$ la soluzione è oscillatoria:

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\left[\sqrt{1+\frac{m\alpha}{L^2}}\,(\theta+\phi)\right]$$

e le costanti A, ϕ dipendono dalle condizioni iniziali. In particolare possiamo limitarci a studiare il caso $\phi = 0$, dato che il caso generale si ottiene semplicemente ruotando la traiettoria di ϕ. Abbiamo quindi un'equazione della forma

$$r = \frac{r_0}{\cos k\theta}$$

con $k = \sqrt{1+m\alpha L^{-2}}$ e $r_0 = A^{-1}$ assume il significato di raggio di massimo avvicinamento, che corrisponde a $\theta = 0$. All'aumentare di θ la particella si allontana, e sfugge all'infinito quando $\theta = \frac{\pi}{2k}$. Alcune traiettorie possibili sono rappresentate in Figura 5.39. Un caso particolare interessante corrisponde a $k = 1$, cioè

$$r\cos\theta = x = r_0$$

che corrisponde a una traiettoria rettilinea [2].

2. Se $m\alpha L^{-2} = -1$ si ha

$$u = \frac{1}{r} = a\,(\theta+\phi)$$

e quindi a meno di una rotazione

$$r = \frac{1}{a\theta}$$

La traiettoria si può descrivere come una spirale che si avvicina all'origine ruotando infinite volte attorno ad essa. Un caso particolare è rappresentato in Figura 5.39, in basso a sinistra.

3. Se $m\alpha L^{-2} < -1$ la soluzione è

$$u = \frac{1}{r} = A\cosh\left[\sqrt{-1-\frac{m\alpha}{L^2}}\,(\theta+\phi)\right]$$

di conseguenza, sempre a meno di una rotazione,

$$r = \frac{r_0}{\cosh k\theta}$$

con $k = \sqrt{-1-m\alpha L^{-2}}$. In questo caso r_0 rappresenta la distanza di massimo allontanamento, che si ha per $\theta = 0$. Successivamente la particella si avvicina all'origine indefinitamente, ruotando infinite volte attorno ad essa. Un caso particolare è rappresentato in Figura 5.39, in basso a destra.

[2] Questo risultato è evidente, dato che per $k = 1$ si ha $\alpha = 0$, cioè assenza di forze.

5.99. Orbita nel sistema rotante ⋆⋆

Scrivere l'equazione del moto di una particella che si muove in una forza centrale qualsiasi in un sistema di riferimento con origine sul centro di forze, e con assi che ruotano insieme alla particella.

Soluzione

La forza centrale sarà data in un sistema non rotante da

$$\vec{F} = A(r,\theta)\vec{r}$$

dove $A(r,\theta)$ è una funzione arbitraria e $\vec{r}$ il vettore posizione della particella ($r = |\vec{r}|$). Scegliamo un sistema rotante con asse x nella direzione della particella. Potremo scrivere l'equazione del moto lungo tale asse nella forma

$$m\ddot{x} = A\left(x,\theta(t)\right)x + m\dot{\theta}^2(t)x$$

dove si è tenuto conto della forza centrifuga e $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione, che non possiamo conoscere prima di avere risolto il problema.

Nel sistema scelto la particella non accelera in direzione y, quindi la relativa equazione del moto diviene una condizione di equilibrio

$$m\ddot{y} = 0 = -mx\ddot{\theta}(t) - 2m\dot{x}\dot{\theta}(t)$$

che esprime in realtà la conservazione del momento angolare. Infatti moltiplicando per x troviamo

$$mx^2\ddot{\theta}(t) + 2mx\dot{x}\dot{\theta}(t) = 0$$

ma questo si può anche scrivere come

$$\frac{d}{dt}\left[mx^2\dot{\theta}(t)\right] = 0$$

e la quantità tra parentesi è esattamente il momento angolare della particella in un sistema non rotante

$$mx^2\dot{\theta}(t) = L$$

In conclusione possiamo scrivere le equazioni del moto nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= A\left(x,\theta\right)x + \frac{L^2}{mx^3} \\ \dot{\theta} &= \frac{L}{mx^2} \end{aligned}$$

Se A non dipende dall'angolo θ abbiamo un'ulteriore legge di conservazione. Infatti

$$m\ddot{x}\dot{x} = A\left(x\right)x\dot{x} + \frac{L^2}{mx^3}\dot{x}$$

CC BY NC SA

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) &= \frac{d}{dt}\int\left[A(x)x+\frac{L^2}{mx^3}\right]\dot{x}dt \\
&= \frac{d}{dt}\int\left[A(x)x+\frac{L^2}{mx^3}\right]dx \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int A(x)xdx-\frac{L^2}{2mx^2}\right]
\end{aligned}$$

Riconosciamo la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\int A(x)xdx+\frac{L^2}{2mx^2}=E$$

dove l'integrale da l'energia potenziale corrispondente alla forza, e $L^2/(2mx^2)$ è il potenziale centrifugo. Quindi il potenziale efficace

$$U_{eff}=U+\frac{L^2}{2mx^2}$$

può essere interpretato come potenziale che descrive le forze nel sistema che ruota insieme alla particella.

5.100. Il problema di Keplero ⋆⋆

Discutere le traiettorie di due masse puntiformi m_1 e m_2 che si muovono nello spazio sotto l'azione della sola forza di attrazione gravitazionale di Newton,

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

dove $\vec{F}_{12}$ è la forza che il corpo 1 (che si trova nella posizione $\vec{r}_1$) esercita sul corpo 2 (che si trova nella posizione $\vec{r}_2$).

Soluzione

Iniziamo scrivendo le equazioni dl moto per le due masse puntiformi. Dato che l'unica forza è quella gravitazionale abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

Servono quindi 6 coordinate (ad esempio le 3 coordinate cartesiane delle due masse) per descrivere una configurazione del sistema. Dato che le forze che si esercitano sulle due masse sono uguali e opposte abbiamo la conservazione della quantità di moto totale. Questo si verifica direttamente sommando membro a membro le due equazioni precedenti, e ottenendo

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right] = 0$$

che ci dice effettivamente che la quantità di moto totale

$$\vec{P} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

è costante. Alternativamente possiamo dire che l'accelerazione del centro di massa è zero,

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = 0$$

Quindi il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, e possiamo scegliere un sistema di riferimento nel quale esso si trova in quiete nell'origine. Abbiamo quindi determinato il moto di 3 dei 6 gradi di libertà del sistema.

Un'altra variabile conveniente per descrivere il sistema è la posizione della massa m_1 relativa alla massa m_2,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Osserviamo che conoscendo $\vec{r}$ e $\vec{r}_{CM}$ possiamo ricavare $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ dalle formule

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{aligned}$$

che si verificano imediatamente. Sarà quindi sufficiente trovare $\vec{r}$: per farlo moltiplichiamo per m_2 la prima delle equazioni del moto precedenti e per m_1 la seconda, e sottraiamo membro a membro. Abbiamo

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -(m_1 + m_2) G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

ossia

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

dove $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ è la massa ridotta del sistema. Queste sono tre equazioni del moto (non indipendenti tra loro) che permettono in linea di principio di calcolare la posizione relativa in funzione del tempo, per date condizioni iniziali. Formalmente sono equazioni per una massa puntiforme fittizia μ che si muove sotto l'azione di una forza centrale. Da questo segue che avremo una costante del moto, il momento angolare

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Inoltre la forza centrale è anche conservativa. Questo si verifica immediatamente notando che la possiamo ottenere a partire dal potenziale

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Verifichiamo questa affermazione: deve essere

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} G \frac{m_1 m_2}{r} = G m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = G m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial x}$$

ma

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{r}$$

e quindi

$$F_x = -G m_1 m_2 \frac{x}{r^3}$$

che è effettivamente la componente x dell'attrazione gravitazionale. Calcoli assolutamente analoghi permettono di verificare che il potenziale da anche la corretta componente y e z.

La conservazione del momento angolare ha come conseguenza che il moto della particella fittizia avviene in un piano, più precisamente nel piano ortogonale a $\vec{L}$. Per verificarlo calcoliamo il prodotto scalare tra $\vec{r}$ e $\vec{L}$, che è nullo

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \mu \vec{r} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0$$

dato che il prodotto vettoriale tra $\vec{r}$ e $\vec{v}$ è sicuramente perpendicolare a $\vec{r}$.

Scegliamo adesso coordinate polari nel piano in cui avviene l'orbita. Potremo scrivere la componente perpendicolare al piano del momento angolare come

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

e l'energia come

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Entrambe queste quantità si conservano, in particolare possiamo usare la prima per determinare la velocità angolare in funzione della distanza dal centro,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \tag{5.100.1}$$

che sostituita nell'energia permette di ottenere

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Espressa in questo modo, questa formalmente è l'energia di una particella di massa μ che si muove in una dimensione sotto l'azione di un potenziale "efficace"

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Notiamo che l'energia cinetica dovuta al moto radiale è

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 = E - U_{eff}(r)$$

e dato che deve essere non negativa, per un fissato valore di E il moto sarà possibile solo per i valori di r tali che

$$U_{eff}(r) < E$$

Possiamo sfruttare questo fatto per una prima discussione qualitativa delle orbite.

Per piccoli valori di r il termine proporzionale a r^{-2} del potenziale efficace (il cosiddetto potenziale centrifugo) è dominante, e quindi

$$\lim_{r \to 0} U_{eff}(r) = +\infty$$

Invece a grandi valori di r il termine gravitazionale domina,

$$\lim_{r \to +\infty} U_{eff}(r) = 0^-$$

Inoltre il potenziale efficace ha un minimo. Determiniamo la sua posizione: la derivata

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

CC BY NC SA

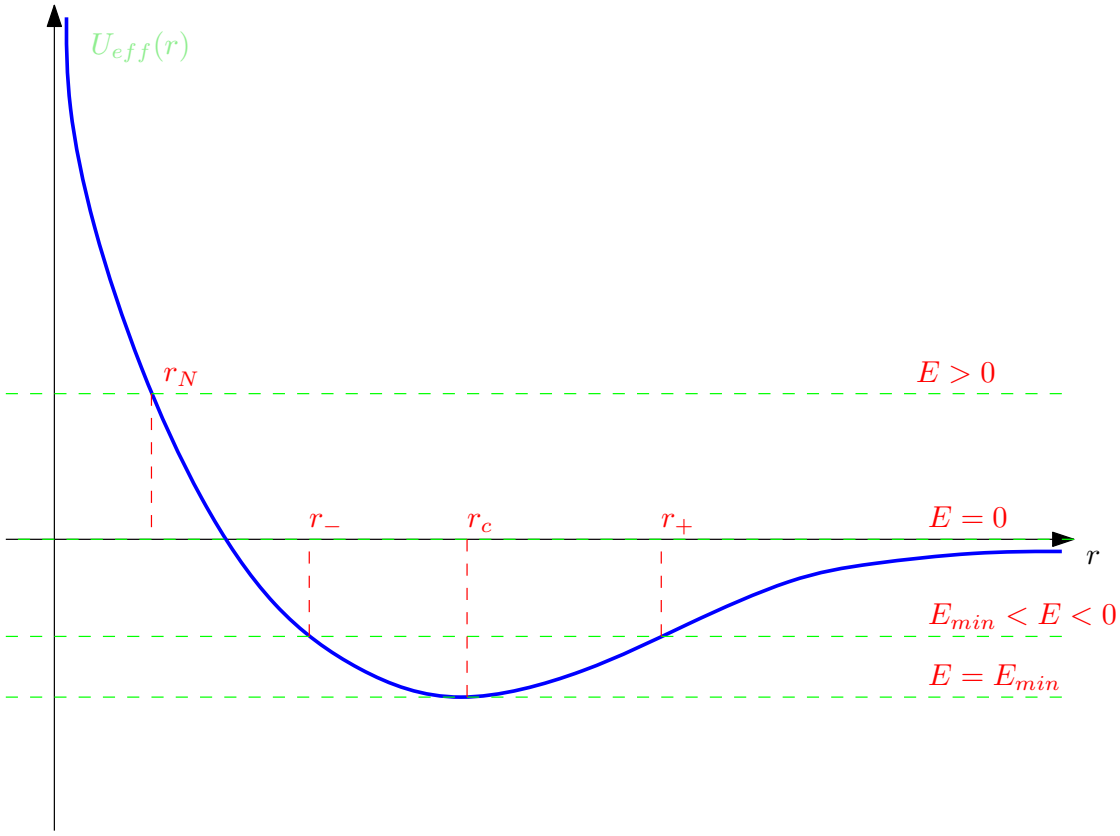


Figura 5.40.: Caratteristiche qualitative delle orbite per il problema di Keplero. Il grafico azzurro rappresenta il potenziale efficace, per un fissato valore di L. Le rette verdi tratteggiate rappresentano possibili valori dell'energia E.

si annulla in

$$r_c = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2}$$

e il potenziale efficace assume in r_c il valore

$$U_{eff}(r_c) = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2L^2}$$

Il tutto è rappresentato schematicamente in Figura 5.40. Al variare di E abbiamo diversi intervalli permessi per r, in particolare

- Se $E < U_{eff}(r_c)$ non esistono r tali da avere una energia cinetica radiale positiva. Quindi questi valori dell'energia non sono permessi.
- Se $E = U_{eff}(r_c)$, l'energia cinetica radiale è nulla per $r = r_c$. Altri valori di r non sono permessi, quindi durante il moto r si mantiene costante. Si tratta quindi di un'orbita circolare (di raggio r_c). Dato che il raggio non varia, neppure $\dot{\theta}$ lo

farà a causa della relazione (5.100.1). Abbiamo quindi un moto circolare uniforme. Questo caso particolare si poteva ricavare più semplicemente dall'equazione del moto radiale

$$-\mu r\dot{\theta}^2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

sostituendo $\dot{\theta}$ in termini del momento angolare e risolvendo per r.

- Se $U_{eff}(r_c) < E < 0$ esiste un intervallo $r_- < r < r_+$ in cui il moto è permesso. Il moto radiale sarà quindi una oscillazione tra questi due estremi, mentre θ crescerà o diminuirà in accordo con la legge (5.100.1). Da notare che il segno della velocità angolare è determinato dal segno di L, e non può cambiare. Di conseguenza la particella orbiterà girando attorno all'origine senza cambiare mai segno.

- Se $E = 0$ l'intervallo permesso è $r \geq r_p$, dove r_p è il valore a cui il potenziale effettivo si annulla

$$r_p = \frac{L^2}{2\mu G m_1 m_2}$$

  Quindi la particella si avvicinerà al centro fino ad una distanza r_p, e sfuggirà quindi all'infinito. Da notare che la velocità radiale tenderà a zero quando $r \to \infty$.

- Infine se $E > 0$ avremo ancora una distanza minima r_N determinata da

$$E = U_{eff}(r_N)$$

  e ancora una volta la particella si avvicinerà al centro fino ad una distanza r_N per poi sfuggire all'infinito. Questa volta perà la velocità radiale rimarrà positiva per $r \to \infty$.

Passiamo adesso ad uno studio più dettagliato della forma delle orbite.

Calcolo delle orbite

Abbiamo già potuto notare che il segno di $\dot{\theta}$ non può cambiare. Di conseguenza θ sarà una funzione monotona (crescente o decrescente) del tempo, e potremo utilizzarla al posto di quest'ultimo per parametrizzare l'orbita. Riprendiamo quindi l'energia e scriviamola nella forma

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Sostituendo nuovamente $\dot{\theta}$ otteniamo infine

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Conviene a questo punto introdurre la nuova variabile $u = 1/r$. La sua derivata rispetto all'angolo è legata a quella di r dalla relazione

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

CC BY NC SA

e sostituendo nell'energia troviamo

$$E = \frac{L^2}{2\mu}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu}u^2 - Gm_1m_2u$$

Dato che l'energia si conserva dovrà essere $dE/d\theta = 0$, e quindi

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{\mu}\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{L^2}{\mu}\frac{du}{d\theta}u - Gm_1m_2\frac{du}{d\theta} = 0$$

e quindi dovrà essere, scartando $du/d\theta = 0$,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu Gm_1m_2}{L^2}$$

Questa equazione determina la traiettoria, ed è formalmente identica a quella di un oscillatore armonico sottoposto a una forza costante (con θ che gioca il ruolo del tempo). La soluzione generale può essere scritta nella forma

$$u = A\cos(\theta + \phi) + \frac{\mu Gm_1m_2}{L^2}$$

dove le costanti A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali. In particolare sostituendo nell'energia possiamo determinare A in funzione delle costanti del moto. Abbiamo

$$\frac{2\mu E}{L^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2\mu Gm_1m_2}{L^2}u$$

e quindi

$$A^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu Gm_1m_2}{L^2}\right)^2$$

Ricordando la definizione di u possiamo anche scrivere

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \phi)} \tag{5.100.2}$$

dove

$$\begin{aligned} p &= \frac{L^2}{\mu Gm_1m_2} \\ e &= \pm\frac{L^2}{\mu Gm_1m_2}\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu Gm_1m_2}{L^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Variando ϕ otteniamo orbite della stessa forma, ma ruotate di tale angolo. Senza perdere generalità possiamo quindi limitarci a $\phi = 0$. Inoltre anche un cambiamento di segno di e sarà equivalente ad una rotazione di π dell'orbita, e potremo limitarci a considerare il

caso $e \geq 0$ (notare che la minima energia accettabile, corrispondente all'orbita circolare, corrisponde a $e = 0$: in tutti gli altri casi l'espressione sotto radice è positiva).

Possiamo adesso discutere la forma delle orbite. Scrivendo l'Equazione (5.100.2) nella forma

$$r = p - er\cos\theta$$

ed elevando al quadrato otteniamo

$$\left(1 - e^2\right) x^2 - 2pex + y^2 = p^2$$

che è l'equazione di una conica. Notiamo anzitutto che il parametro p determina le dimensioni dell'orbita, e non la sua forma. Per quanto riguarda e abbiamo diversi casi possibili

1. Se $e = 0$ il raggio è costante, $r = p$. Siamo nel caso dell'orbita circolare visto precedentemente.

2. Se $0 < e < 1$ al variare di θ il denominatore della (5.100.2) non si annulla mai, e r resta finito. Abbiamo a che fare con un'orbita limitata, che in effetti è un'ellisse. L'ellisse ha un fuoco sul centro di forza. Inoltre possiamo scrivere

$$r_+ = \frac{p}{1-e}, \quad r_- = \frac{p}{1+e}$$

   che permettono di ottenere il raggio di massimo e minimo avvicinamento al centro in termini delle costanti del moto (o viceversa).

3. Se $e = 1$ il denominatore della (5.100.2) si annulla per $\theta = \pm\pi$, e quindi $r \to \infty$ per questi valori. L'orbita non è dunque limitata, ed in effetti si tratta di una parabola. Anche in questo caso il centro di forza è nel fuoco.

4. Infine se $e > 1$ il denominatore si annulla per due angoli $\pm\theta^*$ minori in modulo di π. Anche in questo caso l'orbita è illimitata, e si verifica che si tratta di un'iperbole (con il centro di forza su un fuoco). In questo caso e nel precedente la posizione di massimo avvicinamento si può ottenere da

$$r_N = \frac{p}{1+e}$$

I quattro tipi di orbite possibili sono rappresentati schematicamente in Figura (5.41).

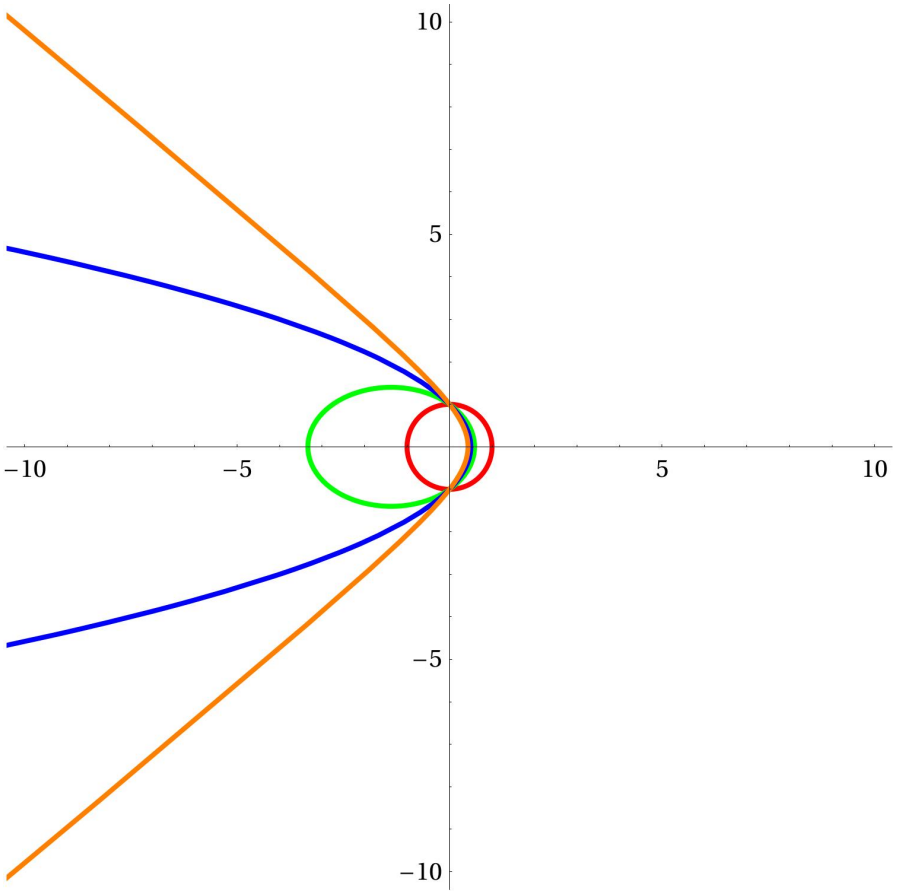


Figura 5.41.: Alcune possibili orbite. Abbiamo sempre $p = 1$, mentre rispettivamente $e = 0$ (orbita rossa, circonferenza), $e = 0.7$ (orbita verde, ellisse), $e = 1$ (orbita blu, parabola) ed $e = 1.3$ (orbita arancio, iperbole). Il centro delle forze è nell'origine.

Altri aspetti del problema saranno studiati in un esercizio successivo.

CC BY NC SA

5.101. Oscillatore forzato e transiente ⋆⋆

Un oscillatore armonico smorzato (massa m e costante elastica k) è inizialmente fermo. A partire dall'istante $t = 0$ subisce una forza

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (t > 0)$$

e si vuole calcolare la sua risposta. Discutere il risultato in funzione dei parametri del problema.

Soluzione

L'equazione del moto per $t > 0$ si può scrivere nella forma

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

e sappiamo che la sua soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea. La soluzione generale cercata è un'oscillazione libera

$$x_{om}(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

con $\omega_0^2 = k/m$. Determiniamo adesso una soluzione particolare: sappiamo che per $\omega \neq \omega_0$ possiamo cercarla nella forma

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

e sostituendo nell'equazione del moto troviamo

$$\left(-\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t\right) + \omega_0^2 \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

da cui

$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A &= \frac{F_0}{m} \\ \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) B &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo ($\omega_0^2 = k/m$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione generale sarà

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

CC BY NC SA

Imponiamo adesso le condizioni al contorno a $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(0) &= a + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} = 0 \\ \dot{x}(0) &= b\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} \left(\cos \omega t - \cos \omega_0 t\right)$$

Cerchiamo adesso di ottenere la soluzione nel caso $\omega = \omega_0$ come limite della precedente. Abbiamo

$$x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Applicando il teorema de l'Hopital

$$x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \left(\frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} \right) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

CC BY NC SA

5.102. Piccole perturbazioni di un'orbita circolare ⋆⋆⋆

Un pianeta si muove in un campo di forze centrali descritto da un potenziale della forma

$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/r_0}$$

dove k e r_0 sono costanti positive. Determinate il periodo dell'orbita circolare di raggio r_0, e studiare le orbite non circolari vicine ad essa.

Soluzione

Per un'orbita circolare deve essere

$$-mr\omega^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{k}{rr_0}\right)e^{-r/r_0}$$

da cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mer_0^3}{2k}}$$

L'energia del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}e^{-r/r_0}$$

Per l'orbita circolare sappiamo che

$$L^2 = L_0^2 = m^2r_0^4\omega^2 = \frac{2kmr_0}{e}$$

ed inoltre

$$E = E_0 = 0$$

Intoduciamo una piccola perturbazione del sistema, ponendo

$$\begin{aligned} L^2 &= L_0^2 + \Delta_{L^2} \\ E &= \Delta_E \end{aligned}$$

Introducendo una nuova coordinata proporzionale alla deviazione radiale dalla traiettoria circolare,

$$r = r_0 + \delta$$

possiamo scrivere l'energia del sistema nella forma

$$\Delta_E = \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_0^2 + \Delta_{L^2}}{2m\left(r_0+\delta\right)^2} - \frac{ke^{-1}}{r_0+\delta}e^{-\delta/r_0}$$

Sviluppando al secondo ordine in δ otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta_E &= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_0^2}{2mr_0^2}\left(1+\frac{\Delta_{L^2}}{L_0^2}\right)\frac{1}{\left(1+\delta/r_0\right)^2} - \frac{k}{er_0}\frac{1}{1+\delta/r_0}e^{-\delta/r_0} \\ &\simeq \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_0^2}{2mr_0^2}\left(1+\frac{\Delta_{L^2}}{L_0^2}\right)\left(1-2\frac{\delta}{r_0}+3\frac{\delta^2}{r_0^2}\right) - \frac{k}{er_0}\left(1-\frac{\delta}{r_0}+\frac{\delta^2}{r_0^2}\right)\left(1-\frac{\delta}{r_0}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{r_0^2}\right) \end{aligned}$$

dove sono state utilizzate le approssimazioni, valide per $x \ll 1$,

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\simeq 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2\\ e^x &\simeq 1+x+\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta_E &= \frac{L_0^2}{2mr_0^2}-\frac{k}{er_0}\\ &+ \frac{\Delta_{L^2}}{2mr_0^2}-\frac{L_0^2}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}+\frac{2k}{er_0}\frac{\delta}{r_0}\\ &+ \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}+\frac{3L_0^2}{2mr_0^2}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{5k}{2er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}\end{aligned}$$

I primi due termini sommano ad $E_0 = 0$. Nella seconda riga, i termini lineari in δ si cancellano dato che l'orbita circolare è nel minimo del potenziale efficace corrispondente a $L = L_0$. Alla fine rimane

$$\begin{aligned}\Delta_E-\frac{\Delta_{L^2}}{2mr_0^2} &= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2+\left(\frac{3L_0^2}{2mr_0^2}-\frac{5k}{2er_0}\right)\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}\\ &= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2+\frac{1}{2}\frac{k}{er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}\end{aligned}$$

La nuova energia corrisponde ad un oscillatore armonico: infatti derivando rispetto al tempo otteniamo l'equazione del moto

$$m\ddot{\delta}+\frac{k}{er_0^3}\delta=\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^3}$$

Notare che se $\Delta_{L^2} = 0$ l'oscillazione radiale avviene attorno all'orbita circolare precedente. In caso contrario attorno a una nuova orbita circolare di raggio

$$\delta=\frac{e\Delta_{L^2}}{mk}$$

In ogni caso la frequenza delle oscillazioni radiali sarà data da

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{emr_0^3}}$$

Per studiare la traiettoria scriviamo l'energia nella forma

$$\begin{aligned}\Delta_E-\frac{\Delta_{L^2}}{2mr_0^2} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\delta}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{k}{er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}\\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\delta}{d\theta}\frac{L_0^2}{2mr_0^2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{k}{er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}\end{aligned}$$

Notare che al secondo ordine nella deviazione è stato sufficiente sostituire $\dot{\theta}$ con il suo valore imperturbato della traiettoria circolare originaria. Di conseguenza l'orbita si può chiudere solo se la frequenza delle oscillazioni radiali appena determinata è in rapporto razionale con l'inverso del periodo di rotazione, determinato precedentemente. Ma nel caso considerato questo non è vero, dato che

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{mer_0^3}} = f\sqrt{2}$$

CC BY NC SA

5.103. Oscillatore bidimensionale forzato ⋆⋆

Una massa m è collegata ad una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo trascurabile, ed è libera di muoversi in un piano. Su di essa agisce una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$. L'altro estremo della molla viene spostato secondo la legge

$$\begin{aligned} x_0(t) &= a\cos\omega t \\ y_0(t) &= b\sin\omega t \end{aligned}$$

cioè su una ellisse di semiassi a e b allineati agli assi coordinati. Determinare la traiettoria della massa a regime.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx &= ka\cos\omega t \\ m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky &= kb\sin\omega t \end{aligned}$$

e introduciamo la variabile complessa

$$z = \frac{x}{a} + i\frac{y}{b}$$

che dovrà soddisfare l'equazione

$$m\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = ke^{i\omega t}$$

A regime la soluzione è data da

$$z = \frac{k}{-m\omega^2 + i\omega\gamma + k}e^{i\omega t}$$

Quindi nel piano di coordinate $a^{-1}x$, $b^{-1}y$ la traiettoria è una circonferenza di raggio

$$R = \left|\frac{k}{-m\omega^2 + i\omega\gamma + k}\right| = \frac{k}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

e nel piano di coordinate x, y troviamo un'ellisse di semiassi aR e bR.

5.104. Caduta su una scodella ⋆⋆

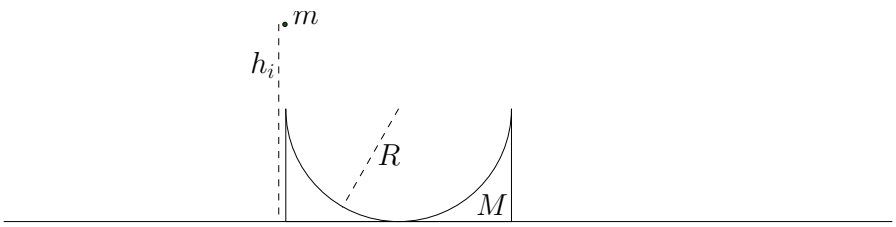


Figura 5.42.: La scodella semisferica del problema.

Una scodella semisferica di massa M è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Un punto materiale di massa m viene lasciato cadere da una altezza $h_i > R$, in modo da arrivare sul bordo sinistro della scodella. Da questo momento esso rimane vincolato ad essa, fino ad arrivare eventualmente al bordo opposto e lasciarla.

1. Calcolare lo spostamento orizzontale della scodella al momento del distacco, e l'altezza finale a cui arriva il punto materiale.
2. Calcolare la velocità del punto materiale al suo passaggio nel punto più basso della scodella.
3. Applicando una forza orizzontale alla scodella la si mantiene ferma. Quale è il valore massimo della forza da applicare?

Soluzione[3]

Domanda 1 Indichiamo con X_i la posizione orizzontale iniziale del centro di massa della sola scodella. Per il centro di massa del sistema avremo

$$X_{cm,i} = \frac{MX_i + m(X_i - R)}{M + m} \tag{5.104.1}$$

Al momento del distacco avremo

$$X_{cm,f} = \frac{M(X_i + d) + m(X_i + d + R)}{M + m} \tag{5.104.2}$$

dove d è lo spostamento cercato. Ma dato che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva ed è inizialmente nulla sarà $X_{cm,i} = X_{cm,f}$, quindi

$$\frac{MX_i + m(X_i - R)}{M + m} = \frac{M(X_i + d) + m(X_i + d + R)}{M + m} \tag{5.104.3}$$

e risolvendo troviamo

$$d = -\frac{2mR}{m + M} \tag{5.104.4}$$

[3]Scritto del 9 marzo 2011

Indichiamo con v_x, v_y le componenti della velocità della particella, con V la velocità della scodella.

Al distacco la componente orizzontale della velocità della particella relativa alla scodella è nulla. Ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è inizialmente nulla abbiamo

$$0 = mv_x + MV = m\left(v_x - V\right) + \left(M + m\right)V = (m + M)V \tag{5.104.5}$$

Quindi $V = 0$, ma anche $v_x = -\frac{M}{m}V = 0$. In conclusioni al momento del distacco la scodella è ferma e la particella si muove verticalmente. Dalla conservazione dell'energia segue che l'altezza finale sarà uguale a quella iniziale.

Domanda 2 Usando la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{5.104.6}$$

dove abbiamo indicato con v, V le velocità della particella e della scodella (entrambe orizzontali quando la prima si trova nel punto più basso). Inoltre dalla conservazione della quantità di moto orizzontale abbiamo

$$0 = mv + MV \tag{5.104.7}$$

e quindi

$$V = -\frac{m}{M}v \tag{5.104.8}$$

Sostituendo otteniamo0

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{m}{M}\right)v^2 \tag{5.104.9}$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gh_i\left(\frac{M}{m + M}\right)} \tag{5.104.10}$$

Domanda 3 Dato che la forza da applicare è l'unica che agisce

$$F = (M + m)\frac{ma_x}{m + M} = ma_x \tag{5.104.11}$$

dove a_x è l'accelerazione orizzontale della particella. D'altra parte

$$ma_x = -N\sin\theta \tag{5.104.12}$$

dove N è la reazione vincolare della scodella. Se scriviamo l'equazione del moto per la particella nella direzione radiale abbiamo invece

$$m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N \tag{5.104.13}$$

Inoltre dalla conservazione dell'energia

$$mgh_i = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.104.14}$$

possiamo ricavare la velocità in funzione della posizione. Sostituendo nella (5.104.12) otteniamo

$$N = 2mg\left(\frac{h_i}{R} - 1 + \cos\theta\right) + mg\cos\theta \tag{5.104.15}$$

e quindi

$$F = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R} - 1\right) + 3\cos\theta\right]\sin\theta \tag{5.104.16}$$

Cerchiamo il minimo:

$$\frac{dF}{d\theta} = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R} - 1\right) + 3\cos\theta\right]\cos\theta + 3mg\sin^2\theta = 0 \tag{5.104.17}$$

cioè

$$\cos^2\theta + 2\gamma\cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \tag{5.104.18}$$

dove abbiamo posto per semplicità

$$\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{h_i}{R} - 1\right) \tag{5.104.19}$$

Risolvendo troviamo

$$\cos\theta = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}} \tag{5.104.20}$$

Scartando la soluzione negativa (non corrisponde ad una posizione sulla scodella) e sostituendo abbiamo

$$F = \pm 3mg\left(3\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2} - 2\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}} \tag{5.104.21}$$

5.105. Problema di Keplero: costanti del moto ⋆⋆⋆

Nel problema di Keplero si conserva il momento angolare $\vec{L}$ e l'energia E. Dato che le orbite limitate sono ellissi con il fuoco nel centro di forza, se consideriamo un versore $\hat{n}$ diretto dal centro di forza al punto di massimo avvicinamento vediamo che si tratta di una costante del moto. Calcolare esplicitamente questa costante in funzione del vettore posizione $\vec{R}$ e della quantità di moto $\vec{P}$ della particella orbitante. Quante "nuove" costanti del moto abbiamo ottenuto oltre alle quattro (E, L_x, L_y e L_z) già note precedentemente? Nuove significa non esprimibili come funzioni delle altre.

Soluzione

Descriviamo la traiettoria usando coordinate polari nel piano passante per il centro di forza e perpendicolare a $\vec{L}$. Come abbiamo verificato in un esercizio precedente questa si può scrivere nella forma

$$R = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \phi)}$$

dove per una traiettoria ellittica $0 < e < 1$. La posizione del punto di massimo avvicinamento corrispondono dunque a $\theta = -\phi$, e quindi le componenti cartesiane di $\hat{n}$ sono

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'altra parte, dall'equazione della traiettoria segue che

$$R\cos(\theta + \phi) = \frac{p - R}{e}$$

ossia

$$n_x \cos\theta + n_y \sin\theta = \hat{n} \cdot \hat{e}_r = \frac{p - R}{eR}$$

Derivando questa espressione rispetto al tempo otteniamo

$$\hat{n} \cdot \hat{e}_\theta = -\frac{p}{e\dot{\theta}R^2}\dot{R}$$

da cui segue che il versore cercato è della forma

$$\hat{n} = \frac{1}{e}\left[\left(\frac{p - R}{R}\right)\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\dot{R}\hat{e}_\theta\right]$$

Cerchiamo di esprimere questa espressione in funzione dei vettori posizione e quantità di moto. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= \frac{1}{e}\left[\left(\frac{p}{R}-1\right)\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\dot{R}\hat{e}_\theta\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[\left(\frac{p}{R}-1\right)\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\left(\dot{R}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}\hat{e}_r + R\dot{\theta}\hat{e}_r\right)\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[-\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\left(\dot{R}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}\hat{e}_r\right)\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[-\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\hat{L}\wedge\vec{V}\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[-\hat{e}_r + \frac{mp}{L^2}\vec{V}\wedge\vec{L}\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[\frac{p}{L^2}\vec{P}\wedge\vec{L} - \hat{e}_r\right]
\end{aligned}$$

D'altra parte possiamo scrivere l'inverso del raggio di massimo e minimo avvicinamento nella forma

$$\begin{aligned}
\frac{p}{R_-} &= 1+e \\
\frac{p}{R_+} &= 1-e
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} = \frac{2}{p}$$

Ora, $1/R_+$ e $1/R_-$ sono soluzioni di

$$\frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R} - E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_+}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_-}\right) = 0$$

e troviamo

$$p = \frac{L^2}{km}$$

Analogamente possiamo verificare che anche e si può scrivere in funzione delle costanti del moto,

$$e = 1 - \frac{p}{R_+} = -\sqrt{1+\frac{2EL^2}{k^2m}}$$

In conclusione possiamo scrivere il versore cercato nella forma

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= \frac{1}{kme}\left[\vec{P}\wedge\vec{L} - km\frac{\vec{R}}{R}\right] \\
&= \frac{1}{kme}\left[\vec{P}\wedge\left(\vec{R}\wedge\vec{P}\right) - km\frac{\vec{R}}{R}\right]
\end{aligned}$$

In questa espressione non abbiamo più quantità che dipendono da una particolare scelta del piano orbitale, quindi il risultato sarà vero in generale.

Per specificare un versore in tre dimensioni sono necessari due parametri (ad esempio i due parametri angolari delle coordinate sferiche). Sappiamo però che $\hat{n}$ giace nel piano dell'orbita, che è completamente determinato dal momento angolare. Resta quindi un'unica nuova quantità conservata.

Osserviamo infine che il vettore

$$\vec{A} = kme\hat{n} = \vec{P} \wedge \vec{L} - km\frac{\vec{R}}{R}$$

diretto come $\hat{n}$ è noto come vettore di Lenz. Da quanto abbiamo visto segue che $\vec{A}$ è una costante del moto per il problema di Keplero.

5.106. Sistema solare su un cono ⋆⋆

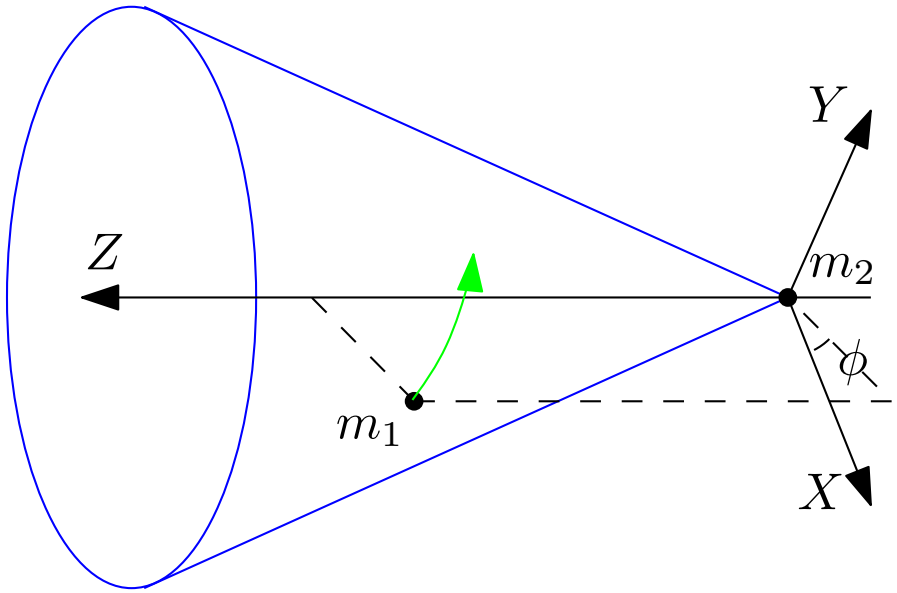


Figura 5.43.: Il cono sul quale si muove la particella di massa m_1. La massa m_2 è fissa nel vertice.

Una particella di massa m_1 si muove vincolata ad un cono senza attrito, con angolo di apertura 2α, sotto l'azione della sola interazione gravitazionale con una massa m_2 fissata sul vertice. In coordinate cilindriche l'equazione del cono è

$$\rho = z \tan \alpha \tag{5.106.1}$$

1. Scrivere le costanti del moto del sistema in termini delle sole coordinate ρ e ϕ.
2. Determinare il periodo di un'orbita circolare corrispondente ad un valore fissato di ρ.
3. Determinare la forma delle traiettorie.

Soluzione

Domanda 1 Le costanti del moto del problema sono l'energia totale e la proiezione del momento angolare lungo l'asse z. L'energia si conserva perchè la forza gravitazionale è conservativa, e il lavoro da essa fatto sarà incluso nell'energia totale come energia potenziale. L'unica altra forza che agisce sulla massa m_1 è la reazione vincolare del cono, ma dato che il vincolo è privo di attrito questa è perpendicolare alla superficie e quindi allo spostamento, per cui non fa lavoro.

L'energia totale si scrive nelle coordinate desiderate come

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\dot{\rho}}{\sin\alpha}\right)^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right] - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \tag{5.106.2}$$

dato che ρ è legato alla distanza tra le due masse da $\rho = r_{12}\sin\alpha$. Per la proiezione del momento angolare lungo l'asse z abbiamo invece

$$L_z = m_1\rho^2\dot{\phi} \tag{5.106.3}$$

Domanda 2 Data la forma del vincolo un'orbita circolare è una traiettoria a z costante. La seconda legge della dinamica si scrive quindi nella forma

$$m_1\left(-\dot{\phi}^2\rho\hat{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi\right) = \vec{R} - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{21} \tag{5.106.4}$$

dove $\vec{R}$ è la reazione vincolare del cono e $\vec{r}_{12}$ il vettore che unisce il vertice del cono alla particella di massa m_1. Dato che $\vec{R}$ è normale alla superficie e quindi a $\vec{r}_{12}$ conviene proiettare lungo quest'ultimo l'equazione precedente, ottenendo

$$-\dot{\phi}^2\rho\hat{e}_\rho\cdot\vec{r}_{12} = -\frac{Gm_2}{r_{12}} \tag{5.106.5}$$

dato che $\vec{r}_{12}\cdot\hat{e}_\phi = 0$. Inoltre $\hat{e}_\rho\cdot\vec{r}_{12} = \rho$ e quindi

$$\dot{\phi}^2 = \frac{Gm_2\sin\alpha}{\rho^3} \tag{5.106.6}$$

da cui

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Gm_2\sin\alpha}{\rho^3}} \tag{5.106.7}$$

ossia

$$T = 2\pi\frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{Gm_2\sin\alpha}} \tag{5.106.8}$$

Alternativamente si poteva eliminare $\dot{\phi}$ dall'energia ottenendo il potenziale efficace

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\dot{\rho}}{\sin\alpha}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1\rho^2} - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \tag{5.106.9}$$

che è minimo al valore di ρ corrispondente all'orbita circolare. Derivando rispetto a ρ^{-1} otteniamo

$$\frac{L_z^2}{m_1\rho} - Gm_1m_2\sin\alpha = 0 \tag{5.106.10}$$

ossia

$$\rho = \frac{L_z^2}{Gm_1^2m_2\sin\alpha} \tag{5.106.11}$$

d'altra parte sostituendo L_z otteniamo

$$\dot{\phi}^{-2} = \frac{\rho^3}{Gm_2\sin\alpha} \tag{5.106.12}$$

che coincide col risultato precedente.

Domanda 3 Le orbite si possono ottenere analiticamente con un metodo analogo a quello usato per il problema di Keplero. Utilizzando come parametro la coordinata ϕ e non il tempo possiamo scrivere l'energia nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\rho}{d\phi}\dot{\phi}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1\rho^2} - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\rho}{d\phi}\frac{L_z}{m_1\rho^2}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1\rho^2} - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \end{aligned} \tag{5.106.13}$$

Introducendo adesso la coordinata $u = 1/\rho$ abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m_1\sin^2\alpha}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1}u^2 - Gm_1m_2u\sin\alpha \tag{5.106.14}$$

e derivando rispetto a ϕ (l'energia è costante) otteniamo

$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{L_z^2}{m_1\sin^2\alpha}\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L_z^2}{m_1}\frac{du}{d\phi}u - Gm_1m_2\frac{du}{d\phi}\sin\alpha = 0 \tag{5.106.15}$$

cioè un'equazione per la traiettoria

$$\frac{L_z^2}{m_1\sin^2\alpha}\frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L_z^2}{m_1}u = Gm_1m_2\sin\alpha \tag{5.106.16}$$

che ha per soluzione generale

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{Gm_1^2m_2\sin\alpha}{L_z^2} + A\cos(\phi\sin\alpha + \beta) \tag{5.106.17}$$

dove A, β dipendono dalle condizioni iniziali. Se $\alpha = \pi/2$ il cono si riduce ad un piano e le traiettorie sono le familiari coniche del problema di Keplero. La soluzione nel caso generale si può interpretare facilmente immaginando di "tagliare" il cono e di "incollarlo" su un piano come in figura. L'operazione è possibile senza deformare la superficie, come si può osservare che le coordinate

$$r = \frac{\rho}{\sin\alpha} \tag{5.106.18}$$

$$\theta = \phi\sin\alpha \tag{5.106.19}$$

si possono interpretare come coordinate polari nel piano in cui è stato "incollato" il cono tagliato. In tali coordinate il problema è indistinguibile da quello di Keplero, come si può verificare riscrivendo le costanti del moto

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{Gm_1}{r} \tag{5.106.20}$$

$$L_z' = \frac{L_z}{\sin\alpha} = m_1r^2\dot{\theta} \tag{5.106.21}$$

CC BY NC SA

se si eccettua il fatto che non tutto il piano è ricoperto dal cono se $\alpha < \pi/2$ (oppure è ricoperto più volte se $\alpha > \pi/2$). Avremo quindi, ad esempio, orbite ellittiche che però andranno collegate sui due bordi del taglio, che dovranno essere identificati. Questo equivarrà ad un angolo di precessione delle orbite di $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\sin\alpha}$. Vedere la Figura 5.44 e la discussione del problema

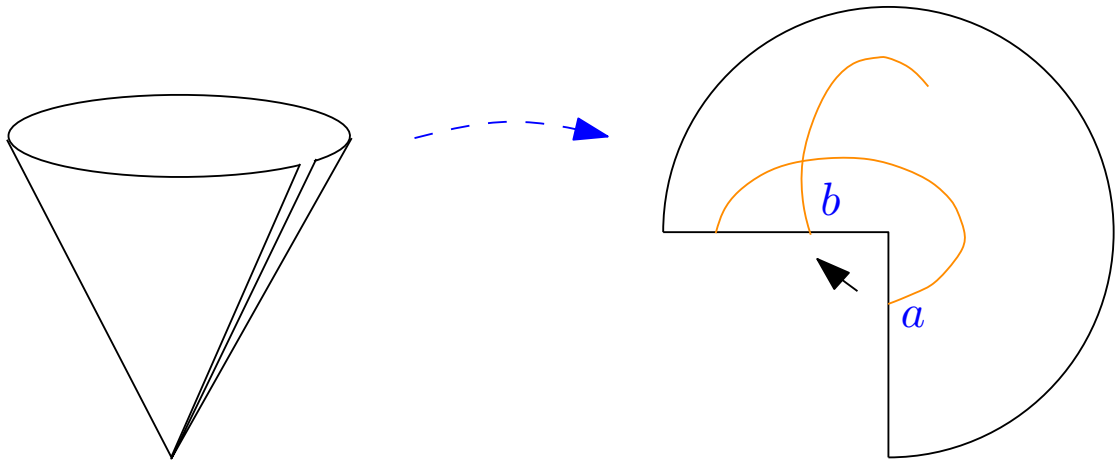


Figura 5.44.: Un cono può essere tagliato e "incollato" su un piano senza deformarlo. Nel caso considerato l'angolo α è tale che $\sin\alpha = 3/4$, quindi il cono ricopre tre quarti del piano. Le orbite sono tratti di coniche, perchè il problema è indistinguibile da quello di Keplero. Si devono però identificare i bordi del taglio, per cui quando un'orbita (ellittica in figura) arriva nel taglio al punto a, deve essere prolungata a partire dal punto b corrispondente (a e b sono alla stessa distanza dal vertice). Inoltre l'angolo tra orbita e taglio deve essere lo stesso sia in a che in b.

5.107. Pendolo urtato da un proiettile ⋆⋆

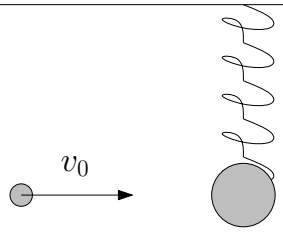


Figura 5.45.: La massa sospesa e il proiettile. L'urto è istantaneo.

Una massa m è sospesa al soffitto mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si trova inizialmente nella posizione di equilibro. Un proiettile di massa $m' = \gamma m$ la urta orizzontalmente con velocità v_0, rimanendo attaccato ad essa. L'urto è istantaneo.

1. Calcolare la velocità delle due masse immediatamente dopo l'urto.
2. Per quali valori di γ e v_0 le masse urtano il soffitto?
3. Calcolare il massimo allungamento della molla, nel caso $\gamma = 1$

Soluzione

Domanda 1 Durante l'urto le sole forze importanti sono quelle impulsive tra la massa sospesa e quella in arrivo. Dato che si tratta di forze interne, la quantità di moto si conserva e quindi

$$\gamma m v_0 \hat{x} = (\gamma + 1)\, m\vec{v} \tag{5.107.1}$$

quindi la velocità finale sarà orizzontale e varrà

$$\vec{v} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} v_0 \hat{x} \tag{5.107.2}$$

Domanda 2 Immediatamente dopo l'urto le equazioni del moto per la massa risultante saranno

$$(\gamma + 1) m\ddot{x} + kx = 0 \tag{5.107.3}$$

$$(\gamma + 1) m\ddot{y} + ky = -(\gamma + 1) mg \tag{5.107.4}$$

quindi il moto sarà la composizione di un'oscillazione orizzontale attorno alla posizione di equilibrio $x = 0$, e di una verticale attorno alla posizione di equilibrio $y = -(\gamma + 1)\frac{mg}{k}$. Entrambe le oscillazioni avranno la frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m(\gamma + 1)}} \tag{5.107.5}$$

Consideriamo in particolare l'oscillazione verticale, che sarà data da

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - (\gamma+1)\frac{mg}{k} \tag{5.107.6}$$

Poniamo le condizioni al contorno, tenendo presente che inizialmente la massa non si muove verticalmente e si trova in $y = -mg/k$. Abbiamo

$$y(0) = A - (\gamma+1)\frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k} \tag{5.107.7}$$

$$\dot{y}(0) = B\omega = 0 \tag{5.107.8}$$

di conseguenza $A = \gamma mg/k$, $B = 0$ e

$$y(t) = \frac{mg}{k}\left[\gamma\cos\omega t - (\gamma+1)\right] \tag{5.107.9}$$

In altri termini, l'ampiezza di oscillazione è la differenza tra la quota iniziale e quella di equilibrio. Ma allora il massimo valore di y raggiungibile sarà quello iniziale, $y(0) = -mg/k$, e la massa non potrà mai urtare il soffitto.

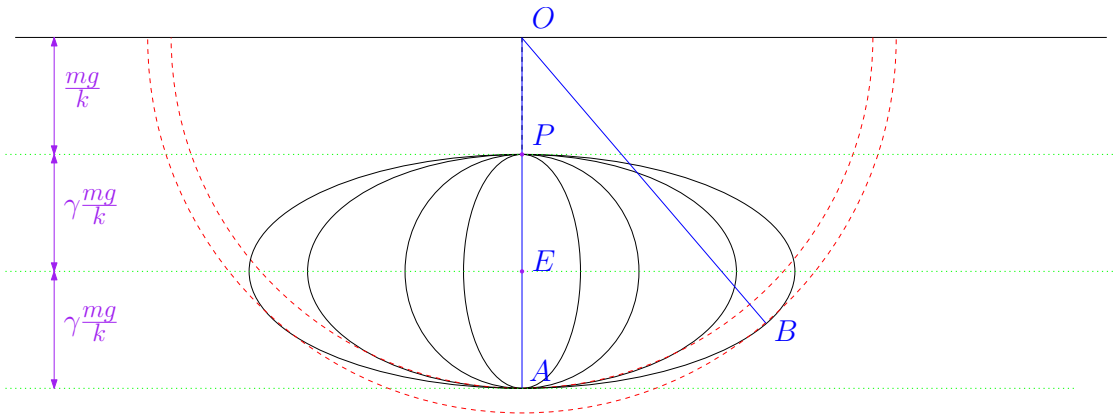


Figura 5.46.: Il massimo allungamento. Le masse si trovano inizialmente nel punto P, che è il punto di equilibrio della massa sospesa prima dell'urto, ed è sotto il punto di sospensione della molla O di $\overline{OP} = mg/k$. Dopo l'urto il punto di equilibrio diviene E, con $\overline{OE} = (\gamma+1)mg/k$.

Domanda 3 Abbiamo determinato in precedenza $y(t)$. Per quanto riguarda $x(t)$ la soluzione generale è

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \tag{5.107.10}$$

e imponendo le condizioni al contorno

$$x(0) = C = 0 \tag{5.107.11}$$

$$\dot{x}(0) = D\omega = \frac{1}{2}v_0 \tag{5.107.12}$$

otteniamo

$$x(t) = \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t \tag{5.107.13}$$

Possiamo adesso scrivere l'allungamento della molla nel caso $\gamma = 1$ come

$$\ell^2(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{v_0^2}{4\omega^2} \left[\sin^2 \omega t + \frac{g^2}{v_0^2 \omega^2} (\cos \omega t - 2)^2 \right] \tag{5.107.14}$$

e per semplificare la discussione conviene introdurre la scala adimensionale $\beta = g/(v_0 \omega)$. Troviamo il massimo di 5.107.14 . La derivata vale

$$\frac{d\ell^2}{dt} = \frac{v_0^2}{2\omega} \left[2\beta^2 + \left(1 - \beta^2\right) \cos \omega t \right] \sin \omega t = 0$$

e si annulla per $\sin \omega t = 0$, che corrisponde ai due allungamenti quadri

$$\ell^2(t) = \frac{v_0^2}{4\omega^2} \beta^2 (\pm 1 - 2)^2 = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \beta^2 \\ \frac{9}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \beta^2 \end{cases} \tag{5.107.15}$$

delle quali il seconda è il maggiore, e corrisponde al punto più basso raggiunto dalla traiettoria. L'altra possibile soluzione è

$$\cos \omega t = \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1} \tag{5.107.16}$$

che è accettabile (perchè minore di 1 in modulo) nell'intervallo $0 < \beta < 1/\sqrt{3}$. La lunghezza corrispondente è

$$\ell^2(t) = \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \frac{1 + 3\beta^2}{1 - \beta^2}$$

che è sempre l'allungamento massimo in questo intervallo.

Si può interpretare graficamente questo risultato. La traiettoria è una delle ellissi in Figura (5.46): il semiasse verticale vale sempre $\gamma mg/k$, quello orizzontale è tanto più grande quanto maggiore è la velocità iniziale. Se il semiasse orizzontale è piccolo (β grande) la distanza massima tra O e un punto dell'ellisse è $\overline{OA}$. Quando il semiasse orizzontale diviene abbastanza grande il massimo diviene $\overline{OB}$. Dalla figura è chiaro che questo accade quando il raggio di curvatura della traiettoria in A diviene maggiore di $\overline{OA}$, cioè quando

$$(2\gamma + 1) \frac{mg}{k} < \rho_A = \left| \frac{v^2}{a_\perp} \right|_A = \left| \frac{\dot{x}^2}{\ddot{y}} \right|_A = \frac{k}{mg\gamma\omega^2} \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{g\gamma} \left(\frac{v_0}{2} \right)^2$$

cioè per

$$\gamma (2\gamma + 1) \beta^2 < 1$$

che per $\gamma = 1$ si riduce alla condizione trovata precedentemente $\beta < 1/\sqrt{3}$.

CC BY NC SA

5.108. Moto su superficie di rotazione ⋆⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi sotto l'azione della gravità su una superficie liscia, la cui equazione in coordinate cilindriche è $\rho = \alpha z^2$.

1. Determinare le quantità conservate.
2. Studiare l'esistenza di orbite circolari $\rho = r_c$ e determinarne la velocità in funzione di r_c.
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni radiali attorno alle orbite circolari.

Soluzione[4]

Domanda 1

Si conserva la somma di energia cinetica e potenziale gravitazionale, e la componente verticale del momento angolare rispetto ad un polo posto nell'origine (o più in generale sull'asse z). Infatti, la reazione vincolare è normale alla superficie e quindi alla velocità del punto materiale, quindi non fa lavoro. Inoltre posta la particella in in punto arbitrario sulla superficie, se consideriamo il piano determinato dal suo vettore posizione rispetto al polo e dall'asse z vediamo che esso contiene anche tutte le forze presenti (reazione vincolare e forza di gravità). Quindi il momento sarà perpendicolare a tale piano, e non potrà avere una componente verticale.

Domanda 2

Supponiamo che la particella si muova in un'orbita circolare di raggio r_c. Dato che il momento angolare è conservato la velocità angolare è costante. Inoltre avremo, usando coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z)

$$m\ddot{z} = N\cos\theta - mg = 0 \tag{5.108.1}$$

e

$$-mr_c\dot{\phi}^2 = -N\sin\theta \tag{5.108.2}$$

dove θ è la pendenza della superficie nel punto considerato,

$$\tan\theta = \frac{dz}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{4r_c\alpha}}\,. \tag{5.108.3}$$

Risolvendo otteniamo

$$v = r_c\dot{\phi} = r_c\sqrt{\frac{g}{r_c}\tan\theta} = \left(\frac{g^2 r_c}{4\alpha}\right)^{1/4} \tag{5.108.4}$$

[4] Primo problema scritto 11/9/2008

Domanda 3

Scriviamo l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + mgz \tag{5.108.5}$$

e il momento angolare lungo z:

$$L_z = mr^2\dot{\phi} \tag{5.108.6}$$

Possiamo adesso eliminare $\dot{r}$ e r tenendo conto del vincolo ($\dot{r} = 2\alpha z\dot{z}$) e $\dot{\phi}$ usando il momento angolare, ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + 4\alpha^2 z^2\right)\dot{z}^2 + \frac{L_z^2}{2m\alpha^2 z^4} + mgz \tag{5.108.7}$$

che sviluppiamo per piccole variazioni attorno all'orbita circolare. Questa corrisponde ad un'energia uguale al minimo del potenziale effettivo. Poniamo

$$z = z_c + \varepsilon, \qquad \dot{z} = \dot{\varepsilon} \tag{5.108.8}$$

e sviluppando al secondo ordine abbiamo

$$E - E_0 = \frac{1}{2}m\left(1 + 4\alpha^2 z_c^2\right)\dot{\varepsilon}^2 + \frac{5L_z^2}{m\alpha^2 z_c^6}\varepsilon^2 \tag{5.108.9}$$

che corrisponde all'energia di un oscillatore armonico con

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{10L_z^2}{m^2\alpha^2 z_c^6\left(1 + 4\alpha^2 z_c^2\right)}} = \sqrt{\frac{5g}{(1 + 4\alpha r_c)}\sqrt{\frac{\alpha}{r_c}}} \tag{5.108.10}$$

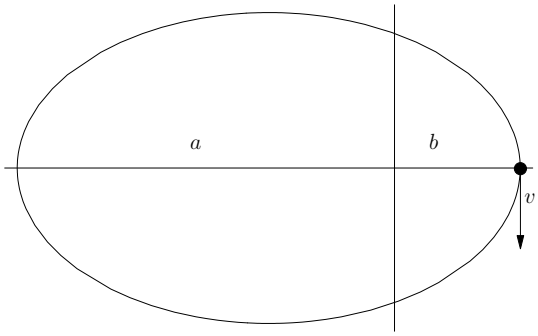
CC BY NC SA

5.109. Cambio di orbita ⋆⋆

Un punto materiale di massa m si muove sotto l'azione di un potenziale

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

e percorre un'orbita ellittica con distanze di minimo e massimo avvicinamento al centro delle forze data da $r_{min} = b$ e $r_{max} = a$. Mediante un sistema di propulsione è possibile trasferire al punto materiale in un tempo molto breve un impulso $\vec{Q}$. Il sistema di propulsione viene azionato nella posizione di massimo avvicinamento.



1. Determinare modulo, direzione e verso dell'impulso $\vec{Q}$ necessario a porre la particella in orbita circolare rimanendo nello stesso piano dell'orbita precedente.
2. Determinare il minimo modulo dell'impulso $\vec{Q}$ necessario a far cadere la particella sul centro delle forze.
3. Determinare il minimo modulo di $\vec{Q}$ necessario a porre la particella su un'orbita illimitata.

Soluzione[5]

Domanda 1

La velocità iniziale v si può calcolare scrivendo l'energia totale in $r = a$ e $r = b$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2mb^2} - \frac{k}{b} \\ E &= \frac{L^2}{2ma^2} - \frac{k}{a} \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che nei punti di massimo e minimo avvicinamente $E = U_{eff}$. Segue che

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = k\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

[5] Secondo problema scritto 30/3/2007

ossia

$$(mvb)^2 = L^2 = 2mk\frac{ab}{a+b}$$

e quindi

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m}\frac{a}{b}\frac{1}{a+b}}\,.$$

Dato che l'impulso è applicato in un tempo molto breve la posizione iniziale della nuova orbita sarà ancora quella di massimo avvicinamento, ma la velocità sarà cambiata:

$$\vec{v}_c = v\hat{\tau} + \frac{1}{m}\vec{Q}\,.$$

Se la nuova orbita deve essere circolare è chiaro che la nuova velocità deve essere ancora puramente tangenziale, da cui $\vec{Q} = Q\hat{\tau}$. Inoltre la massa per l'accelerazione centripeta dovranno essere uguali alla forza radiale,

$$m\frac{v_c^2}{b} = \frac{k}{b^2}$$

da cui

$$\frac{k}{mb} = v_c^2 = \left(v + \frac{Q}{m}\right)^2$$

e quindi

$$\vec{Q} = \left(\sqrt{\frac{mk}{b}} - mv\right)\hat{\tau} = \sqrt{\frac{mk}{b}}\left(1 - \sqrt{\frac{2a}{a+b}}\right)\hat{\tau}\,.$$

Domanda 2

Un'orbita corrisponde alla caduta sul centro di forze quando il momento angolare è nullo, l'impulso dovrà quindi essere applicato in modo tale da annullarne il valore iniziale. Scrivendo separatamente la componente radiale e tangenziale abbiamo

$$\vec{Q} = Q_\tau\hat{\tau} + Q_n\hat{n}$$

abbiamo la condizione

$$\Delta\vec{L} = -\vec{L} = b\hat{n} \wedge (Q_\tau\hat{\tau} + Q_n\hat{n})$$

da cui

$$L = -mvb = bQ_\tau$$

mentre Q_n resta arbitrario. Il modulo minimo di $\vec{Q}$ corrisponde ovviamente a $Q_n = 0$ ed abbiamo

$$\vec{Q} = -mv\hat{\tau} = -\sqrt{\frac{km}{b}\frac{2a}{a+b}}\hat{\tau}$$

che corrisponde all'impulso necessario a fermare la particella nella posizione in cui si trova.

Domanda 3

Per ottenere un'orbita illimitata è sufficiente avere $E > 0$. Dopo l'applicazione dell'impulso l'energia totale vale

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{Q_r}{m}\right)^2 + \frac{(mvb + Q_\tau b)^2}{2mb^2} - \frac{k}{b}$$

da cui

$$Q_r^2 + (mv + Q_\tau)^2 \geq \frac{2mk}{b}\,.$$

Sviluppando i quadrati

$$Q_r^2 + Q_\tau^2 + 2mvQ_\tau + m^2v^2 \geq \frac{2mk}{b}$$

vediamo che il modo più efficiente di aumentare il membro destro è quello di applicare l'impulso tangenzialmente (a causa del termine lineare in Q_τ). Quindi avremo un Q minimo dato da

$$Q^2 + 2mvQ + m^2v^2 - \frac{2mk}{b} = 0$$

ossia

$$Q = -mv + \sqrt{\frac{2mk}{b}} = \sqrt{\frac{2mk}{b}}\left(1 - \sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)$$

CC BY NC SA

5.110. Formica su un giradischi ⋆⋆

Una formica di massa m si trova sul bordo di un giradischi di raggio R, che ruota con velocità angolare ω. La formica vuole raggiungere il centro, ed è capace di spostarsi con una velocità angolare di modulo costante $v_0 > \omega R$ rispetto al giradischi.

1. Supponendo che la formica punti sempre il centro del giradischi, determinare l'equazione della sua traiettoria, in un opportuno sistema di coordinate, e rappresentarla graficamente.
2. Sempre nell'ipotesi precedente, determinare la forza risultante agente sulla formica in funzione della sua distanza dal centro.
3. Se invece la formica volesse percorrere una traiettoria rettilinea, quanto tempo impiegherebbe a raggiungere il centro?

Soluzione[6]

Domanda 1

Conviene descrivere il moto in un sistema di coordinate polari. La formica avrà una velocità radiale uguale a $-v_0\hat{e}_r$ e una velocità tangenziale (dovuta al trascinamento del disco) uguale a $r\omega\hat{e}_\theta$. D'altra parte l'espressione generale della velocità in coordinate polari è

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{5.110.1}$$

e quindi

$$\dot{r} = -v_0 \tag{5.110.2}$$
$$\dot{\theta} = \omega\,. \tag{5.110.3}$$

Possiamo integrare direttamente queste equazioni, e imponendo le condizioni iniziali abbiamo

$$r = R - v_0 t \tag{5.110.4}$$
$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{5.110.5}$$

da cui

$$r = R - \frac{v_0}{\omega}\left(\theta - \theta_0\right)\,. \tag{5.110.6}$$

La traiettoria è la combinazione di un moto uniforme in direzione radiale e di una rotazione uniforme, cioè una spirale di passo costante. In realtà l'angolo percorso prima di raggiungere il centro è dato da

$$\left(\theta - \theta_0\right) = \frac{\omega R}{v_0} < 1 \tag{5.110.7}$$

ed è quindi sempre inferiore ad un radiante. La traiettoria è rappresentata in figura per diversi valori di $\omega R/v_0$.

[6] Secondo esercizio scritto 12/11/2008

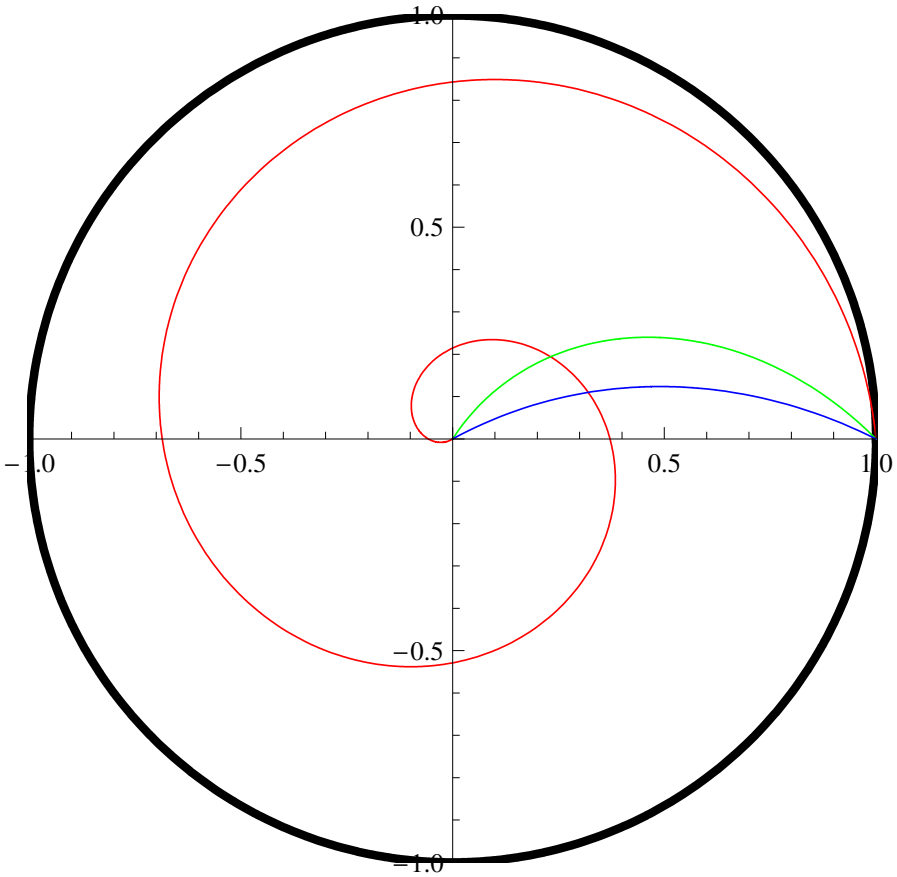


Figura 5.47.: Alcune possibili traiettorie sul disco, corrispondenti a $\omega R/v_0 = 1/2$ (blu) e $\omega R/v_0 = 1$ (verde). Per confronto è riportata anche una traiettoria corrispondente a $\omega R/v_0 = 10$ (in rosso).

Domanda 2

L'espressione generale per l'accelerazione in coordinate polari è data da

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\,. \tag{5.110.8}$$

ma nel nostro caso $\ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = 0$ e $\dot{r} = -v_0$. Otteniamo infine

$$\vec{F} = m\vec{a} = -rm\omega^2\hat{e}_r - 2v_0\dot{\omega}\hat{e}_\theta\,. \tag{5.110.9}$$

Domanda 3

Per muoversi radialmente la formica deve dirigere parte della sua velocità nella direzione tangenziale, in modo da annullare il trascinamento del disco. Detto α l'angolo tra la direzione della formica e il raggio avremo

$$v_0 \sin\alpha = -\omega r \tag{5.110.10}$$

$$v_0 \cos\alpha = -\dot{r}\,. \tag{5.110.11}$$

Dalla prima equazione segue

$$\sin\alpha = -\frac{\omega r}{v_0} \tag{5.110.12}$$

(notare che α dipende da r e che $\omega r/v_0 < 1$, quindi è sempre possibile soddisfare questa equazione. Sostituendo nella seconda otteniamo

$$v_0\sqrt{1 - \left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2} = -\frac{dr}{dt} \tag{5.110.13}$$

(abbiamo usato $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$) da cui

$$1 = -\frac{1}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}\frac{dr}{dt}\,. \tag{5.110.14}$$

Integriamo adesso membro a membro rispetto al tempo,

$$\int_0^T dt = -\int_0^T \frac{1}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}\frac{dr}{dt}dt \tag{5.110.15}$$

e cambiando variabile nel secondo integrale otteniamo

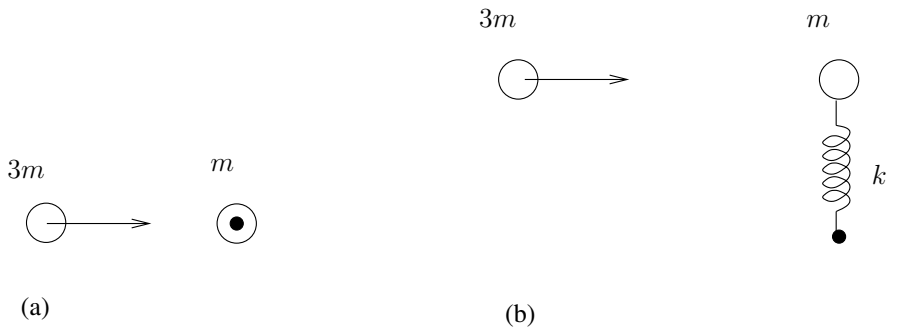
$$\int_0^T dt = -\int_{r(0)}^{r(T)} \frac{dr}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}} \tag{5.110.16}$$

cioè

$$T = \int_0^R \frac{dr}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)\,. \tag{5.110.17}$$

CC BY NC SA

5.111. Urto con una massa vincolata elasticamente ⋆⋆



Un proiettile urta come in figura (a) un bersaglio tenuto da una molla di lunghezza nulla e costante elastica k. Il proiettile ha massa tripla del bersaglio, l'urto ha una durata trascurabile ed è elastico.

1. Si calcoli la velocità di bersaglio e proiettile appena dopo l'urto.
2. Si calcoli la massima elongazione della molla.
3. Ora il bersaglio è tenuto fermo a distanza ℓ dalla posizione di equilibrio al momento dell'urto, in maniera che la molla sia perpendicolare alla velocità del proiettile come in figura (b). Si calcoli il momento angolare del bersaglio (sempre dopo l'urto) e quindi la massima elongazione della molla.

Soluzione[7]

Domanda 1

Durante l'urto, che avviene in un tempo molto breve, la molla rimane di lunghezza nulla. Si può considerare quindi il bersaglio come una massa libera, e varrà la conservazione dell'energia

$$\frac{3}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_p^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \tag{5.111.1}$$

e della quantità di moto

$$3mv_0 = 3mv_p + mv_b \tag{5.111.2}$$

dove abbiamo indicato con v_p e v_b le velocità finali di proiettile e bersaglio. Risolvendo il sistema si ottiene la soluzione

$$v_p = v_0 \tag{5.111.3}$$
$$v_b = 0 \tag{5.111.4}$$

[7] Primo problema scritto 19/12/2008.

che chiaramente è da scartare (le particelle non cambiano velocità) e

$$v_p = \frac{3m - m}{3m + m} v_0 = \frac{1}{2} v_0 \tag{5.111.5}$$

$$v_b = \frac{6m}{3m + m} v_0 = \frac{3}{2} v_0 \tag{5.111.6}$$

che è quella cercata.

Domanda 2

Dopo l'urto l'energia totale E_b della sistema costituito dal bersaglio e dalla molla si conserva. Eguagliando l'espressione di E_b immediatamente dopo l'urto (solo energia cinetica, dato che la molla non è allungata) a quella nel momento di massimo allungamento (solo energia potenziale della molla, dato che la massa è ferma) si ottiene

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2} v_0 \right)^2 = \frac{1}{2} k \delta_{MAX}^2 \tag{5.111.7}$$

e risolvendo

$$\delta_{MAX} = \frac{3}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \,. \tag{5.111.8}$$

Notare che si conserva anche il momento angolare L_b del sistema considerato, valutato rispetto all'estremo fisso della molla. Questo perchè la forza di richiamo della molla è centrale. Ma questa legge di conservazione non da alcuna informazione utile ($L_b = 0$ banalmente perchè il moto è radiale).

Domanda 3

Anche in questo caso dopo l'urto si conserva sia l'energia totale E_b che il momento angolare totale L_b del sistema costituito dal bersaglio e dalla molla. A differenza del caso precedente entrambe le leggi di conservazione danno informazioni utili. Osservando che la velocità iniziale del bersaglio $v_b = 3v_0/2$ è la stessa dei casi precedenti abbiamo per l'energia

$$\frac{1}{2} m v_b^2 + \frac{k}{2} \ell^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{2} r^2 \tag{5.111.9}$$

e per il momento angolare

$$- m v_b \ell = m r^2 \dot{\theta} \tag{5.111.10}$$

dove abbiamo espresso la posizione del bersaglio in coordinate polari. Ricavando $\dot{\theta}$ dalla relazione (5.111.10)

$$\dot{\theta} = - \frac{v_b \ell}{r^2} \tag{5.111.11}$$

e sostituendo nella (5.111.9) otteniamo

$$m v_b^2 + k \ell^2 = m \left(\dot{r}^2 + \frac{v_b^2 \ell^2}{r^2} \right) + k r^2 \tag{5.111.12}$$

Tenendo conto che nell'istante di massimo e minimo allungamento $\dot{r} = 0$ possiamo riscrivere questa relazione nella forma

$$\left(\frac{mv_b^2}{r^2} - k\right)\left(r^2 - \ell^2\right) = 0 \tag{5.111.13}$$

che ci fornisce le due possibili soluzioni

$$r = \ell \tag{5.111.14}$$

e

$$r = v_b\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{5.111.15}$$

Il massimo allungamento sarà il maggiore tra questi due valori.

Si sarebbe potuto arrivare a questo risultato anche ricordando che il moto di una massa vincolata nel piano e da una molla si riduce alla composizione di due oscillazioni armoniche. Abbiamo quindi

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{5.111.16}$$

$$y = C\cos\omega t + D\sin\omega t \tag{5.111.17}$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Imponendo le condizioni iniziali

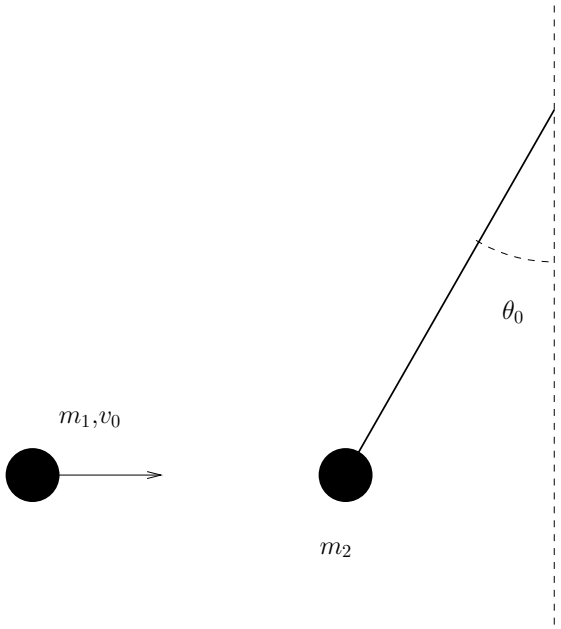
$$x = \frac{v_b}{\omega}\sin\omega t \tag{5.111.18}$$

$$y = \ell\cos\omega t \tag{5.111.19}$$

che corrisponde a un'ellisse di semiassi ℓ e v_b/ω. Il semiasse maggiore corrisponde all'allungamento massimo, e otteniamo nuovamente il risultato precedente.

CC BY NC SA

5.112. Urto tra una particella e un pendolo ⋆⋆



Nel sistema in figura il pendolo costituito dalla massa m_2 e da una bacchetta rigida di massa trascurabile si trova, al momento dell'urto con la massa m_1, in quiete nella posizione indicata, parametrizzata dall'angolo θ_0.

1. Supponendo l'urto istantaneo e completamente anelastico, trovare se esistono eventuali quantità conservate durante esso.
2. Trovare l'ampiezza dell'oscillazione del pendolo dopo l'urto se la velocità iniziale della massa m_1 vale v_0.
3. Per quali valori di θ_0 l'energia dissipata nell'urto è massima e minima?

Soluzione[8]

Domanda 1

Si conserva il momento angolare rispetto al punto di sospensione del pendolo, dato che l'unica forza esterna applicata al sistema ha braccio nullo rispetto ad esso. Scegliendo coordinate polari possiamo scrivere questa legge di conservazione come

$$m_1 v_0 \ell \cos\theta_0 = (m_1 + m_2)\ell^2\omega \tag{5.112.1}$$

dove ω è la velocità angolare del pendolo immediatamente dopo l'urto.

[8] Secondo problema scritto 21/9/2009

Si conserva anche la quantità di moto del sistema lungo la direzione perpendicolare alla bacchetta, dato che non ci sono forze esterne così dirette. La legge di conservazione si scrive

$$m_1 v_0 \cos\theta_0 = (m_1 + m_2)\omega\ell \tag{5.112.2}$$

e quindi è equivalente alla precedente.

Domanda 2

Abbiamo appena calcolato la velocità angolare iniziale del pendolo. Avremo per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\ell^2\omega^2 - (m_1 + m_2)\,g\ell\cos\theta_0 = -(m_1 + m_2)\,g\ell\cos\theta_{max} \tag{5.112.3}$$

e quindi

$$\cos\theta_{max} = \cos\theta_0 - \frac{\ell\omega^2}{2g} = \cos\theta_0 - \frac{v_0^2}{2g\ell}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\theta_0\,. \tag{5.112.4}$$

Se la quantità precedente è minore di -1 non si ha una oscillazione ma il pendolo compie delle rotazioni complete.

Domanda 3

L'energia dissipata nell'urto è data dalla differenza delle energie cinetiche,

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\ell^2\omega^2 \tag{5.112.5}$$

e quindi

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_0^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos^2\theta_0\right)\,. \tag{5.112.6}$$

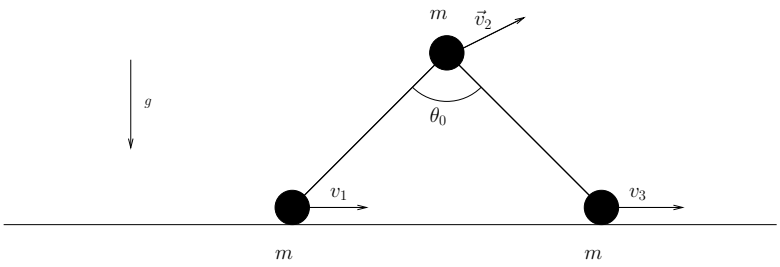
Il valore massimo si ha per $\theta_0 = \pm\pi/2$, nel qual caso tutta l'energia cinetica iniziale è dissipata. Il valore minimo si ha per $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$. In questo caso

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_0^2 \tag{5.112.7}$$

che corrisponde all'energia disponibile nel centro di massa.

CC BY NC SA

5.113. Caduta di una struttura ⋆⋆



Le tre masse identiche in figura sono collegate da due aste di lunghezza ℓ e massa trascurabile come in figura. Quelle agli estremi sono inoltre vincolate a scorrere su un piano orizzontale, mentre l'angolo tra le due aste può variare liberamente, e vale inizialmente θ_0.

1. Se $v_1(0) = V$ e $v_3(0) = 0$ determinare la velocità iniziale della massa intermedia $\vec{v}_2(0)$.
2. Nel caso $v_1(0) = v_3(0) = 0$ determinare la velocità $\vec{v}_2$ quando la massa intermedia urta il piano.
3. Se $v_3(0) = 0$, determinare il minimo valore di $v_1(0)$ che permette alle masse agli estremi di toccarsi.

Soluzione[9]

Domanda 1

Posto un sistema di coordinate cartesiane con origine nella posizione della terza massa abbiamo

$$x_2 = -\ell \sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.1}$$

$$y_2 = \ell \cos\frac{\theta}{2} \tag{5.113.2}$$

per le coordinate della massa intermedia e

$$x_1 = -2\ell \sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.3}$$

per quella della prima massa. Derivando rispetto al tempo quest'ultima relazione otteniamo, all'istante iniziale,

$$v_1(0) = -\ell\dot{\theta}\cos\frac{\theta_0}{2} = V \tag{5.113.4}$$

[9] Secondo problema compitino 19/12/2008

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{V}{\ell \cos \frac{\theta_0}{2}} \tag{5.113.5}$$

Derivando x_2 e y_2 otteniamo le due componenti della velocità $\vec{v}_2$:

$$\dot{x}_2 = v_{2x} = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} \tag{5.113.6}$$

$$\dot{y}_2 = v_{2y} = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.7}$$

che valutate all'istante iniziale danno, utilizzando la (5.113.5),

$$v_{2x} = \frac{V}{2} \tag{5.113.8}$$

$$v_{2y} = \frac{V}{2}\tan\frac{\theta_0}{2}\,. \tag{5.113.9}$$

Domanda 2

Possiamo utilizzare due principi di conservazione, quello dell'energia totale e quello della quantità di moto orizzontale. Dalla seconda segue che il centro di massa del sistema non si muove orizzontalmente. Ma la posizione orizzontale del centro di massa coincide con quella della massa intermedia, che quindi si muoverà solo verticalmente. Ma allora possiamo scrivere, scegliendo un sistema di coordinate con origine nella proiezione del centro di massa sul piano orizzontale,

$$x_1 = -\ell\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.10}$$

$$x_2 = 0 \tag{5.113.11}$$

$$x_3 = \ell\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.12}$$

e anche

$$y_2 = \ell\cos\frac{\theta}{2}\,. \tag{5.113.13}$$

Scriviamo adesso l'energia totale conservata. Abbiamo

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_2^2\right) + mgy_2\,. \tag{5.113.14}$$

All'istante iniziale le masse sono tutte ferme, ed abbiamo

$$E = mgy_2 = mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2}\,. \tag{5.113.15}$$

Quando la massa intermedia tocca terra $\theta = \pi$. Quindi

$$\dot{x}_1 = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{5.113.16}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{5.113.17}$$

CC BY NC SA

ed otteniamo

$$E = \frac{m}{2}\dot{y}_2^2 \,. \tag{5.113.18}$$

Eguagliando le due espressioni dell'energia otteniamo infine

$$\dot{y}_2 = -\sqrt{2g\ell\cos\frac{\theta_0}{2}} \tag{5.113.19}$$

che è la velocità cercata.

Domanda 3

Anche in questo caso possiamo usare la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale. Notare che con le condizioni al contorno specificate il centro di massa si muove anche in direzione orizzontale, ovviamente di moto rettilineo uniforme.

Inizialmente l'energia totale vale

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_1^2(0) + v_{2x}^2(0) + v_{2y}^2(0)\right) + mgy_2 \tag{5.113.20}$$

che si può scrivere, utilizzando quanto visto rispondendo alla prima domanda,

$$E = \frac{1}{2}m\left(V_i^2 + \frac{1}{4}V_i^2 + \frac{1}{4}V_i^2\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right) + mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} \,. \tag{5.113.21}$$

Gli estremi si toccheranno se $\theta = 0$. In questo caso avremo

$$E = \frac{1}{2}m\left(3V_f^2\right) + mg\ell \tag{5.113.22}$$

dove si è usato il fatto che nel caso limite le tre masse si muoveranno solo orizzontalmente con la stessa velocità V_f.

La conservazione della quantità di moto orizzontale ci da

$$m\left(V_i + \frac{1}{2}V_i\right) = 3mV_f \tag{5.113.23}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}mV_i^2\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right) + mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}m\left(3V_f^2\right) + mg\ell \tag{5.113.24}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}V_i^2\right) + mg\ell \tag{5.113.25}$$

da cui ricaviamo la velocità iniziale cercata

$$V_i = \sqrt{\frac{8g\ell\left(1 - \cos\frac{\theta_0}{2}\right)}{\left(2 + \tan^2\frac{\theta_0}{2}\right)}} \,. \tag{5.113.26}$$

CC BY NC SA

5.114. Un pendolo su un blocco mobile ⋆⋆

Un pendolo di lunghezza ℓ e massa m è montato su un blocco di massa M poggiato su un piano orizzontale. Tra blocco e piano è presente solo attrito statico μ_s ($\mu_d = 0$). Il blocco e il pendolo sono inizialmente in moto con velocità v_0, col pendolo nella sua posizione di equilibrio, e urtano frontalmente un secondo blocco in modo elastico. In seguito all'urto il primo blocco si arresta.

1. Determinare la massa del secondo blocco.
2. Supponendo μ_s abbastanza grande da impedire strisciamenti, determinare il valore minimo di v_0 affinchè il pendolo percorra un giro completo (il vincolo del filo si intende monolatero).
3. Per $v_0 = \sqrt{5g\ell}$ determinare il minimo valore di μ_s affinchè il blocco resti in quiete. Volendo è possibile considerare solo il caso $M \gg m$, dando il risultato al primo ordine in m/M.

Soluzione[10]

Domanda 1

Durante l'urto le uniche forze impulsive sono quelle che agiscono orizzontalmente tra i due blocchi. Possiamo quindi trascurare la presenza del pendolo, e la massa del secondo blocco è quindi uguale a quella del primo, perchè solo in questo caso quest'ultimo si ferma.

Domanda 2

La velocità del pendolo sarà inizialmente v_0. Nel punto più alto essa diverrà

$$v^2 = v_0^2 - 4g\ell \tag{5.114.1}$$

e la tensione del filo sarà determinata da

$$m\frac{v^2}{\ell} = T + mg \tag{5.114.2}$$

da cui

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 4g\right) - mg = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 5g\right) \geq 0 \tag{5.114.3}$$

cioè

$$v_0 \geq \sqrt{5g\ell} \tag{5.114.4}$$

[10] Secondo problema scritto 11/9/2008

Domanda 3

Per una inclinazione qualsiasi la tensione sarà determinata da

$$v^2 = 5g\ell - 2g\ell\,(1-\cos\theta) \tag{5.114.5}$$

e

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg\cos\theta \tag{5.114.6}$$

e risolvendo si trova

$$T = 3mg\,(1+\cos\theta)\ . \tag{5.114.7}$$

Imponendo l'equilibrio del carrello abbiamo

$$F_a + T\sin\theta = 0 \tag{5.114.8}$$

$$N - T\cos\theta - Mg = 0 \tag{5.114.9}$$

da cui

$$F_a = -3mg\,(1+\cos\theta)\sin\theta \tag{5.114.10}$$

$$N = 3mg\cos\theta(1+\cos\theta) + Mg \tag{5.114.11}$$

ma dato che $|F_a| \leq \mu_s N$ avremo

$$\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{(1+\cos\theta)\cos\theta + \frac{M}{3m}} \leq \mu_s \tag{5.114.12}$$

(supponendo che sia sempre $N > 0$). Dobbiamo massimizzare rispetto a θ il primo membro. I punti stazionari corrispondono alle soluzioni di

$$\left(1+\frac{2M}{3m}\right)\cos^2\theta + \left(2+\frac{M}{3m}\right)\cos\theta + \left(1-\frac{M}{3m}\right) = 0 \tag{5.114.13}$$

che ha per soluzioni

$$\cos\theta = -1 \tag{5.114.14}$$

e

$$\cos\theta = \frac{1-\frac{3m}{M}}{2+\frac{3m}{M}} \tag{5.114.15}$$

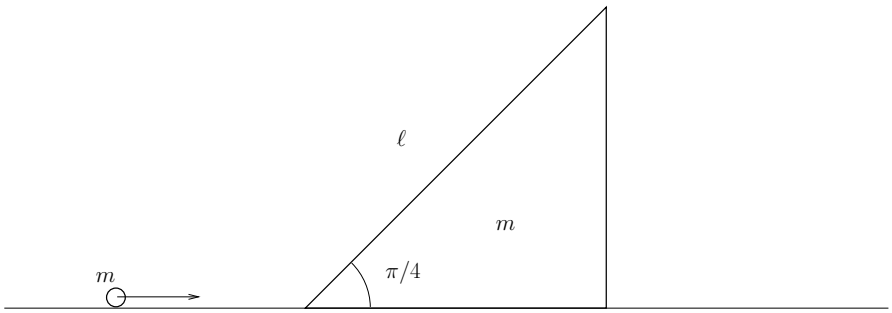
e quest'ultimo valore corrsponde al minimo. Per $m/M \ll 1$

$$\cos\theta \simeq \frac{1}{2} \tag{5.114.16}$$

$$\mu_s \geq \frac{9m}{4M}\sqrt{3} \tag{5.114.17}$$

5.115. Urto con un cuneo mobile ⋆⋆

Nel sistema in figura il piano inclinato è libero di scorrere sul piano orizzontale, ed è inizialmente fermo. La particella ha velocità iniziale v_0, e all'istante $t = 0$ arriva al piano inclinato. Particella e piano inclinato hanno la stessa massa m e $\theta = \pi/4$. Si supponga che la giunzione tra piano obliquo e piano inclinato sia stata resa sufficientemente regolare, e che non vi sia alcun genere di attrito.



1. La particella, considerata un punto materiale, è vincolata a rimanere aderente al piano obliquo. Per quale valore minimo della velocità $v_{0,min}$ essa riesce a superare il blocco?
2. Se $v_0 < v_{0,min}$ calcolare le velocità finali del piano inclinato e della particella.
3. Calcolare la velocità del blocco immediatamente dopo l'istante $t = 0$.

Soluzione[11]

Domanda 1

Usiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale. L'energia totale del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + mgy = \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 \tag{5.115.1}$$

e la quantità di moto orizzontale

$$P_x = mV + mv_x = mv_{0,min}\,. \tag{5.115.2}$$

Nel caso limite la particella arriva nel punto più alto del piano inclinato, con velocità nulla rispetto ad esso ($v_x = V$, $v_y = 0$). Allora possiamo scrivere

$$mV^2 + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell = \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 \tag{5.115.3}$$

[11] Primo esercizio scritto 31/1/2007

e

$$V = \frac{1}{2} v_{0,min} \,. \tag{5.115.4}$$

da cui

$$v_{0,min} = \sqrt{2\sqrt{2} g \ell} \,. \tag{5.115.5}$$

Domanda 2

Dato che siamo interessati alle sole velocità finali, possiamo trattare il problema come un urto completamente elastico. In dettaglio, le equazioni per la conservazione di energia e quantità di moto orizzontale si possono scrivere

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m v^2 \tag{5.115.6}$$

$$m v_0 = m v + m V \,. \tag{5.115.7}$$

Risolvendo il sistema si trova che particella e piano inclinato si scambiano le velocità, cioè

$$v = 0 \tag{5.115.8}$$

$$V = v_0 \,. \tag{5.115.9}$$

Domanda 3

Abbiamo nuovamente conservazione di energia e di quantità di moto orizzontale. Inoltre l'energia potenziale non varia, quindi

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 \right) \tag{5.115.10}$$

$$m v_0 = m V + m v_x \,. \tag{5.115.11}$$

Abbiamo infine un vincolo da imporre, cioè il fatto che per $t > 0$ la velocità relativa della particella rispetto al piano è inclinata di $\pi/4$ rispetto all'orizzontale. Questo significa

$$v_x - V = v_y \,. \tag{5.115.12}$$

Usando le ultime due relazioni per esprimere la conservazione dell'energia in funzione di V abbiamo

$$v_0^2 = V^2 + (v_0 - V)^2 + (v_0 - 2V)^2 \tag{5.115.13}$$

che da

$$V = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) v_0 \,. \tag{5.115.14}$$

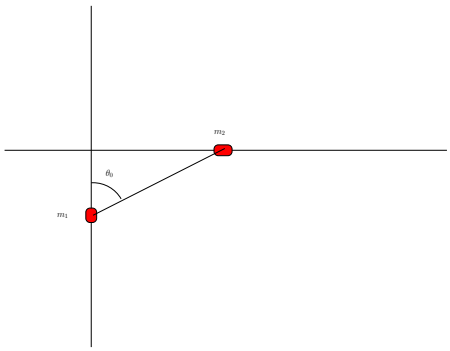
La soluzione accettabile è quella con il segno negativo, la sola che corrisponda ad una velocità verticale positiva della particella:

$$v_y = v_0 - 2V = \frac{1}{\sqrt{3}} v_0 \,. \tag{5.115.15}$$

CC BY NC SA

5.116. Doppia cerniera mobile ⋆⋆

Nel sistema in figura la massa m_1, libera di muoversi verticalmente, e la massa m_2, libera di muoversi orizzontalmente, sono collegate da un filo inestensibile di lunghezza ℓ privo di massa. Inizialmente il sistema è fermo nella configurazione in figura con il filo inclinato di un angolo $\theta = \theta_0$ rispetto alla verticale. Si consiglia di utilizzare questo parametro per descrivere il sistema.



1. Supponendo la presenza di attrito tra la particella m_2 e il vincolo orizzontale, determinare per quale valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s il sistema è in equilibrio.

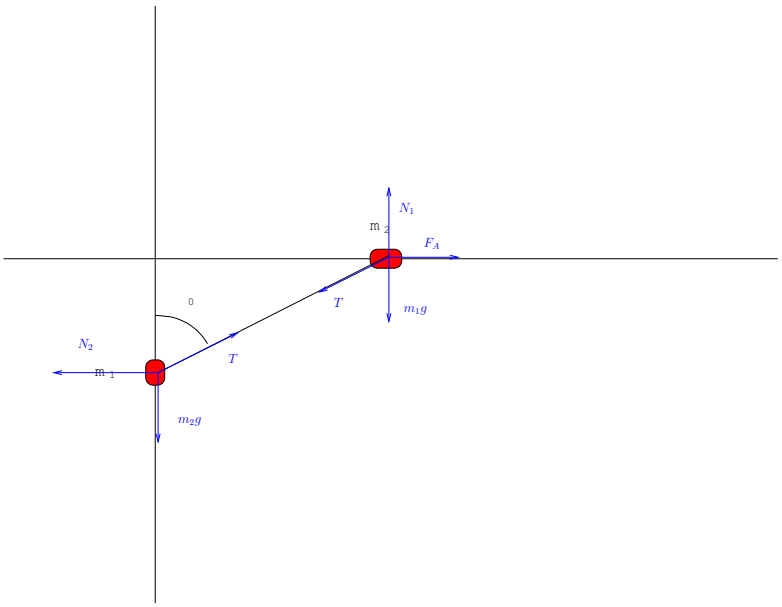
2. In assenza di attrito si lascia adesso il sistema libero di muoversi. Calcolare la velocità della massa m_2 quando $\theta = 0$ (filo verticale).

3. Determinare la tensione del filo in funzione dell'angolo θ durante l'evoluzione da $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, sempre in assenza di attrito.

CC BY NC SA

Soluzione[12]

Domanda 1



Facendo riferimento al diagramma delle forze in figura, all'equilibrio deve essere

$$N_1 = m_2 g + T \cos\theta_0 \tag{5.116.1}$$

$$F_A = T \sin\theta_0 \tag{5.116.2}$$

$$m_1 g = T \cos\theta_0 \tag{5.116.3}$$

e d'altra parte $|F_A| \leq \mu_s N_1$ da cui

$$\mu_s \left(m_1 + m_2\right) g \geq m_1 g \tan\theta_0 \tag{5.116.4}$$

cioè

$$\mu_s \geq \frac{m_1}{m_1 + m_2} \tan\theta_0 \,. \tag{5.116.5}$$

Domanda 2

In assenza di attrito vale la conservazione dell'energia totale. Inoltre nella configurazione finale la massa m_1 è ferma. Possiamo quindi scrivere

$$-\, m_1 g \ell \cos\theta_0 = -m_1 g \ell + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{5.116.6}$$

da cui

$$v_2 = -\sqrt{2 \frac{m_1}{m_2} g \ell \left(1 - \cos\theta_0\right)} \,. \tag{5.116.7}$$

[12] Secondo esercizio scritto 31/1/2007

CC BY NC SA

Domanda 3

Scriviamo ancora una volta la conservazione dell'energia confrontando la configurazione iniziale con quella ad un generico angolo θ.

$$-m_1 g\ell\cos\theta_0 = -m_1 g\ell\cos\theta + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\,. \tag{5.116.8}$$

D'altra parte

$$v_1 = \frac{d}{dt}\ell\cos\theta = -\ell\dot\theta\sin\theta \tag{5.116.9}$$

$$v_2 = \frac{d}{dt}\ell\sin\theta = \ell\dot\theta\cos\theta \tag{5.116.10}$$

da cui

$$\frac{1}{2}\left[m_1\sin^2\theta + m_2\cos^2\theta\right]\ell^2\dot\theta^2 = m_1 g\ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\,. \tag{5.116.11}$$

D'altra parte deve essere

$$m_2\frac{dv_2}{dt} = -T\sin\theta \tag{5.116.12}$$

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = -m_1 g + T\cos\theta \tag{5.116.13}$$

cioè

$$m_2\left(\ell\ddot\theta\cos\theta - \ell\dot\theta^2\sin\theta\right) = -T\sin\theta \tag{5.116.14}$$

$$m_1\left(-\ell\ddot\theta\sin\theta - \ell\dot\theta^2\cos\theta\right) = -m_1 g + T\cos\theta \tag{5.116.15}$$

Per semplificare i calcoli possiamo prendere una combinazione delle equazioni precedenti che cancella i termini in $\ddot\theta$, cioè la somma di $m_1\sin\theta$ volte la prima e di $m_2\cos\theta$ volte la seconda:

$$-m_1 m_2\ell\dot\theta^2 = -T\left(m_1\sin^2\theta - m_2\cos^2\theta\right) - m_1 m_2 g\cos\theta \tag{5.116.16}$$

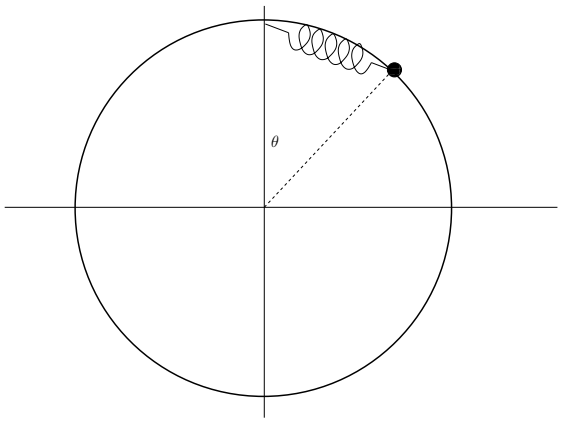
da cui

$$T = \frac{m_1 m_2\ell\dot\theta^2 - m_1 m_2 g\cos\theta}{m_1\sin^2\theta - m_2\cos^2\theta} \tag{5.116.17}$$

e ricavando $\dot\theta^2$ dalla conservazione dell'energia otteniamo la risposta finale:

$$T = m_1 m_2 g\frac{m_1\cos\theta - 2m_1\cos\theta_0 + (m_1 - m_2)\cos^3\theta}{\left(m_1\sin^2\theta - m_2\cos^2\theta\right)\left(m_1\sin^2\theta + m_2\cos^2\theta\right)}\,. \tag{5.116.18}$$

5.117. Massa su guida circolare e molla ⋆⋆



Un punto materiale di massa m è vincolato ad una guida liscia circolare di raggio r disposta in un piano verticale. Tra il punto materiale e il punto più alto della guida è inoltre fissata una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k.

1. Discutere, in funzione di k, le posizioni di equilibrio per il sistema e la loro stabilità.
2. Supponendo $kr < mg$ e che inizialmente il punto materiale si trovi nel punto più basso della guida determinare per quale velocità iniziale esso può percorrere un giro completo.
3. Discutere il moto del punto materiale nel caso $kr = mg$.

Soluzione[13]

Domanda 1

Scriviamo l'energia potenziale in funzione dell'angolo θ in figura. Abbiamo

$$\begin{aligned} U &= mgh + \frac{1}{2}k\ell^2 = mgr\cos\theta + 2kr^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= mgr\cos\theta + kr^2(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

dove è stata indicata con $h = r\cos\theta$ l'altezza della particella relativa al centro della guida e con $\ell = 2r\sin\theta/2$ la lunghezza della molla. Dall'ultima espressione segue che gli estremi del potenziale sono in $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$. In particolare se $mg < kr$ si ha equilibrio stabile in θ_1 e instabile in θ_2, viceversa se $mg > kr$. Il caso $mg = kr$ è particolare: l'energia potenziale non dipende da θ e qualsiasi posizione è di equilibrio indifferente.

[13] Secondo esercizio 10/9/2007

Domanda 2

Nel caso considerato la posizione iniziale è di equilibrio stabile. Imponendo la conservazione dell'energia totale troviamo che l'energia cinetica iniziale deve essere almeno uguale alla massima variazione di energia potenziale:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 > 2(mgr - kr^2)$$

da cui

$$v_0 > 2\sqrt{gr - \frac{kr^2}{m}}\,.$$

Domanda 3

Nel caso considerato l'energia è, a meno di una costante, solo cinetica:

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

da cui seguono le equazioni del moto:

$$\dot{E} = mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \to \ddot{\theta} = 0\,.$$

Il moto quindi è circolare uniforme:

$$\theta = \theta_0 + \omega t\,.$$

CC BY NC SA

5.118. Modello di urto non istantaneo ⋆⋆

Le due masse in figura somo $m_1 = m_2 = m$. Quella a sinistra si muove inizialmente con velocità v_0, l'altra è ferma. La molla ha lunghezza a riposo ℓ e costante elastica k, ed è libera ad un estremo.

1. Per quali valori v_0 le due masse non arrivano a toccarsi?
2. Calcolare la velocità delle masse quando queste sono di nuovo separate.
3. Se la velocità iniziale è sufficiente a far toccare le massa, e queste rimangono attaccate, calcolare la velocità finale del sistema.

Soluzione[14]

Domanda 1

Cerchiamo sotto quali condizioni le masse si toccano. Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Uguagliando il valore iniziale di queste quantità a quello posseduto al momento del contatto abbiamo

$$m_1 v_0 \geq (m_1 + m_2) v_2$$

e

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 \geq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 + \frac{1}{2} k \ell^2 \,.$$

Si è utilizzato il fatto che al momento del contatto $v_2 \leq v_1$, e la molla è completamente contratta. Ricavando v_f dalla prima relazione si trova

$$v_2 \leq \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

e sostituendo nella seconda

$$m_1 v_0^2 \geq \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_2^2 + k \ell^2$$

da cui

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{k}{\mu}} \ell$$

dove $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m/2$ è la massa ridotta del sistema. Le masse non arriveranno dunque a toccarsi per

$$v_0 < \sqrt{\frac{k}{\mu}} \ell \,.$$

[14] Prima parte compitino 22/12/2006

Domanda 2

Si tratta di un urto elastico, e dato che le masse sono uguali deve essere

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

ossia $v_1 = 0$ e $v_2 = v_0$ se $m_1 = m_2 = m$.

Domanda 3

Anche in questo caso possiamo vedere il problema come un urto, questa volta completamente anelastico. Sarà ovviamente

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \,.$$

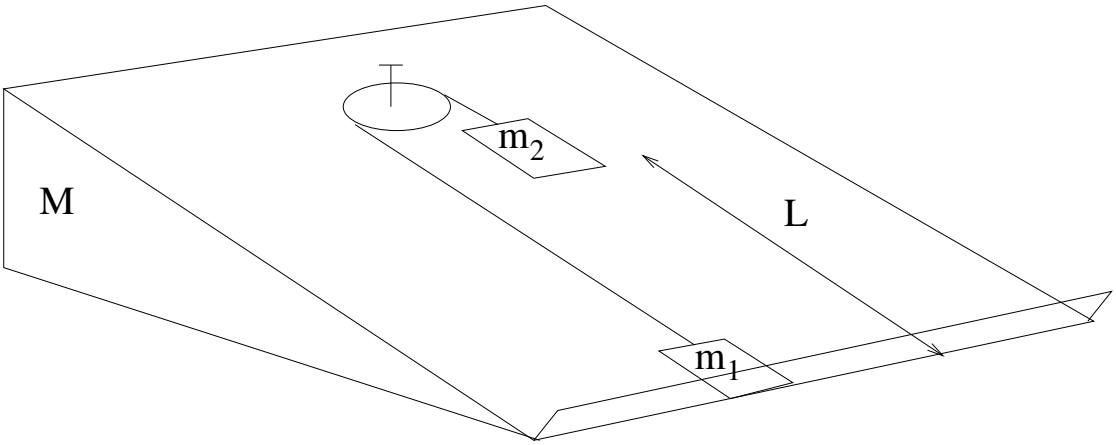
Avremo quindi ($m_1 = m_2 = m$)

$$v_f = \frac{1}{2} v_0 \,.$$

CC BY NC SA

5.119. Carrucola su cuneo ⋆⋆

Un cuneo di massa M a forma di prisma triangolare di apertura angolare θ è libero di muoversi sul piano orizzontale su cui è appoggiato. Sul cuneo si trovano due masse m_1 e m_2 ($m_2 > m_1$), collegate tra loro da un filo inestensibile di massa nulla come mostrato in figura. Il filo scorre senza attrito su un perno solidale al piano inclinato. Non vi è attrito tra le masse e il piano inclinato.



1. Se il cuneo è mantenuto immobile, determinare il moto delle masse m_1 e m_2(lasciate andare da ferme).
2. Se il cuneo è libero di muoversi senza attrito sul piano orizzontale, determinare il suo spostamento quando la massa m_2 raggiunge il bordo.
3. In presenza di attrito statico μ_s tra il cuneo e il piano orizzonale, determinare il valore minimo affinchè il cuneo resti immobile durante la discesa di m_2.

Soluzione[15]

Domanda 1

Consideriamo le forze che agiscono sulle due masse lungo la direzione parallela al piano. Per la prima abbiamo

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\theta - T$$

e per la seconda

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\theta - T\,.$$

Abbiamo preso come verso positivo per le accelerazioni di entrambe le masse quello verso lo spigolo del cuneo. Sottraendo membro a membro abbiamo

$$m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_1 - m_2) g \sin\theta$$

[15] Seconda parte compitino 22/12/2006

ma $a_2 = -a_1$ da cui

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta < 0\,.$$

Le due masse quindi si muovono di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermi e misurando lo spostamento a partire dalla posizione iniziale di ciascuna massa abbiamo

$$s_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta\, t^2$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \sin\theta\, t^2$$

Domanda 2

La quantità di moto orizzontale del sistema si conserva. Questo significa che la posizione orizzontale del centro di massa non cambia, dato che inizialmente è ferma. Possiamo dunque scrivere

$$\frac{MX_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2}{M + m_1 + m_2} = \frac{M\left(X_0 + \Delta\right) + m_1\left(x_1 + \delta_1\right) + m_2\left(x_2 + \delta_2\right)}{M + m_1 + m_2}$$

dove X_0, x_1 e x_2 sono le coordinate orizzontali iniziali del centro di massa del cuneo e delle due masse, e Δ, δ_1, δ_2 i relativi spostamenti finali, il tutto nel sistema di riferimento del laboratorio. D'altra parte lo spostamento orizzontale finale della massa m_2 è noto

$$\delta_2 - \Delta = L\cos\theta$$

e per l'inestensibilità del filo deve essere

$$\delta_2 - \Delta = -\left(\delta_1 - \Delta\right)\,.$$

Ricavando δ_1, δ_2 da queste ultime due relazioni otteniamo

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \Delta + L\cos\theta \\ \delta_1 &= \Delta - L\cos\theta \end{aligned}$$

e sostituendo nella prima abbiamo

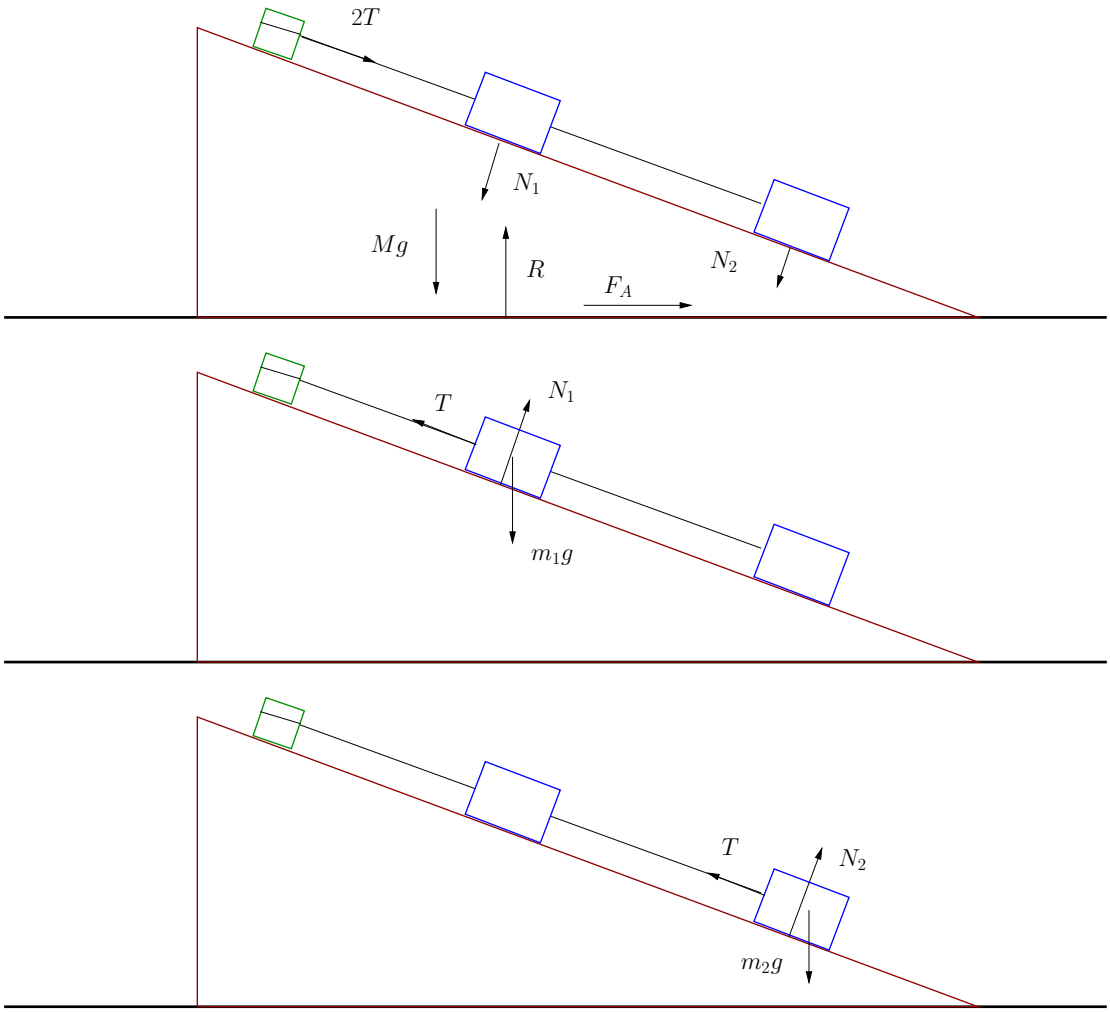
$$M\Delta + m_1\left(\Delta - L\cos\theta\right) + m_2\left(\Delta + L\cos\theta\right) = 0$$

da cui

$$\Delta = \frac{(m_1 - m_2)L\cos\theta}{M + m_1 + m_2}\,.$$

Domanda 3

Facciamo riferimento ai diagrammi delle forze agenti sul cuneo e sulle due masse riportati qui sotto. Indichiamo con T la tensione del filo, con N_1 e N_2 le reazioni vincolari del piano obliquo, con R la reazione vincolare del piano orizzontale e con F_A la forza di attrito.



Scriviamo le equazioni del moto per le masse e per il cuneo, nell'ipotesi che quest'ultimo resti fermo. Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 &= -\ddot{x}_2 \,. \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$m_1\ddot{x}_1 = N_1 \sin\theta - T\cos\theta \tag{5.119.1}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = N_1 \cos\theta + T\sin\theta - m_1 g \tag{5.119.2}$$

$$-m_2\ddot{x}_1 = N_2 \sin\theta - T\cos\theta \tag{5.119.3}$$
$$-m_2\ddot{y}_1 = N_2 \cos\theta + T\sin\theta - m_2 g \tag{5.119.4}$$

e

$$0 = -(N_1+N_2)\sin\theta + 2T\cos\theta + F_A \tag{5.119.5}$$
$$0 = R - Mg - (N_1+N_2)\cos\theta - 2T\sin\theta\,. \tag{5.119.6}$$

Dato che

$$\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1} = \frac{\ddot{y}_2}{\ddot{x}_2} = -\tan\theta$$

dividendo membro a membro le equazioni (5.119.1), (5.119.2) e (5.119.3), (5.119.4) otteniamo

$$N_1 = m_1 g\cos\theta$$

$$N_2 = m_2 g\cos\theta$$

Dalle equazioni del moto per le masse abbiamo

$$\left(\frac{N_1}{m_1}+\frac{N_2}{m_2}\right)\sin\theta - T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\cos\theta = 0$$

$$\left(\frac{N_1}{m_1}+\frac{N_2}{m_2}\right)\cos\theta + T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\sin\theta = 2g$$

da cui ($\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$)

$$T = 2g\mu\sin\theta\,.$$

Sostituendo nella equazione (5.119.6) troviamo

$$R = Mg + (m_1+m_2)g\cos^2\theta + 4g\mu\sin^2\theta$$

e tenendo conto che deve essere $|F_A| \le \mu_s R$ abbiamo infine

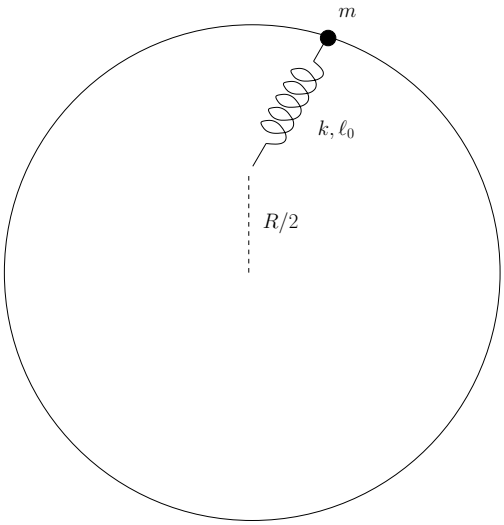
$$[(m_1+m_2)-4\mu]\,|\cos\theta\sin\theta| \le \mu_s\left[M + (m_1+m_2)\cos^2\theta + 4\mu\sin^2\theta\right]$$

ossia

$$\mu_s \ge \frac{(m_1-m_2)^2\cos\theta\sin\theta}{M(m_1+m_2)+(m_1+m_2)^2\cos^2\theta+4m_1m_2\sin^2\theta}\,.$$

5.120. Massa su guida circolare e molla II ⋆⋆

La particella di massa m è vincolata alla guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Inoltre è fissata ad una molla di costante k e lunghezza a riposo ℓ_0. L'altro estremo della molla è fissato a un punto posto a una distanza $R/2$ dal centro della guida.



1. Se $\ell_0 = 0$ determinare la minima velocità che deve avere la particella nel punto di minimo allungamento della molla per poter percorrere completamente la guida.
2. In funzione di $\ell_0 \geq 0$ discutere le posizioni di equilibrio del sistema.
3. Scelta una opportuna coordinata scrivere le equazioni del moto per il sistema, sempre per ℓ_0 generico.

Soluzione[16]

Domanda 1

Possiamo scegliere come coordinata l'angolo θ tra il raggio corrispondente alla posizione della particella e quello corrispondente alla posizione di massimo avvicinamento. L'energia cinetica si scriverà quindi

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

e quella potenziale

$$U = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Con

$$\ell = \sqrt{R^2 \sin^2\theta + (R\cos\theta - R/2)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\,.$$

[16] Secondo esercizio scritto 11/1/2007

Nel nostro caso $\ell_0 = 0$ quindi

$$E = K + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{kR^2}{2}\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right).$$

Eguagliando l'energia nel punto di massimo e di minimo avvicinamento otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\ell_{min}^2 > \frac{1}{2}k\ell_{max}^2$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\ell_{max}^2 - \ell_{min}^2\right)}$$

ossia

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}R^2\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)} = R\sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Domanda 2

Se sulla molla vi è tensione, una posizione sarà di equilibrio solo quando questa è ortogonale al vincolo. Ciò è possibile chiaramente soltanto in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

L'altra possibilità è che non vi sia tensione. Questo accade quando la molla è alla sua lunghezza di riposo, il che significa

$$\ell_0^2 = R^2\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)$$

cosa possibile solo se

$$\frac{1}{2}R \leq \ell_0 \leq \frac{3}{2}R.$$

Il relativo angolo è dato da

$$\cos\theta = \frac{5}{4} - \frac{\ell_0^2}{R^2}.$$

Domanda 3

Possiamo ottenere le equazioni del moto derivando l'energia totale rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}\left(R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} - \ell_0\right)^2\right] \\ &= mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k\left(R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} - \ell_0\right)\frac{R\sin\theta}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}}\dot{\theta}\end{aligned}$$

da cui

$$mR\ddot{\theta} + \frac{k}{2}\left(R - \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}}\right)\sin\theta = 0$$

CC BY NC SA

5.121. Orbita di un satellite ⋆⋆

Un satellite di massa m si trova in orbita circolare attorno alla terra, la durata del periodo è 24 h. La massa del satellite è molto minore della massa della terra, $m \ll M_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

1. Determinare il raggio dell'orbita, sapendo che la costante di gravitazione universale vale $G = 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.
2. Mediante un opportuno impulso $\vec{I}$ applicato istantaneamente in direzione tangenziale si vuole portare il satellite su un'orbita parabolica. Determinare $\vec{I}$.
3. Supponendo nuovamente il satellite in orbita circolare come al punto 1., lo si vuole portare su un'orbita circolare di raggio doppio, applicando ad opportuni istanti due impulsi $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$, passando attraverso un'orbita ellittica intermedia. Calcolare $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$ supponendoli entrambi applicati in direzione tangenziale.

Soluzioni[17]

Domanda 1 L'equazione del moto in direzione radiale si scrive

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM_T}{R^2}$$

e d'altra parte per il periodo vale

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

da cui

$$R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq \left(\frac{6.7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times (24 \times 60 \times 60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \mathrm{m} \simeq 4.2 \times 10^7\,\mathrm{m}$$

Domanda 2 Prima di applicare l'impulso l'energia vale

$$E = \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$

dato che l'orbita è circolare. Inoltre sappiamo che il potenziale effettivo è minimo,

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}\right) = -\frac{L^2}{mR^3} + \frac{k}{R^2} = 0$$

da cui

$$L^2 = kmR$$

[17] Seconda domanda compitino 13 aprile 2011

CC BY NC SA

Applicando l'impulso cambiamo il momento angolare di $\Delta L = IR$. Dato che la velocità radiale resta nulla la nuova energia vale

$$E' = \frac{(L + IR)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$

e per avere un'orbita parabolica deve essere $E' = 0$. Quindi (supponendo $L > 0$) otteniamo

$$\left(\sqrt{kmR} + IR\right)^2 = 2kmR$$

da cui

$$I = -\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Si può quindi applicare l'impulso con lo stesso verso della velocità

$$I = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

oppure in verso opposto

$$I = -\left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Domanda 3 Applicando il primo impulso si ottiene un'orbita ellittica che deve avere il perigeo in R e l'apogeo in $2R$. Per ottenere questo l'equazione

$$E_1 = \frac{(L + I_1 R)^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

deve essere verificata in $r = R$ e $r = 2R$, ossia

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(L + I_1 R)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R} \\ E_1 &= \frac{(L + I_1 R)^2}{8mR^2} - \frac{k}{2R} \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$\frac{3}{8}\frac{(L + I_1 R)^2}{mR^2} - \frac{k}{2R} = 0$$

da cui

$$I_1 = -\left(1 \pm \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Il secondo impulso deve essere applicato all'apogeo, in modo da ottenere un'orbita circolare di raggio $2R$ e quindi un momento angolare

$$L' = \pm\sqrt{2kmR}$$

Se vogliamo $L' > 0$ abbiamo dunque le due possibilità determinate da

$$L + RI_1 + 2RI_2 = \sqrt{2kmR}$$

ossia

$$I_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

mentre se $L' < 0$ (l'orbita circolare finale è percorsa nel verso opposto di quella iniziale) deve essere

$$L + RI_1 + 2RI_2 = -\sqrt{2kmR}$$

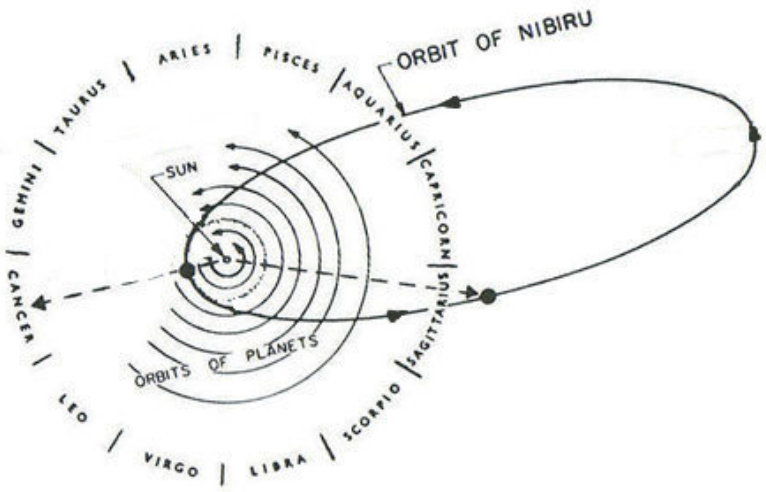
e quindi

$$I_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Riassumendo abbiamo le quattro possibilità in tabella

I_1	I_2
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$

5.122. Nibiru ⋆⋆$\mathcal{S}$



Secondo una teoria accreditata da un grandissimo numero di pagine web ogni 3600 anni il pianeta Nibiru arriva con la sua orbita in prossimità della terra. Il prossimo avvicinamento è previsto da alcuni attorno al primo aprile del 2013. Nel seguito si considereranno solo le interazioni gravitazionali tra la terra e il sole e tra Nibiru e il sole, per semplicità si considererà la massa di Nibiru uguale a quella della terra, e l'orbita di quest'ultima circolare e di raggio $a_T \simeq 1.5 \times 10^{11}$ m. Inoltre si supporrà che il perielio di Nibiru e quello della terra coincidano, che le orbite siano nello stesso piano e percorse nello stesso senso.

1. Sulla base dei dati precedenti calcolate il rapporto tra l'afelio di Nibiru e la distanza terra-sole.

2. Modellando l'eventuale scontro tra la terra e Nibiru come un'urto istantaneo completamente anelastico al perielio calcolare la frazione di energia cinetica dissipata durante l'urto.

3. Determinare l'afelio dell'unico pianeta risultante.

Soluzione[18]

Domanda 1

Conosciamo il periodo T dell'orbita e il perielio. Dalla terza legge di Keplero sappiamo che

$$\frac{T_N^2}{a_N^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$$

dove a è il semiasse maggiore. Quindi

$$a_N = \left(\frac{T_N}{T_T}\right)^{2/3} a_T \simeq 234.9\, a_T$$

Indicati con r_- e r_+ il perielio e l'afelio dell'orbita abbiamo

$$r_+ + r_- = 2a$$

e quindi

$$r_+ = 2a_N - a_T \simeq 468.9\, a_T$$

Domanda 2

Al momento dell'urto le velocità radiali sono entrambe nulle, e si conserva il momento angolare totale (o anche la quantità di moto nella direzione tangente all'orbita, che è proporzionale a quest'ultimo). Quindi

$$L_f = L_T + L_N$$

L'energia cinetica immediatamente prima dell'urto è

$$E_i = \frac{L_T^2 + L_N^2}{2m_T a_T^2}$$

e immediatamente dopo l'urto

$$E_f = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

quindi si è dissipata un'energia

$$\Delta E = \frac{2L_T^2 + 2L_N^2 - (L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} = \frac{(L_T - L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2}$$

[18] Secondo esercizio compitino 18 aprile 2012

dove abbiamo indicato con ρ il rapporto

$$\rho = \frac{L_T}{L_N}$$

Dato che (indicando con M_S la massa del sole)

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2m_T r_-^2} - \frac{G m_T M_S}{r_-} \\ E &= \frac{L^2}{2m_T r_+^2} - \frac{G m_T M_S}{r_+} \end{aligned}$$

abbiamo

$$L = \sqrt{2GM_S m_T^2 \left(\frac{r_+ r_-}{r_+ + r_-}\right)}$$

e quindi

$$\rho = \frac{\sqrt{GM_S m_T^2 a_T}}{\sqrt{2GM_S m_T^2 \frac{a_T r_+}{r_+ + a_T}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(a_T + r_+)}{r_+}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1 + 468.9}{468.9}} \simeq 0.7$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(1-0.7)^2}{1+(0.7)^2} \simeq 0.03$$

Domanda 3

L'orbita dopo l'urto è definita dal valore delle due costanti del moto, l'energia

$$E = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} - \frac{2Gm_T M_S}{a_T}$$

e il momento angolare

$$L = L_T + L_N$$

Il perielio e l'afelio sono soluzioni dell'equazione

$$\frac{L^2}{4m_T r^2} - \frac{2Gm_T M_S}{r} - E = \frac{L^2}{4m_T}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-}\right) = 0$$

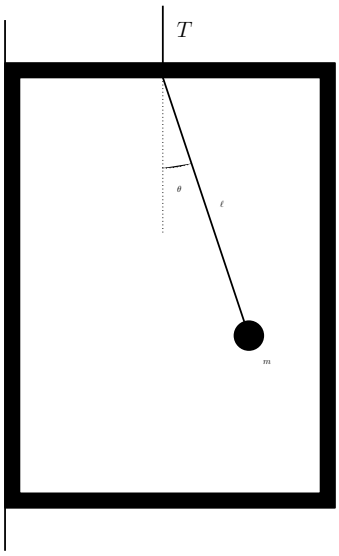
e quindi, dato che una delle due soluzioni concide com a_T, possiamo scrivere per l'altra

$$\frac{L^2}{4m_T}\frac{1}{r}\frac{1}{a_T} = -E$$

cioè

$$
\begin{aligned}
r &= -\frac{L^2}{4m_T a_T E} = \frac{(L_T+L_N)^2}{\left[8Gm_T^2 M_S a_T - (L_T+L_N)^2\right]} a_T \\
&= \frac{(L_T+L_N)^2}{\left[8L_T^2 - (L_T+L_N)^2\right]} a_T = \frac{(L_T+L_N)^2}{7L_T^2 - 2L_N L_T - L_N^2} a_T \\
&= \frac{(1+\rho)^2}{7\rho^2 - 2\rho - 1} a_T \simeq 2.7 a_T
\end{aligned}
$$

5.123. Un pendolo in un ascensore ⋆⋆$\mathcal{S}$



La cabina di un ascensore di massa M può muoversi in direzione verticale, ed è trattenuta da un cavo sottoposto ad una tensione T. All'interno di essa è fissato un pendolo costituito da una massa m sospesa a un filo inestensibile e privo di massa di lunghezza ℓ. Inizialmente la cabina è ferma ed il pendolo compie oscillazioni di ampiezza angolare θ_0, come in figura.

1. Determinare la massima e la minima tensione del cavo che regge l'ascensore.
2. Supponiamo adesso che le oscillazioni siano piccole, $\theta_0 \ll 1$. Ad un certo istante il pendolo si trova in posizione verticale, e l'ascensore viene trascinato dal cavo verso l'alto, con accelerazione costante a. Calcolare la nuova ampiezza delle oscillazioni.
3. Appena il pendolo torna in posizione verticale l'ascensore smette di accelerare. Calcolare il lavoro fatto sino a quel momento dal motore che trascinava il cavo.

Soluzione [19]

Domanda 1 La tensione del filo deve equilibrare la somma della forza peso della cabina e della componente verticale della tensione T_P del pendolo. Scrivendo l'equazione del moto di quest'ultimo nella direzione del filo abbiamo

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T_P - mg\cos\theta$$

ossia

$$T_P = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

[19] Seconda domanda scritto Fisica I del 10 settembre 2010

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

e quindi

$$T_P = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} T &= T_P\cos\theta + Mg \\ &= mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)\cos\theta + Mg \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_{MAX} &= mg\left(3 - 2\cos\theta_0\right) + Mg \\ T_{MIN} &= mg\cos\theta_0 + Mg \end{aligned}$$

rispettivamente per $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$.

Domanda 2 Lavoriamo nel sistema di riferimento dell'oscillatore. Prima dell'accelerazione, che supponiamo iniziare a $t = 0$, abbiamo

$$\theta = \theta_0 \sin\omega_0 t$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dopo l'accelerazione sarà, tenendo conto della continuità,

$$\theta = \theta_1 \sin\omega_1 t$$

dove

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g+a}{\ell}}$$

Imponendo anche la continuità di $\dot{\theta}$ troviamo

$$\theta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1}\theta_0$$

CC BY NC SA

Domanda 3 Il pendolo tornerà in posizione verticale a

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1}$$

e da quel momento oscillerà secondo la legge

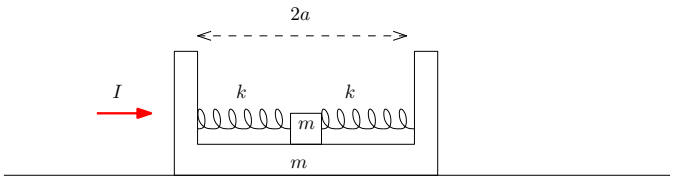
$$\theta = A\cos\omega_0\left(t-\tau\right) + B\sin\omega_0\left(t-\tau\right)$$

Imponendo la continuità di θ e $\dot{\theta}$ troviamo $A = 0$ e $B = \theta_0$. Quindi l'oscillatore si muove nuovamente con l'ampiezza iniziale. L'energia del sistema sarà aumentata di

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\left(M+m\right)v^2 + \left(M+m\right)gh \\ &= \frac{1}{2}\left(M+m\right)a^2\tau^2 + \frac{1}{2}\left(M+m\right)ga\tau^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi^2\left(M+m\right)a\ell\end{aligned}$$

dato che per $t = \tau$ ascensore e pendolo sono saliti di $h = \frac{1}{2}a\tau^2$ ed hanno acquistato una velocità verticale $v = a\tau$. Questo corrisponde al lavoro fatto dal motore.

5.124. Urto contro un corpo composito ⋆⋆$\mathcal{S}$



Un contenitore di massa m della forma in figura ospita al suo interno un corpo puntiforme, pure di massa m. Il corpo può muoversi senza attrito sul fondo, che ha una lunghezza totale $2a$, ed è fissato ai due bordi da molle di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k. Inizialmente il contenitore è in quiete su un piano orizzontale privo di attrito, e anche il corpo si trova all'interno in quiete nella posizione di equilibrio.

1. In un tempo molto breve si applica al contenitore un impulso orizzontale I. Determinare nell'istante immediatamente successivo la velocità del contenitore e quella del corpo all'interno.
2. Per quale valore minimo di I il corpo all'interno urta contro le pareti?
3. Se tra corpo e contenitore esistesse attrito, quale frazione dell'energia cinetica iniziale del sistema verrebbe dissipata?

Soluzione[20]

Domanda 1

Dato che l'urto è istantaneo il corpo all'interno del contenitore non ne risente, e qindi la sua velocità resta nulla. Per la velocità del contenitore abbiamo invece

$$mv_c = I$$

Domanda 2

Usando il teorema di Koenig l'energia del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\dot{x}_r^2 + \frac{k}{2}(x_r - a)^2 + \frac{k}{2}(x_r + a)^2$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa (costante) e x_r la posizione del corpo relativa al centro del contenitore. Usando la conservazione dell'energia abbiamo inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2 + \frac{2k}{2}a^2$$

e al momento dell'urto, nel caso limite in cui la velocità relativa si annulla,

$$E_f = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{2k}{2}a^2 + \frac{2k}{2}a^2$$

[20] Scritto 8 febbraio 2012

CC BY NC SA

Usando la conservazione dell'energia otteniamo

$$\frac{m}{4}v_c^2 = ka^2$$

e quindi

$$I = mv_c = m\sqrt{\frac{4ka^2}{m}}$$

Domanda3 3

L'energia dissipata sarebbe quella cinetica disponibile nel centro di massa. La frazione rispetto alla cinetica totale sarà

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2}{\frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2} = \frac{v_c^2}{4v_{cm}^2 + v_c^2} = \frac{I^2}{I^2 + 4\frac{I^2}{4}} = \frac{1}{2}$$

CC BY NC SA

5.125. Un problema inverso in campo centrale ⋆⋆$\mathcal{S}$

Una particella di massa m si muove in un piano sottoposta ad una forza

$$\vec{F} = A(r)\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione della particella, r il suo modulo e $A(r)$ una funzione incognita. Si sa che sono possibili orbite circolari di raggio qualsiasi, e che tutte corrispondono allo stesso valore L_0 del modulo del momento angolare.

1. Determinare $A(r)$.
2. Determinare due costanti del moto e scriverle usando opportune coordinate (si consigliano coordinate polari).
3. Discutere qualitativamente le caratteristiche delle possibili traiettorie della particella. Se, in particolare, esistono delle traiettorie che portano la particella a cadere sul centro, dire se tale caduta avviene in un tempo finito.

Soluzione[21]

Problema 1

In un'orbita circolare

$$-m\frac{v^2}{r} = A(r)r$$

e d'altra parte

$$L_0 = mvr$$

Sostituendo otteniamo

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = A(r)r$$

e quindi

$$A(r) = -\frac{L_0^2}{mr^4}$$

Problema 2

L'energia e il momento angolare si conservano:

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{L_0^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

L'energia potenziale è stata determinata integrando la relazione

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

[21] Prova scritta 8 febbraio 2012

da cui

$$U(r) = -\frac{L_0^2}{2mr^2}$$

Problema 3

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff} = \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e dal suo studio vediamo che per $L^2 > L_0^2$ tutte le orbite sono illimitate. Per $L^2 < L_0^2$ le orbite che corrispondono ad un'energia negativa terminano sono limitate e terminano nel centro. Se invece $E \geq 0$ l'orbita può condurre la particella nel centro o farla sfuggire a $r \to \infty$ a seconda del segno della velocità radiale iniziale. Il caso $L^2 = L_0^2$ è particolare. Il moto radiale è del tipo

$$r(t) = r_0 + v_0 t$$

che corrisponde a una caduta nel centro per $v_0 < 0$, ad un'orbita illimitata per $v_0 > 0$ e a un'orbita circolare per $v_0 = 0$.

Il tempo necessario per la caduta nel centro si può determinare a partire dall'energia, scritta come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e quindi

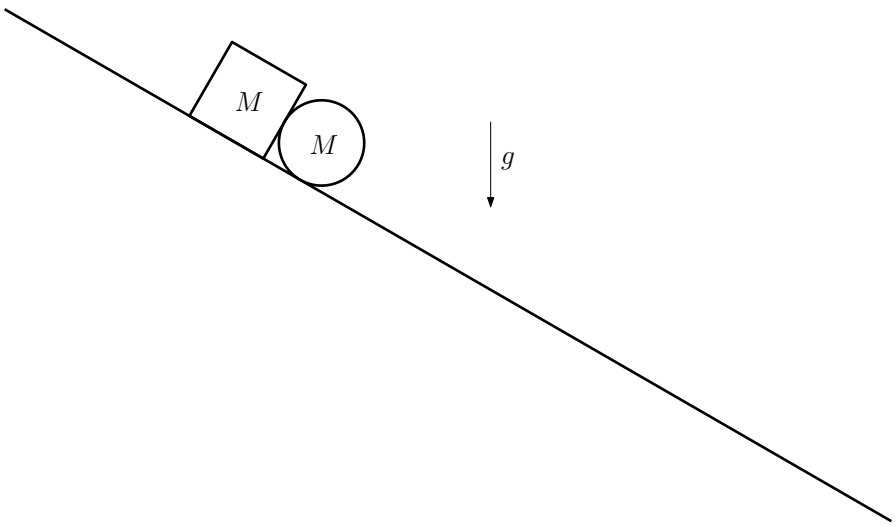
$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}$$

Possiamo integrare questa equazione differenziale ed ottenere il tempo di caduta da una distanza iniziale r_0

$$\tau = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}}$$

L'integrale si calcola esplicitamente, ma è sufficiente notare che è finito, ricordando che siamo interessati al caso $L_0^2 > L^2$.

5.126. Cilindro spinto in discesa ⋆⋆⋆



Un cilindro di massa M e raggio R rotola senza strisciare su un piano obliquo inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Un cubo di uguale massa è appoggiato sul piano inclinato a fianco del cilindro, dal lato corrispondente alla pendenza crescente come in figura. Il cubo è libero di strisciare sul piano inclinato, senza alcun attrito. Tra cubo e cilindro si ha invece attrito dinamico caratterizzato da un coefficiente μ_D e all'occorrenza attrito statico. Discutere il moto del sistema, nelle ipotesi che cubo e cilindro non si possano staccare tra di loro e dal piano. Si utilizzi un modello per l'attrito dinamico descritto dall'equazione

$$\vec{F}_D = -\mu_D \left|\vec{N}\right| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{5.126.1}$$

dove $\vec{F}_D$ è la forza di attrito che agisce su uno dei due corpi in contatto, $\vec{N}$ la reazione normale alla superficie nel punto di contatto e $\vec{v}$ la velocità del corpo considerato relativa al secondo, sempre al punto di contatto.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto per il cilindro, facendo riferimento alla Figura 5.48. La prima equazine cardinale (nella direzione parallela al piano) e la seconda equazione cardinale (scritta scegliendo il centro del cilindro come polo) si scrivono

$$\begin{aligned} Ma &= N + T + Mg\sin\theta \\ I\alpha &= -F_D R + TR \end{aligned}$$

Invece la prima equazione cardinale nella direzione parallela al piano per il cubo si scrive

$$Ma = -N + Mg\sin\theta$$

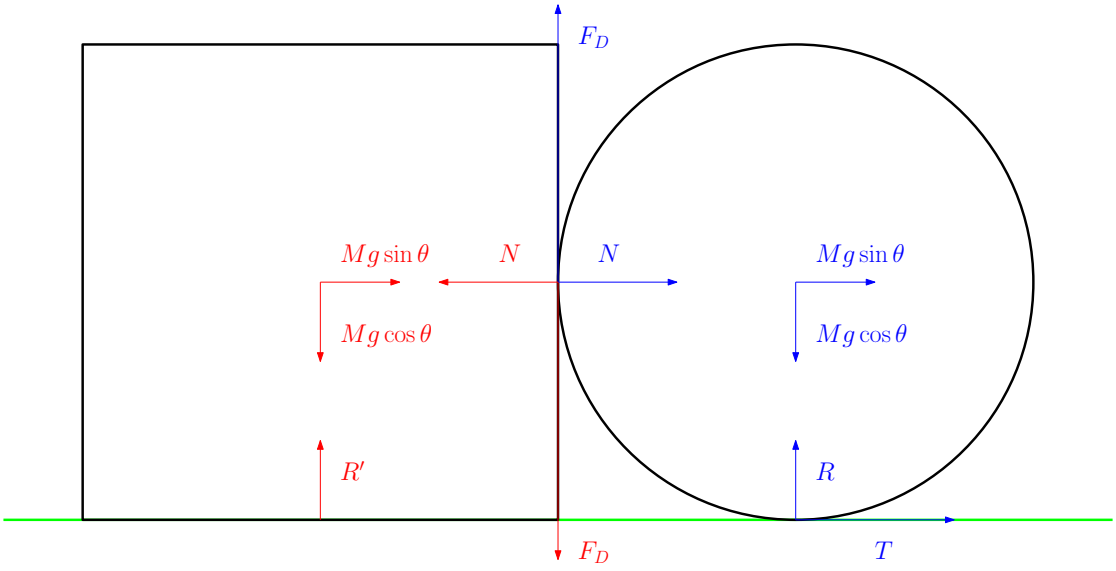


Figura 5.48.: Le forze che agiscono sul cilindro (in blu) e quelle che agiscono sul cubo (in rosso).

Dobbiamo adesso scrivere esplicitamente F_D. Tenendo conto che la velocità del cilindro relativa al cubo nel punto di contatto vale $-\omega R$ possiamo scrivere

$$F_D = \mu_D \left|N\right| \frac{\omega}{|\omega|}$$

Inoltre a causa del vincolo di rotolamento puro abbiamo $a = -\alpha R$ e $v = -\omega R$. Le tre equazioni precedenti diventano

$$\begin{aligned} Ma &= N + T + Mg\sin\theta \\ -I\frac{a}{R} &= -\mu_D \left|N\right| \frac{\omega}{|\omega|} R + TR \\ Ma &= -N + Mg\sin\theta \end{aligned}$$

Ricaviamo N dalla terza equazione e sostituiamolo nelle precedenti:

$$\begin{aligned} Ma &= M\left(g\sin\theta - a\right) + T + Mg\sin\theta \\ -I\frac{a}{R} &= -\mu_D M \left|g\sin\theta - a\right| \frac{\omega}{|\omega|} R + TR \\ N &= M\left(g\sin\theta - a\right) \end{aligned}$$

infine ricaviamo T dalla prima equazione e sostituiamolo nella seconda

$$\begin{aligned} T &= 2M\left(a - g\sin\theta\right) \\ a + 2\mu_D \left|a - g\sin\theta\right| \frac{v}{|v|} + 4\left(a - g\sin\theta\right) &= 0 \end{aligned}$$

CC BY NC SA

dove si è tenuto conto che $I = MR^2/2$. Per discutere questa espressione conviene esplicitare μ_D

$$\mu_D = \frac{4g\sin\theta - 5a}{2\,|a - g\sin\theta|}\frac{v}{|v|}$$

e rappresentarlo graficamente in funzione di $\frac{a}{g\sin\theta}$ come in Figura 5.49.

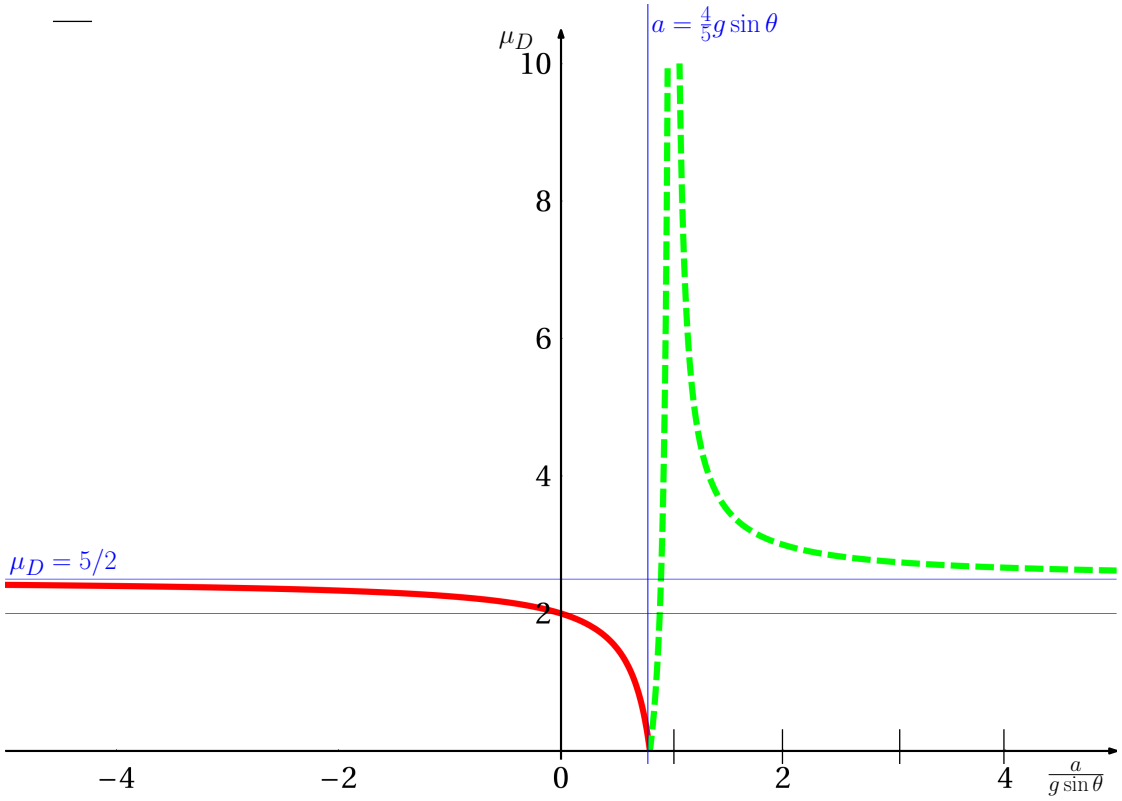


Figura 5.49.: La relazione tra il coefficiente di attrito μ_D e l'accelerazione espressa in unità $g\sin\theta$. Il grafico rosso continuo si riferisce al caso $v > 0$, quello verde tratteggiato al caso $v < 0$.

Le due curve corrispondono al caso $v > 0$ (linea continua rossa) e $v < 0$ (linea tratteggiata verde). Se $v > 0$ abbiamo una soluzione per $\mu_D < 5/2$. In particolare per $0 \le \mu_D < 2$ il sistema si muove con accelerazione positiva costante, per $\mu_D = 2$ si ha un moto a velocità costante e per $2 < \mu_D < 5/2$ l'accelerazione è negativa, di conseguenza v diminuisce fino ad annullarsi. Quando questo accade il sistema resta in equilibrio: questo è possibile dato che le equazioni divengono

$$\begin{aligned} 0 &= N + T + Mg\sin\theta \\ 0 &= -F_s R + TR \\ 0 &= -N + Mg\sin\theta \end{aligned}$$

da cui otteniamo la forza di attrito statico

$$F_s = -2Mg\sin\theta$$

per la quale la relazione

$$2Mg\sin\theta = |F_s| \leq \mu_S\,|N| = Mg\sin\theta$$

è verificata dato che

$$\mu_s > \mu_D > 2$$

Infine non si hanno soluzioni con $v > 0$ per $\mu_D > 5/2$.

Per $v < 0$ si hanno soluzioni per qualsiasi valore di μ_D, corrispondenti a una accelerazione positiva costante. Il modulo della velocità del sistema diminuisce fino ad annullarsi. A questo punto se $\mu_D > 2$ il sistema resta fermo, altrimenti continua ad accelerare in accordo col caso $v > 0$ visto precedentemente.

La soluzione è unica però solo per $\mu_D \leq 5/2$. Per $\mu_D > 5/2$ abbiamo due soluzioni corrispondenti a $N > 0$ (cioè $a < g\sin\theta$) e a $N < 0$ (cioè $a > g\sin\theta$).

La soluzione trovata appare ragionevole per $\mu_D < 5/2$ (esiste ed è unica), ma problematica per $\mu_D > 5/2$. Il problema considerato può essere visto come un semplice esempio che mostra come il modello di attrito (5.126.1) (legge di Coulomb) sia solo in apparenza semplice, e possa condurre a situazioni paradossali che generalmente appaiono quando si considerano sistemi con corpi rigidi e grandi valori del coefficiente di attrito. Per approfondimenti vedere ad esempio [1].

Bibliografia

[1] Wiercigroch M., Zhilin P.A. On the Painlevé Paradoxes. Proc. of the XXVII e Summer School "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". St. Petersburg. 2000. P. 1–22.

5.127. Masse e molla: identificare un errore ⋆⋆

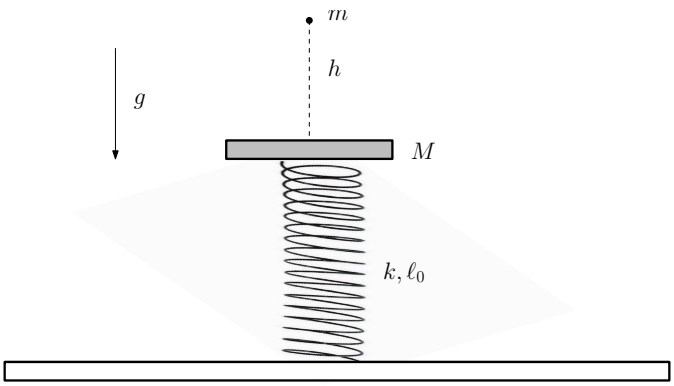


Figura 5.50.: La massa M è inizialmente in equilibrio, la massa m in quiete.

Una massa M è sospesa mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 al di sopra di un piano, come in figura, e si trova inizialmente in equilibrio. Una seconda massa m viene lasciata cadere da ferma, partendo da un punto posto ad una altezza h al di sopra della prima. Le due masse si urtano, e restano attaccate. Successivamente la lunghezza della molla si riduce ulteriormente di

$$\delta = \sqrt{\frac{2m^2gh}{k\,(m+M)}}$$

Dimostrate che il risultato precedente è errato. Fatelo senza calcolare il risultato corretto, ma utilizzando un argomento basato su un opportuno caso limite. Infine trovate esplicitamente la risposta giusta.

Soluzione

Si può osservare che la molla si deve abbassare anche nel caso $h = 0$. Infatti anche appoggiando semplicemente la massa m su quella M si aumenta la forza peso che deve essere equilibrata dalla molla, quindi questa si dovrà contrarre. Al contrario il risultato proposto predice $\delta = 0$ in questo caso.

Per trovare il risultato corretto si può usare la conservazione dell'energia, che è solo potenziale sia nella configurazione iniziale (massa m appena lasciata libera) che in quella finale (massima contrazione della molla).

L'energia potenziale si può scrivere in funzione della lunghezza ℓ della molla e della posizione z della massa m come

$$U(\ell, z) = \frac{k}{2}\,(\ell - \ell_0)^2 + Mg\ell + mgz$$

Il primo termine corrisponde al potenziale della molla, il secondo al potenziale gravitazionale della massa M, in terzo al potenziale gravitazionale della massa m. Inizialmente

la molla è in equilibrio, quindi la lunghezza della molla è determinato dal minimo di U rispetto ad ℓ:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = k\left(\ell - \ell_0\right) + Mg = 0$$

e quindi da

$$\ell = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$$

Sostituendo possiamo scrivere l'energia potenziale iniziale nella forma

$$U_i = Mg\ell_0 - \frac{M^2g^2}{2k} + mgh$$

Quella finale varrà

$$U_f = \frac{k}{2}\left(\ell_0 - \frac{Mg}{k} - \delta - \ell_0\right)^2 + (M+m)\,g\left(\ell_0 - \frac{Mg}{k} - \delta\right)$$

Ponendo $U_i = U_f$ e risolvendo per δ otteniamo

$$\delta = \frac{gm}{k} \pm \sqrt{\frac{g^2m^2}{k^2}\left[1 + 2\frac{k}{gm}\left(h - \ell_0 + \frac{Mg}{k}\right)\right]}$$

La soluzione corretta corretta corrisponde al segno positivo, che significa anche $\delta > 0$, dato che

$$h > \ell_0 - \frac{Mg}{k}$$

L'altra soluzione corrisponde invece all'altro valore di δ per il quale la molla si trova in quiete durante l'oscillazione.

CC BY NC SA

5.128. Proiettile con attrito viscoso: traiettoria ⋆⋆

Un proiettile di massa m viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo v_0 che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso

$$\vec{F} = -\gamma\vec{v}$$

Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo.

Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane con origine nella posizione iniziale del proiettile. Scriviamo le equazioni del moto nella direzione orizzontale e verticale. Abbiamo

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x} \tag{5.128.1}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\gamma}{m}\dot{y} - g \tag{5.128.2}$$

Risolviamo esplicitamente la (5.128.1), cercando soluzioni del tipo

$$x = e^{\lambda t}$$

Sostituendo otteniamo la condizione

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda = 0$$

e quindi i due possibili valori $\lambda = 0$, $\lambda = -\gamma/m$. Abbiamo quindi

$$x = A + Be^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

ed imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 0 \\ \dot{x}(0) &= -\frac{\gamma}{m}B = v_{x,0} \end{aligned}$$

otteniamo

$$x(t) = \frac{mv_{x,0}}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right] \tag{5.128.3}$$

Passiamo alla (5.128.2). La soluzione si ottiene aggiungendo alla soluzione generale dell'equazione omogenea (identica alla (5.128.1)) una soluzione particolare. Sappiamo che nel caso considerato questa può corrispondere ad un moto a velocità costante, $y = v_l t$, e sostituendo nella (5.128.2) troviamo $v_l = -mg/\gamma$. Quindi la soluzione generale sarà

$$y = A + Be^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}t$$

Imponiamo ancora una volta le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 0 \\ \dot{y}(0) &= -\frac{\gamma}{m}B - \frac{mg}{\gamma} = v_{y,0} \end{aligned}$$

da cui

$$y = \frac{m}{\gamma}\left[v_{y,0} + \frac{mg}{\gamma}\right]\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right] - \frac{mg}{\gamma}t \tag{5.128.4}$$

Veniamo adesso alla traiettoria. Possiamo ricavare dalla (5.128.3)

$$1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} = \frac{\gamma x}{m v_{x,0}}$$

e

$$t = -\frac{m}{\gamma}\log\left(1 - \frac{\gamma x}{m v_{x,0}}\right)$$

Sostituendo nella (5.128.4) otteniamo l'equazione desiderata,

$$y = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x + \frac{m^2 g}{\gamma^2}\left[\frac{\gamma x}{m v_{x,0}} + \log\left(1 - \frac{\gamma x}{m v_{x,0}}\right)\right] \tag{5.128.5}$$

Per valori di x tali che

$$\frac{\gamma x}{m v_{x,0}} \ll 1 \tag{5.128.6}$$

possiamo utilizzare l'approssimazione

$$\log(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

e ottenere

$$y = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x - \frac{1}{2}\frac{g x^2}{v_{x,0}^2} + O\left(\frac{\gamma x}{m v_{x,0}}\right)^3$$

cioè la stessa traiettoria valida in assenza di attrito. Per valori maggiori di x il termine logaritmico diventa importante, ed in effetti la traiettoria ha un asintoto verticale per

$$x^* = \frac{m v_{x,0}}{\gamma}$$

L'interpretazione di questo fatto è che a causa dell'attrito il proiettile non supera orizzontalmente il valore $x = x^*$, come d'altra parte è chiaro dalla (5.128.3).

Discutiamo il limite di piccolo attrito. Per x fissato se vale la condizione (5.128.6), che possiamo riscrivere nella forma

$$\gamma \ll \frac{m v_{x,0}}{x}$$

potremo approssimare il logaritmo come in precedenza e ottenere la soluzione priva di attrito. Notiamo però che, per quanto piccolo possa essere γ, per valori sufficientemente grandi di x la traiettoria risulterà comunque fortemente modificata.

5.129. Carrello con massa scorrevole ⋆⋆

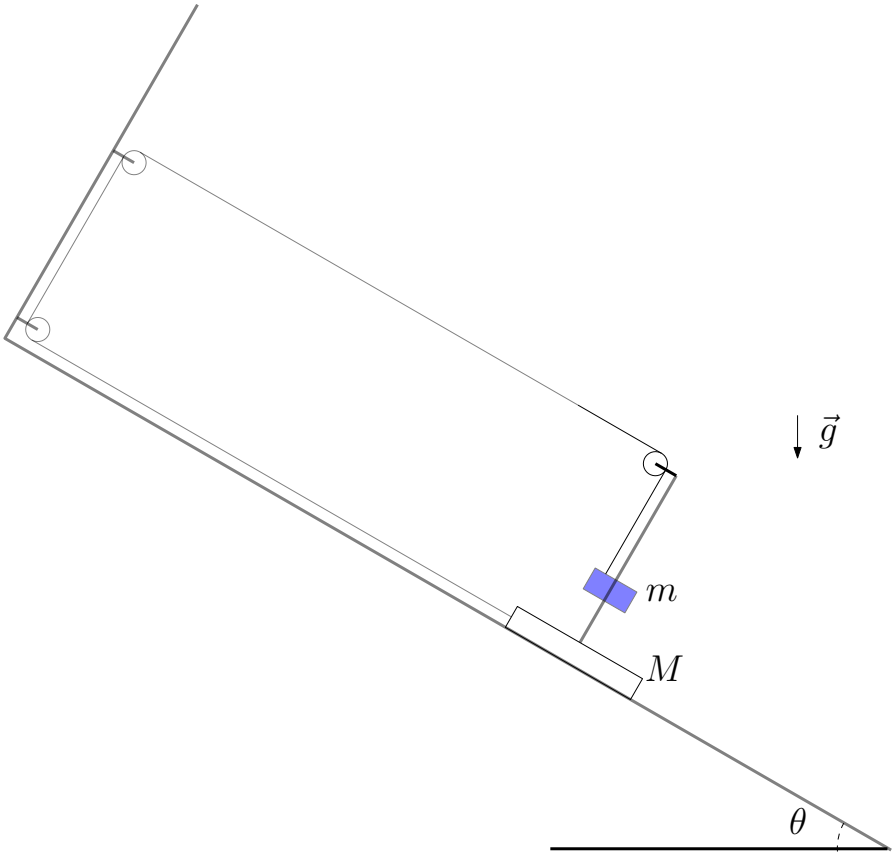


Figura 5.51.: Figura per il problema 5.129. Il carrello di massa M scorre liberamente sul piano, la massa m è vincolata a scorrere (senza attrito) lungo l'asta verticale.

Un carrello di massa M scorre su un piano inclinato (di un angolo θ rispetto all'orizzontale) in assenza di attrito. Sopra al carrello è montata un'asta verticale e su questa scorre, sempre in assenza di attrito, una massa m. Massa e carrello sono collegati mediante un sistema di carrucole ideali e un filo inestensibile come in Figura 5.51. Calcolare l'accelerazione del carrello in presenza di un campo gravitazionale costante $\vec{g}$.

Soluzione

Scriviamo prima di tutto l'equazione del moto per il sistema composto dal carrello e dalla massa nella direzione parallela al piano inclinato. Lungo tale direzione massa e carrello hanno la stessa accelerazione $a_{\parallel}$, quindi possiamo scrivere

$$(M+m)\,a_{\parallel} = (M+m)\,g\sin\theta - 2T$$

Consideriamo adesso l'equazione del moto per la sola massa, nella direzione perpendicolare al piano inclinato. Dato che l'asta è priva di attrito possiamo scrivere

$$ma_\perp = T - mg\cos\theta$$

Infine teniamo conto della inestensibilità del filo. Da essa segue che la somma dei due tratti orizzontali del filo e del tratto tra la carrucola e la massa deve rimanere costante,

$$2\ell_x + \ell_y = \text{Costante}$$

e derivando due volte rispetto al tempo, e tenendo conto che $\ddot{\ell}_x = a_\parallel$, $\ddot{\ell}_y = -a_\perp$ otteniamo

$$2a_\parallel = a_\perp$$

Sostituendo nelle equazioni del moto otteniamo

$$\begin{aligned} (M+m)\,a_\parallel &= (M+m)\,g\sin\theta - 2T \\ 2ma_\parallel &= T - mg\cos\theta \end{aligned}$$

ed infine

$$a_\parallel = \frac{(M+m)\,g\sin\theta - 2mg\cos\theta}{M+5m}$$

5.130. Carrello triangolare ⋆⋆

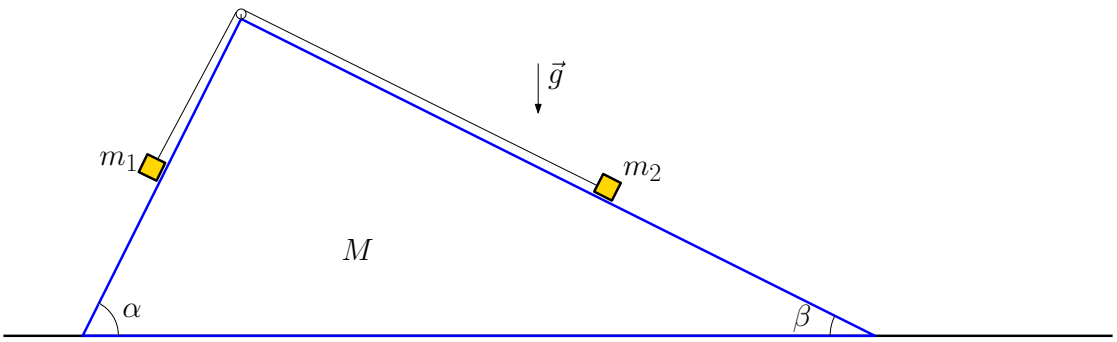


Figura 5.52.: Il carrello triangolare considerato nel problema.

Un carrello di sezione triangolare come in Figura 5.52 (angoli alla base α e β) e di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, sul quale è libero di muoversi. Sui piani inclinati che corrispondono a due suoi lati sono appoggiate due masse m_1 e m_2. Queste sono collegate tra loro da un filo inestensibile e privo di massa, e possono scorrere liberamente e senza attriti. Il sistema è immerso in un campo gravitazionale costante: determinare l'accelerazione del carrello. Considerare in particolare il caso $\alpha = \beta$.

Soluzione

Scriviamo l'equazione per il moto orizzontale del carrello. Abbiamo

$$Ma = N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta - T\cos\alpha + T\cos\beta \tag{5.130.1}$$

dove N_1, N_2 sono le forze di contatto che le due masse esercitano sul carrello, e T la tensione del filo.

Scriviamo adesso le equazioni del moto per le due masse, nella direzione della normale al piano al quale sono appoggiate. Osserviamo che in tali direzioni le accelerazioni delle masse rispetto al carrello sono nulle, e quindi quelle assolute coincidono con le relative componenti dell'accelerazione del carrello. Quindi

$$\begin{aligned} m_1\left(-a\sin\alpha\right) &= N_1 - m_1 g\cos\alpha \\ m_2\left(a\sin\beta\right) &= N_2 - m_2 g\cos\beta \end{aligned} \tag{5.130.2}$$

Scriviamo le analoghe equazioni per il moto delle due masse nelle direzioni parallele al piano al quale sono appoggiate. Otteniamo

$$\begin{aligned} \left(a\cos\alpha + a_{1\parallel}^{(r)}\right) &= \frac{T}{m_1} - g\sin\alpha \\ \left(a\cos\beta + a_{2\parallel}^{(r)}\right) &= -\frac{T}{m_2} + g\sin\beta \end{aligned}$$

dove $a_{1\|}^{(1)}$ e $a_{2\|}^{(2)}$ sono le accelerazioni relative al carrello. A causa dell'inestensibilità del filo $a_{1\|}^{(1)} = a_{2\|}^{(2)}$, possiamo quindi sottrarre membro a membro ottenendo

$$a\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) T - g\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)$$

ossia

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[a\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) + g\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)\right]$$

Sostituiamo la tensione così ottenuta nella (5.130.1) insieme con le espressioni per N_1 e N_2 ricavati dalle (5.130.2), ottenendo l'accelerazione richiesta

$$a = \frac{(m_1\cos\alpha + m_2\cos\beta)(m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta)}{M(m_1+m_2) + m_1 m_2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (m_1+m_2)\left(m_1\sin^2\alpha + m_2\sin^2\beta\right)} g$$

Nel caso $\alpha = \beta$ abbiamo

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\sin\alpha\cos\alpha}{M + (m_1+m_2)\sin^2\alpha} g$$

5.131. Sistema a tre corpi: energia nel sistema del centro di massa ⋆

Mostrare che l'energia cinetica per un sistema di tre punti materiali di massa m_1, m_2 e m_3 e velocità $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ può essere scritta nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\, v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + \frac{1}{2}\mu_{23}(\vec{v}_2 - \vec{v}_3)^2 + \frac{1}{2}\mu_{31}(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)^2$$

dove

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

è la velocità del centro di massa e le costanti μ_{12}, μ_{23} e μ_{31} sono funzioni delle masse. Determinare esplicitamente μ_{12}, μ_{23} e μ_{31}.

Soluzione

Sostituendo l'espressione della velocità del centro di massa troviamo

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3)^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + \frac{1}{2}\mu_{23}(\vec{v}_2 - \vec{v}_3)^2 + \frac{1}{2}\mu_{31}(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)^2$$

e sviluppando i quadrati

$$\begin{aligned} E_c = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_3^2 v_3^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + 2m_2 m_3 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 + 2m_3 m_1 \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1\right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_{12}\left(v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_{23}\left(v_2^2 + v_3^2 - 2\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3\right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_{31}\left(v_3^2 + v_1^2 - 2\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1\right) \end{aligned}$$

Questa espressione si deve ridurre a

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2$$

quindi i termini misti si devono annullare. Questo da le condizioni

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + m_3} &= \mu_{12} \\ \frac{m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} &= \mu_{23} \\ \frac{m_3 m_1}{m_1 + m_2 + m_3} &= \mu_{31} \end{aligned}$$

Quello che rimane è

$$
\begin{aligned}
E_c = & \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{12}+\mu_{31}\right)v_1^2 \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{12}+\mu_{23}\right)v_2^2 \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{m_3^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{23}+\mu_{31}\right)v_3^2
\end{aligned}
$$

ma il primo termine tra parentesi si riduce a

$$
\frac{m_1^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{12}+\mu_{31} = \frac{m_1^2+m_1m_2+m_1m_3}{m_1+m_2+m_3} = m_1
$$

e similmente gli altri si riducono rispettivamente a m_2 e m_3, per cui la relazione cercata è verificata.

5.132. Nastro trasportatore ⋆⋆

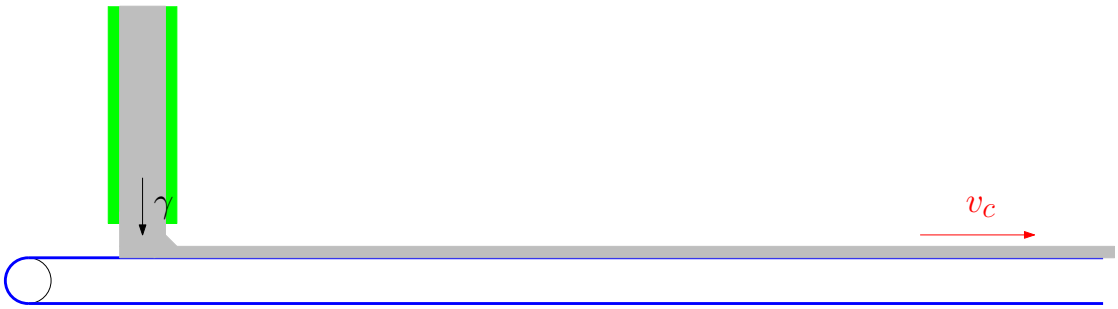


Figura 5.53.: Il nastro trasportatore considerato nel problema. Si può immaginare che la sabbia depositata abbia inizialmente una velocità nulla nella direzione orizzontale.

Su un nastro trasportatore, mantenuto in movimento con velocità costante v_C, viene depositata continuamente della sabbia. La massa di sabbia depositata per unità di tempo è costante e vale

$$\frac{dm}{dt} = \gamma$$

Calcolare la potenza del motore necessaria a mantenere il nastro in movimento.

Soluzione

Consideriamo una quantità Δm di sabbia che cade sul nastro. Il nastro trasportatore eserciterà su di essa una forza $\Delta F(t)$ che la farà accelerare fino a raggiungere la velocità v_c. Questo significa che l'impulso totale esercitato dal nastro sulla massa sarà

$$\Delta I = \int \Delta F(t) dt = \Delta m \, v_c$$

Per il terzo principio la sabbia avrà esercitato una forza uguale e contraria sul nastro, e quindi avrà fatto su di esso un lavoro

$$\Delta \mathcal{L} = -\int \Delta F \, dx = -\int \Delta F v_c dt = -v_c \int \Delta F(t) dt = -\Delta m v_c^2$$

Ma l'energia del nastro trasportatore non varia, quindi questo lavoro deve essere compensato dal lavoro fatto dal motore, che vale quindi

$$\Delta \mathcal{L}_M = \Delta m v_c^2$$

Dividendo per il tempo che è stato necessario ad immettere la massa otteniamo la potenza del motore,

$$P = \frac{\Delta \mathcal{L}_M}{\Delta t} = \gamma v_c^2$$

Possiamo chiederci anche quanta potenza P_{diss} sia stata dissipata in attrito. Dato che l'energia cinetica della massa è aumentata di

$$\Delta\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\Delta m\, v_c^2$$

vediamo che esattamente metà della potenza del motore è dissipata in attrito, dato che

$$P = P_{diss} + \frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\Delta t}$$

CC BY NC SA

5.133. Propulsione a reazione "istantanea" ⋆⋆

L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa ηm di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre $-v_0$. La massa iniziale di quest'ultimo è m e chiaramente $0 \leq \eta < 1$. Indicheremo con $\mu(t)$ la massa espulsa al tempo t. Calcolate $\mu(t)$ nei due casi seguenti:

1. Tutta la massa viene espulsa istantaneamente a $t = 0$
2. La massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo τ

Dette $v_f^{(1)}$ e $v_f^{(2)}$ le velocità finale del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che

$$\lim_{\tau \to 0} v_f^{(2)} = v_f^{(1)}$$

Soluzione

Se la massa viene espulsa tutta a $t = 0$ sarà

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \eta m & t > 0 \end{cases}$$

Nel secondo caso avremo invece

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\eta m}{\tau} t & 0 < t < \tau \\ \eta m & t > \tau \end{cases}$$

Calcoliamo la velocità finale del razzo.

Usando la conservazione della quantità di moto possiamo scrivere

$$[m - \mu(t)]\, v(t) = [m - \mu(t) - d\mu]\, [v(t) + dv] - [v_0 - v(t)]\, d\mu$$

ossia

$$v_0 d\mu = [m - \mu(t)]\, dv \tag{5.133.1}$$

Integrando otteniamo

$$\int_0^{\eta m} \frac{v_0}{m - \mu} d\mu = \int_0^{v_f} dv$$

che da

$$v_f^{(2)} = -v_0 \log(1 - \eta)$$

Questa formula non è però applicabile nel primo caso. Applicando nuovamente la conservazione della quantità di moto abbiamo infatti

$$0 = [m - \eta m]\, v_f^{(1)} - v_0 \eta m$$

CC BY NC SA

da cui

$$v_f^{(1)} = v_0 \frac{\eta}{1-\eta}$$

Notare che $v_f^{(2)}$ non dipende da τ, di conseguenza

$$\lim_{\tau \to 0} v_f^{(2)} = -v_0 \log(1-\eta) \neq v_f^{(1)}$$

5.134. Perdita di energia di un oscillatore ⋆⋆

Un oscillatore armonico è realizzato mediante una massa m collegata ad una molla di costante elastica k. Inizialmente la massa si trova nella posizione di equilibrio, con velocità v_0. Determinare per quale valore del coefficiente di attrito viscoso λ l'energia totale dell'oscillatore si riduce più rapidamente.

Soluzione

L'equazione del moto dell'oscillatore

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

ammette per soluzione generale

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

dove α_1 e α_2 sono le due soluzioni di

$$m\alpha^2 + \lambda\alpha + k = 0$$

che supponiamo per il momento distinte. Imponiamo le condizioni iniziali: abbiamo

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 0 \\ \dot{x}(0) &= \alpha_1 A + \alpha_2 B = v_0 \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ B &= -\frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}\right) \\ \dot{x}(t) &= \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'energia troviamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left[m\left(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right)^2 + k\left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left[\left(\alpha_1^2 + \frac{k}{m}\right)e^{2\alpha_1 t} + \left(\alpha_2^2 + \frac{k}{m}\right)e^{2\alpha_2 t} - 2\left(\alpha_1\alpha_2 + \frac{k}{m}\right)e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}\right] \end{aligned}$$

La parte reale di α_1, α_2 è sempre negativa (per $\lambda > 0$), e corrisponderà ad un termine decrescente esponenzialmente. La riduzione più rapida di energia si avrà quindi per il massimo valore di

$$\tau^{-1} = \min\left(-\mathrm{Re}\,\alpha_1, -\mathrm{Re}\alpha_2\right)$$

D'altra parte

$$\alpha_i = -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \equiv -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

e quindi

$$\tau^{-1} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2m} & 0 < \lambda < \sqrt{4mk} \\ \frac{\lambda}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} & \lambda > \sqrt{4mk} \end{cases}$$

che ha un massimo per $\lambda = \sqrt{4mk}$, che corrisponde allo smorzamento critico. Si tratta proprio del caso che non abbiamo considerato esplicitamente ($\alpha_1 = \alpha_2$), che però possiamo considerare come limite delle espressioni precedenti. In particolare

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\to 0} E(t) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\left(-\frac{\lambda}{2m}\frac{e^{\sqrt{\Delta}t} - e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{e^{\sqrt{\Delta}t} + e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{m}\left(\frac{e^{\sqrt{\Delta}t} - e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2\sqrt{\Delta}}\right)^2\right] e^{-\frac{\lambda}{m}t} \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\left(1 - \frac{\lambda t}{2m}\right)^2 + \frac{kt^2}{m}\right] e^{-\frac{\lambda}{m}t} \end{aligned}$$

La decrescita non è più esponenziale, ma le conclusioni non cambiano.

CC BY NC SA

5.135. Energia di un oscillatore forzato a regime ⋆⋆

Un oscillatore armonico è caratterizzato da una massa m, una costante di richiamo elastica k e un coefficiente di attrito viscoso λ. Supponendo che su di esso sia applicata una forzante periodica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

e che solo le oscillazioni forzate siano presenti (condizione di regime) calcolare l'energia totale in funzione del tempo,

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

Soluzione

L'equazione del moto del sistema è

$$m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

La soluzione a regime sarà della forma

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

dove A e B sono costanti da determinare. Calcolando le derivate prime e seconde e sostituendo troviamo

$$\left(k - m\omega^2\right)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \lambda \omega \left(-A \sin \omega t + B \cos \omega t\right) = F_0 \cos \omega t$$

Segue che deve essere

$$\begin{aligned} \left(k - m\omega^2\right) A + \lambda \omega B &= F_0 \\ \left(k - m\omega^2\right) B - \lambda \omega A &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema ha per soluzioni

$$\begin{aligned} B &= \frac{\lambda \omega}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \lambda^2 \omega^2} F_0 \\ A &= \frac{k - m\omega^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \lambda^2 \omega^2} F_0 \end{aligned}$$

Scriviamo adesso l'energia, ponendo $\omega_0^2 = k/m$. Abbiamo

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{m}{2} \omega_0^2 \left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(-A \sin \omega t + B \cos \omega t\right)^2 + \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right)^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \omega_0^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(A^2 + B^2\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \left[\left(A^2 - B^2\right) \cos 2\omega t + 2AB \sin 2\omega t\right] \right\} \end{aligned}$$

Notiamo un termine costante e un termine oscillante (assente se $\omega = \omega_0$). Sostituendo A e B abbiamo infine

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{m}{2}\omega_0^2 \left\{ \frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \left[\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 - \Gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \cos 2\omega t + 2\frac{\Gamma\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2} \sin 2\omega t \right] \right\} \\ &\times \frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega_0^2 - m\omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \end{aligned}$$

dove $\Gamma = \lambda/m$

CC BY NC SA

5.136. Risposta alla risonanza e fattore di qualità ⋆⋆

Un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m, una costante di richiamo elastica k e un coefficiente di attrito viscoso λ viene sottoposto ad una forzante periodica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Detta $A(\omega)$ l'ampiezza di oscillazione a regime, mostrare che il rapporto

$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)}$$

dove ω_r è la frequenza di risonanza dell'oscillatore si può scrivere come una funzione del solo fattore di qualità Q.

Soluzione

La soluzione a regime dell'equazione del moto

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

si può scrivere come

$$x_r(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{F_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + \lambda i\omega}\right]$$

ed è dunque una oscillazione di ampiezza ($\omega_0^2 = k/m$)

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}\omega^2}}$$

La frequenza di risonanza si determina calcolando il massimo di questa espressione, che corrisponde al valore di ω^2 che rende minimo il termine al denominatore. Questo si determina da

$$\frac{d}{d\omega^2}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}\omega^2\right] = 2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + \frac{\lambda^2}{m^2} = 0$$

ossia

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{2m^2}$$

Sostituendo troviamo

$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{km}{\lambda^2}} = Q$$

CC BY NC SA

5.137. Forzante periodica per $t > 0$ ⋆⋆

Un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m e da una costante di richiamo elastica k (non c'è attrito) è inizialmente fermo nella posizione di equilibrio. Per $t > 0$ viene sottoposto ad una forzante periodica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Calcolare l'evoluzione temporale $x(t)$

Soluzione

L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

che ammette come soluzione particolare

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Per ottenere la soluzione generale dobbiamo aggiungere la soluzione generale dell'omogenea. Quindi abbiamo

$$x(t) = \frac{m^{-1}F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

dove abbiamo posto $\omega_0^2 = k/m$. Imponiamo adesso le condizioni iniziali. Abbiamo

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{m^{-1}F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + A = 0 \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A &= -\frac{m^{-1}F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Notare che possiamo prendere il limite $\omega \to \omega_0$. Applicando la regola di de L'Hopital abbiamo

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

che possiamo interpretare come risposta del sistema forzato alla risonanza.

CC BY NC SA

5.138. Fermare un oscillatore⋆⋆

Un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m e da una costante di richiamo elastica k (non c'è attrito) si trova inizialmente nella posizione $x = x_0$ con velocità nulla. Detto T il suo periodo di oscillazione, determinare una forza $F(t)$ che può essere applicata per ridurlo in quiete nella posizione di equilibrio per $t > T$.

Soluzione

Dobbiamo trovare una $F(t)$ tale che la soluzione di

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

con le condizioni iniziali specificate si annulli per $t > T$. Una possibile strategia è ottenere $x(T') = 0$ e $\dot{x}(T') = 0$ con $T' < T$, smettendo di applicare la forza successivamente. Dato che dobbiamo imporre due condizioni scegliamo una forza semplice con due parametri liberi, ad esempio (il fattore m è introdotto per convenienza)

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ am \sin \omega t + bm \cos \omega t & 0 < t < T' \\ 0 & t > T' \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il problema

$$m\ddot{x} + kx = am \sin \omega t + bm \cos \omega t$$

Una soluzione particolare è della forma

$$x_p = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (a \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

e quindi la soluzione generale sarà

$$x = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (a \sin \omega t + b \cos \omega t) + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

con $\omega_0^2 = k/m$. Imponiamo le condizioni iniziali.

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} + A = x_0 \\ \dot{x}(0) &= \frac{a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + B\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} A &= x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B &= -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

CC BY NC SA

e quindi

$$x = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(a \sin \omega t + b \cos \omega t\right) + \left(x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \cos \omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_0 t$$

Imponiamo adesso le condizioni a $t = T'$. Abbiamo

$$x(T') = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(a \sin \omega T' + b \cos \omega T'\right) + \left(x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \cos \omega_0 T' - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_0 T' = 0$$

$$\dot{x}(T') = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(a \cos \omega T' - b \sin \omega T'\right) - \omega_0 \left(x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \sin \omega_0 T' - \omega \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 T' = 0$$

Questo è un sistema nelle incognite a, b

$$\frac{\sin \omega T' - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 T'}{\omega_0 - \omega} a + \frac{\cos \omega T' - \cos \omega_0 T'}{\omega_0 - \omega} b = -x_0 \left(\omega_0 + \omega\right) \cos \omega_0 T'$$

$$\frac{\cos \omega T' - \cos \omega_0 T'}{\omega_0 - \omega} a + \frac{\frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega_0 T' - \sin \omega T'}{\omega_0 - \omega} b = \frac{\omega_0}{\omega} \left(\omega_0 + \omega\right) x_0 \sin \omega_0 T'$$

Sarebbe possibile risolvere il sistema in generale, ma per semplificare ulteriormente l'espressione prendiamo il limite $\omega \to \omega_0$, ottenendo

$$\left(-\omega_0 T \cos \omega_0 T + \sin \omega_0 T\right) a + \left(\omega_0 T \sin \omega_0 T\right) b = -2 x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 T$$

$$\left(\omega_0 T \sin \omega_0 T\right) a + \left(\sin \omega_0 T + \omega_0 T \cos \omega_0 T\right) b = 2 \omega_0^2 x_0 \sin \omega_0 T$$

Inoltre scegliendo $T' = T = 2\pi/\omega_0$ abbiamo

$$a = \frac{\omega_0^2 x_0}{\pi}$$

$$b = 0$$

e quindi

$$F(t) = \frac{k x_0}{\pi} \sin \omega_0 t \qquad 0 < t < T$$

CC BY NC SA

5.139. Molla con massa distribuita I ⋆⋆

Figura 5.54.: La molla nella configurazione di riposo (a sinistra) e in quella di equilibrio (a destra). Il valore di $h(x)$ corrisponde alla posizione verticale del punto rispetto alla sospensione.

Una molla ha lunghezza a riposo L_0, una costante elastica K e una massa M, uniformemente distribuita. Per avere un modello concreto si può pensare, ad esempio, ad un numero N molto grande di molle, ciascuna di lunghezza L_0/N, costante elastica k e massa $m = MN^{-1}$.

- Quanto vale k in funzione di K e N?

Si appende un suo estremo e si permette all'altro di pendere verticalmente. Sulla molla agisce la forza di gravità. Considerando il limite $N \to \infty$, indichiamo con x la coordinata dell'elemento della molla che si trova ad una distanza x dall'estremo appeso ($0 < x < L_0$, vedere Figura 5.54) in condizioni di riposo. Determinare nella configurazione di equilibrio

- il valore della tensione $T(x)$ lungo la molla;
- la distanza $y(x)$ del punto identificato da x dall'estremo appeso;
- l'allungamento totale della molla e la sua lunghezza.

Soluzione

Per quanto riguarda la costante elastica k di una delle molle componenti, dato che queste sono in serie tra loro ed identiche avremo (vedere l'Esercizio 5.27)

$$\frac{1}{K} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k}$$

e quindi $k = NK$. Per il seguito conviene scrivere la costante di un tratto di elastico molto piccolo, che si ottiene facilmente ponendo $N = L_0/\Delta x$, cioè

$$k = K\frac{L_0}{\Delta x}$$

Calcoliamo adesso la tensione all'equilibrio in funzione di x. Consideriamo il tratto di elastico sottostante al punto identificato da x. Questo avrà una massa

$$m(x) = M\frac{L_0 - x}{L_0}$$

e su di esso agiranno la tensione $T(x)$ e la forza peso. All'equilibrio dovremo avere dunque

$$T(x) = Mg\left(1 - \frac{x}{L_0}\right)$$

Per quanto riguarda la lunghezza, consideriamo adesso il tratto di elastico tra il punto x e il punto $x + \Delta x$. Il suo allungamento (la differenza tra la lunghezza a riposo e quella all'equilibrio) sarà dato da

$$\Delta\ell(x) = y(x + \Delta x) - y(x) - \Delta x$$

e dovrà essere legato alla tensione dalla relazione

$$T(x) = k\Delta\ell(x) = KL_0\frac{y(x + \Delta x) - y(x) - \Delta x}{\Delta x}$$

passando al limite $\Delta x \to 0$ si trova

$$T(x) = k\Delta\ell(x) = KL_0\left(\frac{dy(x)}{dx} - 1\right)$$

Possiamo adesso ricavare esplicitamente $y(x)$, riscrivendo l'equazione precedente nella forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{KL_0}T(x) + 1 = \frac{Mg}{KL_0}\left(1 - \frac{x}{L_0}\right) + 1$$

ed integrando troviamo

$$y(x) = \frac{Mg}{KL_0}\left(x - \frac{x^2}{2L_0}\right) + x$$

La costante di intregrazione è stata posta uguale a zero, dato che $y(0) = 0$. Vediamo che la distanza di ogni elemento della molla dal punto di sospensione cresce, e che ponendo $g = 0$ otteniamo $y(x) = x$, come deve essere. La lunghezza della molla sarà data da

$$L = y\left(L_0\right) = \frac{Mg}{2K} + L_0$$

e il suo allungamento da

$$\Delta L = L - L_0 = \frac{Mg}{2K}$$

la metà di quello che si otterebbe se tutto la massa fosse concentrata all'estremo inferiore.

5.140. Molla con massa distribuita II ⋆⋆

Considerare la molla con massa distribuita descritta nell'Esercizio 5.139. Mostrare che l'accelerazione di un suo elemento generico che si trova in x nella condizione di riposo è descritto dall'equazione

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \mu g + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{5.140.1}$$

dove $\mu = M/L_0$. Usando l'espressione della tensione trovata nell'esercizio precedente mostrare che deve valere

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \chi \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu g \tag{5.140.2}$$

e calcolare il valore di χ. Mostrate infine che

$$y(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt) + \frac{1}{2} g t^2 \tag{5.140.3}$$

dove F e G sono funzioni arbitrarie è soluzione della Equazione (5.140.2) per un opportuno valore della costante v, e determinare quest'ultimo.

Soluzione

Consideriamo l'equazione del moto di un tratto di filo posto tra x e $x + \Delta x$. Per la seconda legge di Newton

$$\left(\frac{M}{L_0}\Delta x\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx\right) = T(x+\Delta x, t) - T(x,t) + \left(\frac{M}{L_0}\Delta x\right) g$$

In questa equazione abbiamo a destra la massa del tratto considerato, moltiplicato per l'accelerazione del suo centro di massa. A destra abbiamo le tensioni agli estremi e la forza peso. Dividendo membro a membro per Δx e passando al limite $\Delta x \to 0$ otteniamo

$$\frac{M}{L_0}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + g\frac{M}{L_0}$$

Derivando l'espressione per la tensione trovata nell'esercizio precedente abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x,t) = K L_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - 1\right) = K L_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

e sostituendo

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - K L_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu g \tag{5.140.4}$$

che è l'espressione cercata se $\chi = K L_0$. Verifichiamo per sostituzione che la (5.140.3) è una soluzione. Abbiamo (indichiamo con un apice la derivata di una funzione rispetto al suo argomento)

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 F''(x - vt) + v^2 G''(x + vt) + g \tag{5.140.5}$$

CC BY NC SA

e

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = F''(x - vt) + G''(x + vt) \tag{5.140.6}$$

Sostituendo nella (5.140.4) otteniamo

$$v^2 \left[F''(x - vt) + v^2 G''(x + vt)\right] + g - \frac{\chi}{\mu}\left[F''(x - vt) + G''(x + vt)\right] = g$$

che è verificata se $v = \sqrt{\chi/\mu}$.

CC BY NC SA

5.141. Molla con massa distribuita III ⋆⋆⋆⋆

La molla con massa distribuita considerata negli Esercizi 5.139 e 5.140 si trova inizialmente appesa in quiete nella configurazione di equilibrio considerata precedentemente. All'improvviso l'estremo superiore si stacca, e la molla cade liberamente sotto l'effetto della accelerazione di gravità. Determinare, facendo uso dei risultati precedenti,

1. La legge oraria del centro di massa della molla.
2. La legge oraria dell'estremo superiore della molla.
3. La legge oraria dell'estremo inferiore della molla.

Soluzione

Si può rispondere immediatamente alla prima domanda: il centro di massa si muoverà con moto uniformemente accelerato verso il basso, con accelerazione g, dato che deve essere

$$M\ddot{y}_{CM} = -Mg$$

In seguito verificheremo direttamente questa affermazione.

Per quanto riguarda il moto degli estremi, proviamo a cercare una soluzione per la caduta della molla nella forma vista nell'Esercizio 5.140, ossia

$$y(x,t) = F\left(x - vt\right) + G\left(x + vt\right) + \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.141.1}$$

Per il seguito risulta conveniente scrivere

$$y(x,t) = x + u(x,t)$$

da cui

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F\left(x - vt\right) + G\left(x + vt\right) - x + \frac{1}{2}gt^2 \\ &= A\left(x - vt\right) + B\left(x + vt\right) + \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{5.141.2}$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= F(x) - \frac{x}{2} \\ B(x) &= G(x) - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Dobbiamo imporre che a $t = 0$ la soluzione coincida con la configurazione di equilibrio determinata nell'Esercizio 5.139, ossia

$$u(x,0) = A(x) + B(x) = \frac{Mg}{KL_0^2}\left(L_0 x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{gL_0}{v^2}\left(x - \frac{x^2}{2L_0}\right)$$

per $0 < x < L$. Inoltre nell'istante immediatamente successivo al distacco la molla sarà ferma, quindi sempre per $0 < x < L$ dovremo avere

$$\dot{u}(x,0) = v\left[A'(x) - B'(x)\right] = 0$$

e quindi le funzioni A e B potranno differire solo per una costante, $B(x) = A(x) + C$. Sostituendo nell'equazione precedente avremo

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{gL_0}{2v^2}\left(x - \frac{x^2}{2L_0}\right) - \frac{C}{2} \\ B(x) &= \frac{gL_0}{2v^2}\left(x - \frac{x^2}{2L_0}\right) + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

e confrontando con la (5.141.1) vediamo che la costante è irrilevante, per cui porremo $C = 0$.

Se consideriamo adesso la struttura della soluzione (5.141.2), vediamo che, a parte il termine $gt^2/2$, la funzione $u(x,t)$ può essere interpretata come la somma di una funzione $A(x - vt)$ che si trasla rigidamente con velocità v, e di una funzione $B(x + vt)$ che fa lo stesso con velocità $-v$. Con le considerazioni precedenti abbiamo determinato $A(x)$ e $B(x)$ nell'intervallo $0 < x < L_0$, ma non sappiamo ancora niente sulla loro forma per $x > L_0$ e $x < 0$.

Sappiamo però che la tensione all'estremo $x = L_0$ è nulla. Come abbiamo visto negli esercizi precedenti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{KL_0}T$$

e quindi dovrà essere

$$\frac{\partial u(L_0,t)}{\partial x} = A'(L_0 - vt) + B'\left(L_0 + vt\right) = 0$$

Dopo il distacco anche la tensione in $x = 0$ si dovrà annullare, e quindi per $t > 0$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = A'(-vt) + B'\left(vt\right) = 0$$

Segue che

$$\begin{aligned} A'(x) &= -B'\left(2L_0 - x\right) \\ A'(x) &= -B'(-x) \end{aligned}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} A(x) &= B\left(2L_0 - x\right) \\ A(x) &= B(-x) \end{aligned}$$

a meno di costanti che dobbiamo considerare nulle se vogliamo che $y(x,t)$ sia continua.

Queste relazioni permettono di determinare la forma di A e B al di fuori dell'intervallo $0 < x < L_0$. Infatti vediamo che riflettendo $B(x)$ rispetto $x = 0$ si deve ottenere $A(x)$. Lo stesso deve accadere per una riflessione rispetto $x = L_0$.

La conclusione è che sia $A(x)$ che $B(x)$ sono funzioni periodiche con periodo $2L_0$, e che possiamo scrivere

$$A(x) = B(x) = \frac{gL_0}{2v^2}\left(\gamma(x) - \frac{\gamma(x)^2}{2L_0}\right) \tag{5.141.3}$$

con

$$\gamma(x) = 2L_0\left\lfloor\frac{x}{2L_0}\right\rfloor$$

e $\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero minore di x (vedere Figura (5.55)).

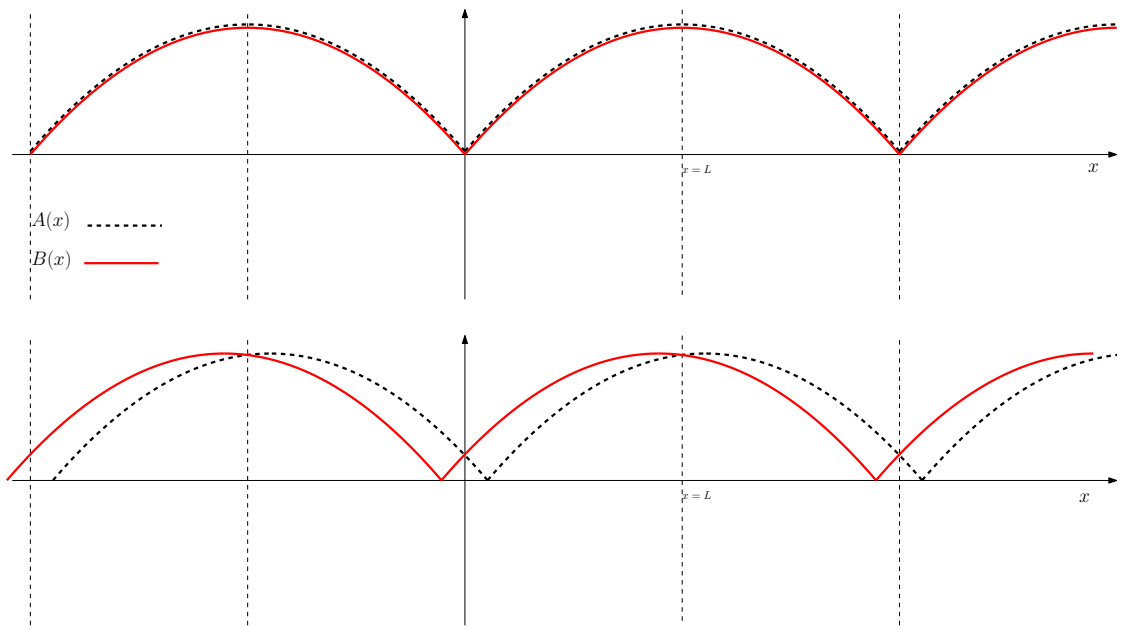


Figura 5.55.: Le funzioni $A(x)$ (linea nera tratteggiata) e $B(x)$ (linea rossa continua) sono rappresentate in alto. La funzione $u(x,t)$ è uguale a meno del termine $gt^2/2$ alla somma di $A(x - vt)$ e di $B(x + vt)$, cioè delle funzioni traslate rigidamente verso destra e verso sinistra di vt (figura in basso).

Possiamo adesso determinare facilmente il moto di un punto generico della molla, ottenendo

$$y(x,t) = x + \frac{gL_0}{2v^2}\left[\gamma(x - vt) + \gamma(x + vt) - \frac{\gamma(x - vt)^2 + \gamma(x + vt)^2}{2L_0}\right] + \frac{1}{2}gt^2$$

Notiamo che $y(x,t)$ è continua, ma la sua derivata $\partial y/\partial x$ ha una discontinuità. Questa discontinuità si genera al momento del distacco, quando la tensione all'estremo superiore

cambia bruscamente, $\Delta T = -Mg$. Dalla Figura 5.55 è evidente che tale discontinuità si propagherà inizialmente dall'estremo inferiore a quello superiore con velocità

$$v_D = \lim_{x \to vt} \left(\frac{\partial y}{\partial x} v + \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

Ad ogni arrivo ad un estremo verrà riflessa e invertirà il suo moto. Notare che mentre $\partial y/\partial x$ deve avere una discontinuità, il limite precedente deve esistere: quindi anche $\partial y/\partial t$ deve avere una discontinuità e deve valere[22]

$$\Delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = -v \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right), \qquad \Delta f \equiv \lim_{x \to vt^+} f - \lim_{x \to vt^-} f$$

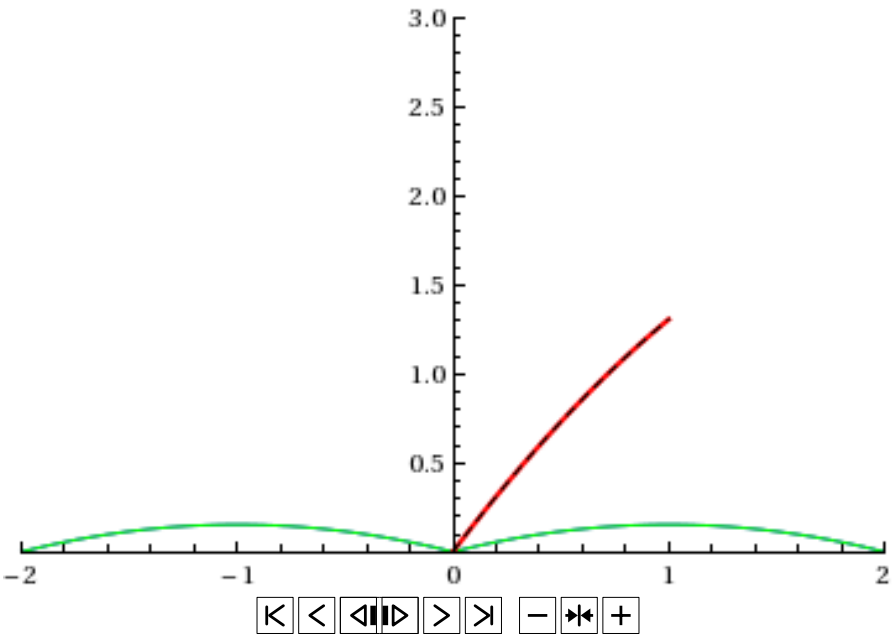


Figura 5.56.: La funzione $y(x,t)$ (in rosso) nell'intervallo $0 < t < 2L_0/v$. Per confronto sono riportate anche le funzioni $A(x - vt)$ (in blu), $B(x + vt)$ (in verde) e $y(x, 0)$ (tratteggiata). Si è preso $L_0 = 1\,\mathrm{m}$ e $v = 4\,\mathrm{ms}^{-1}$, quindi $2L_0/v = 0.5\,\mathrm{s}$.

Notiamo inoltre che la funzione $y(x,t) - gt^2/2$ si può interpretare come la configurazione della molla vista in un sistema di riferimento solidale al centro di massa (cioè, in moto uniformemente accelerato con accelerazione g), e che si ripete periodicamente per $t > 0$ con periodo $2L_0/v$. Studiamo quindi $y(x,t)$ a partire da $t_m = 2mL_0/v$ con $m \in \{0, 1, \cdots\}$. Ponendo $t = t_m + \tau$ possiamo distingure due fasi:

[22] Verificatelo esplicitamente, usando i risultati che seguono.

1. $0 < v\tau < L_0$. La discontinuità nella derivata si muove da sinistra verso destra, e si trova in $x_D = v\tau$. Possiamo scrivere per $0 < x < x_D$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= x + \frac{gL_0}{v^2}\left[x + L_0 - \frac{(x+2L_0-v\tau)^2 + (x+v\tau)^2}{4L_0}\right] + \frac{1}{2}g\left(\frac{2mL_0}{v} + \tau\right)^2 \\ &= y(x,0) + \frac{gL_0}{v^2}(v\tau - x) + \frac{2gmL_0}{v}\left(\tau + \frac{mL_0}{v}\right) \end{aligned}$$

e per $x_D < x < L_0$

$$y(x,t) = y(x,0) + \frac{2gmL_0}{v}\left(\tau + \frac{mL_0}{v}\right)$$

Notare che tutti i punti della molla in $x < x_D$ si stanno muovendo con la stessa velocità costante

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v}(1+2m)$$

e quelli con $x > x_D$ con

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v}(2m)$$

2. $L_0 < v\tau < 2L_0$. La discontinuità nella derivata si muove da destra verso sinistra, e si trova in $x_D = 2L_0 - v\tau$. Possiamo scrivere per $0 < x < x_D$

$$y(x,t) = y(x,0) + \frac{gL_0}{v^2}(v\tau - x) + \frac{2gmL_0}{v}\left(\tau + \frac{mL_0}{v}\right)$$

e per $x_D < x < L_0$

$$y(x,t) = y(x,0) + \frac{2gL_0}{v^2}(v\tau - L_0) + \frac{2gmL_0}{v}\left(\tau + \frac{mL_0}{v}\right)$$

Questa volta i punti con $x < x_D$ si muovono con la velocità costante

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v}(1+2m)$$

e quelli con $x > x_D$ con

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{gL_0}{v}(2+2m)$$

Possiamo in conclusione descrivere il moto in questi termini: inizialmente la molla è ferma. Come descritto in precedenza, la discontinuità in $\partial y/\partial x$ inizia a muoversi dall'estremo che si è staccato, e si sposta continuamente da un capo all'altro. Possiamo adesso calcolare esplicitamente la sua velocità.

Al passaggio della discontinuità un punto della molla incrementa istantaneamente la sua velocità di

$$\Delta V = \frac{gL_0}{v}$$

L'evoluzione e rappresentata nella animazione 5.56[23] tra $t = 0$ e $t = 2L_0/v$, intervallo corrispondente ai primi due "passaggi" della discontinuità ($m = 0$ nelle formule precedenti). Notare in particolare che l'estremo inferiore della molla rimane immobile fino al sopraggiungere di questa. In conclusione le estremità della molla si muoveranno con velocità costante: solo al momento dell'arrivo della discontinuità la loro velocità aumenterà improvvisamente di ΔV.

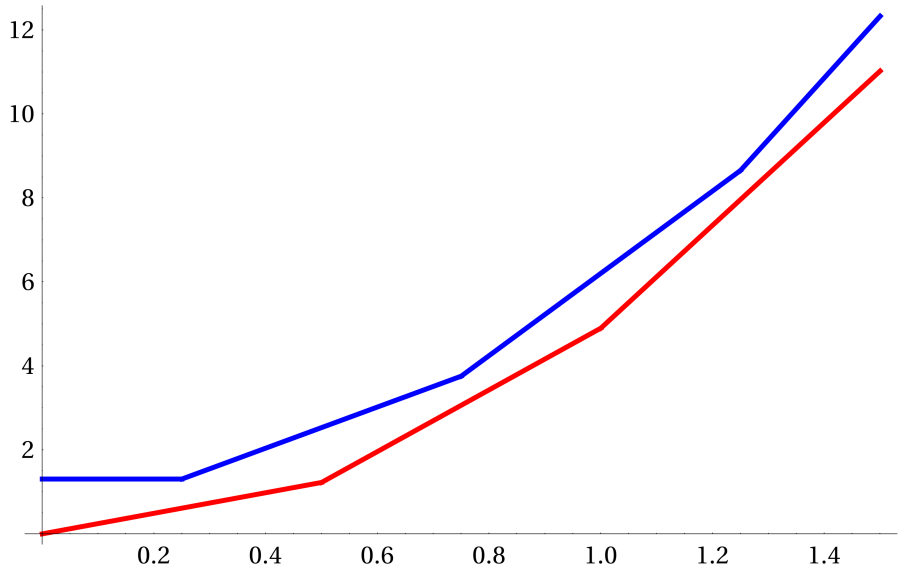


Figura 5.57.: Le leggi orarie dell'estremo superiore (in rosso) e dell'estremo inferiore (in blu) della molla. Sull'asse delle ascisse è riportato il tempo in secondi, sull'asse delle ordinate y in metri. Si è preso $L_0 = 1\,\mathrm{m}$ e $v = 4\,\mathrm{ms}^{-1}$. La discontinuità in $\partial y/\partial x$ passa quindi dall'estremo superiore in $t_m = 2mL_0/v = 0.0\,\mathrm{s}, 0.5\,\mathrm{s}, \cdots$ ed in quello inferiore in $t_m = (2m+1)\,L_0/v = 0.25\,\mathrm{s}, 0.75\,\mathrm{s}, \cdots$.

Calcoliamo infine esplicitamente il moto del centro di massa, limitandoci a $0 < t < L_0/v$. Dato che

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{\mu}{M}\int_0^{L_0} y dx$$

otteniamo

[23]Per vedere l'animazione è necessario Adobe Acrobat.

$$
\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{L_0}\int_0^{vt}\left[y(x,0)+\frac{gL_0}{v^2}(vt-x)\right]dx \\
&+ \frac{1}{L_0}\int_{vt}^{L_0} y(x,0)dx \\
&= \frac{1}{L_0}\int_0^{L_0}\left[x+\frac{gL_0}{2v^2}\left(2x-\frac{x^2}{L_0}\right)\right]dx \\
&+ \frac{g}{v^2}\int_0^{vt}(vt-x)\,dx \\
&= \left(1+\frac{2gL_0}{3v^2}\right)\frac{L_0}{2}+\frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

Questo conferma quanto detto inizialmente. Un calcolo analogo darebbe lo stesso risultato per $t > 0$ qualsiasi. Molto più semplicemente, sappiamo che le masse a sinistra e a destra della discontinuità si muovono con velocità costante. Considerando ad esempio la fase 1 vista precedentemente possiamo scrivere

$$
v_{CM} = \frac{vt}{L_0}\frac{gL_0}{v}(1+2m)+\left(1-\frac{vt}{L_0}\right)\frac{gL_0}{v}2m
$$

da cui

$$
a_{CM} = g
$$

ed analogamente nella fase 2.

Concludiamo osservando che il modello considerato ha delle limitazioni. Se calcoliamo infatti la quantità $\partial y/\partial x$ troviamo, con la notazione usata in precedenza,

$$
\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} 1-\frac{gx}{v^2} & 0 < x < x_D \\ 1+\frac{gL_0}{v^2}\left(1-\frac{x}{L_0}\right) & x_D < x < L_0 \end{cases}
$$

Si vede facilmente che se

$$
\frac{gL_0}{v^2} > 1
$$

in qualche punto della molla si avrà

$$
\frac{\partial y}{\partial x} < 0
$$

Questo significa che y non è una funzione crescente di x: in altre parole durante l'evoluzione una punto della molla può superare quelli successivi. I parametri della animazione 5.56 sono stati scelti in modo che questo non accada, ma con altre scelte il fenomeno avviene (vedere l'animazione 5.58), ed è chiaramente non realistico.

Per risolvere il problema si deve complicare il modello, ad esempio modificando la legge di Hooke imposta nell'Equazione in modo da impedire la compressione. Per un possibile approccio vedere[1]. Un esempio "dal vivo" di un sistema di questo tipo si trova all'indirizzo `http://www.youtube.com/watch?v=uiyMuHuCFo4`.

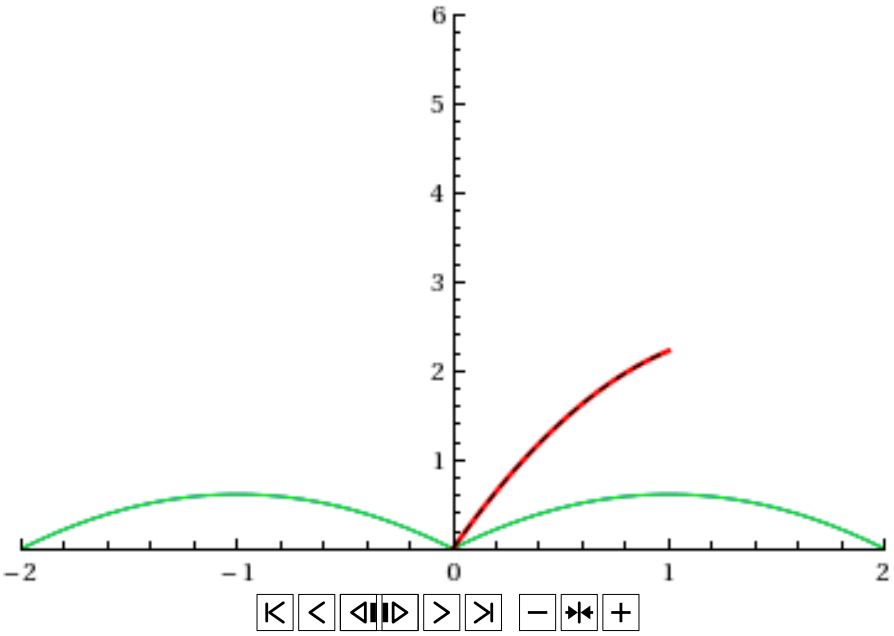


Figura 5.58.: La funzione $y(x,t)$ (in rosso) nell'intervallo $0 < t < 2L_0/v$. Per confronto sono riportate anche le funzioni $A(x-vt)$ (in blu), $B(x+vt)$ (in verde) e $y(x,0)$ (traggeggiata). Si è preso $L_0 = 1\,\mathrm{m}$ e $v = 2\,\mathrm{ms}^{-1}$, quindi $2L_0/v = 1\,\mathrm{s}$. Notare che in questo caso alcuni punti della molla superano i successivi nel corso dell'evoluzione.

Bibliografia

[1] R. C. Cross and M. S. Wheatland, *Modeling a falling slinky.* Am. J. of Phys. 80, 12 (2012), 1051.

5.142. Molecola triangolare ⋆⋆⋆

Un semplice modello di molecola è costituito da tre masse identiche m collegate da tre molle di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0, in modo da formare un triangolo equilatero. Un moto semplice è quello nel quale la molecola ruota su se stessa con velocità angolare ω_0 costante, mentre la lunghezza delle molle non cambia. Studiare le piccole oscillazioni attorno a questa soluzione particolare.

Soluzione

5.143. Pendolo inclinato ⋆⋆

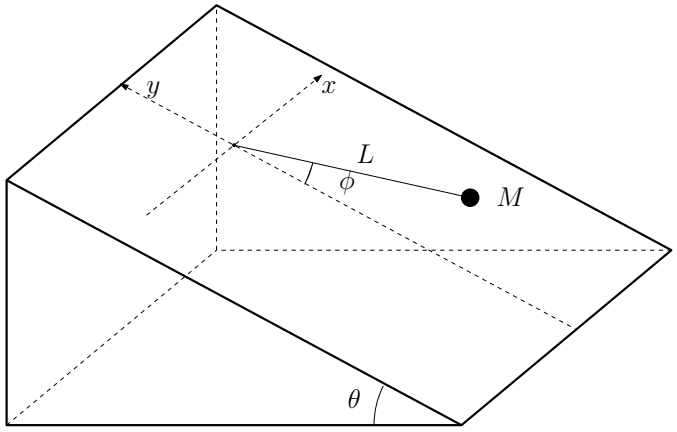


Figura 5.59.: Il pendolo adagiato sul piano inclinato.

Su un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale è fissato un pendolo di massa M e lunghezza L. Inizialmente il pendolo si trova nella posizione di equilibrio e viene lanciato con una velocità iniziale v_0. Tra il piano e la massa M si ha attrito dinamico con coefficiente $\mu_D = 2/\sqrt{3}$. Trovare il valore minimo di v_0 per il quale il pendolo riesce ad effettuare un giro completo.

Soluzione

Usando il sistema di coordinate rappresentato in Figura 5.59 possiamo scrivere

$$y = -L\cos\phi$$

e misurando l'altezza della massa rispetto ad un piano orizzontale passante per l'origine abbiamo

$$h = -L\cos\phi\sin\theta$$

Scriviamo l'energia del pendolo, tenendo conto del potenziale gravitazionale. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 - MgL\sin\theta\cos\phi$$

Il teorema delle forze vive ci dice che la variazione dell'energia totale è uguale al lavoro della forza di attrito. Quest'ultima vale

$$F_a = \mu_D N$$

dove

$$N = Mg\cos\theta$$

è la reazione normale del piano. Applicando in teorema tra la posizione iniziale e una posizione generica del pendolo abbiamo

$$\frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 - MgL\sin\theta\cos\phi - \frac{1}{2}Mv_0^2 + MgL\sin\theta = -L\phi\mu_D Mg\cos\theta$$

dalla quale possiamo dedurre $\dot{\phi}^2$ nella posizione generica

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2g}{L}\sin\theta\cos\phi - \frac{2g}{L}\sin\theta - \frac{2g}{L}\phi\mu_D\cos\theta + \frac{v_0^2}{L^2}$$

Affinchè possa avvenire un giro completo, è necessario che la tensione del filo sia sempre positiva o nulla. Scrivendo l'equazione del moto per la massa nella direzione radiale sul piano inclinato abbiamo

$$-ML\dot{\phi}^2 = -T + Mg\sin\theta\cos\phi$$

da cui

$$T = ML\dot{\phi}^2 + Mg\sin\theta\cos\phi$$

Sostituendo il valore di $\dot{\phi}^2$ trovato precedentemente abbiamo

$$T = 3Mg\sin\theta\cos\phi - 2Mg\sin\theta - 2Mg\phi\mu_D\cos\theta + \frac{Mv_0^2}{L} \geq 0$$

Questo da la condizione

$$3Mg\sin\theta\cos\phi - 2Mg\sin\theta - 2Mg\phi\mu_D\cos\theta + \frac{Mv_0^2}{L} \geq 0$$

Sostituendo esplicitamente i valori di μ_D e θ abbiamo

$$v_0^2 \geq gL\left(1 - \frac{3}{2}\cos\phi + 2\phi\right)$$

Derivando il membro destro vediamo che si tratta di una funzione sempre crescente di ϕ. Il valore massimo su un giro completo è quindi a $\phi = 2\pi$, e troviamo la condizione

$$v_0 \geq \sqrt{gL\left(4\pi - \frac{1}{2}\right)}$$

6. Dinamica del corpo rigido

6.1. Tensore di inerzia di un cubo I ⋆

Determinare il tensore di inerzia di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile. Porre l'origine nel centro di massa del cubo.

Soluzione

Il corpo è simmetrico rispetto a inversioni e permutazioni degli assi coordinati. Da questo segue che gli elementi fuori diagonale sono nulli, e quelli diagonali tutti uguali.

Calcoliamo allora

$$I^{xx} = \sum m(y_i^2 + z_i^2)\,.$$

Tutte le masse sono alla stessa distanza dall'asse z, data da

$$y_i^2 + z_i^2 = \frac{a^2}{2}$$

da cui

$$I^{xx} = I^{yy} = I^{zz} = 8m\frac{a^2}{2} = 4ma^2$$

6.2. Tensore di inerzia di un cubo II ⋆⋆

Determinare il tensore di inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa M. Porre l'origine del sistema di coordinate nel centro di massa.

Soluzione

A causa della simmetria del corpo il tensore di inerzia è diagonale, con elementi diagonali uguali. Possiamo allora calcolare

$$I^{xx} = \int (x^2 + y^2) dm$$

dove l'integrazione è estesa a tutto il corpo. In coordinate cartesiane abbiamo

$$dm = \rho dV = \frac{M}{a^3} dx dy dz$$

e quindi l'integrale diviene

$$I^{xx} = \frac{M}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \, (x^2 + y^2) \, .$$

Integriamo su z

$$I^{xx} = \frac{M}{a^3} a \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \, (x^2 + y^2)$$

quindi su y

$$I^{xx} = \frac{M}{a^3} a \int_{-a/2}^{a/2} dx \, (ax^2 + 2\frac{1}{3}\frac{1}{8}a^3)$$

ed infine su x, ottenendo

$$I^{xx} = I^{yy} = I^{zz} = \frac{1}{6} M a^2 \, .$$

6.3. Tensore di inerzia e rotazioni ⋆⋆⋆

Trovare la legge di trasformazione del tensore di inerzia di un corpo rigido per rotazioni infinitesime del sistema di coordinate. Mostrare che se il corpo rigido è invariante per rotazioni il tensore di inerzia è diagonale.

Soluzione

Il tensore di inerzia si può scrivere nella forma

$$I^{ab} = \int dm \left(r^2 \delta^{ab} - r^a r^b\right).$$

Sappiamo che sotto rotazioni infinitesime possiamo scrivere la legge di trasformazione di un vettore (ad esempio $\vec{r}$) come

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} = \vec{r} + \Gamma \vec{r}$$

dove

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Il tensore trasformerà come il prodotto delle componenti di due vettori, e quindi come

$$I \to (1+\Gamma) I (1+\Gamma)^T = I + \Gamma I - I\Gamma.$$

Se il corpo rigido è invariante deve essere

$$\Gamma I - I\Gamma = 0$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{xx} & I^{xy} & I^{xz} \\ I^{yx} & I^{yy} & I^{yz} \\ I^{zx} & I^{zy} & I^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{xx} & I^{xy} & I^{xz} \\ I^{yx} & I^{yy} & I^{yz} \\ I^{zx} & I^{zy} & I^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolando la componente $1,1$ di ambo i membri abbiamo

$$-\varepsilon_z I^{yx} + \varepsilon_y I^{zx} = \varepsilon_z I^{xy} - \varepsilon_y I^{xz}$$

da cui $I^{yx} = I^{xy} = 0$ e $I^{xz} = I^{zx} = 0$. Dalla componente $2,2$ abbiamo analogamente

$$\varepsilon_z I^{xy} - \varepsilon_x I^{zy} = -\varepsilon_z I^{yx} + \varepsilon_x I^{yz}$$

da cui segue anche $I^{yz} = I^{zy} = 0$. Il tensore di inerzia è dunque diagonale. Considerando la componente $1,2$ abbiamo

$$-\varepsilon_z I^{yy} = -\varepsilon_z I^{xx}$$

e dalla $1,3$

$$\varepsilon_y I^{zz} = \varepsilon_y I^{xx}$$

da cui segue $I^{xx} = I^{yy} = I^{zz}$.

CC BY NC SA

6.4. Tensore di inerzia e traslazioni ⋆⋆⋆

Supponendo noto il tensore di inerzia di un corpo rispetto al suo centro di massa, calcolare quello di un corpo identico traslato di $\vec{a}$.

Soluzione

Le componenti del tensore di inerzia riferito al centro di massa si scrivono nella forma

$$I_{cm}^{ab} = \sum_i m_i \left(r_i^2 \delta^{ab} - r_i^a r_i^b \right) .$$

Con una traslazione definiamo un nuovo sistema di coordinate con origine in $-\vec{a}$

$$\vec{u}_i = \vec{r}_i + \vec{a}$$

e sostituendo abbiamo

$$I_{cm}^{ab} = \sum_i m_i \left[(\vec{u}_i + \vec{a})^2 \delta^{ab} - (u_i^a + a^a) \left(u^b + a^b \right) \right]$$

ossia

$$I_{cm}^{ab} = \sum_i m_i \left[\left(u_i^2 + a^2 - 2\vec{u}_i \cdot \vec{a} \right) \delta^{ab} - \left(u_i^a u_i^b + a^a a^b - u_i^a a^b - a^a u_i^b \right) \right] .$$

Separando i diversi termini abbiamo

$$\begin{aligned} I_{cm}^{ab} &= \sum_i m_i \left[u_i^2 \delta^{ab} - u_i^a u_i^b \right] \\ &- \left[2\delta^{ab} \vec{a} \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i - \left(a^b \sum_i m_i u_i^a + a^a \sum_i m_i u_i^b \right) \right] \\ &+ \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] \sum_i m_i \end{aligned}$$

e tenendo conto che

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{u}_i &= \vec{u}_{CM} = \vec{a} \\ \sum_i m_i &= M \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} I_{cm}^{ab} &= \sum_i m_i \left[u_i^2 \delta^{ab} - u_i^a u_i^b \right] \\ &- 2M \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] \\ &+ M \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] . \end{aligned}$$

Riassumendo abbiamo

$$I^{ab} = I_{cm}^{ab} + M \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] .$$

CC BY NC SA

6.5. Teorema di Steiner ⋆⋆

Dimostrare, utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, il risultato che segue. Sia I_{cm} il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse $\hat{n}$ passante per il suo centro di massa.

Il momento di inerzia dello stesso corpo rispetto ad un asse ad esso parallelo a distanza a dal centro di massa è dato da

$$I_a = I_{cm} + Ma^2 \,.$$

Soluzione

Dal problema precedente abbiamo per una traslazione qualsiasi

$$I_a^{ij} = I_{cm}^{ij} + M\left(a^2\delta^{ij} - a^i a^j\right) \,.$$

Calcolando il momento di inerzia rispetto all'asse identificato dal versore $\hat{n}$ abbiamo

$$I_a^{ij} n^i n^j = I_{cm}^{ij} n^i n^j + M\left(a^2\delta^{ij} - a^i a^j\right) n^i n^j$$

ossia

$$I_a = I_{cm} + M\left(a^2 - \vec{a}\cdot\hat{n}\,\vec{a}\cdot\hat{n}\right)$$

ma scegliendo la traslazione ortogonale a $\hat{n}$ abbiamo $\vec{a}\cdot\hat{n}$, che è il risultato cercato.

6.6. Cilindro su un piano inclinato

Un cilindro ruota senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α. Calcolare l'accelerazione del suo centro di massa.

Soluzione

Possiamo scrivere l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgs\,\sin\alpha$$

dove s è una coordinata presa lungo il piano e I il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse. Dalla condizione di puro rotolamento $R\dot{\theta} = -\dot{s}$ abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{s}^2 - Mgs\,\sin\alpha$$

e derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{s}\ddot{s} - Mg\dot{s}\,\sin\alpha = 0$$

abbiamo le equazioni del moto

$$\ddot{s} = \frac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{I}{R^2}}$$

che forniscono direttamente l'accelerazione.

6.7. Moto su un cono in presenza di gravità ⋆⋆⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi su un cono di ampiezza 2α posto con l'asse verticale e il vertice verso il basso. Discutere le possibili traiettorie.

Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche con l'origine nel vertice del cono. L'energia del sistema sarà in coordinate cilindriche

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(1+\tan^2\alpha\right)\dot{z}^2 + z^2\tan^2\alpha\dot{\phi}^2\right] + mgz$$

dove si è tenuto conto del fatto che ρ e z sono legati da

$$\rho = z\,\tan\alpha$$

La posizione del punto materiale è determinato da

$$\vec{r} = z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho$$

e le forze ad esso applicate valgono

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_z + N\left(-\cos\alpha\hat{e}_\rho + \sin\alpha\hat{e}_z\right)$$

dove il primo termina è la forza peso e il secondo la reazione normale alla superficie. Quindi il momento non ha componenti lungo $\hat{e}_z$

$$\begin{aligned}\hat{e}_z\cdot\vec{M} &= \hat{e}_z\cdot\left(\vec{r}\wedge\vec{F}\right) = \hat{e}_z\cdot\left[\left(z\hat{e}_z+\rho\hat{e}_\rho\right)\wedge\left(-mg\hat{e}_z + N\sin\alpha\hat{e}_z - N\cos\alpha\hat{e}_\rho\right)\right]\\ &= \hat{e}_z\cdot\left[-Nz\cos\alpha\hat{e}_z\wedge\hat{e}_\rho + \rho\left(-mg+N\sin\alpha\right)\hat{e}_\rho\wedge\hat{e}_z\right] \propto \hat{e}_z\cdot\left(\hat{e}_\rho\wedge\hat{e}_z\right) = 0\end{aligned}$$

Quindi la componente z del momento angolare si conserva, e possiamo scrivere

$$L_z = m\rho^2\dot{\phi}$$

Eliminando $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$ nell'energia otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\left(1+\tan^2\alpha\right)\dot{z}^2 + \frac{L_z^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

Il potenziale effettivo ha un minimo in

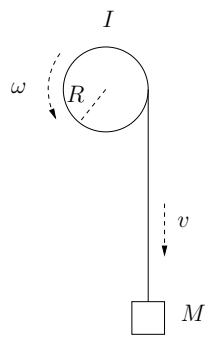
$$z = \left(\frac{L_z^2}{gm^2\tan^2\alpha}\right)^{1/3}$$

che corrisponde ad un'orbita circolare. Dato che $\lim_{z\to 0}U_{eff} = +\infty$ e $\lim_{z\to+\infty}U_{eff} = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Il caso $L_z = 0$ è speciale, il potenziale efficace si riduce a mgz e le orbite si riducono a cadute nel centro del tipo

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0\\ z &= z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}\frac{g}{1+\tan^2\alpha}t^2\end{aligned}$$

CC BY NC SA

6.8. Carrucola ⋆⋆



La carrucola in figura è un cilindro libero di ruotare attorno al suo asse. Attorno ad essa è avvolto un filo inestensibile al cui estremo è fissata una massa M. Determinare l'accelerazione della massa e la tensione del filo.

Soluzione

Detto I il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse abbiamo

$$I\frac{d\omega}{dt} = -TR$$

dove T è la tensione del filo e ω la velocità angolare del cilindro. Per quanto riguarda la massa abbiamo

$$M\frac{dv}{dt} = Mg - T\,.$$

La velocità della massa e ω sono legate da $v = -R\omega$ e otteniamo infine

$$\begin{aligned} \frac{I}{R^2}a &= T \\ Ma &= Mg - T \end{aligned}$$

da cui

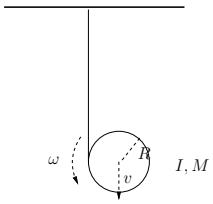
$$a = \frac{MR^2 g}{MR^2 + I}$$

e

$$T = \frac{I}{MR^2 + I}Mg\,.$$

CC BY NC SA

6.9. JoJo ⋆⋆



Calcolate l'accelerazione del cilindro in figura, attorno al quale è avvolto un filo inestensibile e privo di massa che si srotola durante la caduta.

Soluzione

Scriviamo le equazioni cardinali. Per il moto verticale del centro di massa abbiamo

$$M\ddot{y} = -Mg + T$$

e per la rotazione

$$I\ddot{\theta} = -TR$$

dove I è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo centro di massa, $I = MR^2/2$. La condizione di rotolamento puro sul filo da

$$R\ddot{\theta} = \ddot{y}$$

da cui

$$T = -\frac{I}{R^2}\ddot{y}$$

e sostituendo nella prima equazione si trova

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} = -Mg$$

da cui

$$\ddot{y} = -\frac{MR^2}{I + MR^2}g = -\frac{2}{3}g \tag{6.9.1}$$

6.10. Campo di velocità di un corpo rigido ⋆⋆

Un cilindro di raggio R appoggiato su un piano ruota attorno al suo asse e trasla. Detta $\vec{V} = V\hat{e}_x$ la velocità del centro di massa e $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ la velocità angolare ad un dato istante, determinare il campo di velocità del corpo, ossia la velocità $\vec{v}$ di un punto qualsiasi del cilindro. In quali punti del cilindro la velocità è massima e minima in modulo?

Soluzione

Possiamo scrivere in forma vettoriale

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{cm}) + \vec{v}_{cm}$$

L'asse z è lungo l'asse del cilindro e quello x nella direzione del moto del centro di massa. Scriviamo esplicitamente le componenti della velocità ad un dato istante:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x - x_{cm} & y - y_{cm} & z - z_{cm} \end{vmatrix} + V\hat{e}_x$$

da cui

$$\begin{aligned} v_x &= V - \omega(y - y_{cm}) \\ v_y &= \omega(x - x_{cm}) \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo il modulo quadro della velocità,

$$v^2 = V^2 + \omega^2(y - y_{cm})^2 + \omega^2(x - x_{cm})^2 - 2\omega V(y - y_{cm})$$

e determiniamone eventuali massimi e minimi rispetto a x, y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^2}{\partial x} &= 2\omega^2(x - x_{cm}) = 0 \\ \frac{\partial v^2}{\partial y} &= 2\omega^2(y - y_{cm}) - 2\omega V = 0 \end{aligned}$$

Troviamo una unica soluzione che corrisponde a

$$\begin{aligned} x &= x_{cm} \\ y &= y_{cm} + \frac{V}{\omega} \end{aligned}$$

e quindi a $v^2 = 0$. Se $|V/\omega| \leq R$ il punto precedente è all'interno del cilindro, ed è chiaramente il minimo assoluto del modulo della velocità. Altri eventuali punti stazionari potranno aversi sul bordo. Parametrizzando quest'ultimo:

$$\begin{aligned} x - x_{cm} &= R\cos\theta \\ y - y_{cm} &= R\sin\theta \end{aligned}$$

CC BY NC SA

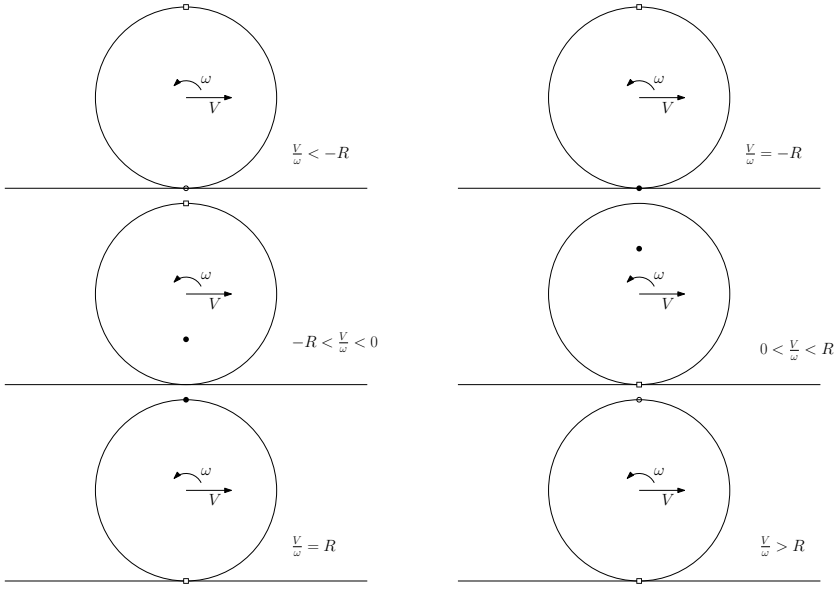


Figura 6.1.: Il cerchietto corrisponde al punto di minima velocità in modulo, il quadrato al punto di massima velocità in modulo. Quando il cerchietto è annerito il punto è istantaneamente in quiete. Il caso $V = -\omega R$ corrisponde a puro rotolamento.

abbiamo

$$v^2 = V^2 + \omega^2 R^2 - 2\omega V R \sin\theta$$

e quindi

$$\frac{\partial v^2}{\partial \theta} = -2\omega V R \cos\theta$$

cioè

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} \\ v^2 &= (V - \omega R)^2 \\ x - x_{cm} &= 0 \\ y - y_{cm} &= R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{3\pi}{2} \\ v^2 &= (V + \omega R)^2 \\ x - x_{cm} &= 0 \\ y - y_{cm} &= -R \end{aligned}$$

Riassumiamo i possibili casi in Figura 6.1.

6.11. Tensore di inerzia di un parallelepipedo ⋆⋆

Calcolare il tensore di inerzia di un parallelepipedo di lati a, b e c e massa totale M distribuita omogeneamente, in un sistema di riferimento opportunamente scelto.

Soluzione

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel centro di massa e gli assi $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ paralleli ai lati di lunghezza a, b e c rispettivamente, abbiamo che il tensore di inerzia è diagonale. Infatti la distribuzione di massa è invariante rispetto alla riflessione $x \to -x$, mentre I_{xy} e I_{xz} cambiamo segno, per cui deve essere $I_{xy} = 0$ e $I_{xz} = 0$. Ragionando allo stesso modo per la riflessione $y \to -y$ si conclude che deve essere anche $I_{yz} = 0$.

Calcoliamo adesso esplicitamente I_{zz}:

$$I_{zz} = \int dm\,(x^2 + y^2)$$

ossia

$$I_{zz} = \int \rho\, dV\,(x^2 + y^2)\,.$$

Utilizzando coordinate cartesiane e $\rho = M/V = M/(abc)$ abbiamo

$$I_{zz} = \frac{M}{abc} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2)\,.$$

L'integrale in z è immediato:

$$I_{zz} = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy (x^2 + y^2)$$

e quello in y da

$$I_{zz} = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx (x^2 b + \frac{1}{12} b^3)$$

infine

$$I_{zz} = \frac{M}{ab} (\frac{1}{12} a^3 b + \frac{1}{12} a b^3) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)\,.$$

Il risultato per I_{yy} e I_{xx} si ottiene immediatamente sostituendo a e b con le lunghezze dei lati perpendicolari all'asse considerato:

$$I_{xx} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_{yy} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)\,.$$

6.12. Tensore di inerzia di una lamina rettangolare ⋆⋆

Utilizzando il risultato del problema precedente calcolare il tensore di inerzia di una lamina rettangolare (spessore trascurabile) di lati a e b e massa M.

Soluzione

Consideriamo prima di tutto I_{zz}. La sua espressione

$$I_{zz} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

non dipende dallo spessore c, per cui resta invariata. Per I_{xx} abbiamo

$$I_{xx} = \lim_{c \to 0} \frac{M}{12}(b^2 + c^2) = \frac{M}{12} b^2$$

e analogamente

$$I_{yy} = \lim_{c \to 0} \frac{M}{12}(a^2 + c^2) = \frac{M}{12} a^2 \,.$$

Notare che $I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$.

CC BY NC SA

6.13. Tensore di inerzia di una lamina ⋆⋆

Mostrare che un asse principale di inerzia di una lamina è perpendicolare ad essa. Scegliendo l'asse z lungo tale direzione mostrare che vale sempre

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}\,.$$

Soluzione

Se scegliamo la direzione z perpendicolare alla lamina e l'origine su di essa per tutti i punti sarà ovviamente $z = 0$. Da questo segue che il tensore di inerzia avrà la struttura

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Ma se scriviamo esplicitamente gli elementi diagonali

$$I_{xx} = \int dm\, y^2$$

$$I_{yy} = \int dm\, x^2$$

$$I_{zz} = \int dm\, (x^2 + y^2)$$

concludiamo immediatamente che $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$.

CC BY NC SA

6.14. Disuguaglianze tra elementi del tensore di inerzia ⋆⋆

Mostrare che per qualsiasi corpo si ha

$$I_{xx} I_{yy} \geq I_{xy}^2 \,.$$

Soluzione

Il tensore di inerzia è semidefinito positivo, perchè i suoi autovalori (momenti principali di inerzia) non possono essere negativi. Ma allora i determinanti di tutti i suoi minori principali sono ≥ 0, in particolare scegliendo la prima e la seconda riga abbiamo

$$I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 \geq 0$$

che è quanto richiesto.

6.15. Tensore di inerzia di una distribuzione lineare di massa ⋆⋆

Mostrare che il determinante di un tensore di inerzia è zero se e solo se la massa è distribuita su una retta passante per l'origine.

Soluzione

Dimostriamo la sufficienza. Dato che il determinante è invariante per rotazioni del sistema di coordinate, possiamo scegliere senza perdere di generalità una distribuzione di massa lungo l'asse z. Il tensore di inerzia è allora diagonale, perchè per tutti i punto $x = 0$ e $y = 0$ e quindi tutti i prodotti del tipo xy, xz e yz sono nulli. Inoltre

$$I_{zz} = \int dm\,(x^2 + y^2) = 0$$

da cui segue subito che il determinante è nullo.

Dimostriamo ora la necessità. Per quanto detto in precedenza possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento nel quale il tensore è diagonale. Se il determinante è nullo allora almeno uno di I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} deve esserlo. Supponiamo ad esempio che sia $I_{zz} = 0$, allora per tutti i punti dovrà essere $x = 0$ e $y = 0$ e la massa sarà distribuita sull'asse z. Analogamente negli altri due casi.

CC BY NC SA

6.16. Cilindro lanciato su un piano ⋆⋆

Un cilindro viene lanciato su un piano con coefficienti di attrito μ_s e μ_d. Il cilindro ha raggio R, e la massa al suo interno è distribuita con una densità dipendente solo dalla distanza dall'asse. Inizialmente il moto è di pura traslazione. Calcolare in funzione del tempo la velocità del centro di massa e quella angolare. Per quale distribuzione di massa la velocità finale è minima?

Soluzione

Inizialmente si ha una forza di attrito $\mu_d Mg$, e le equazioni del moto saranno

$$\begin{aligned} M\dot{v} &= -\mu_d Mg \\ I\dot{\omega} &= \mu_d MgR \end{aligned}$$

per cui la velocità diminuirà linearmente in funzione del tempo e la velocità angolare aumenterà, sempre linearmente. Mettendo le opportune condizioni iniziali abbiamo

$$\begin{aligned} v &= v_0 - \mu_d gt \\ \omega &= \mu_d \frac{MgR}{I} t\,. \end{aligned}$$

Queste relazioni saranno valide fino a quando non si arriverà, a $t = t^\star$, ad una condizione di rotolamento puro, definita da $v = \omega R$, cioè

$$v_0 - \mu_d gt = \mu_d \frac{MgR^2}{I} t$$

da cui si trova

$$t^* = \frac{v_0}{\mu_d g} \frac{1}{1 + \frac{MR^2}{I}}\,.$$

Da questo momento in poi le velocità rimarranno costanti:

$$v = \omega R = \frac{\frac{MR^2}{I}}{1 + \frac{MR^2}{I}} v_0\,.$$

Per minimizzare la velocità finale dovremo rendere minimo il rapporto MR^2/I. Il valore massimo di I si ottiene se tutta la massa è distribuita sulla superficie laterale, in questo caso $I = MR^2$ e

$$v = \omega R = \frac{1}{2} v_0\,.$$

Per un cilindro omogeneo $I = MR^2/2$ e

$$v = \omega R = \frac{2}{3} v_0\,.$$

Infine, se tutta la massa è concentrata sull'asse $I = 0$ e $v = \omega R = v_0$. L'interpretazione di questo caso limite è che in assenza di inerzia angolare il cilindro si mette immediatamente a ruotare senza strisciare, come si può verificare dalla formula per $t^\star$.

6.17. Sbarra su rulli rotanti ⋆⋆

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa m è appoggiata su due rulli di raggio ρ che ruotano con velocità angolare costante $-\omega_0$ e ω_0 attorno al loro asse, come in figura. La distanza tra i rulli è $2a < \ell$ e tra essi e la sbarra c'è attrito, descritto da coefficienti μ_s e μ_d (gli stessi per entrambi i rulli). Supponendo la velocità della sbarra piccola in modulo rispetto a $|\rho\omega_0|$ Scrivere l'equazione del moto per il movimento orizzontale della sbarra e studiare la possibilità di soluzioni oscillatorie.

Soluzione

Scriviamo anzitutto le equazioni del moto. L'accelerazione verticale della sbarra è nulla, quindi

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

dove N_1 e N_2 sono le reazioni normali dei cilindri. Inoltre la sbarra non ruota, e quindi il momento totale applicato ad essa deve essere nullo. Calcolando i momenti rispetto al centro di massa della sbarra abbiamo

$$-N_1 (a + x) + N_2 (a - x) = 0$$

dove x è lo spostamento del centro di massa della sbarra rispetto al punto intermedio tra i due contatti. Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ N_2 &= \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{x}{a}\right) . \end{aligned}$$

Scriviamo adesso l'equazione per il moto orizzontale della sbarra. Tenendo conto che la velocità della sbarra non supera mai in modulo quella del rullo al punto di contatto possiamo scrivere per $\omega_0 > 0$

$$m\ddot{x} = \mu_d (N_1 - N_2) = -\frac{\mu_d mg}{a} x$$

che descrive una oscillazione armonica di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu_d g}} .$$

Nel caso $\omega_0 < 0$ abbiamo invece

$$m\ddot{x} = -\mu_d (N_1 - N_2) = \frac{\mu_d mg}{a} x$$

che descrive una soluzione del tipo

$$x = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu_d g}{a}}\,.$$

6.18. Tensore di inerzia di una sfera ⋆⋆

Calcolare il tensore di inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio R, riferita al suo centro di massa.

Soluzione

La disribuzione di massa è invariante per rotazioni, quindi il tensore di inerzia deve essere diagonale e con tutti gli elementi diagonali uguali. Possiamo quindi calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi, ad esempio quello z. Abbiamo quindi

$$I_{zz} = \int dm\,(x^2 + y^2) = \frac{M}{V}\int dV\,(x^2 + y^2)\,.$$

Conviene calcolare l'integrale in coordinate sferiche, per le quali

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ dV &= r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

da cui

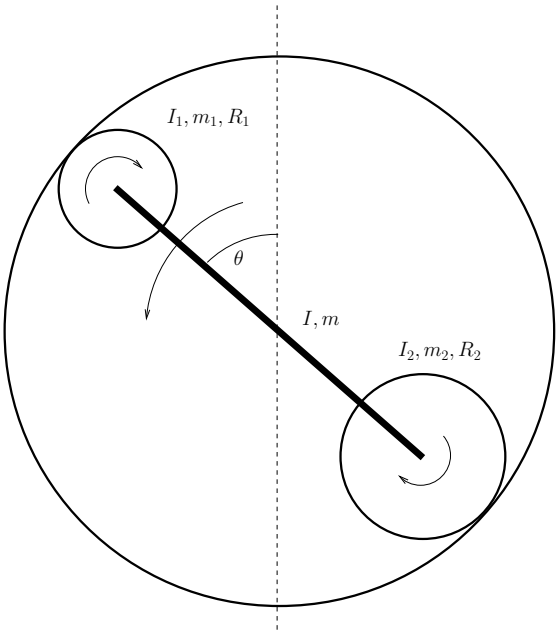
$$I_{zz} = \frac{M}{V}\int_0^R dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\, r^4\sin^2\theta$$

ossia

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}2\pi\int_0^R dr\int_{-1}^1 d\cos\theta\, r^2\left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}2\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)\int_0^R dr\, r^4 \\ &= \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\frac{8\pi}{3}\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}MR^2. \end{aligned}$$

6.19. Energia di un sistema di corpi rigidi ⋆⋆

Calcolare l'energia cinetica del sistema di corpi rigidi in figura, esprimendola in funzione della coordinata θ e assumendo condizioni di puro rotolamento tra tutti i corpi in contatto. I due cilindri hanno massa m_1, m_2, momento di inerzia rispetto al loro asse I_1, I_2 e raggio R_1, R_2. Il cilindro più esterno è immobile e ha raggio $R > R_1 + R_2$. L'asta ha massa m e momento di inerzia I rispetto all'asse passante per il suo centro di massa. Tutte le distribuzioni di massa sono omogenee.



Soluzione

Date le condizioni di rotolamento puro, il sistema ha un unico grado di libertà. Utilizzeremo come coordinata per descriverlo l'angolo θ in figura. Per scrivere l'energia cinetica, sommiamo i contributi dei diversi corpi rigidi presenti.

Per quanto riguarda l'asta, osserviamo che essa ruota attorno al punto posto al centro del cilindro grande con velocità angolare $\dot{\theta}$. Possiamo scrivere quindi

$$K_{asta} = \frac{1}{2} I_{asta} \dot{\theta}^2 \tag{6.19.1}$$

dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il punto fisso

$$I_{asta} = \frac{m}{\ell_1 + \ell_2} \int_{-\ell_1}^{\ell_2} r^2 dr = \frac{1}{3} \frac{m}{\ell_1 + \ell_2} \left(\ell_2^3 + \ell_1^3\right) = \frac{m}{3} \left(\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_1 \ell_2\right) \tag{6.19.2}$$

dove $\ell_1 = R - R_1$ e $\ell_2 = R - R_2$ sono le lunghezze dei due segmenti dell'asta con un estremo nel centro di rotazione.

Possiamo considerare il moto dei due cilindri come una pura rotazione attorno al punto di contatto. Quindi serve calcolare le velocità angolari. Osserviamo che il centro del primo cilindro si muove con velocità

$$v_1 = \ell_1 \dot{\theta} \tag{6.19.3}$$

ma d'altra parte deve essere anche

$$v_1 = -\omega_1 R_1 \tag{6.19.4}$$

ed eguagliando le due espressioni si ottiene

$$\omega_1 = -\frac{\ell_1}{R_1}\dot{\theta} = -\frac{R - R_1}{R_1}\dot{\theta} \tag{6.19.5}$$

Ragionando nello stesso modo per il secondo cilindro si trova

$$\omega_2 = -\frac{\ell_2}{R_2}\dot{\theta} = -\frac{R - R_2}{R_2}\dot{\theta} \tag{6.19.6}$$

Mettendo insieme tutti i termini otteniamo infine

$$K = \frac{1}{2} I_{asta}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1 R_1^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(I_2 + m_2 R_2^2\right)\omega_2^2 \tag{6.19.7}$$

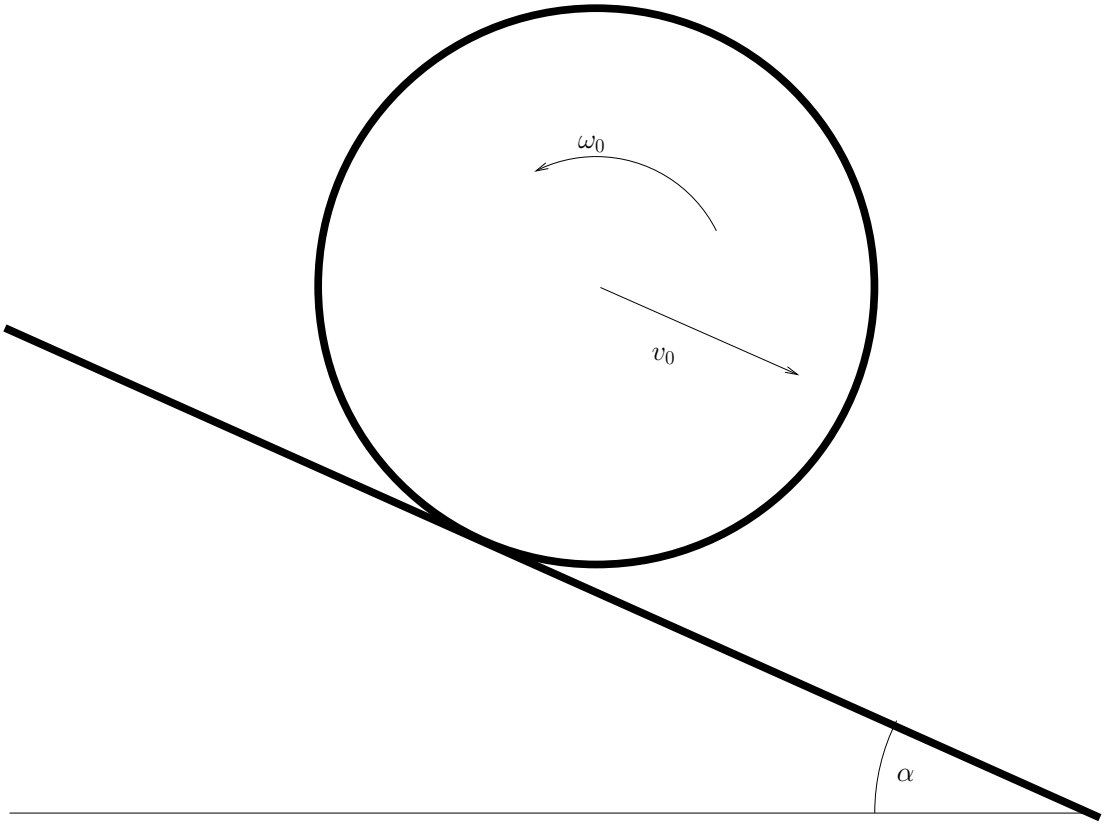
dove

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} m_{1,2} R_{1,2}^2 \,. \tag{6.19.8}$$

CC BY NC SA

6.20. Cilindro su piano inclinato ⋆⋆

Il cilindro in figura viene lasciato cadere sul piano inclinato in figura con velocità iniziale v_0 e velocità angolare iniziale ω_0. Tra piano e cilindro si ha attrito con coefficienti statici e dinamici μ_s, μ_d. Determinare in quali condizioni dopo un tempo sufficiente il cilindro mantiene un moto di puro rotolamento.



Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto per il cilindro. Per l'accelerazione in direzione parallela al piano abbiamo

$$M\dot{v} = F_a + Mg\sin\alpha$$

e in direzione perpendicolare

$$0 = N - Mg\cos\alpha$$

La seconda equazione cardinale da invece

$$I\dot{\omega} = RF_a$$

Per la forza di attrito si devono distinguere tre casi, a seconda che la velocità del cilindro al punto di contatto sia positiva, negativa o nulla. Questa si scrive anzitutto

$$v_c = v + R\omega$$

e quindi avremo

$$M\dot{v} = -\mu_d N + Mg\sin\alpha \tag{6.20.1}$$
$$I\dot{\omega} = -\mu_d N R \tag{6.20.2}$$

per $v_c > 0$,

$$M\dot{v} = F_s + Mg\sin\alpha \tag{6.20.3}$$
$$I\dot{\omega} = F_s R \tag{6.20.4}$$

per $v_c = 0$ (con $|F_s| < \mu_s N$) e

$$M\dot{v} = \mu_d N + Mg\sin\alpha \tag{6.20.5}$$
$$I\dot{\omega} = \mu_d N R \tag{6.20.6}$$

per $v_c < 0$. In ciascun caso $N = Mg\cos\alpha$. Combinando le equazioni precedenti possiamo scrivere delle equazioni per v_c:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_c &= -\mu_d a + g\sin\alpha \quad v_c > 0 \\
\dot{v}_c &= \frac{F_s}{N} a + g\sin\alpha \quad v_c = 0 \\
\dot{v}_c &= \mu_d a + g\sin\alpha \quad v_c < 0
\end{aligned}$$

dove

$$a = N\left(\frac{1}{M} + \frac{R^2}{I}\right) = 3g\cos\alpha \tag{6.20.7}$$

Abbiamo diversi possibili scenari, riassunti in Figura 6.2.

Se $\mu_d > \frac{1}{3}\tan\alpha$ la velocità del punto di contatto diminuisce (linearmente nel tempo) se positiva, e aumenta (sempre linearmente) se negativa. Questo significa che in un tempo finito avremo $v_c = 0$, indipendentemente dalle condizioni iniziali. Per consistenza dovrà essere $\dot{v}_c = 0$, cioè

$$|F_s| = \frac{N}{3}\tan\alpha < \mu_s N$$

che è assicurato dato che $\mu_s > \mu_d$.

Se $\mu_d = \frac{1}{3}\tan\alpha$ una velocità del punto di contatto inizialmente positiva rimane costante, quindi non si arriva a rotolamento puro se $v_0 + \omega_0 R > 0$. Invece se la velocità del punto di contatto è inizialmente negativa, cresce linearmente e si arriva a rotolamento puro in un tempo finito.

Infine se $\mu_d < \frac{1}{3}\tan\alpha$ la velocità del punto di contatto cresce comunque linearmente nel tempo. Quindi se $v_0 + \omega_0 R > 0$ non si arriverà mai a rotolamento puro. Se $v_0 + \omega_0 R \leq 0$ invece si arriverà in un tempo finito ad esso, e la condizione perchè questo continui si scrive ancora

$$\mu_s > \frac{1}{3}\tan\alpha$$

ma non è automaticamente assicurata da $\mu_s > \mu_d$. Se $\mu_s < \frac{1}{3}\tan\alpha$ la velocità del punto di contatto continuerà ad aumentare.

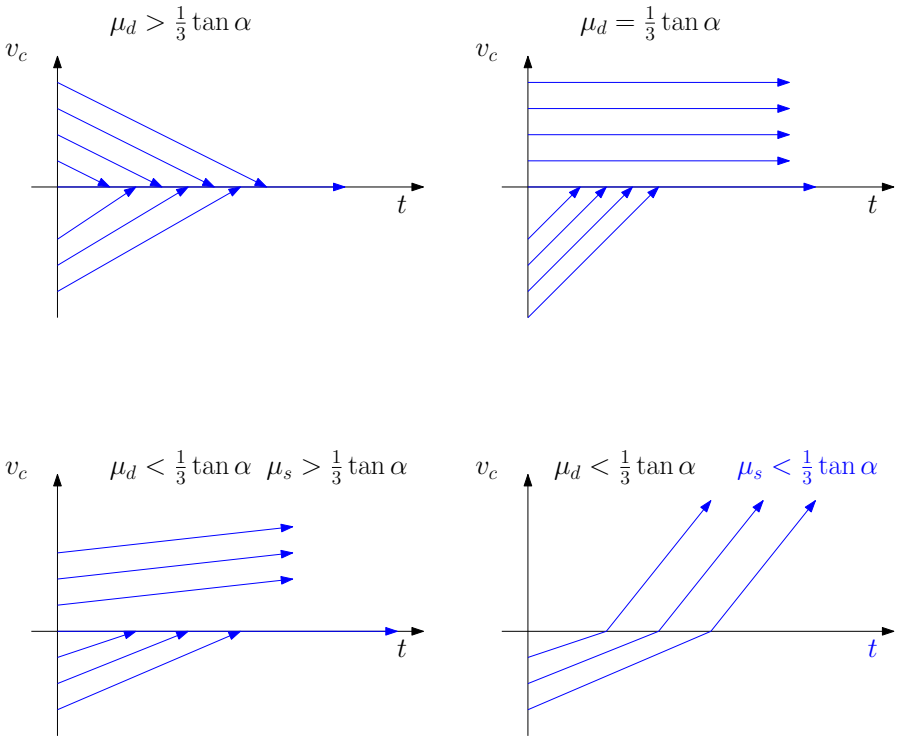
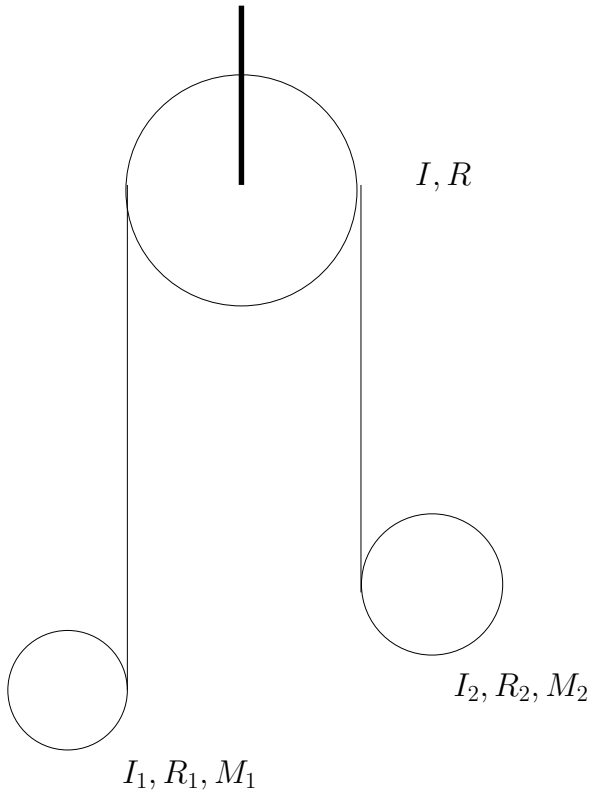


Figura 6.2.: Evoluzione della velocità del punto di contatto tra cilindro e piano, per diversi possibili valori di μ_d, μ_s e delle condizioni iniziali.

6.21. Sistema di carrucole e corpi rigidi ⋆⋆



Nel sistema in figura il filo inestensibile e privo di massa è avvolto ai due cilindri appesi e resta aderente alla carrucola. Scrivere le equazioni che determinano le accelerazioni angolari e lineari dei tre corpi rigidi, e la tensione del filo. I momenti di inerzia sono dati rispetto ad un asse passante per il centro di massa dei cilindri. Cosa succede alla tensione se $I \to 0$?

Soluzione

Scriviamo l'equazione del moto per la carrucola, indicando con T_1 e T_2 le tensioni del filo dal lato della massa M_1 e di quella M_2

$$I\ddot{\theta} = R\,(T_1 - T_2) \tag{6.21.1}$$

Analogamente per la massa a destra

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &= R_1 T_1 \\ M_1\ddot{y}_1 &= T_1 - M_1 g \end{aligned}$$

e per quella a sinistra

$$\begin{aligned} I_2\ddot{\theta}_2 &= -R_2 T_2 \\ M_2\ddot{y}_2 &= T_2 - M_2 g \end{aligned}$$

dove y_1 e y_2 sono le posizioni verticali dei loro centri di massa. Dato che il filo è inestensibile, e resta aderente alla carrucola, deve essere

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -R\ddot{\theta} - R_1\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{y}_2 &= R\ddot{\theta} + R_2\ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

ed abbiamo un numero sufficiente di equazioni per ricavare le quantità incognite. Ponendo $I_1 = m_1R_1^2/2$ e $I_2 = m_2R_2^2/2$ troviamo

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{gR\left(M_1 - M_2\right)}{3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2} \\ \ddot{\theta}_1 &= \frac{2g\left(3I + 2M_2R^2\right)}{3\left[3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2\right]R_1} \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{2g\left(3I + 2M_1R^2\right)}{3\left[3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2\right]R_2} \\ \ddot{y}_1 &= \frac{g\left[6I + \left(3M_1 + M_2\right)R^2\right]}{3\left[3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2\right]} \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{g\left[6I + \left(M_1 + 3M_2\right)R^2\right]}{3\left[3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2\right]} \\ T_1 &= \frac{gM_1\left(3I + 2M_2R^2\right)}{3\left[3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2\right]} \\ T_2 &= \frac{gM_2\left(3I + 2M_1R^2\right)}{3\left[3I + \left(M_1 + M_2\right)R^2\right]} \end{aligned}$$

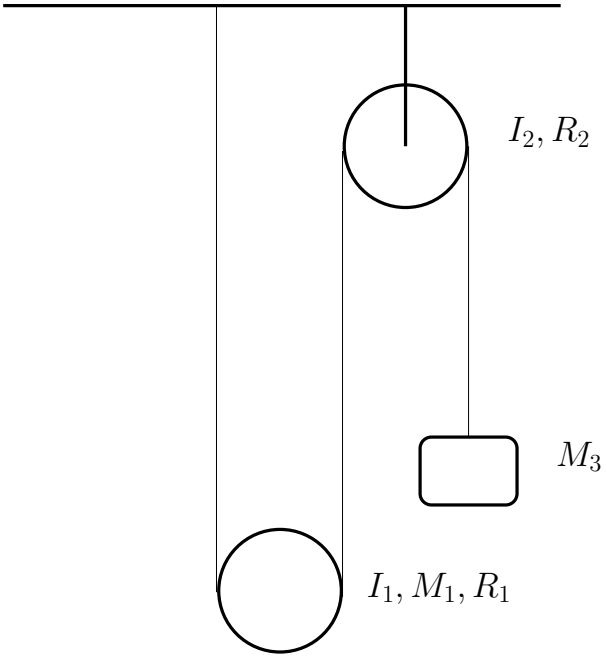
Nel caso $I \to 0$ si trova

$$T_1 = T_2 = \frac{2gM_1M_2}{3\left(M_1 + M_2\right)}$$

L'uguaglianza tra le due tensioni era evidente già considerando l'equazione (6.21.1).

6.22. Sistema di carrucole ⋆⋆

Scrivere le equazioni che determinano accelerazioni e tensioni dei fili per il sistema in figura, sapendo che il filo inestensibile e privo di massa non slitta sui cilindri.



Soluzione

Usando le convenzioni in Figura 6.3 scriviamo le equazioni del moto per il primo cilindro

$$\begin{aligned} M_1\ddot{y}_1 &= T_1 + T_2 - M_1 g \\ I_1\ddot{\theta}_1 &= R_1 (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

per la carrucola

$$I_2\ddot{\theta}_2 = R_2 (T_2 - T_3)$$

e per la massa sospesa

$$M_3\ddot{y}_3 = T_3 - M_3 g$$

Dato che il filo rimane aderente ai cilindri, ed è inestensibile, abbiamo inoltre le condizioni che seguono:

1. Il punto A del cilindro rimane istantaneamente fermo,

$$\dot{y}_1 - R_1\dot{\theta}_1 = 0$$

2. Il punto B del cilindro ha la stessa velocità del punto C della carrucola

$$\dot{y}_1 + R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2$$

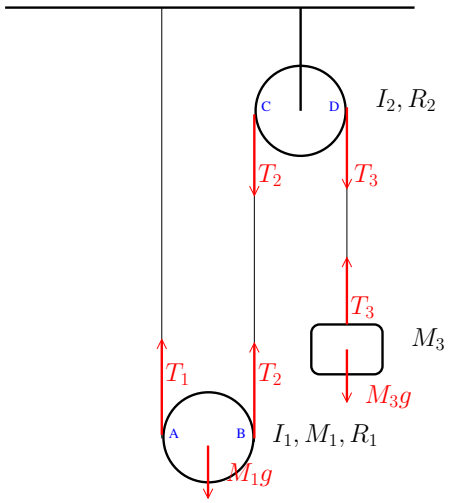


Figura 6.3.: Forze applicate al sistema per il problema 6.22.

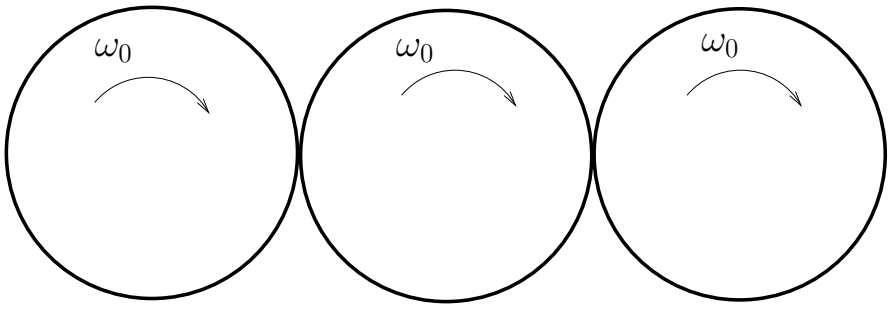
3. Il punto D della carrucola ha la stessa velocità della massa sospesa

$$R_2\dot{\theta}_2 = \dot{y}_3$$

Derivando queste condizioni rispetto al tempo otteniamo dei vincoli tra le accelerazioni. Abbiamo quindi un numero sufficiente di equazioni per determinare $\ddot{y}_1$, $\ddot{y}_3$, $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, T_1, T_2, T_3.

6.23. Contatto tra corpi rigidi ⋆⋆

I tre cilindri identici (momento di inerzia I) in figura inizialmente ruotano liberamente attorno al proprio asse con la stessa velocità angolare ω_0. Vengono quindi posti in contatto, e se le superfici hanno velocità relativa diversa da zero nei punti di contatto si sviluppano delle forze di attrito. Calcolare le velocità angolari finali.



Soluzione

Possiamo scrivere le equazioni del moto dei tre cilindri nella forma

$$I\dot{\omega}_1 = Rf_1 \tag{6.23.1}$$
$$I\dot{\omega}_2 = Rf_1 + Rf_2 \tag{6.23.2}$$
$$I\dot{\omega}_3 = Rf_2 \tag{6.23.3}$$

dove f_1 e f_2 sono forze (incognite) che rappresentano l'attrito tra un cilindro e l'altro. Da questo segue immediatamente

$$I\left(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_2\right) = 0 \tag{6.23.4}$$

cioè la quantità $\omega_1 + \omega_3 - \omega_2$ si conserva. Nella situazione finale deve essere $\omega_1 = -\omega_2$ e $\omega_2 = -\omega_3$ (velocità relativa nulla ai punti di contatto), mentre inizialmente $\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 = \omega_0$, quindi

$$\omega_1 = \frac{1}{3}\omega_0 \tag{6.23.5}$$

da cui le velocità finali:

$$\omega_1 = \frac{1}{3}\omega_0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{3}\omega_0, \quad \omega_3 = \frac{1}{3}\omega_0 \tag{6.23.6}$$

6.24. Momento di inerzia e proiezioni I ⋆⋆

Mostrare che il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse γ non cambia spostando arbitrariamente ciascun elemento di massa parallelamente a γ. Utilizzare questo risultato per dimostrare che il momento di inerzia di un cilindro di massa M e raggio R fissati rispetto al suo asse non dipendono dalla altezza h.

Soluzione

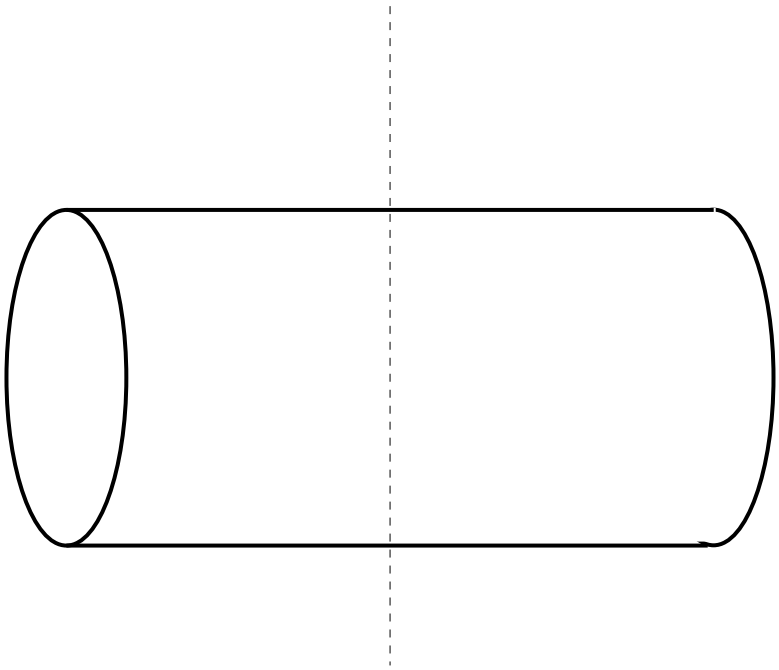
Senza perdita di generalità calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse z. Abbiamo

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

dove m_i è la massa dell'elemento i-esimo, posto in (x_i, y_i, z_i). Una arbitraria traslazione di questo lungo z non cambia le coordinate x_i e y_i, quindi I non cambia. Considerando un cilindro, possiamo traslare ciascun elemento in modo da portarlo in $z = 0$, senza cambiare il suo momento di inerzia. Quest'ultimo non potrà quindi dipendere da h.

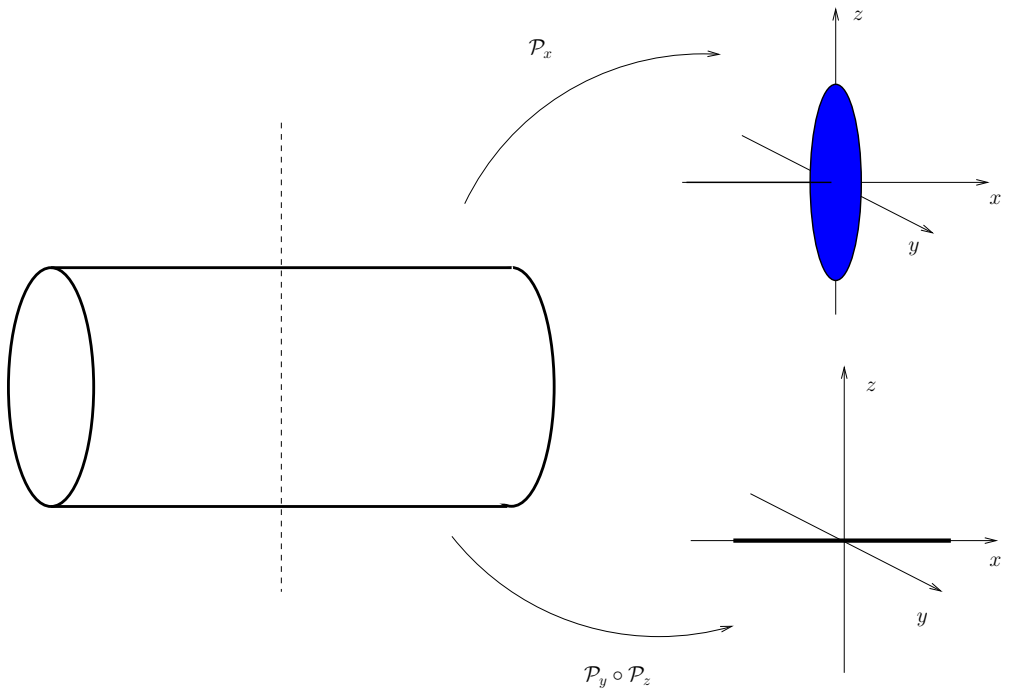
6.25. Momento di inerzia e proiezioni II ⋆⋆

Mostrare che il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse γ si può scrivere come somma dei momenti di inerzia di due lamine ottenute proiettando tutti gli elementi di massa su due piani passanti per γ e ortogonali tra di loro. Usare questo risultato e quello del problema 6.25 per calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo di massa M, raggio di base R e altezza h rispetto all'asse in figura.



CC BY NC SA

Soluzione



Scegliamo per γ l'asse z. Abbiamo quindi

$$I = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

dove il primo termine è il momento di inerzia del corpo proiettato sul piano $y = 0$ e il secondo quello del corpo proiettato sul piano $x = 0$. Nel caso del cilindro, la prima proiezione ($\mathcal{P}_x$, vedere figura) da un disco di massa M uniformemente distribuita e raggio R, per cui

$$I_1 = \frac{M}{\pi R^2} \int \int r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = \frac{MR^2}{4}$$

Per calcolare il secondo termine proiettiamo prima nel piano $z = 0$ ($\mathcal{P}_z$, vedere figura): per quanto discusso nel problema 6.24 il momento di inerzia non cambia. Proiettiamo adesso nel piano $y = 0$ ($\mathcal{P}_y$, vedere figura): abbiamo una distribuzione lineare uniforme di massa, e quindi

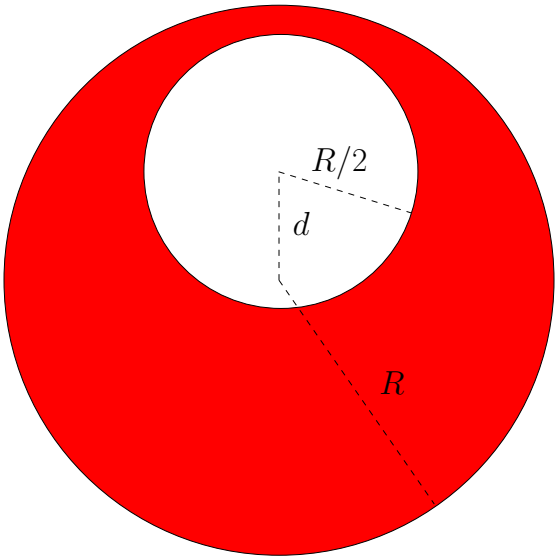
$$I_2 = \frac{1}{12} M h^2$$

Il risultato finale è quindi

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{1}{3} h^2 \right)$$

6.26. Tensore di inerzia corpo composto ⋆⋆

All'interno di una sfera di raggio R si trova una cavità pure sferica di raggio $R/2$ centrata in un punto a distanza $d \leq R/2$ dal centro della prima. Calcolare il tensore di inerzia del corpo rispetto al centro di massa, se la sua massa totale è M.



Soluzione

Calcoliamo prima di tutto il tensore di inerzia di una sfera piena di massa M e raggio R rispetto al suo centro di massa. Data la simmetria, il tensore sarà proporzionale alla matrice identica, cioè $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Inoltre

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int (y^2 + z^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm + \int (x^2 + y^2) dm$$

da cui

$$3I_{xx} = 2 \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm$$

Abbiamo quindi

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}\rho \int r^2 dV$$

e dato che

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

e

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

otteniamo

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{2}{5}MR^2$$

Calcoliamo adesso la posizione del centro di massa del corpo. Se mancasse la cavità, esso sarebbe al centro della sfera grande, dove fissiamo l'origine del sistema di coordinate. Chiaramente dovrà essere

$$\vec{0} = \frac{\frac{1}{7}M\vec{d} + M\vec{r}}{\frac{8}{7}M}$$

dove $\vec{d}$ è la posizione del centro della cavità rispetto all'origine, $M/7$ la massa della sfera che la occuperebbe, $\vec{r}$ la posizione cercata del centro di massa del corpo. Otteniamo quindi

$$\vec{r} = -\frac{1}{7}\vec{d}$$

Costruiamo adesso il tensore di inerzia, sottraendo da quello di una sfera piena quello di una sfera che occuperebbe la cavità. Scegliendo le coordinate in modo da avere $\vec{d} = (0, 0, d)$ otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5}\left(\frac{8}{7}M\right)R^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{8}{7}M\begin{pmatrix} (d/7)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (d/7)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &- \frac{2}{5}\left(\frac{1}{7}M\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}M\begin{pmatrix} (8d/7)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (8d/7)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di Steiner (vedere l'esercizio 6.5) per riferire ogni tensore al centro di massa del corpo. Il risultato finale è

$$I = \frac{31}{70}MR^2\begin{pmatrix} 1 - \frac{80}{217}\left(\frac{d}{R}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{80}{217}\left(\frac{d}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.27. Trottola simmetrica ⋆⋆⋆

Una trottola simmetrica è costituita da un corpo rigido con simmetria di rotazione attorno ad un asse. Un suo estremo viene vincolato come in figura, per il resto è lasciata libera di ruotare su se stessa e attorno al vincolo. Si vogliono discutere le caratteristiche del suo moto, fissate le condizioni iniziali. In particolare si vuole studiare cosa accade se inizialmente il centro di massa della trottola è fermo. In questo primo esercizio verranno impostate le equazioni necessarie.

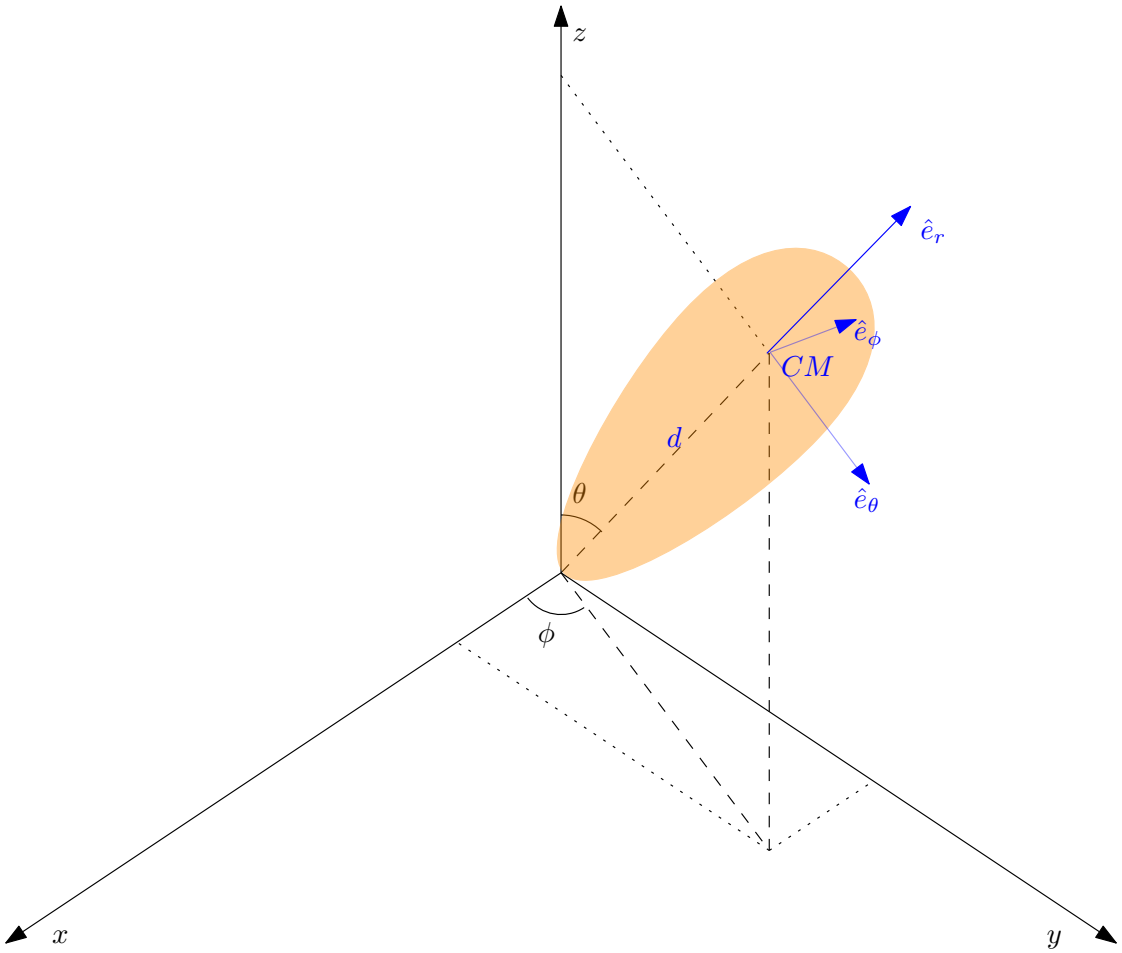


Figura 6.4.: Le coordinate usate per lo studio della trottola simmetrica.

Soluzione

Utilizziamo coordinate sferiche per determinare la posizione del centro di massa del corpo rigido rispetto all'origine del sistema delle coordinate. Abbiamo

$$\vec{r}_{CM} = d\hat{e}_r \tag{6.27.1}$$

dove abbiamo indicato con d la distanza tra il vincolo e il centro di massa, costante. Fissato il centro di massa, il corpo rigido può ancora ruotare su se stesso. In linea di principio avremmo bisogno di una terza coordinata, che però come vedremo non gioca alcun ruolo nel caso considerato. Per il seguito scriviamo esplicitamente l'espressione dei versori $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ di cui ci serviremo:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.27.2}$$

$$\hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{6.27.3}$$

$$\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.27.4}$$

Abbiamo due evidenti leggi di conservazione.

1. L'energia totale, somma di energia cinetica e di energia potenziale gravitazionale. Infatti l'unica altra forza esterna presente è la reazione vincolare, che non compie lavoro dato che il punto a cui è applicata non si muove.

2. La componente verticale del momento angolare, considerando come polo il punto a cui la trottola è vincolata. Infatti l'unica forza con un momento è la forza di gravità. Dato che essa è verticale il suo momento non avrà mai una componente lungo l'asse z.

L'energia potenziale si scrive facilmente:

$$U = Mgz_{CM} = Mgd\cos\theta \tag{6.27.5}$$

L'energia cinetica si può scrivere come energia di rotazione attorno al punto vincolato, e quindi

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \cdot \boldsymbol{I} \cdot \vec{\omega} \tag{6.27.6}$$

dove $\boldsymbol{I}$ è il tensore di inerzia della trottola e $\vec{\omega}$ la velocità angolare del corpo rigido. Invece per il momento angolare si ha

$$\vec{L} = \boldsymbol{I}\vec{\omega} \tag{6.27.7}$$

Il tensore di inerzia si scrive facilmente in un sistema di riferimento con gli assi allineati agli assi principali di inerzia della trottola. Ma questo sistema di riferimento è determinato dai tre versori $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ legati alle coordinate sferiche utilizzate. Osserviamo che possiamo scrivere

$$\boldsymbol{I} = I_1\hat{e}_r\hat{e}_r^T + I_2\hat{e}_\theta\hat{e}_\theta^T + I_2\hat{e}_\phi\hat{e}_\phi^T \tag{6.27.8}$$

Nello scrivere l'espressione precedente abbiamo tenuto conto del fatto che $\hat{e}_A\hat{e}_A^T$ è una matrice che proietta lungo la direzione $\hat{e}_A$. Inoltre il momento di inerzia rispetto all'asse

$\hat{e}_\theta$ è identico a quello rispetto all'asse $\hat{e}_\phi$, dato che la trottola è simmetrica. Infine, dato che la somma dei tre proiettori è la matrice identica $\mathbf{1}$ possiamo scrivere

$$\boldsymbol{I} = I_1 \hat{e}_r \hat{e}_r^T + I_2 \left(\mathbf{1} - \hat{e}_r \hat{e}_r^T\right) = I_2 \mathbf{1} + (I_1 - I_2) \hat{e}_r \hat{e}_r^T \tag{6.27.9}$$

Analogamente la velocità angolare si potrà scrivere nella forma

$$\vec{\omega} = \omega_r \hat{e}_r + \omega_\theta \hat{e}_\theta + \omega_\phi \hat{e}_\phi \tag{6.27.10}$$

e il momento angolare usando l'Equazione (6.27.7) sarà

$$\begin{aligned} \vec{L} &= L_r \hat{e}_r + L_\theta \hat{e}_\theta + L_\phi \hat{e}_\phi & (6.27.11) \\ &= I_1 \omega_r \hat{e}_r + I_2 \omega_\theta \hat{e}_\theta + I_2 \omega_\phi \hat{e}_\phi & (6.27.12) \end{aligned}$$

L'energia si può quindi scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} \left[I_1 \omega_r^2 + I_2 \left(\omega_\theta^2 + \omega_\phi^2\right) \right] + Mgd \cos\theta \tag{6.27.13}$$

e la componente verticale del momento angolare

$$\begin{aligned} L_z &= \hat{e}_z \cdot \vec{L} = L_r \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r + L_\theta \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\theta + L_\phi \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\phi \\ &= L_r \cos\theta - L_\theta \sin\theta & (6.27.14) \end{aligned}$$

Mostriamo adesso che anche L_r si conserva. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dL_r}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{L} \cdot \hat{e}_r\right) = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{e}_r + \vec{L} \cdot \frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ &= \vec{M} \cdot \hat{e}_r + \vec{L} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r) & (6.27.15) \end{aligned}$$

dove $\vec{M}$ è il momento delle forze esterne e si è tenuto conto che, dato che $\hat{e}_r$ è solidale al corpo rigido[1], vale

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r \tag{6.27.16}$$

I due termini della (6.27.15) si annullano: il primo perchè $\vec{M} = \vec{r}_{cm} \wedge (-Mg\hat{e}_z)$ è ortogonale a $\hat{e}_r$, il secondo perchè

$$\vec{L} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r) = \vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot (\tilde{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}) \tag{6.27.17}$$

ma dato che $\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r$ è perpendicolare a $\hat{e}_r$ sarà $\boldsymbol{I} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r) = I_2 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r)$ e quindi

$$\vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot (\tilde{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}) = I_2 \vec{\omega} \cdot (\tilde{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}) = 0 \tag{6.27.18}$$

perchè $\vec{\omega} \wedge \hat{e}_r$ è ortogonale anche a $\vec{\omega}$.

[1] Notare che $\hat{e}_\phi$ e $\hat{e}_\theta$ *non* sono solidali al corpo rigido.

CC BY NC SA

Possiamo ora scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{L_r^2}{I_1} + \frac{L_\theta^2}{I_2} + I_2\omega_\phi^2\right] + Mgd\cos\theta \tag{6.27.19}$$

ed anche, utilizzando la (6.27.14), come

$$E = \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{I_2}{2}\omega_\phi^2 + Mgd\cos\theta \tag{6.27.20}$$

La componente L_ϕ del momento angolare non è costante, ma può essere espressa in funzione della coordinata. Per farlo scriviamo esplicitamente l'Equazione (6.27.16). Abbiamo

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi\\ \omega_r & \omega_\theta & \omega_\phi\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

ossia

$$\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi = \omega_\phi\hat{e}_\theta - \omega_\theta\hat{e}_\phi$$

che ci permette di scrivere due componenti della velocità angolare in funzione delle coordinate

$$\begin{aligned}\omega_\phi &= \dot{\theta}\\ \omega_\theta &= -\dot{\phi}\sin\theta\end{aligned}$$

Sostituendo nell'energia otteniamo infine

$$E = \frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + Mgd\cos\theta \tag{6.27.21}$$

che è formalmente l'energia di una particella descritta da una coordinata θ in un potenziale efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + Mgd\cos\theta + \frac{L_r^2}{2I_1} \tag{6.27.22}$$

La discussione delle soluzioni possibili sarà fatta nell'Esercizio 6.36.

6.28. Scontro tra cubetti di ghiaccio ⋆⋆

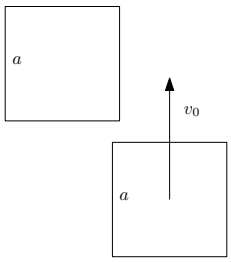


Figura 6.5.: Le condizioni iniziali per i due cubetti. Il primo è fermo, il secondo ha un moto traslatorio con una velocità verticale $\vec{v} = v_0\hat{y}$. Le facce dei due cubetti sono parallele, e l'urto avviene su una regione molto piccola vicino ad uno spigolo di ciascun cubetto.

Un cubetto di ghiaccio di lato a è fermo sopra ad una superficie orizzontale priva di attrito. Un altro cubetto, identico, gli viene lanciato contro con velocità $\vec{v} = v_0\hat{y}$ come in Figura 6.5. La densità di massa all'interno del cubetto è distribuita in modo non noto, ma si sa che il tensore di inerzia rispetto al centro di massa è proporzionale all'identità. Si conoscono la massa totale m e il momento di inerzia I rispetto ad un asse qualsiasi passante per il centro di massa.

L'urto è elastico ed istantaneo, e si vogliono calcolare le velocità lineari e angolari (inizialmente nulle) dei due cubetti dopo l'urto. Inoltre si vuole sapere se i cubetti si urtano nuovamente dopo il primo impatto. Discutere il risultato al variare di m e I.

Soluzione

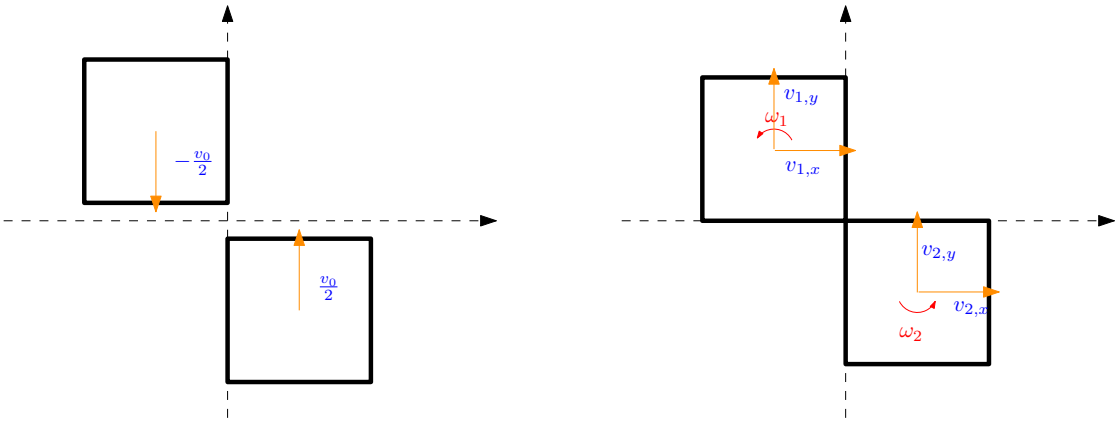


Figura 6.6.: Le posizioni e le velocità dei due cubi in un sistema solidale col centro di massa (posto nell'origine) immediatamente prima (a sinistra) e immediatamente dopo (a destra) l'urto.

Dato che non sono presenti forze esterne (orizzontali) si conserva la quantità di moto totale del sistema. Conviene studiare l'urto in un sistema di riferimento solidale al centro di massa. In esso la situazione prima dell'urto è quella in Figura 6.6, a sinistra, e la quantità di moto totale è nulla.

Per determinare le 2 componenti delle 2 velocità finali e le due velocità angolari ci servono 6 leggi di conservazione, che sono le seguenti:

1. La quantità di moto totale totale lungo x (non ci sono forze esterne lungo x):

$$0 = mv_{1,x} + mv_{2m,x} \tag{6.28.1}$$

2. La quantità di moto totale lungo y (non ci sono forze esterne lungo y):

$$0 = mv_{1,y} + mv_{2,y} \tag{6.28.2}$$

3. L'energia (l'urto è elastico):

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}m\left(v_{1,x}^2 + v_{1,y}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2\right) + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \tag{6.28.3}$$

4. Il momento angolare totale perpendicolare al piano xy rispetto all'origine del sistema di coordinate:

$$m\frac{v_0}{2}\frac{a}{2} \times 2 = -m\left(v_{1,x}\frac{a}{2} + v_{1,y}\frac{a}{2}\right) + m\left(v_{2,x}\frac{a}{2} + v_{2,y}\frac{a}{2}\right) + I\omega_1 + I\omega_2 \tag{6.28.4}$$

5. La quantità di moto orizzontale di ogni cubetto (le forze impulsive durante l'urto sono perpendicolari alla superficie di contatto e quindi verticali). Queste sono due leggi di conservazione, ma non sono indipendenti dato che la loro somma da la conservazione della quantità di moto totale lungo x considerata precedentemente:

$$0 = mv_{1,x} \tag{6.28.5}$$
$$0 = mv_{2,x} \tag{6.28.6}$$

6. Il momento angolare totale di ciascun cubetto non cambia (le forze impulsive durante l'urto sono applicate nell'origine, che abbiamo preso come polo, ed hanno quindi momento nullo). Anche in questo caso le due leggi di conservazione non sono indipendenti, dato che la loro somma da la conservazione del momento angolare totale:

$$m\frac{v_0}{2}\frac{a}{2} = -m\left(v_{1,x}\frac{a}{2} + v_{1,y}\frac{a}{2}\right) + I\omega_1 \tag{6.28.7}$$
$$m\frac{v_0}{2}\frac{a}{2} = m\left(v_{2,x}\frac{a}{2} + v_{2,y}\frac{a}{2}\right) + I\omega_2 \tag{6.28.8}$$

CC BY NC SA

Dalle (6.28.5) e (6.28.6) concludiamo immediatamente che i cubetti si muovono in direzione verticale subito dopo l'urto. Inoltre dalla (6.28.2) segue che le velocità verticali saranno uguali ed opposte. Riscriviamo adesso la (6.28.3), la (6.28.7) e la (6.28.8) nella forma

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = v_{1,y}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{m}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) \tag{6.28.9}$$

$$\frac{v_0}{2} = -v_{1,y} + \frac{2I}{ma}\omega_1 \tag{6.28.10}$$

$$\frac{v_0}{2} = -v_{1,y} + \frac{2I}{ma}\omega_2 \tag{6.28.11}$$

Sottraendo membro a membro le ultime due troviamo $\omega_1 = \omega_2$ (i due cubetti ruotano nello stesso verso). Sommandole abbiamo invece

$$v_{1,y} = \frac{2I}{ma}\omega_1 - \frac{1}{2}v_0$$

Sostituendo infine nell'energia abbiamo

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{2I}{ma}\omega_1 - \frac{1}{2}v_0\right)^2 + \frac{I}{m}\omega_1^2 \tag{6.28.12}$$

da cui

$$\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)\omega_1^2 - \frac{2v_0}{a}\omega_1 = 0$$

La soluzione $\omega_1 = 0$ è compatibile con le leggi di conservazione, ma non con il fatto che l'urto sia realmente avvenuto (le velocità non cambiano). La seconda soluzione invece è

$$\omega_1 = \frac{2}{\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)}\frac{v_0}{a} \tag{6.28.13}$$

$$v_{1,y} = -\left[1 - \frac{\frac{8I}{ma^2}}{\left(1 + \frac{4I}{ma^2}\right)}\right]\frac{1}{2}v_0 \tag{6.28.14}$$

Se

$$I > \frac{1}{4}ma^2 \tag{6.28.15}$$

le velocità dei cubetti cambiamo verso in seguito all'urto, e quindi non si urtano una seconda volta. Altrimenti avviene una nuova collisione. Se la massa è distribuita uniformemente nel cubetto abbiamo

$$I = \frac{1}{6}ma^2 \tag{6.28.16}$$

e quindi si ha una seconda collisione.

6.29. Moto su una sbarra rotante ⋆⋆

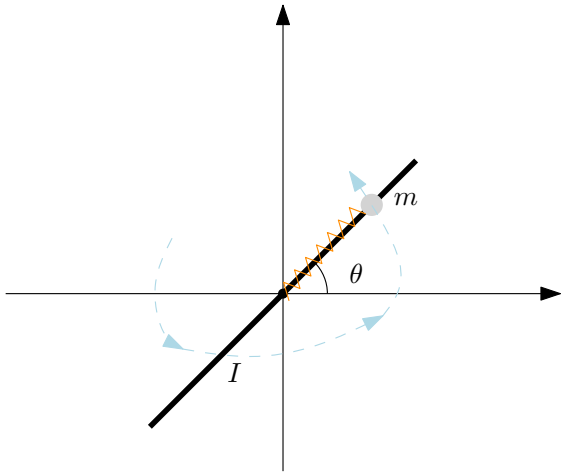


Figura 6.7.: Il sistema da studiare. La sbarra può ruotare liberamente attorno al suo punto medio, la massa scorre su di essa liberamente. La molla ha costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.

Una sbarra di lunghezza ℓ e momento di inerzia I può ruotare liberamente attorno al suo punto medio in un piano orizzontale. Su di essa può scorrere una massa m, fissata al centro di rotazione con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Discutere qualitativamente le possibili orbite della massa, al variare delle condizioni iniziali.

Soluzione

L'energia totale del sistema si conserva. Introducendo coordinate polari per descrivere la posizione della massa (e della sbarra) e fissando l'origine nel punto medio della sbarra possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}r^2$$

L'unica forza esterna che agisce sul sistema è la reazione vincolare applicata al centro di rotazione. Dato che rispetto ad esso ha momento nullo, si conserverà anche il momento angolare totale

$$L = mr^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}$$

Possiamo ricavare $\dot{\theta}$ da quest'ultima relazione

$$\dot{\theta} = \frac{L}{I + mr^2}$$

e sostituendo otteniamo una energia efficace che dipende solo dalla coordinata radiale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{I + mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$

Possiamo adesso studiare qualitativamente le orbite a partire dal potenziale efficace [2]

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{I+mr^2} + kr^2\right)$$

Anzitutto $U_{eff}(0) = L^2/2I$, e $\lim_{r\to\infty} U_{eff}(r) = +\infty$. Derivando

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = r\left[k - \frac{L^2 m}{(I+mr^2)^2}\right]$$

che si annulla per $r = 0$ e per [3]

$$r_{min} = \sqrt{\frac{L}{\sqrt{km}} - \frac{I}{m}} \tag{6.29.1}$$

se [4]

$$L > I\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.29.2}$$

Possiamo adesso discutere le orbite al variare di L e di E. Distinguiamo due casi:

1. $L > I\sqrt{k/m}$. Questo corrisponde al grafico blu in figura. Abbiamo un minimo del potenziale effettivo, associato ad un'orbita circolare di raggio r_{min} che si ottiene quando l'energia vale
$$E = E_1 = U_{eff}(r_{min})$$
Il periodo dell'orbita si determina direttamente dalla velocità angolare,
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{I + mr_{min}^2}{L}$$
Per valori dell'energia compresi tra E_1 ed E_2 la massa si muove tra un raggio minimo e un raggio massimo determinato delle soluzioni di $U_{eff}(r) = E$. Quando $E = E_2$ abbiamo una possibile soluzione nella quale la massa è ferma nell'origine, mentre l'asta ruota con la velocità angolare $\omega = L/I$. La massa è in equilibrio instabile: se perturbata percorre un'orbita fino ad una distanza massima determinata dalla

[2] Esprimendo questa relazione nella forma
$$\frac{mU_{eff}}{kI} = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{kI^2}\frac{1}{1+\frac{mr^2}{I}} + \frac{mr^2}{I}\right)$$
otteniamo una relazione tra i parametri adimensionali $u = mk^{-1}I^{-1}U_{eff}$, $\rho = mI^{-1}r^2$ e $\ell^2 = mk^{-1}I^{-2}L^2$
$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell^2}{1+\rho^2} + \rho^2\right)$$
dalla quale risulta evidente che le caratteristiche qualitative dell'orbita possono solo dipendere da ℓ, come sarà evidente nel seguito.

[3] In termini delle variabili adimensionali introdotte precedentemente, per $\rho = \sqrt{\ell - 1}$.

[4] Cioè per $\ell > 1$.

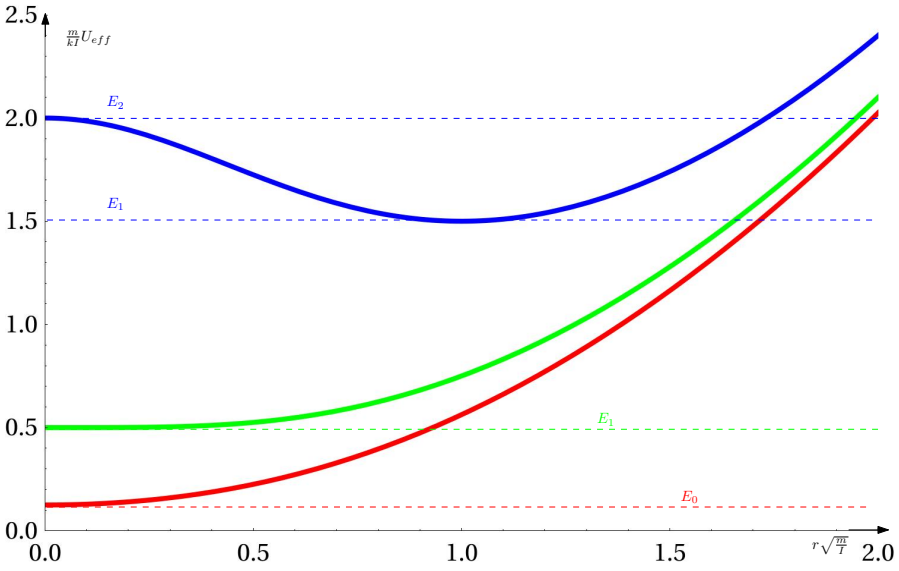


Figura 6.8.: Il potenziale effettivo U_{eff}. Sulle ascisse è riportato il valore di $r\sqrt{m/I}$ e sulle ordinate di $mk^{-1}I^{-1}U_{eff}(r)$ al variare di $LI^{-1}\sqrt{m/k}$. In particolare la curva rossa è ottenuta per $LI^{-1}\sqrt{m/k} = 1/2$, quella verde per $LI^{-1}\sqrt{m/k} = 1$ e quella blu per $LI^{-1}\sqrt{m/k} = 2$.

soluzione non nulla di $E_2 = U_{eff}(r)$ e torna nell'origine in un tempo infinito [5]. Infine per $E > E_2$ la riesce ad attraversare l'origine, e si allontana fino ad una distanza massima determinata dall'unica soluzione di $U_{eff}(r) = E$, per poi tornare nuovamente verso l'origine e ripetere il ciclo.

2. $L < I\sqrt{k/m}$. Questo corrisponde al grafico rosso in figura. Per $E = E_1$ la particella è ferma nell'origine, e questa volta la sua posizione di equilibrio è stabile. Per $E > E_1$ si ottengono orbite qualitativamente simili a quella discussa nel caso precedente per $E > E_2$. Il caso $L = I\sqrt{k/m}$ è qualitativamente simile a questo [6]

Concludiamo osservando che per una sbarra di lunghezza finita ℓ le orbite valide saranno quello che non si allontaneranno dall'origine più di $\ell/2$.

[5] Lo studio dettagliato di questo caso particolare sarà fatto in un esercizio successivo.
[6] Una differenza tra i due sarà l'argomento di un esercizio successivo.

CC BY NC SA

6.30. Piccole oscillazioni di metà cilindro ⋆⋆⋆

La metà di un cilindro omogeneo di raggio R, massa m e altezza h è appoggiato su un piano obliquo come in Figura 6.9, ed è libero di ruotare senza strisciare. Potete indicare con b la distanza del centro di massa dall'asse del cilindro.

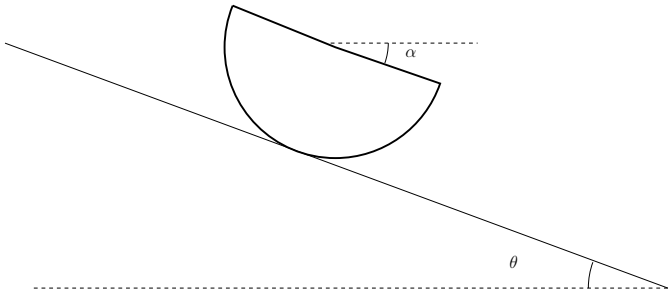


Figura 6.9.: Il semicilindro appoggiato sul piano obliquo: convenzioni per gli angoli.

1. Calcolare l'inclinazione α del cilindro nella posizione di equilibrio in funzione di θ, e l'angolo massimo θ^* per il quale l'equilibrio è possibile.
2. Se $\theta = 0$ partendo dalla posizione di equilibrio per quale velocità angolare iniziale minima il corpo si capovolge?
3. Sempre per $\theta = 0$ calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione[7]

Domanda 1 Consideriamo la costruzione rappresentata in Figura 6.10. Fissato il punto di contatto P, conduciamo la perpendicolare al piano inclinato passante per esso. Su essa prendiamo il punto a distanza R da P. La circonferenza di raggio b e centro O è il luogo delle possibili posizioni del centro di massa.

Le forze che agiscono sul sistema sono l'attrito statico $\vec{F}_a$ (applicata in P) la reazione normale al vincolo $\vec{N}$ (applicata in P) e la forza di gravità $m\vec{g}$ (applicata nel centro di massa). La prima condizione di equilibrio da

$$\vec{F}_a + \vec{N} + m\vec{g} = 0 \tag{6.30.1}$$

e può sempre essere soddisfatta scegliendo opportunamente $\vec{F}_a$ e $\vec{N}$. La seconda condizione, scegliendo come polo il punto di contatto, dice che il momento rispetto a P della forza di gravità deve essere nullo. Questo significa che si avrà equilibrio solo con il centro di massa sulla verticale di P (le posizioni M e M' in figura).

[7] Scritto del 31/1/2007

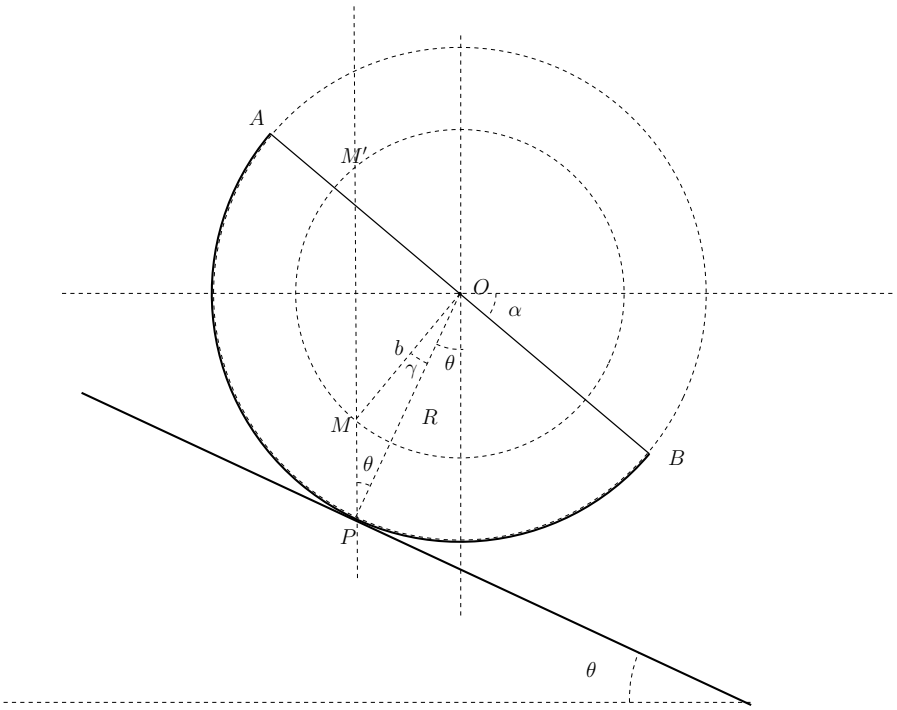


Figura 6.10.: La costruzione utilizzata per rispondere alla prima domanda.

Considerando il triangolo MPO abbiamo dal teorema dei seni la relazione

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin(\pi - \gamma - \theta)} = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{6.30.2}$$

dato che $\gamma = \alpha - \theta$. Quindi

$$R\sin\theta = b\sin\alpha \tag{6.30.3}$$

che determina l'angolo α di equilibrio in funzione di θ. Si hanno soluzioni solo se $\sin\theta \leq b/R$, che determina il massimo valore possibile $\theta^* = \arcsin(b/R)$. Esplicitamente l'angolo di equilibrio vale

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{b}\sin\theta\right) \tag{6.30.4}$$

Alternativamente dalla Figura 6.10 si vede direttamente che il valore massimo di α corrisponde a $\alpha + \theta = \pi/2$ (la retta $\overline{MM'}$ diviene tangente alla circonferenza di raggio b). Questo corrisponde a $\sin\theta^* = b/R$. Osserviamo che per piccoli spostamenti rispetto ad M del centro di massa la forza di gravità agisce come forza di richiamo. Quindi la configurazione considerata è di equilibrio stabile. Al contrario la configurazione con centro di massa in M' sarà di equilibrio instabile.

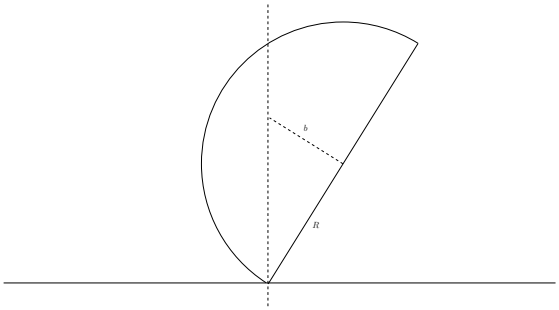


Figura 6.11.: La posizione estrema da raggiungere prima del capovolgimento.

Domanda 2 Per capovolgersi, il corpo dovrà superare la posizione di altezza massima per il suo centro di massa. Questo avviene nella situazione in Figura 6.11. Rispetto al terreno l'altezza del centro di massa è allora

$$h_f = \sqrt{b^2 + R^2} \tag{6.30.5}$$

e imponendo la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2} I_P \omega_0^2 + mg\,(R - b) = mg\sqrt{b^2 + R^2} \tag{6.30.6}$$

dove I_P è il momento di inerzia del mezzo cilindro rispetto al punto di contatto, nella configurazione iniziale. Otteniamo quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg}{I_P}\left(\sqrt{R^2 + b^2} - R + b\right)} \tag{6.30.7}$$

Per calcolare I_P osserviamo che il momento di inerzia di un cilindro intero rispetto al suo asse vale

$$I_{cil} = \frac{1}{2} M_{cil} R^2 \tag{6.30.8}$$

e quello di metà cilindro, rispetto allo stesso asse,

$$I_O = \frac{1}{2} m R^2 \tag{6.30.9}$$

(ovviamente $m = M_{cil}/2$). Usando il teorema di Steiner troviamo il momento rispetto ad un asse passante per il centro di massa

$$I_{CM} = I_O - mb^2 \tag{6.30.10}$$

ed infine, usando nuovamente il teorema, rispetto ad un asse passante per il punto di contatto iniziale

$$I_P = I_{CM} + m\,(R - b)^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m\,(R - b)^2 - mb^2 = \frac{1}{2} m R^2 + mR\,(R - 2b)\ . \tag{6.30.11}$$

Domanda 3 Conviene scrivere l'energia cinetica come somma del contributo legato al centro di massa e della rotazione attorno ad esso:

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2\right) + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\alpha}^2 \,. \tag{6.30.12}$$

Le coordinate del centro di massa si possono scrivere, fissato un sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale del punto O,

$$x_{cm} = R\alpha - b\sin\alpha \tag{6.30.13}$$

$$y_{cm} = -b\cos\alpha \tag{6.30.14}$$

da cui, aggiungendo l'energia potenziale gravitazionale mgy_{cm}, otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\left[(R\dot{\alpha} - b\dot{\alpha}\cos\alpha)^2 + (b\dot{\alpha}\sin\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\alpha}^2 - mgb\cos\alpha \,. \tag{6.30.15}$$

Sviluppando per piccole oscillazioni otteniamo, al secondo ordine in α e $\dot{\alpha}$,

$$E = \frac{1}{2}\left[m\left(R-b\right)^2 + I_{CM}\right]\dot{\alpha}^2 + \frac{mgb}{2}\alpha^2 - mgb \,. \tag{6.30.16}$$

Notare che questo si può anche scrivere, trascurando una costante irrilevante,

$$E = \frac{1}{2}I_P\dot{\alpha}^2 + \frac{mgb}{2}\alpha^2 \tag{6.30.17}$$

cioè per piccole oscillazioni si può trascurare il fatto che l'asse di rotazione cambia. L'energia appena scritta è formalmente quella di un oscillatore armonico, da cui

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{mgb}{I_P}} \,. \tag{6.30.18}$$

6.31. Piccole oscillazioni metà cilindro, niente attrito ⋆⋆

La metà di un cilindro omogeneo di raggio R, massa M e altezza h è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

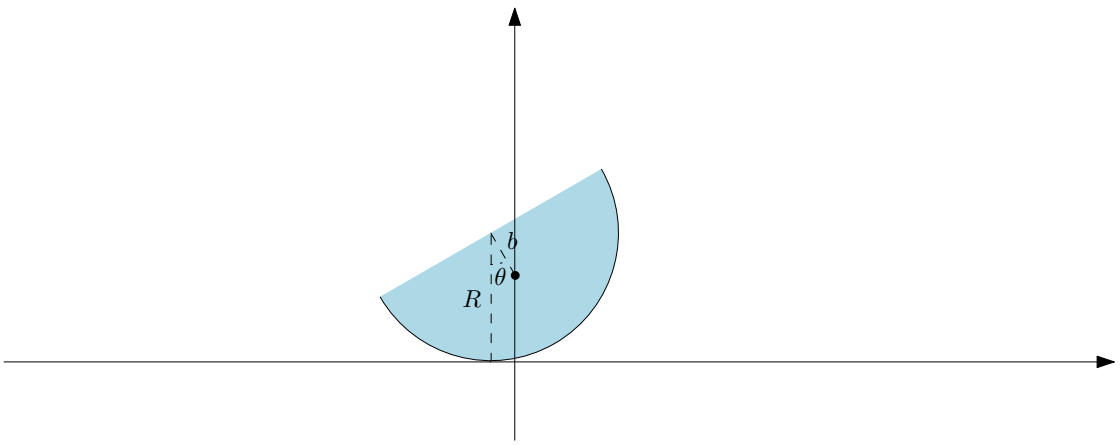


Figura 6.12.: Il semicilindro durante l'oscillazione, in un sistema di riferimento nel quale la componente orizzontale della velocità del centro di massa è nulla. Il sistema è stato scelto in modo che il centro di massa (indicato dal punto scuro) si trovi sull'asse delle ordinate.

La componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva, dato che non esistono forze esterne orizzontali applicate al sistema. Possiamo allora scegliere un sistema di riferimento inerziale nel quale il centro di massa si trova in ogni istante sull'asse y, come in Figura 6.12.

Scriviamo l'energia potenziale. Detto θ l'angolo tra la verticale e il segmento che congiunge il centro della semicirconferenza al centro di massa possiamo scrivere la posizione verticale di quest'ultimo

$$y_{cm} = R - b\cos\theta$$

Allora

$$U(\theta) = Mg\,(R - b\cos\theta)$$

che ha un minimo per $\theta = 0$, che è quindi una posizione di equilibrio stabile.

Scriviamo l'energia cinetica nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

dove $v_{cm}^2 = \dot{y}_{cm}^2$ è il quadrato della velocità del centro di massa (che si muove solo verticalmente nel sistema scelto) e $\omega^2 = \dot{\theta}^2$ è il quadrato della velocità angolare. Il

momento di inerzia I_{cm} è calcolato rispetto al centro di massa del sistema, e può essere calcolato usando il teorema di Steiner:

$$\frac{1}{2}I_{cyl} = I_{cm} + Mb^2$$

dove

$$I_{cyl} = \frac{1}{2}\left(2M\right)R^2$$

è il momento di inerzia di un cilindro completo rispetto al suo asse. In conclusione

$$I_{cm} = \frac{1}{2}M\left(R^2 - 2b^2\right)$$

Derivando y_{cm} rispetto al tempo troviamo

$$\dot{y}_{cm} = b\dot{\theta}\sin\theta$$

e sostituendo otteniamo l'energia finale

$$E = \frac{1}{2}\left(Mb^2\sin^2\theta + I_{cm}\right)\dot{\theta}^2 + Mg\left(R - b\cos\theta\right)$$

Per piccole oscillazioni attorno $\theta = 0$ possiamo approssimare questa espressione al secondo ordine in θ, $\dot{\theta}$ ottenendo

$$E = \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mgb\theta^2$$

che corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgb}{I_{cm}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gb}{R^2 - 2b^2}}$$

6.32. Centro di massa metà cilindro ⋆⋆

Calcolare la distanza b tra il centro di massa e l'asse del semicilindro che compare negli esercizi 6.30 e 6.31 e usatelo per confrontare le frequenze delle piccole oscillazioni trovate nei due casi.

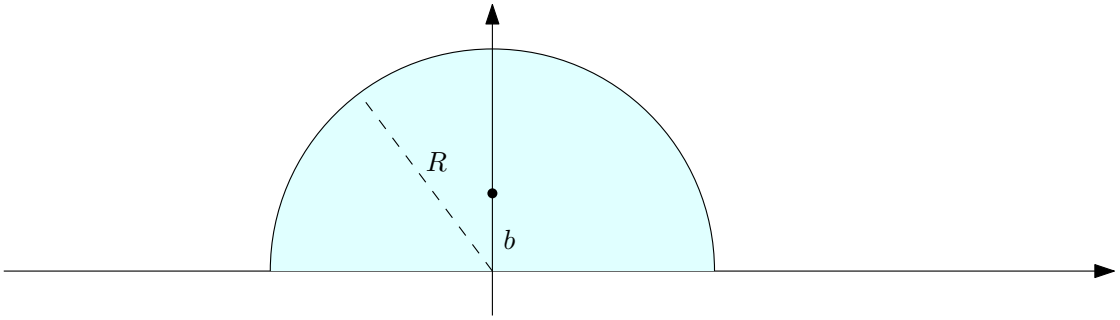


Figura 6.13.: Il sistema di coordinate utilizzato per il calcolo del centro di massa.

Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate come in Figura 6.13. A causa della simmetria orizzontale $x_{cm} = 0$. Per calcolare $y_{cm} = b$ calcoliamo

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm$$

che diviene, utilizzando coordinate polari,

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M}\int y\frac{dm}{dS}dS \\ &= \frac{1}{M}\frac{M}{\pi R^2/2}\int\int r\sin\theta r dr d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}2 = \frac{4}{3\pi}R \simeq 0.424\,R \end{aligned}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è, nel caso senza attrito considerato nell'Esercizio 6.31

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gb}{R^2-b^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{8}{3\pi}}{1-\frac{16}{9\pi^2}}\frac{g}{R}} \simeq 0.162\sqrt{\frac{g}{R}}$$

e in quello con rotolamento puro considerato nell'Esercizio 6.30

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gb}{3R^2-4Rb}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{8}{3\pi}}{3-\frac{16}{3\pi}}\frac{g}{R}} \simeq 0.128\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{6.32.1}$$

6.33. Giro della morte per una sfera ⋆⋆

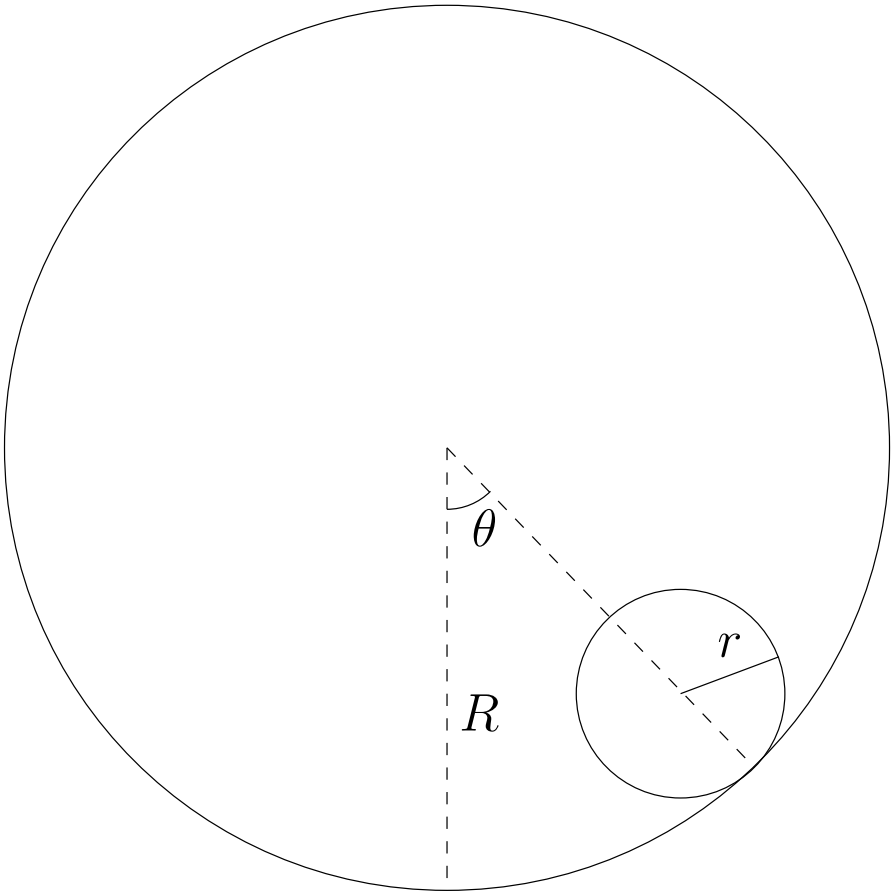


Figura 6.14.: La sfera all'interno del cilindro e la coordinata usata per descriverla.

Una sfera di massa M e raggio r rotola senza strisciare all'interno di un tubo di raggio $R > r$ come in figura. Il tubo si comporta come un vincolo monolatero.

Scegliendo l'angolo θ come coordinata,

1. scrivere l'energia totale del sistema in funzione di θ e $\dot{\theta}$;
2. supponendo che $\theta(t = 0) = 0$, si determini il minimo valore di $\dot{\theta}(t = 0)$ che permette alla sfera di percorrere un giro completo senza staccarsi dal tubo;
3. determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione[8]

Domanda 1

La velocità del centro di massa del cilindro si scrive

$$v_{cm} = (R - r)\dot{\theta}$$

ma anche, usando la condizione di rotolamento puro,

$$v_{cm} = -r\omega$$

dove ω è la velocità angolare del cilindro. Da queste due relazioni segue che

$$\omega = -\frac{R - r}{r}\dot{\theta}$$

Possiamo adesso scrivere l'energia nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg(R - r)\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}M(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R - r)\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}M\left[(R - r)^2 + \frac{2}{5}r^2\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 - Mg(R - r)\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R - r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R - r)\cos\theta \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il momento di inerzia della sfera, $I = 2Mr^2/5$. Notare che il termine cinetico si può anche scrivere nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5}Mr^2\right]\left[\frac{(R - r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}I'\omega^2$$

dove $I' = 7Mr^2/5$ è il momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto.

Domanda 2

La componente radiale dell'equazione del moto del centro di massa della sfera si scrive

$$-M(R - r)\dot{\theta}^2 = -N + Mg\cos\theta$$

da cui è possibile calcolare la reazione vincolare.

$$N = Mg\cos\theta + M(R - r)\dot{\theta}^2$$

[8] Scritto del 2 marzo 2011

La sfera rimarrà aderente al vincolo se $N \geq 0$, cioè

$$g\cos\theta + (R-r)\dot{\theta}^2 \geq 0 \tag{6.33.1}$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ora determinare $(R-r)\dot{\theta}^2$ in funzione di θ:

$$\frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}_0^2 - Mg(R-r) = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta$$

da cui

$$(R-r)\dot{\theta}^2 = (R-r)\dot{\theta}_0^2 - \frac{10}{7}g\,(1-\cos\theta)$$

e sostituendo nella (6.33.1) troviamo

$$(R-r)\dot{\theta}_0^2 \geq g\left(\frac{10}{7} - \frac{17}{7}\cos\theta\right)$$

Il caso peggiore è $\theta = \pi$, quindi deve essere

$$\left|\dot{\theta}_0\right| \geq \sqrt{\frac{27}{7}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 3

La posizione di equilibrio stabile è $\theta = 0$. Sviluppando l'energia al secondo ordine troviamo a meno di una costante

$$E = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mg(R-r)\theta^2 + O\left(\theta^4\right)$$

quindi la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

CC BY NC SA

6.34. Campo di velocità di una moneta ⋆⋆⋆

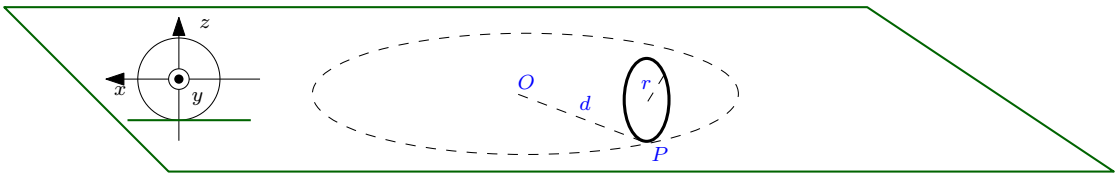


Figura 6.15.: Il moto della monetina sul piano. La velocità $\vec{v}_0$ specificata nel problema è quella del punto geometrico P di contatto tra monetina e piano.

Si vuole studiare il campo di velocità di una monetina molto sottile di raggio r che si muove facendo rotolamento puro su un piano. Il punto di contatto P tra la monetina e il piano si muove su una circonferenza di raggio d attorno ad un centro O (vedere Figura) con velocità costante in modulo v_0. La monetina rimane tangente alla circonferenza. Si vuole determinare in particolare

- L'asse istantaneo di rotazione
- Il campo di velocità $\vec{v}(x, z)$ della monetina nel sistema di riferimento rappresentato sulla sinistra in Figura (6.15)
- Il vettore velocità angolare

Soluzione

Il metodo più veloce per determinare l'asse istantaneo di rotazione è quello di trovare due punti istantaneamente fermi del corpo rigido considerato. Notiamo che tali punti potranno essere esterni alla monetina, ma collegati "rigidamente" ad essa. Nel caso considerato il punto F_1 della monetina (Figura 6.16) che è ad un certo istante a contatto col piano orizzontale è sicuramente fermo, data la condizione di rotolamento puro.

Consideriamo adesso, sempre in Figura 6.16, il punto F_2 posto ad una altezza r sulla verticale di O: la sua distanza da un punto qualsiasi della monetina si mantiene costante durante il moto, e quindi possiamo pensarlo collegato ad essa rigidamente. Si tratta quindi di un secondo punto fisso, e l'asse di rotazione istantaneo è la retta passante tra F_1 e F_2. Notare che il punto O non rimane ad una distanza fissa dai punti della monetina: ad esempio la distanza tra O ed un punto A posto sul bordo varia da un minimo di $\overline{OA} = d$ (quando $A \equiv P$) ad un massimo di $\overline{OA} = \sqrt{d^2 + 4r^2}$ (quando A si trova sulla verticale del punto di contatto col piano).

Il vettore velocità angolare avrà una direzione parallela all'asse istantaneo di rotazione. Per determinarne il modulo osserviamo che la velocità del centro della monetina C è, all'istante rappresentato in Figura 6.16, $\vec{v} = -v_0\hat{x}$. Dato che il moto è di puro rotolamento dovrà anche essere

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{6.34.1}$$

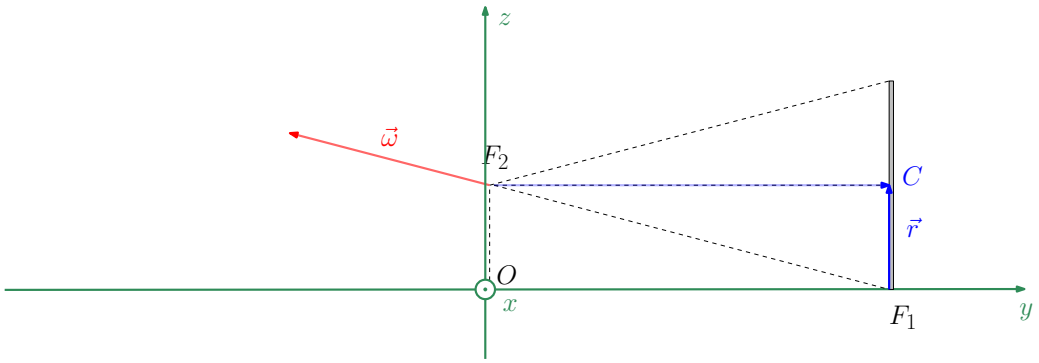


Figura 6.16.: Una costruzione che permette di determinare l'asse istantaneo di rotazione della monetina, vista in sezione trasversa ad un dato istante. Dato che sia F_1 che F_2 sono istantaneamente fermi, l'asse istantaneo di rotazione passa da essi.

dove $\vec{r}$ è un qualsiasi vettore che collega un punto istantaneamente fermo con C, ad esempio il due vettori $\overrightarrow{F_1C}$ e $\overrightarrow{F_2C}$ rappresentati in blu. Avremo quindi

$$-v_0\hat{x} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{F_1C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = r\omega_y\hat{x} - r\omega_x\hat{y}$$

da cui segue $\omega_y = -v_0/r$, $\omega_x = 0$. Oppure

$$-v_0\hat{x} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{F_2C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = d\omega_x\hat{z} - d\omega_z\hat{x}$$

da cui otteniamo $\omega_z = v_0/d$. In conclusione scegliendo il riferimento come in 6.16 abbiamo

$$\vec{\omega} = \left(0, -\frac{v_0}{r}, \frac{v_0}{d}\right)$$

Determiniamo adesso il campo di velocità sulla monetina. Possiamo usare direttamente l'espressione (6.34.1). Nel sistema di riferimento a sinistra in Figura (6.15) abbiamo

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0/r \\ v_0/d \end{pmatrix}; \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z+r \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

da cui

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -v_0/r & v_0/d \\ x & 0 & z+r \end{vmatrix} = -v_0 \frac{z+r}{r}\hat{x} + v_0 \frac{x}{d}\hat{y} + v_0 \frac{x}{r}\hat{z}$$

Si verifica che il punto di contatto $(0, 0, -r)$ è istantaneamente fermo. Inoltre i punti che non si trovano sull'asse z hanno una componente non nulla della velocità lungo $\hat{y}$, come ci si poteva attendere dato che la monetina deve curvare per rimanere sulla propria traiettoria circolare. Il limite $d \to \infty$ corrisponde in effetti al caso di traiettoria rettilinea, per il quale

$$\vec{v} = -v_0 \frac{z+r}{r}\hat{x} + v_0 \frac{x}{r}\hat{z}$$

e

$$\vec{\omega} = -\frac{v_0}{r}\hat{y}$$

6.35. Trottola “bloccata” nel piano ⋆⋆

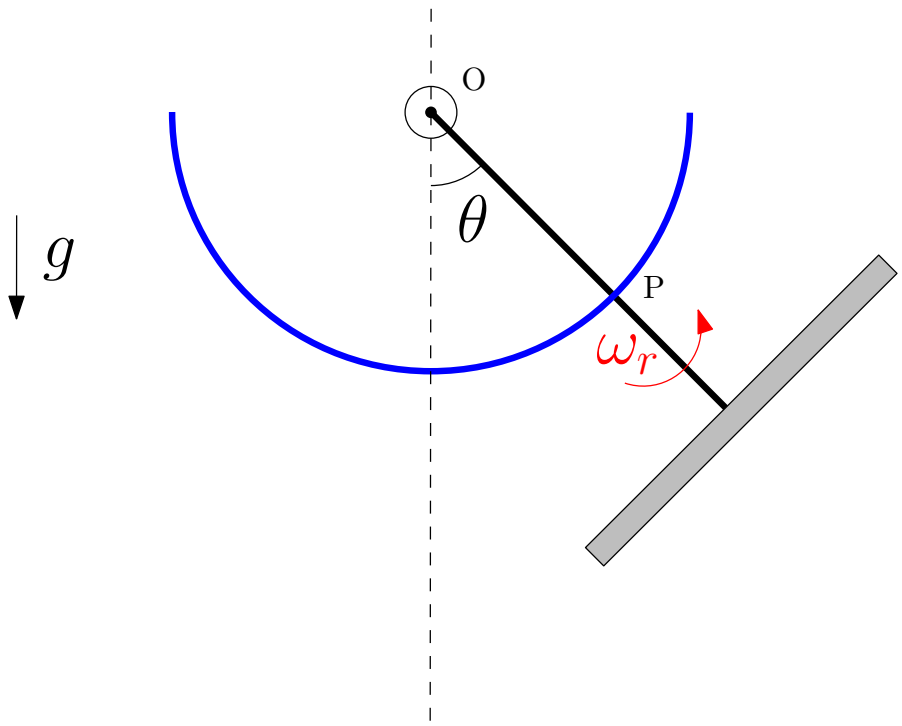


Figura 6.17.: Il sistema considerato nel problema visto in sezione rispetto al piano nel quale l’asse è vincolato. La ruota è in grigio, la guida che vincola l’asse in blu.

Una ruota di bicicletta può ruotare liberamente attorno ad un’asta. L’asta a sua volta è fissata come in Figura 6.17 ad un suo estremo nel punto O e può ruotare liberamente attorno ad esso. Per fare in modo che l’asta rimanga in un piano fissato si aggiunge una guida liscia circolare (in blu in Figura 6.17) e si vincola l’asse a rimanere aderente ad essa. Per gli scopi del problema si può indicare con I_1 il momento di inerzia del corpo rigido lungo l’asse delll’asta, con I_2 quello in una direzione perpendicolare ad essa, in entrambi i casi rispetto al punto O, con m la massa totale e con d la distanza del centro di massa da O.

Supponendo di porre in rotazione attorno all’asse la ruota con velocità angolare ω_ρ, e di lasciare libero il sistema da un angolo iniziale $\theta = \theta_0$, discutere il moto successivo scrivendo le equazioni del moto. In particolare, come si muove il sistema se $\omega_\rho = 0$? Cambia qualcosa se $\omega_\rho \neq 0$?

Soluzione

Utilizziamo coordinate cilindriche per descrivere la posizione del centro di massa del sistema

$$\vec{r}_{CM} = d\hat{e}_\rho$$

Il vettore velocità angolare ha componenti non nulle solo lungo le direzioni $\hat{e}_\rho$ e $\hat{e}_z$, quindi

$$\vec{\omega} = \omega_\rho \hat{e}_\rho + \omega_z \hat{e}_z$$

Notiamo che ω_ρ descrive la rotazione attorno all'asse, e ω_z la rotazione (oscillazione) dell'asse attorno ad O. Per ragioni di simmetria gli assi principali del corpo rigido sono chiaramente lungo l'asta e perpendicolari ad essa, quindi

$$\vec{L} = I_1 \omega_\rho \hat{e}_\rho + I_2 \omega_z \hat{e}_z$$

Per quanto riguarda i momenti, avremo quello della forza di gravità e il momento della reazione vincolare della guida

$$\vec{M} = -mgd \sin\theta \hat{e}_z + M_R \hat{e}_\theta$$

Scriviamo adesso l'equazione del moto $d\vec{L}/dt = \vec{M}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\hat{e}}_\rho + I_2 \dot{\omega}_z \hat{e}_z + I_2 \omega_z \dot{\hat{e}}_z \\ &= I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + I_2 \dot{\omega}_z \hat{e}_z \\ &= I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + I_2 \ddot{\theta} \hat{e}_z \end{aligned}$$

dove si è usato $\dot{\hat{e}}_z = 0$ e $\omega_z = \dot{\theta}$. L'equazione cardinale diventa

$$I_1 \dot{\omega}_\rho \hat{e}_\rho + I_1 \omega_\rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + I_2 \ddot{\theta} \hat{e}_z = -mgd \sin\theta \hat{e}_z + M_R \hat{e}_\theta$$

da cui

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_\rho &= 0 \\ I_1 \omega_\rho \dot{\theta} &= M_R \\ I_2 \ddot{\theta} &= -mgd \sin\theta \end{aligned}$$

La prima equazione ci dice che ω_ρ è costante. In particolare se $\omega_\rho = 0$ le altre due si riducono a

$$\begin{aligned} M_R &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta} &= -mgd \sin\theta \end{aligned}$$

quindi il sistema oscilla come un pendolo, e la guida non esercita nessuna reazione vincolare. Nel caso generale vediamo che l'equazione del moto per θ non cambia, quindi il moto sarà ancora una volta quello di un pendolo. Ma questa volta la guida eserciterà sul sistema una reazione, equivalente al momento

$$M_R = I_1 \omega_\rho \dot{\theta}$$

e questo significa che in assenza di essa il moto non resterebbe confinato nel piano. In effetti avremmo una trottola con un punto fisso, problema analizzato negli Esercizi 6.27 e 6.36.

CC BY NC SA

6.36. Trottola simmetrica: discussione delle soluzioni ⋆⋆⋆

Nell'Esercizio 6.27 l'energia E e la componente verticale L_z del momento angolare di una trottola simmetrica fissata ad un estremo, entrambe quantità costanti, sono state scritte nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}\left(\frac{L_r\cos\theta - L_z}{\sin\theta}\right)^2 + Mgd\cos\theta \\ L_z &= L_r\cos\theta + I_2\dot{\phi}\sin^2\theta \end{aligned}$$

dove L_r è la componente del monento angolare lungo l'asse della trottola, anche esso costante. In questo esercizio si studierà qualitativamente il moto della trottola al variare delle condizioni iniziali.

Soluzione

Conviene scrivere l'equazione che definisce l'energia nella forma

$$\frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \left(E - \frac{L_r^2}{2I_1}\right)\sin^2\theta - \frac{1}{2I_2}\left(L_r\cos\theta - L_z\right)^2 - Mgd\cos\theta\sin^2\theta \tag{6.36.1}$$

da cui segue direttamente che il moto sarà possibile solo nelle regioni in cui il secondo membro sarà positivo. Avremo quindi la condizione

$$\left[\left(\frac{2I_2E}{L_r^2} - \frac{I_2}{I_1}\right) - \frac{2I_2Mgd}{L_r^2}\cos\theta\right]\left(1-\cos^2\theta\right) - \left(\cos\theta - \frac{L_z}{L_r}\right)^2 \geq 0 \tag{6.36.2}$$

ed inoltre

$$I_2\dot{\phi}(1-\cos^2\theta) = L_z - L_r\cos\theta \tag{6.36.3}$$

In termini di $x = \cos\theta$ il membro destro dell'Equazione (6.36.2) è un polinomio di terzo grado

$$P(x) = (\alpha - \beta x)\left(1 - x^2\right) - (x-\gamma)^2$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{2I_2E}{L_r^2} - \frac{I_2}{I_1}\right) \\ \beta &= \frac{2I_2Mgd}{L_r^2} \\ \gamma &= \frac{L_z}{L_r} \end{aligned}$$

I valori agli estremi sono negativi o nulli,

$$P(\pm 1) = -\left(\gamma \mp 1\right)^2$$

Questo significa che la trottola potrà raggiungere la posizione verticale solo nei due casi $L_z = L_r$ (sarà possibile $\theta = 0$) o $L_z = -L_r$ (sarà possibile $\theta = \pi$). Notiamo che

$$I_2(1-x^2)\dot{\phi} = L_z - L_r x$$

e quindi il segno di $\dot{\phi}$ (la velocità di precessione) potrà cambiare, e sarà in ogni istante lo stesso di $L_z - L_r x$.

In termini delle condizioni iniziali abbiamo adesso

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_2}{2}\dot{\theta}_0^2 + \frac{L_r^2}{2I_1} + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}_0^2\sin^2\theta_0 + Mgd\cos\theta_0 \\ L_z &= L_r\cos\theta_0 + I_2\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0 \end{aligned}$$

e quindi (notare che la velocità del centro di massa della trottola è data da $v_{cm}^2 = d^2\left(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\phi}_0^2\sin^2\theta_0\right)$)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{I_2^2}{L_r^2}\left(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\phi}_0^2\sin^2\theta_0\right) + \frac{2MgdI_2}{L_r^2}\cos\theta_0 \\ &= \frac{I_2^2}{d^2L_r^2}v_{cm,0}^2 + \beta\cos\theta_0 \\ \beta &= \frac{2I_2Mgd}{L_r^2} \\ \gamma &= \cos\theta_0 + \frac{I_2}{L_r}\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0 \end{aligned}$$

inoltre

$$I_2\dot{\phi}\sin^2\theta = L_r\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) + I_2\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0$$

Studiamo alcuni casi particolari. (.....)

6.37. Caduta di un manubrio ⋆⋆

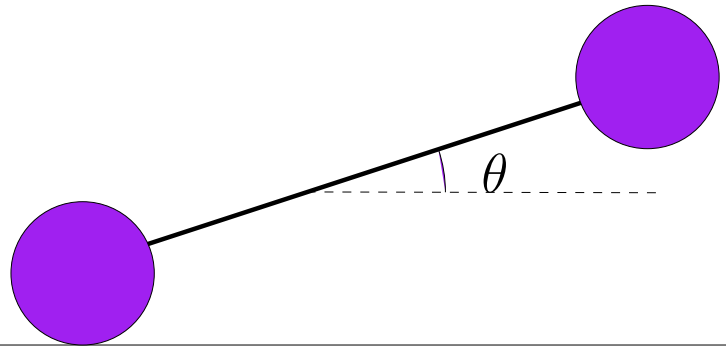


Figura 6.18.: Il sistema descritto nel problema. I due estremi dell'asta sono sulla superficie delle sfere, in altre parole la distanza tra i centri delle due sfere è $L + 2R$.

Due sfere di massa M e raggio R sono collegate da un'asta di uguale massa e lunghezza L. Gli estremi dell'asta sono saldati perpendicolarmente alle superfici delle due sfere. Inizialmente una sfera è appoggiata su un piano orizzontale, e l'asta forma un angolo θ_0 con l'orizzontale. Ad un certo punto si elimina in vincolo che mantiene il sistema in equilibrio.

1. Supponendo che il piano sia privo di attrito determinare la velocità angolare del corpo quando la seconda sfera tocca terra.
2. Rispondere alla stessa domanda precedente, supponendo questa volta che la sfera inizialmente in contatto con il piano rotoli senza strisciare su quest'ultimo.
3. Determinare la reazione normale del piano quando l'inclinazione dell'asta rispetto all'orizzontale diviene $\theta_0/2$.

Soluzione

Domanda 1 Se il piano non ha attrito, non ci sono forze esterne orizzontali applicate al sistema. Di conseguenza la quantità di moto orizzontale si conserva, e il centro di massa si muove solo verticalente, dato che inizialmente è fermo. L'energia del sistema si può allora scrivere

$$E = \frac{1}{2}3M\dot{y}_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + 3Mgy_{cm} \tag{6.37.1}$$

dove $\omega = \dot{\theta}$ è la velocità angolare del corpo rigido e

$$y_{cm} = \left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.37.2}$$

è l'altezza del centro di massa (al centro del manubrio) misurata rispetto all'altezza del centro della sfera poggiata a terra. Sostituendo otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\left[3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + I_{cm}\right]\dot{\theta}^2 + 3Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.37.3}$$

L'espressione tra parentesi quadre

$$I_0 = 3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + I_{cm} \tag{6.37.4}$$

si può interpretare come momento di inerzia del manubrio rispetto al punto istantaneamente fermo attorno al quale sta ruotando, come si vede dalla Figura 6.19.

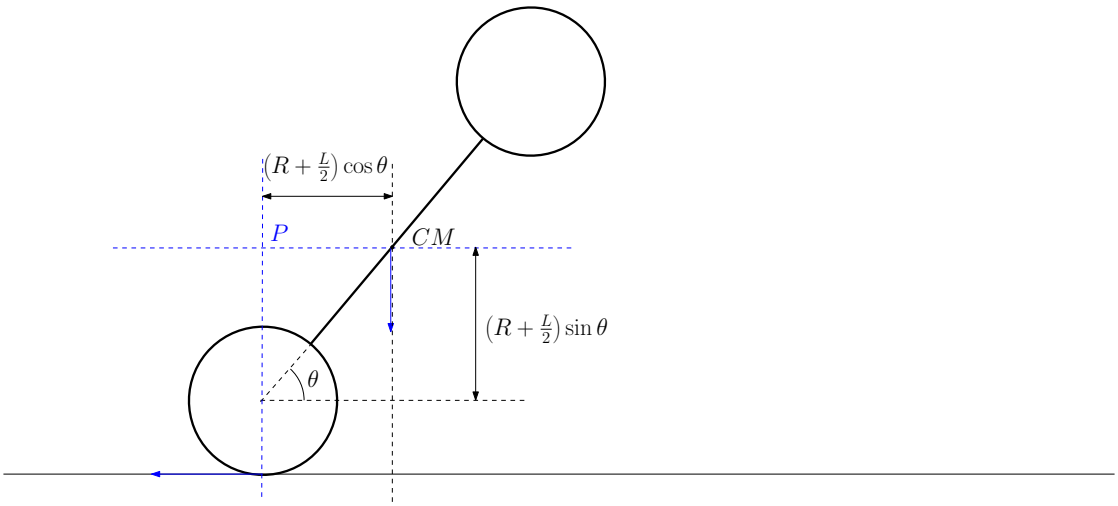


Figura 6.19.: Il manubrio ruota attorno al punto fisso P, che si può determinare con la costruzione in figura notando che il punto di contatto col terreno si muove orizzontalmente e il centro di massa verticalmente. Quindi P deve trovarsi alle intersezioni delle rette perpendicolari alle due velocità.

Uguagliando l'energia iniziale a quella finale abbiamo

$$\frac{1}{2}\left[3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2 + I_{cm}\right]\dot{\theta}^2 = 3Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)\sin\theta_0 \tag{6.37.5}$$

da cui

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R+\frac{L}{2}\right)}{3M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2 + I_{cm}}\sin\theta_0 \tag{6.37.6}$$

Per quanto riguarda I_{cm} abbiamo

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2 + 2\left[\frac{2}{5}MR^2 + M\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\right] \tag{6.37.7}$$

dove il primo termine è il momento di inerzia dell'asta attorno al suo centro, e il secondo il momento di inerzia delle due sfere (il fattore 2) ottenuto aggiungendo al momento di inerzia rispetto al centro il contributo prescritto dal teorema di Steiner.

Domanda 2 In questo caso possiamo considerare istante per istante il moto del manubrio come puro rotolamento attorno al punto di contatto. Quindi per l'energia abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I_0' \dot{\theta}^2 + 3Mg \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta \tag{6.37.8}$$

dove

$$I_0' = I_{cm} + 3M \left\{ \left(R + \frac{L}{2} \right)^2 \cos^2\theta + \left[R + \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta \right]^2 \right\} \tag{6.37.9}$$

Dalla conservazione dell'energia segue adesso

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I_{cm} + 3M\left[\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right]} \sin\theta_0 \tag{6.37.10}$$

minore della precedente. La ragione è che al momento dell'arrivo a terra il centro di massa si sta muovendo anche orizzontalmente (con velocità $v_{cm,x} = -R\dot{\theta}$) e parte dell'energia potenziale iniziale si è trasformata nell'energia cinetica legata a questo moto, quindi non è disponibile come energia cinetica di rotazione.

Domanda 3 L'accelerazione verticale del centro di massa è determinata dall'equazione

$$3M\ddot{y}_{cm} = N - 3Mg \tag{6.37.11}$$

dove N è la reazione vincolare che dobbiamo determinare. D'altra parte

$$\ddot{y}_{cm} = \left(R + \frac{L}{2} \right) \left(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right) \tag{6.37.12}$$

e quindi

$$N = 3M \left[g + \left(R + \frac{L}{2} \right) \left(\ddot{\theta}_f \cos\frac{\theta_0}{2} - \dot{\theta}_f^2 \sin\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \tag{6.37.13}$$

dove $\ddot{\theta}_f$, $\dot{\theta}_f$ sono l'accelerazione angolare e la velocità angolare al momento considerato. Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2} I\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \dot{\theta}_f^2 + 3Mg \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\frac{\theta_0}{2} = 3Mg \left(R + \frac{L}{2} \right) \sin\theta_0 \tag{6.37.14}$$

dove $I(\theta)$ è data dalla (6.37.4) o dalla (6.19) a seconda che si consideri il caso senza attrito o con rotolamento puro. In conclusione per un dato angolo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right) \tag{6.37.15}$$

CC BY NC SA

e derivando

$$\ddot{\theta} = -\frac{3Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\cos\theta \tag{6.37.16}$$

Valutando le espressioni precedenti per $\theta = \theta_0/2$ si ottengono $\ddot{\theta}_f$, $\dot{\theta}_f$ che sostituiti nella Equazione (6.37.13) danno la soluzione cercata.

CC BY NC SA

6.38. Scambio di momento angolare ⋆⋆

Un satellite di massa m ruota in un'orbita circolare di raggio R attorno ad un pianeta di massa $M \gg m$. Inizialmente sia il pianeta che il satellite ruotano su se stessi con una velocità angolari $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_m$, non necessariamente perpendicolari al piano dell'orbita. A causa di forze non meglio specificate i due corpi interagiscono tra di loro, e parte dell'energia del sistema viene dissipata. Supponendo che l'orbita del satellite rimanga circolare, determinare le caratteristiche del sistema quando la massima quantità possibile di energia è stata dissipata.

Soluzione

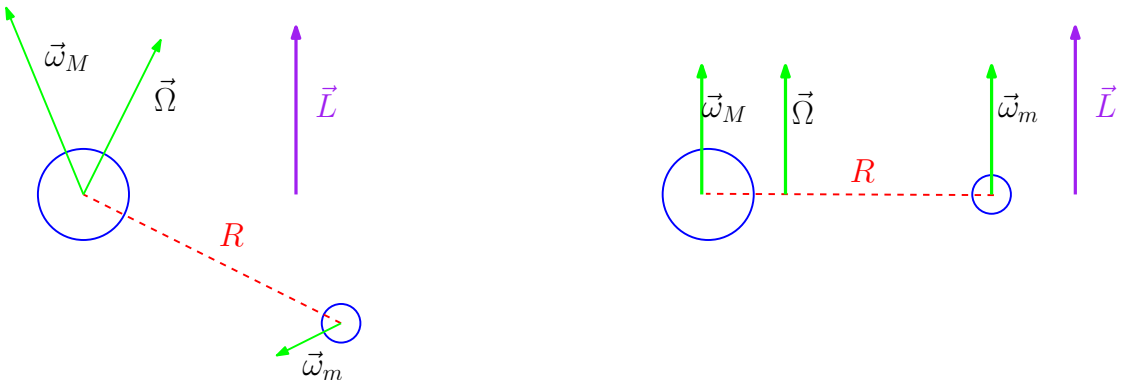


Figura 6.20.: A destra, una possibile configurazione iniziale (vista trasversalmente). Le velocità di rotazione $\vec{\omega}_m$ e $\vec{\omega}_M$ non sono necessariamente perpendicolari al piano dell'orbita, mentre per definizione lo è $\vec{\Omega}$. Nella configurazione finale (a sinistra) $\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_m = \vec{\Omega}$. Di conseguenza tutte e tre sono parallele al momento angolare conservato $\vec{L}$ che determina quindi il piano dell'orbita finale.

Indichiamo con $\vec{\Omega}$ la velocità angolare dell'orbita circolare del satellite. Dato che $M \gg m$ possiamo identificare il centro di questa con il centro del pianeta. Possiamo scrivere l'energia cinetica totale nella forma

$$E_c = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2 + \frac{1}{2} I_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2$$

dove il primo e il secondo termine sono le energie cinetiche dovute alla rotazione di pianeta e satellite attorno al loro centro di massa, e il terzo è l'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa del satellite. Questa energia non si conserva, deve però conservarsi il momento angolare totale del sistema

$$\vec{L} = I_M \vec{\omega}_M + I_m \vec{\omega}_m + m R^2 \vec{\Omega}$$

Possiamo usare questa legge di conservazione per scrivere l'energia cinetica in funzione delle velocità angolari $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_m$

$$E_c = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2 + \frac{1}{2} I_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \right)^2$$

dato che

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \tag{6.38.1}$$

Adesso possiamo minimizzare l'energia cinetica rispetto a $\vec{\omega}_M$ e $\vec{\omega}_m$. Otteniamo le due condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \vec{\omega}_M} &= I_M \vec{\omega}_M - I_M \left(\frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial E_c}{\partial \vec{\omega}_M} &= I_m \vec{\omega}_m - I_m \left(\frac{\vec{L} - I_M \vec{\omega}_M - I_m \vec{\omega}_m}{m R^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dividendo la prima per I_M, la seconda per I_m e sottraendo membro a membro otteniamo

$$\vec{\omega}_m = \vec{\omega}_M$$

e quindi nella configurazione finale pianeta e satellite hanno la stessa velocità angolare di rotazione su se stessi. Sostituendo, ad esempio, nella prima equazione otteniamo

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_m = \frac{\vec{L}}{(I_M + I_m + m R^2)}$$

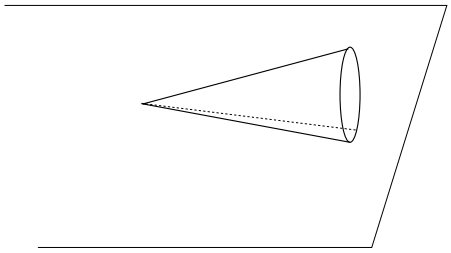
cioè entrambe le velocità angolari sono lungo la direzione del momento angolar iniziale. Per quanto riguarda la velocità angolare orbitale abbiamo adesso, sostituendo nella (6.38.1)

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_M = \vec{\omega}_m$$

In conclusione le velocità angolari orbitali sono adesso perpendicolari al piano dell'orbita, e la velocità angolare orbitale è identica a quella di rotazione. In altre parole il satellite e il pianeta rivolgono l'uno verso l'altro sempre la stessa faccia: si muovono come un unico corpo rigido (Figura (6.20)).

CC BY NC SA

6.39. Rotolamento puro di un cono ⋆⋆



Un cono di raggio R, massa M e altezza h rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo tensore di inerzia, riferito agli assi principali passanti per il centro di massa, vale

$$I = \begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix} .$$

1. Scelto un opportuno sistema di coordinate determinare la posizione del centro di massa in funzione del tempo, se il modulo della sua velocità iniziale vale v_0.
2. Nelle stesse condizioni della domanda precedente determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$ del cono e il suo momento angolare $\vec{L}$.
3. Se il piano viene adesso inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale determinare la frequenza della piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione[9]

Domanda 1

Il centro di massa sarà lungo l'asse del cono. Per determinare la distanza dal vertice si può scrivere

$$\ell_{cm} = \frac{1}{V}\int_0^h z\pi\left(\frac{z}{h}R\right)^2 dz = \frac{\pi\frac{R^2}{h^2}\frac{h^4}{4}}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{3}{4}h\,.$$

Dato che il cono rotola senza strisciare, tutti i suoi punti a contatto con il piano sono fermi, e definiscono l'asse istantaneo di rotazione. In particolare il vertice è sempre a contatto, quindi è un punto fisso. L'altezza del centro di massa rispetto al piano resta costante nel tempo e uguale a

$$z_{cm} = \ell_{cm}\sin\alpha$$

dove abbiamo indicato con α la metà dell'angolo al vertice,

$$\tan\alpha = \frac{R}{h}\,.$$

[9] Primo esercizio dello scritto di Fisica 1 del 19/6/2007

La proiezione del centro di massa sul piano si muoverà invece rimanendo a una distanza dal vertice data da $\rho_{cm} = \ell_{cm} \cos\alpha$. Avremo

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \rho_{cm} \cos\phi \\ y_{cm} &= \rho_{cm} \sin\phi \end{aligned}$$

dove ϕ (l'angolo che determina la posizione dell'asse istantaneo di rotazione) è determinato dalla condizione

$$v_{cm} = \rho_{cm}\dot{\phi}$$

e dato che, come discusso in seguito, il modulo v_{cm} della velocità del centro di massa è costante avremo $\phi = \phi_0 + \frac{v_0}{\rho_{cm}} t$.

Domanda 2

La velocità angolare sarà diretta come l'asse istantaneo di rotazione. Inoltre dovrà essere

$$v_{cm} = \omega z_{cm}$$

possiamo quindi scrivere

$$\vec{\omega} = \frac{v_{cm}}{z_{cm}} \left(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi\right) .$$

Per quanto riguarda il momento angolare, possiamo scriverlo rispetto a un polo preso nel vertice del cono. Dato che questo è un punto fisso possiamo scrivere semplicemente

$$\vec{L} = I_V \vec{\omega}$$

dove I_V è il tensore di inerzia relativo ad esso. Possiamo ottenere quest'ultimo in due passi. Scriviamo anzitutto il tensore di inerzia relativo al vertice riferito agli assi principali del cono. Dal teorema di Steiner abbiamo

$$I_V = \begin{pmatrix} I_0 + m\ell_{cm}^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 + m\ell_{cm}^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix} .$$

Sempre nello stesso sistema possiamo scrivere la velocità angolare nella forma

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\sin\alpha \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

da cui

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ (I_0 + m\ell_{cm}^2)\omega\sin\alpha \\ I_1\omega\cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Quindi $\vec{L}$ è contenuto nel piano determinato da $\vec{\omega}$ e dall'asse del cilindro. Infine $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ sono costanti in modulo e l'angolo tra di essi è pure costante. Possiamo scrivere l'energia cinetica del cilindro nella forma

$$E = \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(I_0 + m\ell_{cm}^2\right)\sin^2\alpha + I_1\cos^2\alpha\right]\omega^2$$

e dalla sua conservazione segue che $\vec{\omega}$ è costante in modulo, quindi anche v_{cm} lo sarà.

Domanda 3

Possiamo risolvere il problema aggiungendo all'energia cinetica un termine di energia potenziale gravitazionale. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + m g d_{cm}$$

dove

$$d_{cm} = z_{cm} \cos\theta - x_{cm} \sin\theta$$

cioè

$$d_{cm} = -\frac{3}{4} h \cos\alpha \sin\theta \cos\phi + \text{costante}\,.$$

Dato che

$$\omega = \dot{\phi} \cot\alpha$$

abbiamo per piccole oscillazioni

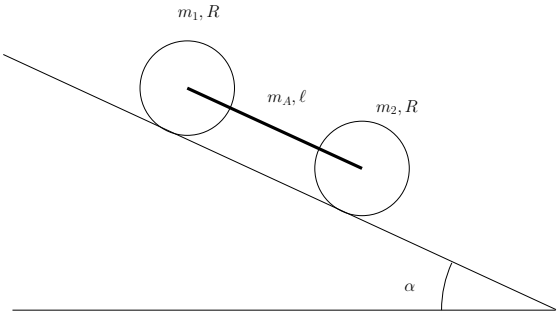
$$E = \frac{1}{2} I \cot^2\alpha \dot{\phi}^2 + \frac{3}{8} m g h \cos\alpha \sin\theta \phi^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 m g h \sin^2\alpha \sin\theta}{4 I \cos\alpha}}$$

6.40. Un carrello in discesa ⋆⋆

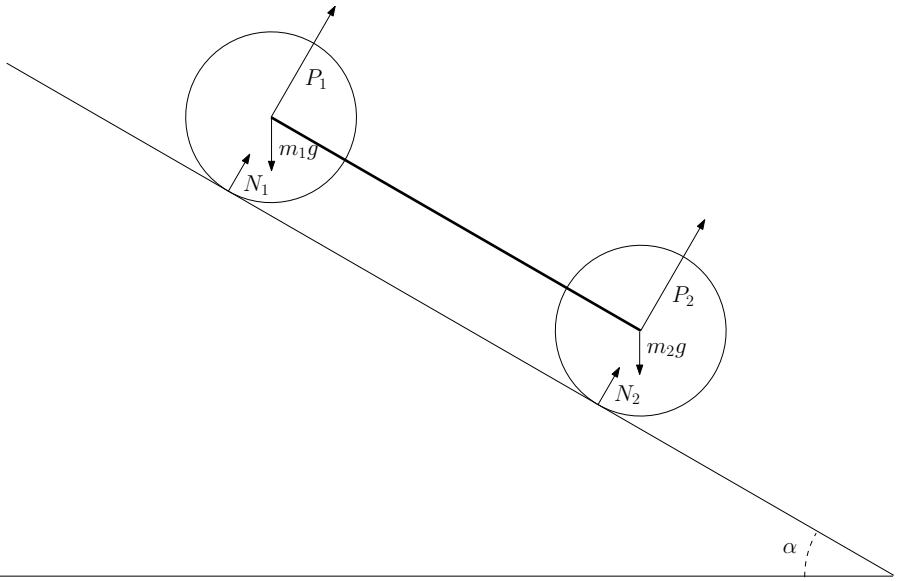
Il carrello in figura è ottenuto unendo due cilindri di massa m_1 e m_2 e raggio R mediante una sbarra di massa m_A e lunghezza ℓ. Sia i cilindri che l'asta sono omogenei. I cilindri sono liberi di ruotare attorno al proprio asse ed è presente attrito statico descritto dal coefficiente μ_s.



1. Assumendo che i due cilindri ruotino senza strisciare calcolare le reazioni normali N_1 e N_2 che il piano esercita su di essi.
2. Calcolare l'accelerazione del centro di massa del carrello.
3. Calcolare il minimo valore di μ_s necessario a permettere ai cilindri di ruotare senza strisciare, per un fissato angolo α.

Soluzione[10]

Domanda 1



[10] Primo esercizio scritto 30/3/2007

La somma delle forze applicate a ciascun cilindro in direzione perpendicolare al piano devono annullarsi. Da questo segue

$$\begin{aligned} N_1 + P_1 - m_1 g \cos\alpha &= 0 \\ N_2 + P_2 - m_2 g \cos\alpha &= 0 \end{aligned}$$

dove come indicato nella figura P_1 e P_2 sono le componenti perpendicolari al piano delle forze che l'asta applica al centro del cilindro. Se consideriamo adesso il momento delle forze applicate all'asta rispetto al suo centro di massa abbiamo che deve essere

$$P_1 \frac{\ell}{2} - P_2 \frac{\ell}{2} = 0$$

mentre la somma delle forze applicate all'asta in direzione perpendicolare al piano deve pure annullarsi:

$$P_1 + P_2 + m_A g \cos\alpha = 0\,.$$

Da queste due relazioni segue

$$P_1 = P_2 = -\frac{1}{2} m_A g \cos\alpha$$

e quindi

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(m_1 + \frac{1}{2} m_A\right) g \cos\alpha \\ N_2 &= \left(m_2 + \frac{1}{2} m_A\right) g \cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Domanda 2

Possiamo scrivere l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_A\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2 - \left(m_1 + m_2 + m_A\right) g x \sin\alpha$$

dove x è una coordinata scelta parallelamente al piano. Dalla condizione di rotolamento puro segue che $\omega = \dot{x}/R$ e poichè $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$, $I_1 = \frac{1}{2} m_2 R^2$ abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{3}{2} m_2 + m_A\right)\dot{x}^2 - \left(m_1 + m_2 + m_A\right) g x \sin\alpha\,.$$

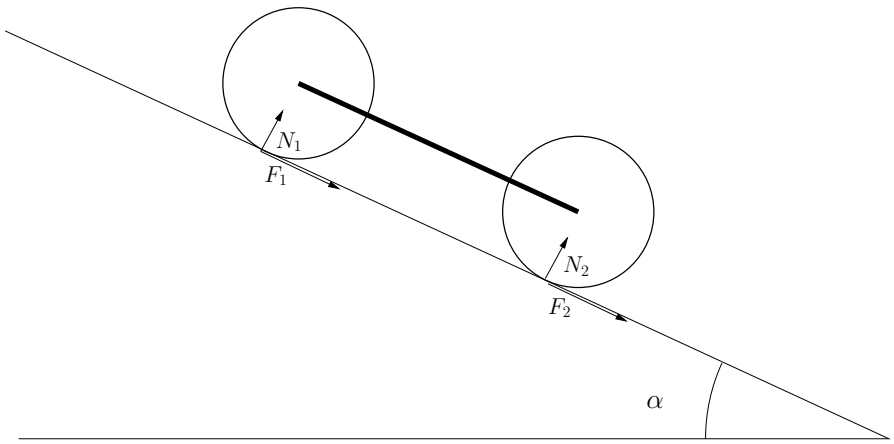
Derivando rispetto al tempo otteniamo l'equazione del moto

$$\ddot{x} = \frac{\left(m_1 + m_2 + m_A\right) g \sin\alpha}{\left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{3}{2} m_2 + m_A\right)}$$

che ci dà direttamente l'accelerazione.

CC BY NC SA

Domanda 3



Possiamo utilizzare la soluzione della domanda precedente e scrivere per ciascun cilindro

$$-I_i \frac{\ddot{x}}{R} = F_i R$$

dove F_i è la forza di attrito. Segue che

$$F_i = -\frac{1}{2} m_i \frac{(m_1 + m_2 + m_A)\, g \sin\alpha}{\left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{3}{2} m_2 + m_A\right)}$$

ma deve essere $|F_i| \leq \mu_s N_i$ da cui

$$m_i \frac{(m_1 + m_2 + m_A)\, g \sin\alpha}{(3m_1 + 3m_2 + 2m_A)} \leq \mu_s \left(m_i + \frac{1}{2} m_A \right) g \cos\alpha$$

ossia per $i = 1, 2$

$$\mu_s \geq \frac{(m_1 + m_2 + m_A)}{(3m_1 + 3m_2 + 2m_A)} \frac{m_i}{\left(m_i + \frac{1}{2} m_A\right)} \tan\alpha\,.$$

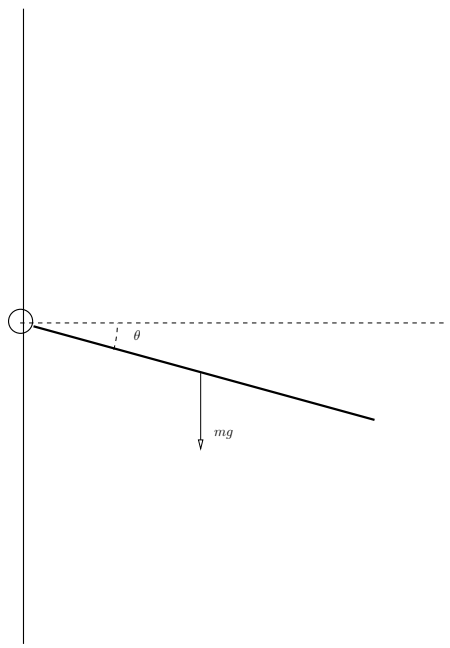
La condizione più restrittiva è quella relativa alla più grande tra le due masse m_1, m_2.

6.41. Oscillazioni forzate di un'asta ⋆⋆

Un'asta di lunghezza ℓ e massa m è fissata a una parete verticale attraverso un giunto elastico con momento di richiamo $M = -k\theta$, dove θ è l'angolo con il quale si deforma il giunto. Si suppone il giunto sufficientemente rigido per cui gli angoli sono piccoli. In assenza di gravità l'asta è perpendicolare alla parete.

1. Calcolare la posizione di equilibrio sotto l'influenza della gravità e il periodo delle piccole oscillazioni.
2. La parete si muove con moto sinusoidale di ampiezza y_0 con frequenza ω. Si calcoli l'ampiezza del moto a regime dell'asta.
3. Il giunto ha una dissipazione viscosa che genera un momento $M_v = -\gamma\dot{\theta}$. Si calcoli l'ampiezza e la fase del moto a regime dell'asta in funzione di ω. Qual'è l'energia dissipata per ciclo?

Soluzione[11]



Problema 1

Riferendosi alla figura, possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$\frac{dL}{dt} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - k\theta \tag{6.41.1}$$

[11] Secondo esercizio compitino 1/4/2009.

dove $L = I\dot{\theta}$ è il momento angolare rispetto ad un polo posto nel giunto elastico. Il momento di inerzia è dato da

$$I = \int_0^\ell \frac{m}{\ell} r^2 dr = \frac{m\ell^2}{3} \,. \tag{6.41.2}$$

Per piccoli angoli possiamo porre $\cos\theta \simeq 1$, ottenendo per la posizione di equilibrio

$$\theta_{eq} = -\frac{mg\ell}{2k} \,. \tag{6.41.3}$$

Nella stessa approssimazione l'equazione del moto si scrive

$$I\ddot{\delta} + k\delta = 0 \tag{6.41.4}$$

dove abbiamo posto $\theta = \theta_{eq} + \delta$. Il periodo delle piccole oscillazioni è dato quindi da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{3k}} \,. \tag{6.41.5}$$

Problema 2

Se la parete si muove secondo $y = y_0 \cos\omega t$ nel sistema solidale ad essa agisce una forza apparente

$$F = m y_0 \omega^2 \cos\omega t \tag{6.41.6}$$

e quindi

$$I\ddot{\delta} + k\delta = \mathcal{M} \tag{6.41.7}$$

dove $\mathcal{M}$ è il momento della forza apparente,

$$\mathcal{M} = m\frac{\ell}{2} y_0 \omega^2 \cos\omega t = \mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_0 e^{i\omega t}\right) \tag{6.41.8}$$

ed abbiamo posto

$$\mathcal{M}_0 = m\frac{\ell}{2} y_0 \omega^2 \,. \tag{6.41.9}$$

Utilizzando il metodo dei fasori otteniamo la soluzione a regime della forma

$$\delta = \mathrm{Re}\left(\mathcal{A} e^{i\omega t}\right) \tag{6.41.10}$$

con

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{M}_0}{(k - I\omega^2)} \tag{6.41.11}$$

che rappresenta l'ampiezza del moto a regime.

Problema 3

L'equazione del moto diventa adesso

$$I\ddot{\delta} + \gamma\dot{\delta} + k\delta = \mathcal{M}\,. \tag{6.41.12}$$

Con lo stesso metodo utilizzato in precedenza otteniamo adesso

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{M}_0}{(k + i\omega\gamma - I\omega^2)} \tag{6.41.13}$$

che corrisponde ad una ampiezza

$$|\mathcal{A}| = \frac{\mathcal{M}_0}{\sqrt{\gamma^2\omega^2 + (k - I\omega^2)^2}} \tag{6.41.14}$$

e a una fase

$$\phi = \arg \mathcal{A} \tag{6.41.15}$$

con

$$\cos\phi = \frac{k - I\omega^2}{\sqrt{\gamma^2\omega^2 + (k - I\omega^2)^2}} \tag{6.41.16}$$

$$\sin\phi = \frac{-\omega\gamma}{\sqrt{\gamma^2\omega^2 + (k - I\omega^2)^2}}\,. \tag{6.41.17}$$

L'energia dissipata in un ciclo si può ottenere a regime calcolando il lavoro fatto dalla forza esterna in un periodo. Tenendo conto che la forza è applicata al centro di massa abbiamo

$$W_{diss} = \int_0^T F \times v\, dt = \int_0^T \mathcal{M} \times \dot{\delta} dt \tag{6.41.18}$$

e d'altra parte

$$W_{diss} = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\mathcal{M}_0 e^{i\omega t}\right) \times \mathrm{Re}\left(i\omega\mathcal{A}e^{i\omega t}\right) dt\,. \tag{6.41.19}$$

Usando l'identità

$$\int_0^T \mathrm{Re}\left(ue^{i\omega t}\right) \mathrm{Re}\left(ve^{i\omega t}\right) dt = \frac{\pi}{\omega}\mathrm{Re}\left(u^* v\right) \tag{6.41.20}$$

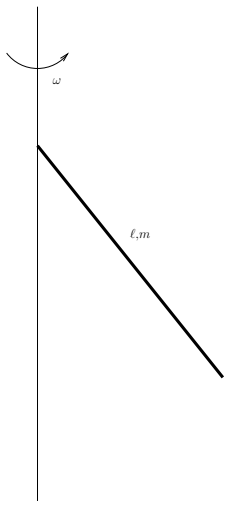
valida per due numeri complessi u, v qualsiasi, troviamo

$$W_{diss} = \frac{\pi}{\omega}\mathrm{Re}\left[i\omega\mathcal{M}_0\mathcal{A}\right] = \frac{\pi}{\omega}\mathrm{Re}\left[\frac{i\omega\mathcal{M}_0^2}{k + i\omega\gamma - I\omega^2}\right] \tag{6.41.21}$$

ossia

$$W_{diss} = \frac{\pi\omega\gamma\mathcal{M}_0^2}{(k - I\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\,. \tag{6.41.22}$$

6.42. Distacco di una bacchetta rotante ⋆⋆



La bacchetta rigida in figura, di lunghezza ℓ, massa m e spessore trascurabile, ruota attorno all'asse verticale con velocità angolare costante ω. L'angolo θ tra asse e bacchetta è fisso.

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema.
2. Calcolare il vettore momento angolare del sistema, $\vec{L}(t)$.
3. Supponendo che a un certo istante il vincolo venga a mancare discutere il moto successivo tenendo conto dell'effetto della gravità.

Soluzione[12]

Domanda 1

L'energia cinetica si può scrivere come energia di pura rotazione attorno al punto fisso,

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{6.42.1}$$

Il calcolo del momento di inerzia I si può fare direttamente, integrando sulla lunghezza della sbarra:

$$I = \int_0^\ell \frac{m}{\ell} (r \sin\theta)^2 \, dr = \frac{m}{3} \ell^2 \sin^2\theta \,. \tag{6.42.2}$$

[12] Primo problema scritto 21/1/2009

Domanda 2

Possiamo calcolare il momento angolare totale sommando i contributi di ogni elemento della sbarra. Questo significa valutare

$$\vec{L} = \int dm \vec{r} \wedge \vec{v} \,. \tag{6.42.3}$$

Introducendo un versore $\hat{\tau}$ nella direzione della bacchetta e identificando l'asse di rotazione con l'asse z possiamo scrivere

$$dm = \frac{m}{\ell} dr \tag{6.42.4}$$

$$\vec{r} = \hat{\tau} r \tag{6.42.5}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega r \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau}\right) \tag{6.42.6}$$

e quindi

$$\vec{L} = \frac{m\omega}{\ell} \hat{\tau} \wedge \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau}\right) \int_0^\ell dr r^2 \,. \tag{6.42.7}$$

Sfruttando l'identità $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ si trova

$$\hat{\tau} \wedge \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau}\right) = \hat{z} - \hat{\tau}\left(\hat{z} \cdot \hat{\tau}\right) = \hat{z} + \cos\theta \hat{\tau} \tag{6.42.8}$$

e quindi, ponendo l'asse x ad un dato istante nel piano contenente l'asse di rotazione e la bacchetta, abbiamo

$$\vec{L} = \frac{m\omega}{3} \ell^2 \left(\hat{z} + \cos\theta \hat{\tau}\right) = \frac{m\omega}{3} \ell^2 \sin\theta \left[\sin\theta \hat{z} + \cos\theta \hat{x}\right] \,. \tag{6.42.9}$$

Notare che il momento angolare è sempre ortogonale alla bacchetta:

$$\hat{\tau} \cdot \vec{L} = \frac{m\omega}{3} \ell^2 \left(\hat{\tau} \cdot \hat{z} + \cos\theta\right) = 0 \,. \tag{6.42.10}$$

Domanda 3

Dal momento in cui il vincolo viene a mancare si conserva il momento angolare e l'energia. Quindi, supponendo che il distacco avvenga quando la bacchetta si trova nel piano z,x:

1. Il centro di massa della bacchetta si muoverà di moto uniformemente accelerato (accelerazione $-g\hat{z}$), con la velocità iniziale che aveva al momento del distacco, cioè
$$\vec{v}_0 = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{dist} = \frac{\ell}{2} \omega \left(\hat{z} \wedge \hat{\tau}\right) = \frac{\ell}{2} \omega \sin\theta \hat{y} \tag{6.42.11}$$

2. Nel sistema del centro di massa, in caduta libera con la bacchetta, non vi sono forze esterne. Il moto è quindi quello di una trottola simmetrica libera.

CC BY NC SA

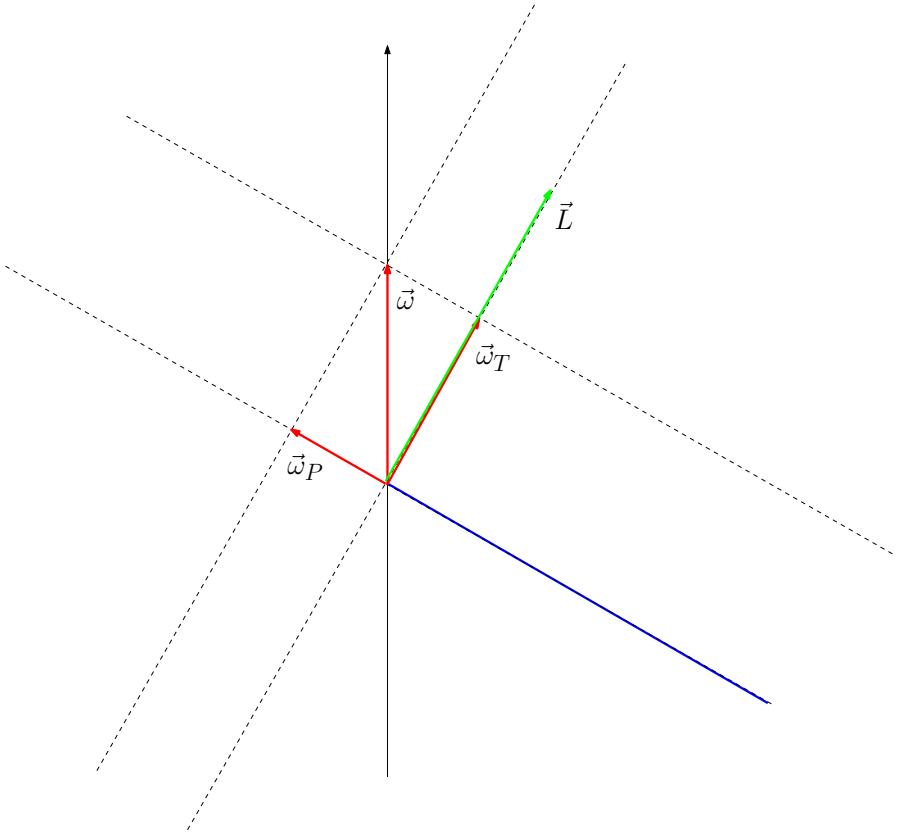


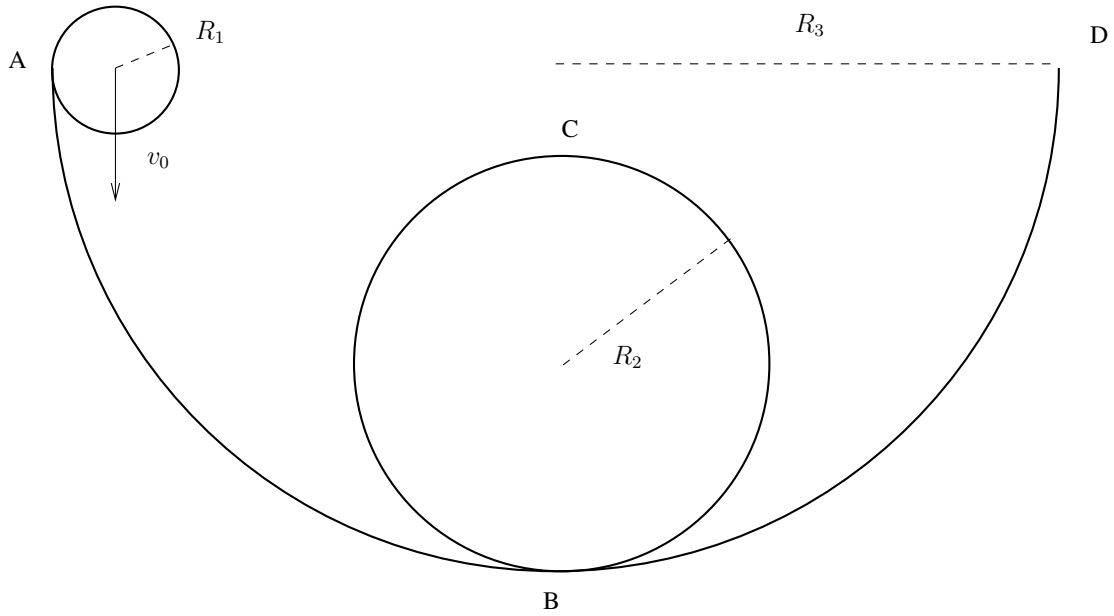
Figura 6.21.: La bacchetta al momento del distacco: il momento angolare è in verde, la velocità angolare in rosso.

3. Ponendoci nel piano identificato dalla bacchetta e dalla velocità angolare ad un istante dato come in Figura 6.21, possiamo scomporre $\vec{\omega}$ in una componente parallela alla bacchetta $\vec{\omega}_P$ e in una trasversale $\vec{\omega}_T$. Dato che il momento di inerzia rispetto all'asse della bacchetta è nullo, avremo

$$\vec{L} = I_T \vec{\omega}_T \tag{6.42.12}$$

dove $I_T = \frac{1}{12} m\ell^2$ è il momento di inerzia della bacchetta rispetto ad un asse trasverso passante per il centro di massa. Quindi anche $\vec{\omega}_T$ si conserva, e la bacchetta ruota attorno a $\vec{L}$ fisso nello spazio con velocità angolare $\omega \sin\theta$.

6.43. Un altro giro della morte ⋆⋆



La guida in figura è formata da da quattro quarti di circonferenza, di raggio R_2 e $R_3 > R_2$ come in figura, che sono collegati nella sequenza $A-B$, $B-C$, $C-B$ e $B-D$. Un disco di raggio $R_1 < R_2$ e massa m rotola senza strisciare sulla guida, partendo dal punto A con velocità del centro di massa $v_{cm} = v_0$.

1. Calcolare in modulo, direzione e verso la reazione vincolare della guida immediatamente prima e immediatamente dopo il primo passaggio per il punto B e dire se essa è impulsiva al momento del passaggio.

2. Ponendo $v_0 = 0$ determinare il massimo valore di R_2 per il quale la guida viene percorsa completamente, considerando il vincolo monolatero.

3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto B.

Soluzione[13]

Domanda 1

Dato che l'energia totale si conserva

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz \tag{6.43.1}$$

[13] Primo problema scritto 11/9/2008

e che velocità del centro di massa e velocità angolare del disco sono legate da $v_{cm} = -R_1\omega$ segue che

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right) v_{cm}^2 + mgz = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mgz \tag{6.43.2}$$

Questo significa che la velocità del centro di massa dipende solo dalla sua posizione z. Quindi immediatamente prima e immediatamente dopo B v_{cm} non sarà cambiata (nemmeno in direzione, dato che sarà sempre orizzontale) e quindi non è presente nessuna forza impulsiva.

Il centro di massa percorre una traiettoria circolare, per cui immediatamente prima di B sarà

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_3 - R_1} = N - mg \tag{6.43.3}$$

e immediatamente dopo

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_2 - R_1} = N - mg \tag{6.43.4}$$

da cui si deduce che la reazione normale della guida è diversa.

Si può osservare che in B l'accelerazione tangenziale del centro di massa è nulla: questo si ricava direttamente scrivendo l'energia nella forma

$$E = \frac{3}{4}m\left(R_3 - R_1\right)^2\dot{\theta}^2 + mg\left(R_3 - R_1\right)\left(1 - \cos\theta\right) \tag{6.43.5}$$

valida prima di B e derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\dot{\theta}\sin\theta = 0 \tag{6.43.6}$$

si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2\ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\sin\theta = 0 \tag{6.43.7}$$

che permettono di concludere $\ddot{\theta} = 0$ in $\theta = 0$. Analogamente si può derivare l'equazione del moto valida dopo B

$$\frac{3}{2}m\left(R_2 - R_1\right)^2\ddot{\theta} + mg\left(R_2 - R_1\right)\sin\theta = 0 \tag{6.43.8}$$

in entrambi i casi si è utilizzata come coordinata l'angolo tra la direzione verticale e la normale alla guida.

Dato che non c'è accelerazione tangenziale, non si avranno forze orizzontali, e la reazione ha la sola componente normale discontinua calcolata precedentemente.

Domanda 2

La velocità nel punto C si calcola dalla conservazione dell'energia:

$$mgR_3 = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mg\left(2R_2 - R_1\right) \tag{6.43.9}$$

da cui

$$v_{cm}^2 = \frac{4}{3}g\left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \tag{6.43.10}$$

ma per poter passare deve essere

$$m\frac{v_{cm}^2}{(R_2 - R_1)} \geq mg \tag{6.43.11}$$

da cui

$$\frac{4}{3}\left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \geq \left(R_2 - R_1\right) \tag{6.43.12}$$

e quindi

$$R_2 \leq \frac{7R_1 + 4R_3}{11} \tag{6.43.13}$$

Domanda 3

Il periodo è la somma di un semiperiodo a sinistra di B più un semiperiodo a destra. Il primo è determinato dalla equazione del moto scritta in precedenza, sviluppata per piccole oscillazioni:

$$\frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2\ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\theta = 0 \tag{6.43.14}$$

da cui

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_3 - R_1\right)}{2g}} \tag{6.43.15}$$

e analogamente la seconda

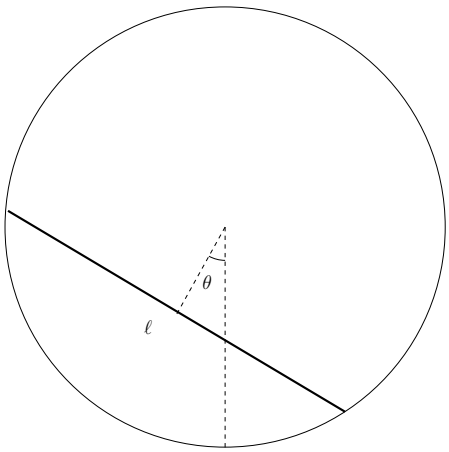
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_2 - R_1\right)}{2g}} \tag{6.43.16}$$

quindi

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{3}{2g}}\left(\sqrt{R_3 - R_1} + \sqrt{R_2 - R_1}\right) \tag{6.43.17}$$

6.44. Sbarra in guida circolare, vincolo bilatero ⋆⋆

Una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m ha i due estremi vincolati (vincolo bilatero) ad una guida circolare di raggio $r > \ell/2$ come in figura. La guida è montata verticalmente, in presenza di gravità. Non esiste nessun tipo di attrito.



1. Se inizialmente $\theta = 0$ determinare il minimo valore di $\dot{\theta}(0)$ che permette alla sbarra di percorrere un giro completo sulla guida.
2. Scrivere le equazioni del moto del sistema. Esistono quantità conservate?
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione[14]

Domanda 1

Possiamo scrivere l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta$$

In questa espressione d è la distanza tra il punto medio della sbarra (il suo centro di massa) e il centro della guida, che vale

$$d = \sqrt{r^2 - \frac{\ell^2}{4}}$$

I è il momento di inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, che passa per il centro della guida. I si calcola applicando il teorema di Steiner:

$$I = \frac{1}{12} M\ell^2 + Md^2$$

[14] Primo esercizio scritto 11/1/2007

Per percorrere un giro completo dovrà essere

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2(0) - Mgd > Mgd$$

cioè

$$\dot{\theta}(0) > \sqrt{\frac{4Mgd}{I}}$$

Domanda 2

Si conserva l'energia totale, dato che le reazioni vincolari non fanno lavoro sul sistema. Le equazioni del moto si possono ottenere rapidamente derivando E rispetto al tempo

$$\dot{E} = I\ddot{\theta}\dot{\theta} + Mgd\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

da cui

$$I\ddot{\theta} + Mgd\sin\theta = 0$$

Domanda 3

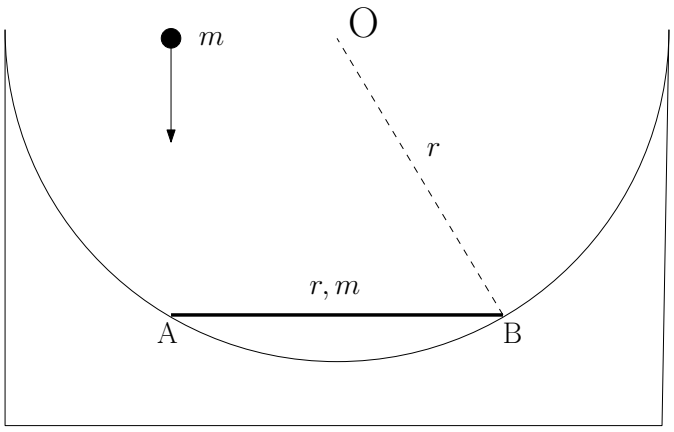
Possiamo utilizzare l'equazione del moto determinata precedentemente. La posizione di equilibrio stabile è chiaramente $\theta = 0$, che è un minimo dell'energia potenziale gravitazionale. Considerando piccole oscillazione possiamo porre $\sin\theta \simeq \theta$ e quindi

$$I\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0$$

Questa è l'equazione del moto di un oscillatore armonico di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

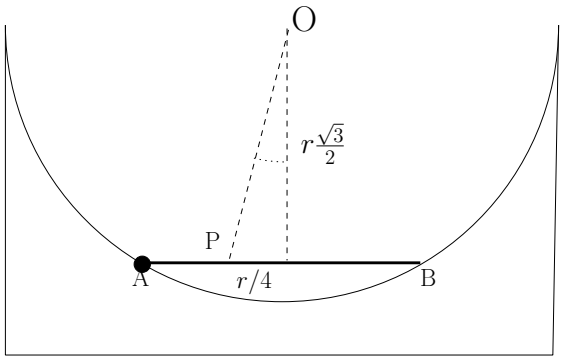
6.45. Urto con un'asta sul fondo di una scodella ⋆⋆



Un'asta di massa m e lunghezza r si muove con gli estremi vincolati ad una guida semicircolare priva di attrito. Il raggio della guida è uguale alla lunghezza dell'asta, e quest'ultima si trova inizialmente in equilibrio nella posizione in figura. Una particella di massa uguale a quella dell'asta viene lasciata cadere sulla verticale di un'estremo dell'asta, da un'altezza iniziale uguale a quella del centro della guida. L'urto con l'estremo dell'asta è istantaneo e la particella rimane attaccata ad essa.

1. Determinare l'angolo che l'asta forma con l'orizzontale nella posizione di equilibrio del sistema.
2. Calcolare l'energia dissipata durante l'urto.
3. Calcolare l'altezza massima raggiunta dal centro di massa del sistema dopo l'urto.

Soluzione[15]



[15] Primo esercizio compitino 23 marzo 2010

Domanda 1

Il centro di massa del sistema si trova nel punto P posto a una distanza $r/4$ dal punto A, e la posizione di equilibrio si avrà quando l'energia potenziale gravitazionale è minima, cioè quando P si troverà sotto O. Questo significa che l'asta avrà ruotato di un angolo θ dato da

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{4}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Domanda 2

Immediatamente prima dell'urto la velocità della particella vale ($h = r\sqrt{3}/2$ è l'altezza da cui cade)

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{gr\sqrt{3}}$$

Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto al punto O, perchè le uniche forze impulsive esterne (le reazioni vincolari) hanno momento nullo. Questo vale immediatamente prima

$$mv_0\frac{r}{2} = m\frac{r}{2}\sqrt{gr\sqrt{3}}$$

e immediatamente dopo$I\omega$ dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto ad O:

$$I = \left(\frac{1}{12}mr^2 + \frac{3}{4}mr^2\right) + mr^2 = \frac{11}{6}mr^2$$

Nell'espressione precedente il termine tra parentesi è il momento di inerzia della sbarra, calcolato tramite il teorema di Steiner, e l'altro il contributo della particella. Abbiamo quindi

$$\omega^2 = \left(\frac{mr}{2I}\right)^2 gr\sqrt{3}$$

L'energia cinetica del sistema dopo l'urto vale quindi

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{44}mgr$$

mentre prima valeva

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mgr$$

l'energia dissipata è quindi

$$\Delta E = E_i - E_f = \frac{19}{44}\sqrt{3}mgr$$

Domanda 3

Il centro di massa raggiungerà la sua altezza massima rispetto alla quota iniziale quando tutta l'energia cinetica si sarà convertita in energia potenziale. Quindi

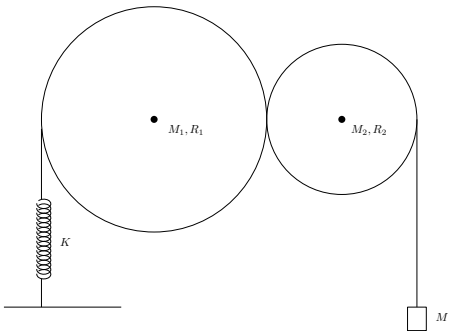
$$\frac{3\sqrt{3}}{44}mgr = 2mg\Delta h$$

ossia

$$\Delta h = \frac{3\sqrt{3}}{88}r$$

CC BY NC SA

6.46. Oscillatore con carrucole e corpi rigidi ⋆⋆



I due dischi in figura, di massa M_1, M_2 e raggio R_1, R_2 sono vincolati a ruotare intorno ai loro centri e lo fanno senza strisciare uno sull'altro. Una massa M è appesa a un filo inestensibile avvolto al disco di destra, il sinistro è collegato mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla ad un punto fisso.

1. Il sistema è inizialmente in quiete, e l'allungamento della molla è nullo. Viene lasciato libero di muoversi: calcolare di quanto si abbassa al massimo la massa M.
2. Mostrare che il sistema è equivalente ad un oscillatore armonico, e determinarne la frequenza.
3. Se sulla massa M agisce una forza di attrito viscoso $F = -\lambda v$, dove λ è una costante positiva dalle opportune dimensioni, valutare il fattore di qualità dell'oscillatore.

Soluzioni[16]

Domanda 1 L'energia del sistema si conserva, e vale

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2} \delta^2$$

dove ω_1, ω_2 sono le velocità angolari dei due cilindri ed y l'altezza della massa misurata rispetto alla posizione iniziale. La deformazione della molla δ è data da $\delta = y$ a causa della condizione di rotolamento puro. Uguagliando l'energia iniziale a quella nella posizione di massimo allungamento abbiamo

$$Mgy + \frac{K}{2} y^2 = 0$$

da cui otteniamo il massimo abbassamento

$$y = -\frac{2Mg}{K}$$

[16] Primo esercizio compitino 13 aprile 2011

Domanda 2 Le condizioni di rotolamento puro sono

$$\begin{aligned}\omega_1 R_1 &= -\omega_2 R_2\\ \omega_2 R_2 &= y\end{aligned}$$

da cui segue che l'energia può essere scritta nella forma (usando $I_1 = M_1 R_1^2/2$ e $I_2 = M_2 R_2^2/2$)

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2}y^2$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}\ddot{y} + Mg\dot{y} + Ky\dot{y} = 0$$

troviamo le equazioni del moto

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

che sono quelle di un oscillatore armonico sottoposto ad una forza costante. La frequenza sarà dunque

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{2M + M_1 + M_2}}$$

Non volendo utilizzare l'energia, possiamo scrivere direttamente le equazioni del moto. Per la massa sospesa abbiamo

$$M\ddot{y} = -Mg + T$$

dove T è la tensione del filo. La seconda equazione cardinale per il primo cilindro si scrive

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -KR_1^2\theta_1 + FR_1$$

dove F è la forza applicata al punto di contatto e θ_1 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. Per il secondo abbiamo

$$I_2\ddot{\theta}_2 = FR_2 - TR_2$$

dove θ_2 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. La condizione di puro rotolamento si scrive

$$R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2$$

ossia

$$R_1\theta_1 = -R_2\theta_2$$

Inoltre

$$y = R_2\theta_2$$

Esprimendo tutte le equazioni in funzione di y abbiamo

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -Mg + T \\ I_1\ddot{y} &= -KR_1^2 y - FR_1^2 \\ I_2\ddot{y} &= FR_2^2 - TR_2^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\left(M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right)\ddot{y} = -Mg - Ky$$

ossia

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

Domanda 3 In presenza di attrito viscoso l'equazione del moto diventa

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + \lambda\dot{y} + Ky = -Mg$$

Il fattore di qualità è dato dal prodotto

$$Q = \omega\tau$$

dove τ è il tempo di smorzamento,

$$\tau = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}$$

Quindi

$$Q = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}\sqrt{\frac{K}{M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{2K\left(2M + M_1 + M_2\right)}$$

6.47. Ancora sulla caduta di un manubrio ⋆⋆

Facendo riferimento all'esercizio 6.37 determinare come varia durante la caduta (cioè in funzione di θ) la reazione tangente al piano di appoggio se

1. il piano è privo di attrito
2. Il manubrio ruota senza strisciare sul piano di appoggio

Soluzione

Se il piano è privo di attrito la reazione tangente è per definizione nulla.

Nel caso di rotolamento puro invece possiamo scrivere

$$R_x = 3M\ddot{x}_{cm} \tag{6.47.1}$$

dove x_{cm} è la posizione orizzontale del centro di massa del sistema rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Fissando un'origine sul piano possiamo scrivere

$$x_{cm} = X + \left(R + \frac{L}{2}\right)\cos\theta \tag{6.47.2}$$

dove X è la posizione del punto di appoggio del manubrio rispetto all'origine scelta. Derivando rispetto al tempo abbiamo

$$\dot{x}_{cm} = \dot{X} - \dot{\theta}\left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.47.3}$$

Ma $\dot{X}$ è anche la velocità del centro della sfera appoggiata a terra, che vale $-R\dot{\theta}$ a causa della condizione di rotolamento. Quindi

$$\dot{x}_{cm} = -R\dot{\theta} - \dot{\theta}\left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta \tag{6.47.4}$$

Derivando ancora abbiamo

$$\ddot{x}_{cm} = -R\ddot{\theta} - \left(R + \frac{L}{2}\right)\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right) \tag{6.47.5}$$

e quindi

$$R_x = -3M\left[R\ddot{\theta} + \left(R + \frac{L}{2}\right)\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right)\right] \tag{6.47.6}$$

Dalla legge di conservazione dell'energia scritta nell'esercizio 6.37 possiamo scrivere $\dot{\theta}^2$ in funzione dell'angolo, ottenendo (Equazioni (6.37.8) e (6.37.9))

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6Mg\left(R + \frac{L}{2}\right)}{I_{cm} + 3M\left\{\left(R + \frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta + \left[R + \left(R + \frac{L}{2}\right)\sin\theta\right]^2\right\}}\sin\theta_0 \equiv F(\theta) \tag{6.47.7}$$

CC BY NC SA

e derivando rispetto al tempo otteniamo (omettiamo i calcoli per semplicità)

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{dF}{d\theta} \tag{6.47.8}$$

che sostituite nella (6.47.6) danno la soluzione del problema. Notare che omettendo il termine X nella (6.47.2) si sarebbe ottenuto un risultato scorretto, infatti $(R+L/2)\cos\theta$ è la posizione orizzontale del centro di massa rispetto al punto di contatto tra corpo rigido e piano orizzontale, che si muove orizzontalmente ed in particolare accelera.

6.48. Caduta di due aste incernierate ⋆⋆

Due aste di lunghezza ℓ_1 ed ℓ_2 e di massa m_1 e m_2 sono collegate ad un estremo da una cerniera che permette una rotazione libera. L'altro estremo dell'asta di lunghezza ℓ_1 è fissato ad un punto fisso, come in Figura 6.22, con un altra cerniera identica alla precedente. Inizialmente le due aste sono in quiete, ed entrambe inclinate di un angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Vengono quindi lasciate libere di cadere sotto l'azione di un campo di gravità costante.

Per opportuni valori di ℓ_1, ℓ_2, m_1 e m_2 è possibile che durante la caduta le aste rimangano allineate?

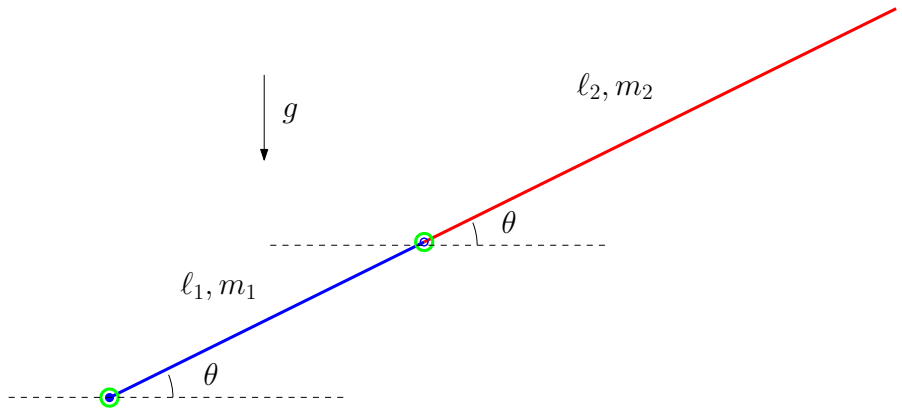


Figura 6.22.: Le due aste (blu e rossa) e gli snodi (in verde). Nella configurazione iniziale le sbarre sono allineate, come in figura.

Soluzione

Supponiamo che le due aste rimangano allineate, e verifichiamo che le equazioni cardinali siano consistenti. La seconda equazione cardinale per il sistema complessivo, scegliendo come polo la cerniera che si trova ad una estremità, si scrive

$$\left[\frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{12}m_2\ell_2^2 + m_2\left(\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2\right)^2\right]\ddot{\theta} = -\left[\frac{1}{2}m_1\ell_1 + m_2\left(\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2\right)\right]g\cos\theta \tag{6.48.1}$$

che permette subito di calcolare l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$. La seconda equazione cardinale per la sbarra di lunghezza ℓ_2, rispetto al suo centro di massa, si scrive invece

$$\frac{1}{12}m_2\ell_2^2\ddot{\theta} = F_\perp\frac{\ell_2}{2} \tag{6.48.2}$$

dove $F_\perp$ è la componente della forza che agisce sulla sbarra alla giuntura perpendicolare alla sbarra stessa. Da questo segue

$$F_\perp = \frac{1}{6}m_2\ell_2\ddot{\theta} \tag{6.48.3}$$

Chiaramente le equazioni (6.48.1) e (6.48.2) ammettono una soluzione per qualsiasi valore dei parametri, quindi non ci danno informazioni sul mantenimento dell'allineamento tra le due sezioni. Però in linea di principio permettono di calcolare in modo univoco $\theta(t)$ e $F_\perp$.

Date queste informazioni, verifichiamo la compatibilità con le prime equazioni cardinali. Consideriamo adesso l'accelerazione tangenziale del centro di massa della sbarra di lunghezza ℓ_2. Deve essere

$$m_2\left(\ell_1+\frac{\ell_2}{2}\right)\ddot{\theta}=-m_2 g\cos\theta-F_\perp \tag{6.48.4}$$

ossia, sostituendo l'espressione di $F_\perp$ determinata precedentemente,

$$\left(\ell_1+\frac{2}{3}\ell_2\right)\ddot{\theta}=-g\cos\theta \tag{6.48.5}$$

Sostituiamo infine $\ddot{\theta}$ usando la (6.48.1)

$$\left(\ell_1+\frac{2}{3}\ell_2\right)\left[\frac{1}{2}m_1\ell_1+m_2\left(\ell_1+\frac{1}{2}\ell_2\right)\right]=\frac{1}{3}m_1\ell_1^2+\frac{1}{12}m_2\ell_2^2+m_2\left(\ell_1+\frac{1}{2}\ell_2\right)^2 \tag{6.48.6}$$

Questa è la relazione cercata tra i parametri.

Studiamo in particolare il caso in cui la densità lineare di massa delle due aste è la stessa. In questo caso abbiamo

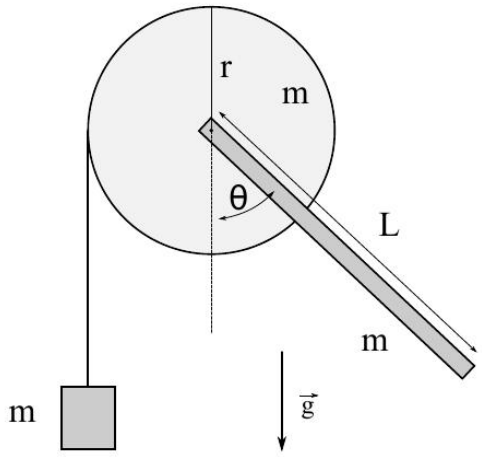
$$\left(\ell_1+\frac{2}{3}\ell_2\right)\left[\frac{1}{2}\ell_1^2+\ell_2\left(\ell_1+\frac{1}{2}\ell_2\right)\right]=\frac{1}{3}\ell_1^3+\frac{1}{12}\ell_2^3+\ell_2\left(\ell_1+\frac{1}{2}\ell_2\right)^2 \tag{6.48.7}$$

che si può semplificare come

$$\ell_1\left[\ell_1 m_1+\ell_2\left(2m_1+m_2\right)\right]=0 \tag{6.48.8}$$

Quindi, a parte il caso banale $\ell_1=0$, non è possibile mantenere le sbarre allineate durante la caduta.

6.49. Pendolo fisico con contrappeso ⋆⋆



Un'asta omogenea di lunghezza L, massa m e spessore trascurabile è rigidamente connessa ad un disco di raggio r e massa m, come in figura. Il disco è vincolato a ruotare attorno ad un perno fisso passante per il suo centro. Uno degli estremi dell'asta coincide con il centro del disco. Attorno al disco è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, che scorre sul bordo senza strisciare. All'estremità inferiore del filo è sospeso un corpo puntiforme di massa m. Tutti e tre i corpi hanno la stessa massa. Il tutto è immerso in un campo gravitazionale uniforme di intensità g diretto verso il basso.

1. Assumendo che la sbarra sia inizialmente ferma formando un angolo θ_0 noto con la verticale, determinare quali condizioni devono soddisfare i parametri del sistema (m, L e r) affinchè la massa sospesa al filo acceleri verso il basso.

2. Trovare eventuali posizioni di equilibrio stabile del sistema, determinando che condizioni devono essere soddisfatte dai parametri affinchè esistano.

3. Nell'ipotesi che una posizione di equilibrio stabile esista, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a questa.

Soluzione[17]

Domanda 1

Il disco ruota soggetto ai momenti di due forze, calcolati rispetto al centro del disco: la forza peso dell'asta e la tensione della fune:

$$I\dot{\omega} = -\frac{L}{2}mg\sin\theta + rT \tag{6.49.1}$$

[17] Primo problema compitino 18 aprile 2011

dove I è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto al perno del disco. Per ora non serve calcolarlo. Abbiamo preso come verso positivo per ω quello che determina una rotazione in senso anti-orario. Il moto del corpo appeso al filo è determinato dall'equazione

$$m\ddot{z} = -mg + T \tag{6.49.2}$$

dove z è crescente verso l'alto. Il fatto che la fune non strisci sul disco dà il vincolo:

$$\ddot{z} = -r\dot{\omega} \tag{6.49.3}$$

Sostituendo nell'Equazione (6.49.1) e ricavando T dalla (6.49.2) si ottiene

$$\ddot{z} = mg\frac{\frac{L}{2}\sin\theta - r}{\frac{I}{r} + mr} \tag{6.49.4}$$

Il corpo accelera verso il basso se $\ddot{z} < 0$, ovvero se

$$L < \frac{2r}{\sin\theta} \tag{6.49.5}$$

Domanda 2

Per trovare le posizioni di equilibrio si scrive l'energia potenziale del sistema e si cercano i minimi. L'energia potenziale ha solamente contributi gravitazionali:

$$U = mgz - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mgr\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mg\left(r\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right) \tag{6.49.6}$$

dove si è usata la relazione di rotolamento della corda ($r\dot{\theta} = -\dot{z}$) e si è omessa una costante irrilevante. Otteniamo la derivata

$$\frac{dU}{d\theta} = mg\left(-r + \frac{L}{2}\sin\theta\right) \tag{6.49.7}$$

che si annulla quando

$$\sin\theta = \frac{2r}{L} \tag{6.49.8}$$

Esiste soluzione solamente se $2r/L < 1$ ovvero $L > 2r$. In questo caso esistono due angoli che danno lo stesso seno, uno compreso tra 0 e $\pi/2$ e l'altro compreso tra $\pi/2$ e π. Per vedere quali posizioni sono di equilibrio stabile, serve la derivata seconda

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg\frac{L}{2}\cos\theta \tag{6.49.9}$$

che è positiva (equilibrio stabile) per $0 < \theta_{eq} < \pi/2$ e negativa (equilibrio instabile) per $\pi/2 < \theta_{eq} < \pi$.

CC BY NC SA

Domanda 3

La frequenza delle piccole oscillazioni si trova ponendo $\theta = \theta_{eq} + \delta$ nell'espressione dell'energia

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\left[r\theta - \frac{L}{2}\cos\theta\right] \tag{6.49.10}$$

Sviluppando al secondo ordine si trova

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq} + \delta\right) - \frac{L}{2}\cos\left(\theta_{eq} + \delta\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq} + \delta\right) - \frac{L}{2}\cos\theta_{eq} + \frac{L}{2}\delta\sin\theta_{eq} - \frac{1}{2}\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq}\right] + O(\delta^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq} + \text{costante} + O(\delta^2) \end{aligned} \tag{6.49.11}$$

Il momento d'inerzia rispetto al perno è dato dalla somma dei contributi del disco e dell'asta (che si ottiene usando il teorema di Koenig):

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = m\left(\frac{r^2}{2} + \frac{L^2}{3}\right) \tag{6.49.12}$$

La pulsazione delle piccole oscillazioni è data infine da

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\frac{L}{2}\cos\theta_{eq}}{I + mr^2} = \frac{mg\frac{L}{2}\sqrt{1 - \sin^2\theta_{eq}}}{m\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} \\ &= \frac{g\frac{L}{2}\sqrt{1 - \frac{4r^2}{L^2}}}{\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} = \frac{g\sqrt{\frac{L^2}{4} - r^2}}{\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} \end{aligned} \tag{6.49.13}$$

CC BY NC SA

6.50. Un carretto in discesa ⋆⋆

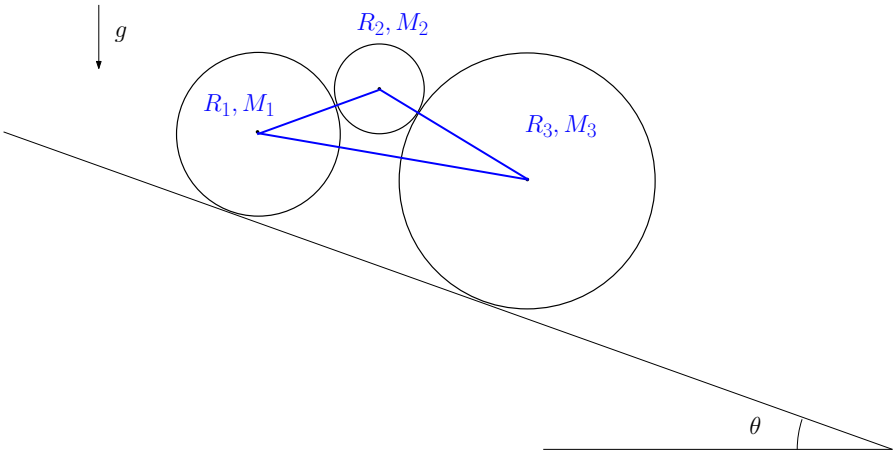


Figura 6.23.: Lo schema del carrello. I tre cilindri hanno massa M_1, M_2, M_3 e raggi R_1, R_2, R_2.

Un carretto è costruito come in Figura 6.23 da tre cilindri uniti tra loro da tre barre rigide e prive di massa. I cilindri possono ruotare liberamente attorno al proprio asse. Si ha rotolamento puro sia nei punti di contatto tra i cilindri, sia nel contatto tra cilindri e piano.

Il carretto è appoggiato su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, ed è immerso in un campo gravitazionale costante.

1. Il carretto può scendere lungo il piano per qualsiasi valore di R_1, R_2 e R_3?
2. Calcolare l'accelerazione del carretto.

Soluzione

Se indichiamo con ω_1, ω_2 e ω_3 le velocità angolari dei tre cilindri le condizioni di rotolamento puro sul piano inclinato danno

$$v_{cm} = -R_1\omega_1 \tag{6.50.1}$$
$$v_{cm} = -R_3\omega_3 \tag{6.50.2}$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa del carretto, parallela al piano. Imponendo rotolamento puro anche nei punti di contatto tra i cilindri abbiamo inoltre

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 \tag{6.50.3}$$
$$\omega_3 R_3 = -\omega_2 R_2 \tag{6.50.4}$$

Abbiamo quattro condizioni per le quattro variabili v_{cm}, ω_1, ω_2 e ω_3 che però non sono tutte indipendenti tra loro: ad esempio sottraendo membro a membro le Equazioni (6.50.1) e (6.50.2) oppure le Equazioni (6.50.3) e (6.50.4) otteniamo infatti lo stesso

risultato. In conclusione è possibile esprimere tutte le velocità angolari in funzione della velocità v_{cm}

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{v_{cm}}{R_1}\\ \omega_2 &= \frac{v_{cm}}{R_2}\\ \omega_3 &= -\frac{v_{cm}}{R_3}\end{aligned}$$

ma quest'ultima può avere un valore arbitrario e quindi la discesa è possibile.

Un metodo veloce per calcolare l'accelerazione è scrivere l'energia del carretto. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2 + M_3\right)v_{cm}^2 + \left(M_1 + M_2 + M_3\right)gh \quad (6.50.5)$$

dove $I_1 = M_1R_1^2/2$, $I_2 = M_2R_2^2/2$ e $I_3 = M_3R_3^2/2$ sono i momenti di inerzia dei cilindri rispetto ad un asse passante per il centro di massa. Possiamo anche scrivere

$$h = h_0 - s_{cm}\sin\theta$$

dove s_{cm} è lo spostamento del centro di massa rispetto alla posizione iniziale, che si trova ad una quota h_0. Chiaramente $v_{cm} = \dot{s}_{cm}$. Sostituendo abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(M_1 + M_2 + M_3\right)\dot{s}_{cm}^2 + \left(M_1 + M_2 + M_3\right)g\left(h_0 - s_{cm}\sin\theta\right) \quad (6.50.6)$$

e derivando rispetto al tempo

$$\frac{3}{2}\left(M_1 + M_2 + M_3\right)\dot{s}_{cm}\ddot{s}_{cm} - \left(M_1 + M_2 + M_3\right)g\dot{s}_{cm}\sin\theta = \dot{E} = 0 \quad (6.50.7)$$

da cui

$$\ddot{s}_{cm} = \frac{2}{3}g\sin\theta \quad (6.50.8)$$

6.51. Caduta di una torre ⋆⋆⋆

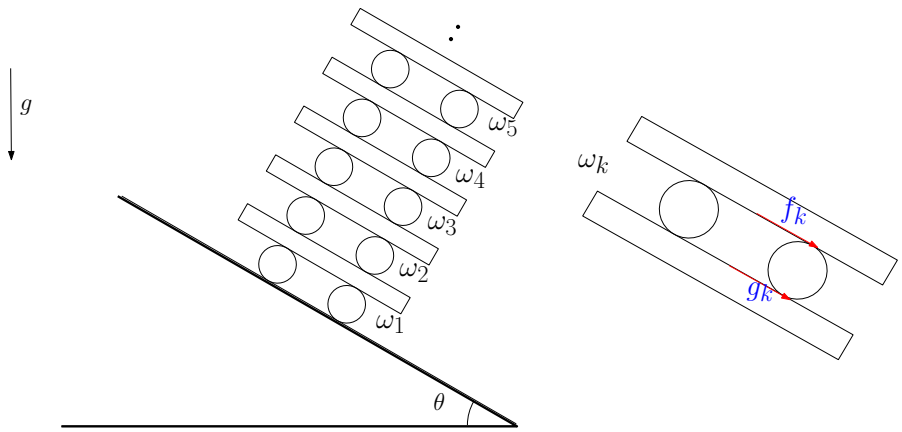


Figura 6.24.: La torre sul piano inclinato. Con g_k si indica la componente della forza di contatto esercitata dallo strato k-simo di cilindri sul piano inferiore parallela a quest'ultimo. Similmente con f_k si indica la componente della forza di contatto esercitata dallo strato k-simo di cilindri sul piano superiore, sempre parallela a quest'ultimo.

Su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α si costruisce una torre come in Figura 6.24 sovrapponendo un numero infinito di strati. Ciascun strato è formato da una coppia di cilindri di raggio R e massa M, sui quali appoggia un parallelepipedo di massa M. I cilindri rotolano senza strisciare su tutti i piani con i quali sono a contatto.

Determinare le accelerazioni angolari dei cilindri.

Soluzione

Se scriviamo le equazioni del moto per i cilindri e per i parallelepipedi, notiamo che queste consistono in relazioni lineari tra le costanti in gioco. Inoltre l'unica componente rilevante dell'accelerazione di gravità è quella parallela al piano. Di conseguenza per motivi dimensionali l'accelerazione angolare dei cilindri del primo strato dovrà essere della forma

$$\dot{\omega}_1 = \beta \frac{g \sin\theta}{R} \tag{6.51.1}$$

dove β è una costante adimensionale da determinare. Per la condizione di rotolamento puro l'accelerazione del primo parallelepipedo è parallela al piano inclinato e vale

$$a_1 = -2R\dot{\omega}_1 = -2\beta g \sin\theta \tag{6.51.2}$$

Consideriamo adesso il sistema appoggiato su questo parallelepipedo. Dato che la torre è costituita da un numero infinito di strati, esso è indistinguibile dalla torre completa. L'unica differenza è che nel sistema solidale con la base dovremo tenere conto della forza

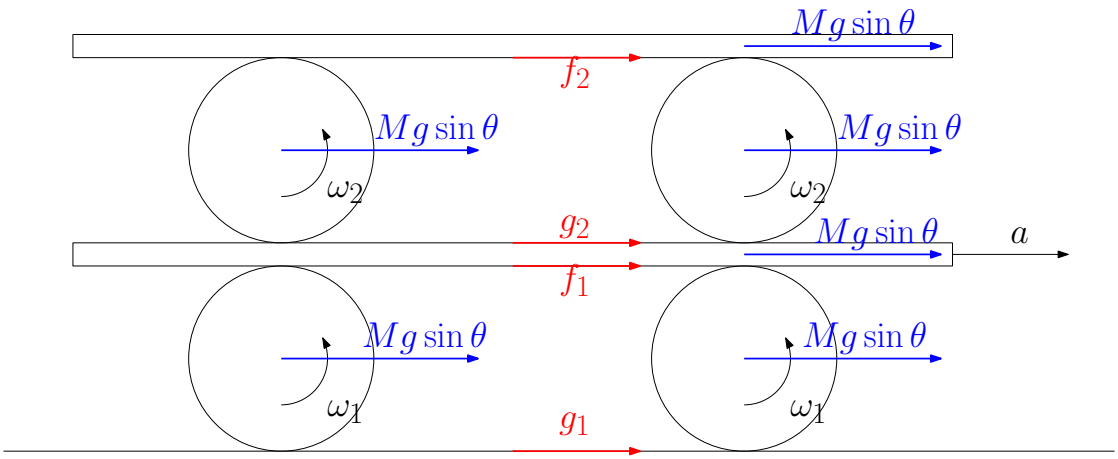


Figura 6.25.:

apparente dovuta all'accelerazione, che si tradurrà in una accelerazione di gravità efficace lungo il piano uguale a

$$g' \sin\theta = g\sin\theta - a_1 = g\sin\theta\,(1+2\beta) \tag{6.51.3}$$

e di conseguenza

$$\dot{\omega}_2 = \beta\frac{g'\sin\theta}{R} = \beta\frac{g\sin\theta}{R}\,(1+2\beta) \tag{6.51.4}$$

Scriviamo adesso le equazioni del moto per i cilindri del primo strato. Abbiamo per il centro di massa di ciascuno di essi

$$-MR\dot{\omega}_1 = -M\beta g\sin\theta = Mg\sin\theta - \frac{1}{2}\,(f_1+g_1) \tag{6.51.5}$$

e per l'accelerazione angolare

$$I\dot{\omega}_1 = \frac{1}{2}MR^2\beta\frac{g\sin\theta}{R} = \frac{1}{2}R\,(f_1-g_1) \tag{6.51.6}$$

Per il centro di massa del parallelepipedo abbiamo invece

$$Ma_1 = -2M\beta g\sin\theta = f_1+g_2 \tag{6.51.7}$$

Abbiamo tre relazioni e quattro incognite (β, f_1, g_1, g_2). Aggiungiamo quindi le equazioni per il secondo strato. Nel sistema di riferimento solidale con il parallelepipedo abbiamo per il centro di massa di ciascuno dei cilindri

$$-MR\dot{\omega}_2 = -MR\beta\frac{g\sin\theta}{R}\,(1+2\beta) = Mg\sin\theta\,(1+2\beta) - \frac{1}{2}\,(f_2+g_2) \tag{6.51.8}$$

e per le loro accelerazioni angolari

$$I\dot{\omega}_2 = \frac{1}{2}MR^2\beta\frac{g\sin\theta}{R}\,(1+2\beta) = \frac{1}{2}R\,(f_2-g_2) \tag{6.51.9}$$

Abbiamo adesso un numero sufficiente di equazioni. Le riscriviamo per chiarezza:

$$\begin{aligned}
2M\left(1+\beta\right)g\sin\theta &= f_1+g_1\\
M\beta g\sin\theta &= f_1-g_1\\
-2M\beta g\sin\theta &= f_1+g_2\\
2Mg\sin\theta\left(1+\beta\right)\left(1+2\beta\right) &= f_2+g_2\\
Mg\sin\theta\beta\left(1+2\beta\right) &= f_2-g_2
\end{aligned}$$

Ricaviamo f_1 sommando membro a membro le prime due equazioni e g_2 sottraendo le ultime due

$$\begin{aligned}
f_1 &= Mg\sin\theta\left(1+\frac{3}{2}\beta\right)\\
g_2 &= Mg\sin\theta\left(1+2\beta\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)
\end{aligned}$$

ed infine sostituiamo nella terza, ottenendo

$$1+\frac{3}{2}\beta+\left(1+2\beta\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)+2\beta=0$$

Abbiamo le due soluzioni $\beta=-3\pm\sqrt{7}$. Abbiamo già determinato le accelerazioni angolari dei primi due strati di cilindri in funzione di β. Per determinare quelle dei successivi possiamo osservare che l'accelerazione del parallelepipedo k-simo sarà

$$a_k=-2R\sum_{i=1}^{k}\dot{\omega}_k \tag{6.51.10}$$

e risolvendo per i cilindri posati sopra di esso avremo

$$\dot{\omega}_{k+1}=\frac{\beta}{R}\left(g\sin\theta-a_k\right)$$

che confrontata con la relazione valida per lo strato precedente

$$\dot{\omega}_k=\frac{\beta}{R}\left(g\sin\theta-a_{k-1}\right)$$

permette di ottenere (sottraendo membro a membro) la relazione ricorsiva

$$\dot{\omega}_{k+1}=\left(1+2\beta\right)\dot{\omega}_k$$

ossia

$$\dot{\omega}_k=\left(1+2\beta\right)^{k-1}\dot{\omega}_1=\beta\left(1+2\beta\right)^{k-1}\frac{g\sin\theta}{R}$$

che non diverge se $|1+2\beta|<1$. Di conseguenza l'unica soluzione accettabile corrisponde a $\beta=-3+\sqrt{7}$: numericamente questo significa

$$\dot{\omega}_k\simeq-0.35\times\left(0.29\right)^{k-1}\frac{g\sin\theta}{R} \tag{6.51.11}$$

CC BY NC SA

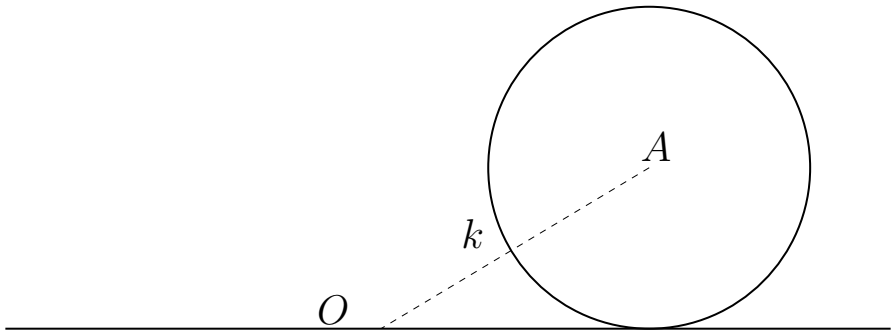
cioè la accelerazioni angolari tendono a zero esponenzialmente con k. Anche le accelerazioni dei parallelepipedi si calcolano facilmente: sommando la serie geometrica (6.51.10) abbiamo

$$a_k = g \sin\theta \left[1 - (1 + 2\beta)^{k-1}\right] \tag{6.51.12}$$

cioè $\lim_{k\to\infty} a_k = g \sin\theta$: l'accelerazione dei parallelepipedi degli strati più alti è sempre più vicina a quella di un corpo che scivola liberamente sul piano inclinato. Quelle dei parallelepipedi sottostanti sono inferiori.

CC BY NC SA

6.52. Cilindro vincolato ad una molla ⋆⋆$\mathcal{S}$



Il cilindro in figura, di raggio R e massa M, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro A è fissato ad un punto O del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente A si trova sulla verticale di O.

1. Per quale valore minimo della velocità angolare iniziale il cilindro riesce a compiere un giro completo.
2. Scelta un'opportuna coordinata scrivere l'equazione del moto del cilindro.
3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione[18]

Domanda 1 L'energia del sistema si conserva e vale

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{k}{2}\ell^2$$

dove $I = \frac{3}{2}MR^2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al punto di appoggio, ω la velocità angolare e ℓ la lunghezza della molla. Inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{k}{2}R^2$$

e dopo un giro completo, supponendo che il cilindro sia fermo,

$$E_f = \frac{k}{2}\left(R^2 + 4\pi^2 R^2\right)$$

Ponendo $E_i = E_f$ troviamo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 k R^2}{I}}$$

[18] Primo esercizio scritto Fisica 1 del 10 settembre 2010

Domanda 2 Scrivendo l'energia in funzione dell'angolo di rotazione θ abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{k}{2} \left(R^2 + R^2 \theta^2 \right)$$

ed eguagliando a zero la derivata dell'energia

$$\dot{E} = I \dot{\theta} \ddot{\theta} + k R^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

otteniamo l'equazione del moto

$$I \ddot{\theta} + k R^2 \theta = 0$$

che corrisponde ad un oscillatore armonico.

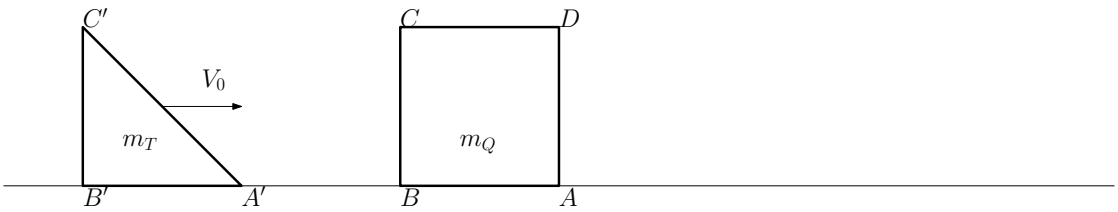
Domanda 3 Dall'equazione del moto precedente troviamo direttamente

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k R^2}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

Notare che l'approssimazione di piccole oscillazioni non è necessaria, dato che il sistema è un oscillatore armonico.

CC BY NC SA

6.53. Urto tra un triangolo e un quadrato ⋆⋆



Un quadrato di lato a e massa m_Q è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Un triangolo isoscele e rettangolo di massa m_T, con cateti della stessa lunghezza del lato del quadrato, disposto come in figura, si muove liberamente verso il quadrato con velocità iniziale v_0. L'urto avviene istantaneamente e il vertice A' del triangolo rimane vincolato al vertice B del quadrato. Il triangolo può però ruotare liberamente attorno a $A' \equiv B$. Dire anzitutto se durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al polo B. Determinare quindi per quale minima velocità v_0 l'ipotenusa del triangolo arriva a contatto con un lato del quadrato.

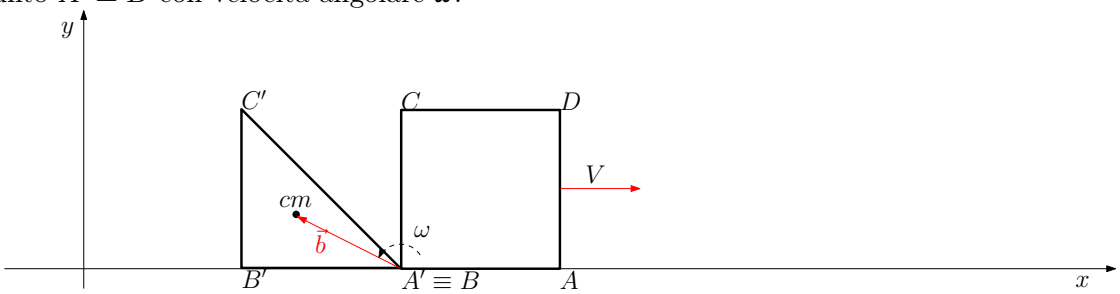
Soluzione

Durante l'urto l'unica forza impulsiva che agisce sul triangolo è la reazione vincolare in $A' \equiv B$. Di conseguenza durante l'urto si conserva il momento angolare del triangolo rispetto a tale punto. Prima dell'urto questo vale

$$\vec{L}_i = m_T \vec{b} \wedge \vec{V}_0$$

dove $\vec{b}$ è il vettore che unisce il punto $A' \equiv B$ con il centro di massa del triangolo. Il valore di $\vec{b}$ verrà determinato nell'Esercizio 6.55.

Dopo l'urto il quadrato si muoverà con velocità V, e il triangolo ruoterà attorno al punto $A' \equiv B$ con velocità angolare ω.



Il suo momento angolare sarà dato dal contributo del centro di massa e dal momento angolare di rotazione attorno ad esso. La velocità del centro di massa del triangolo sarà

$$\vec{V}_{CM,T} = V\hat{x} + \vec{\omega} \wedge \vec{b}$$

e quindi

$$\vec{L}_f = m_T \vec{b} \wedge \vec{V}_{CM,T} + I_T \vec{\omega}$$

dove abbiamo indicato con I_T il momento di inerzia del triangolo rispetto ad un asse parallelo all'asse z passante per il suo centro di massa, che calcoleremo nell'Esercizio 6.55. Dalla conservazione segue che

$$\begin{aligned} m_T\vec{b}\wedge\vec{V_0} &= m_T\vec{b}\wedge\left(V\hat{x}+\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right)+I_T\vec{\omega} \\ &= m_TV\vec{b}\wedge\hat{x}+m_T\vec{b}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right)+I_T\vec{\omega} \end{aligned}$$

Inoltre si conserva la quantità di moto orizzontale del sistema, cioè

$$m_TV_0 = m_TV + m_T\left(\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right)\cdot\hat{x}+m_QV$$

Queste due equazioni permettono di calcolare le velocità V e $\vec{\omega}$. Calcoliamo esplicitamente i prodotti vettoriali,

$$\begin{aligned} \vec{b}\wedge\hat{x} &= b_x\hat{x}\wedge\hat{x}+b_y\hat{y}\wedge\hat{x}=-b_y\hat{z} \\ \vec{\omega}\wedge\vec{b} &= \omega\hat{z}\wedge(b_x\hat{x}+b_y\hat{y}) \\ &= \omega b_x\hat{z}\wedge\hat{x}+\omega b_y\hat{z}\wedge\hat{y} \\ &= \omega b_x\hat{y}-\omega b_y\hat{x} \\ \vec{b}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{b}\right) &= (b_x\hat{x}+b_y\hat{y})\wedge(\omega b_x\hat{y}-\omega b_y\hat{x}) \\ &= b_x\hat{x}\wedge\omega b_x\hat{y}-b_y\hat{y}\wedge\omega b_y\hat{x} \\ &= \omega\left(b_x^2+b_y^2\right)\hat{z} \\ \vec{b}\wedge\vec{V_0} &= (b_x\hat{x}+b_y\hat{y})\wedge V_0\hat{x} \\ &= -V_0b_y\hat{z} \end{aligned}$$

Utilizzando queste identità possiamo riscrivere la conservazione del momento angolare come

$$\begin{aligned} -m_TV_0b_y &= -m_TVb_y+m_T\omega\left(b_x^2+b_y^2\right)+I_T\omega \\ m_TV_0 &= m_TV-m_T\omega b_y+m_QV \end{aligned}$$

e risolvendo troviamo

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{bym_Qm_T}{m_T\left[b_x^2(m_Q+m_T)+b_y^2m_Q\right]+I_T(m_Q+m_T)}V_0 \\ V &= \frac{m_T\left(m_Tb_x^2+I_T\right)}{m_T\left[b_x^2(m_Q+m_T)+b_y^2m_Q\right]+I_T(m_Q+m_T)}V_0 \end{aligned}$$

Dato che $V\neq 0$ dopo l'urto il quadrato si muove, e quindi ha un momento angolare non nullo. Di conseguenza il momento angolare del quadrato non si è conservato (prima dell'urto è nullo) e neppure lo ha fatto quello totale del sistema. Questo significa che durante l'urto il piano orizzontale ha applicato un momento impulsivo diverso da zero al quadrato.

Dopo l'urto si conserva l'energia totale del sistema e la sua quantità di moto orizzontale. La minima velocità necessaria per avere il contatto si può determinare scrivendo l'energia iniziale nella forma

$$E_i = \frac{1}{2} m_T V_{CM,T}^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 + \frac{1}{2} m_Q V^2 + m_T g b_y$$

dove

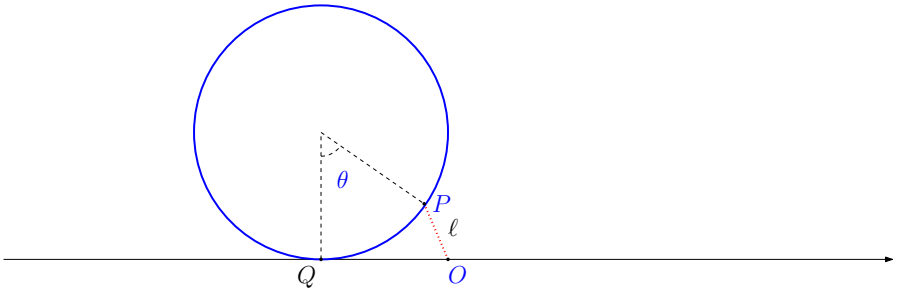
$$\begin{aligned} V_{CM,T}^2 &= \left(V\hat{x} + \vec{\omega} \wedge \vec{b} \right)^2 \\ &= \left(V\hat{x} + \omega b_x \hat{y} - \omega b_y \hat{x} \right)^2 \\ &= \left(V - \omega b_y \right)^2 + \omega^2 b_x^2 \end{aligned}$$

e ω, V sono le velocità appena determinate. L'energia al momento del contatto sarà invece la somma dell'energia cinetica del centro di massa e di quella gravitazionale

$$E_f = \frac{1}{2} \left(m_T + m_Q \right) \left(\frac{m_T V_0}{m_T + m_Q} \right)^2 + m_T g \frac{\sqrt{2}}{2} \left(b_y + b_x \right)$$

Dall'eguaglianza $E_i = E_f$ si determina V_0.

6.54. Cilindro vincolato ad una molla sul bordo ⋆⋆



Il cilindro in figura, di raggio R e massa M, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Un punto P sul bordo è fissato ad un punto O del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente P coincide con O.

1. Discutere le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.
2. Per quale velocità angolare iniziale il cilindro riesce a fare un giro completo?.
3. Determinare le equazioni del moto del sistema. Cosa succede alla frequenza di oscillazione attorno alla posizione di equilibrio stabile nel limite di piccole oscillazioni?

Soluzione[19]

Domanda 1 Utilizzando come coordinata l'angolo di rotazione del cilindro scriviamo l'energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}k\ell^2$$

dove ℓ è l'allungamento della molla. Si ha

$$\begin{aligned} \ell^2 &= (R\theta - R\sin\theta)^2 + (R - R\cos\theta)^2 \\ &= 2R^2 + R^2\theta^2 - 2R^2\theta\sin\theta - 2R^2\cos\theta \end{aligned}$$

e quindi, a meno di una costante

$$U = \frac{1}{2}kR^2\left(\theta^2 - 2\theta\sin\theta - 2\cos\theta\right)$$

Troviamo i punti stazionari. Derivando otteniamo

$$U' = kR^2\theta\left(1 - \cos\theta\right)$$

e quindi si ha equilibrio per

$$\theta = 2m\pi$$

[19] Primo esercizio scritto Fisica 1 del 10 settembre 2010

dove m è un intero. Studiamo la stabilità, derivando ancora una volta:

$$U'' = 2kR^2 \left(1 - \cos\theta + 2\theta \sin\theta\right)$$

che si annulla nei punti di equilibrio. Derivando ulteriormente abbiamo

$$U''' = 2kR^2 \left(\theta \cos\theta + 2\sin\theta\right)$$

che calcolata nei punti di equilibrio da

$$U''' = 4kR^2 m\pi$$

Abbiamo quindi un minimo (equilibrio stabile) per $\theta = 0$, e dei flessi orizzontali (equilibrio instabile) per $\theta = 2m\pi$ con $m \neq 1$.

Domanda 2 L'energia si conserva, e vale

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} kR^2 \left(\theta^2 - 2\theta \sin\theta - 2\cos\theta\right)$$

Inoltre il potenziale è una funzione non decrescente di θ per $\theta > 0$. Eguagliando energia iniziale e finale abbiamo quindi

$$\frac{1}{2} I\omega^2 - kR^2 = kR^2 \left(2\pi^2 - 1\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{4\pi^2 kR^2}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{8\pi^2}{3} \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $I = \frac{3}{2} mR^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse di rotazione istantaneo.

Domanda 3 L'equazione del moto si può ottenere rapidamente derivando l'energia. Si trova

$$I\ddot{\theta} + kR^2 \theta \left(1 - \cos\theta\right) = 0$$

Per piccole oscillazioni possiamo approssimare $1 - \cos\theta \simeq \theta^2/2$ e l'equazione diventa

$$I\ddot{\theta} + \frac{kR^2}{2} \theta^3 = 0$$

Non si tratta di un'oscillazione armonica. Per studiare il periodo di oscillazione consideriamo nuovamente l'energia.

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} kR^2 \left(\theta^2 - 2\theta \sin\theta - 2\cos\theta\right)$$

Per piccoli valori di θ possiamo approssimare

$$\begin{aligned}\sin\theta &\simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O\left(\theta^5\right)\\ \cos\theta &\simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O\left(\theta^6\right)\end{aligned}$$

Si deve andare oltre l'approssimazione al secondo ordine dato che i termini del secondo ordine, come si verificherà tra un momento, si cancellano. Sostituendo abbiamo, a meno di una costante irrilevante,

$$E \simeq \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}kR^2\theta^4$$

e le piccole oscillazioni si hanno per $E \to 0$. Possiamo scrivere

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{I} - \frac{kR^2}{4I}\theta^4}$$

che si integra per separazione delle variabili

$$\int_0^t dt = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{I} - \frac{kR^2}{4I}\theta^4}}$$

Scegliendo come angolo iniziale $\theta(0) = 0$ e come angolo finale l'estremo dell'oscillazione l'integrale al primo membro da un quarto del periodo. Quanto all'estremo dell'oscillazione, si tratta dell'angolo che annulla il termine sotto radice, cioè

$$\theta_{max} = \left(\frac{8E}{kR^2}\right)^{1/4}$$

e quindi

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{I} - \frac{kR^2}{4I}\theta^4}}$$

Usando la nuova variabile $u = \theta/\theta_{max}$ l'integrale diventa

$$\frac{T}{4} = \left(\frac{2I^2}{kR^2E}\right)^{1/4} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

L'integrale è una costante indipendente da E che non è importante calcolare, e vediamo che

$$\lim_{E\to 0} T = \infty$$

quindi per piccole oscillazioni la frequenza tende a zero.

CC BY NC SA

6.55. Centro di massa e momento di inerzia di un triangolo ⋆⋆

Determinare la posizione del centro di massa di un triangolo di lati a, b e c qualsiasi. Se il triangolo ha una massa totale m distribuita in modo omogeneo trovare il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale al piano a cui il triangolo appartiene. Specializzare il risultato ottenuto per determinare il vettore $\vec{b}$ e il momento di inerzia I_T definiti nell'Esercizio 6.53.

Soluzione

Indichiamo con $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ e $\vec{r}_C$ i vettori corrispondenti alle posizioni dei tre vertici del triangolo. Per comodità conviene introdurre anche i due vettori

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{AC} &= \vec{r}_C - \vec{r}_A \end{aligned}$$

L'area totale del triangolo è data da

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|$$

e un qualsiasi punto del triangolo sarà parametrizzabile nella forma

$$\vec{r}(s,t) = \vec{r}_A + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

con $s + t \leq 1$. Calcoliamo anzitutto il centro di massa. Applicando direttamente la definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{1}{m}\int \rho\vec{r}(s,t)dS \\ &= \vec{r}_A + \frac{1}{m}\frac{2m}{\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|}\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| \vec{r}(s,t) \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che l'elemento di superficie è

$$dS = \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| dsdt$$

e si è indicato con ρ la densità superficiale di massa. Scriviamo esplicitamente l'integrale:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \vec{r}_A + 2\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[s\vec{AB} + t\vec{AC}\right] \\ &= \vec{r}_A + 2\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[t\vec{AB} + t\vec{AC}\right] \\ &= \vec{r}_A + 2\left[\vec{AB} + \vec{AC}\right]\int_0^1 dt\, t(1-t) \\ &= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\left[\vec{AB} + \vec{AC}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right) \end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli si è tenuto conto del fatto che l'integrale non non varia scambiando tra loro s e t nell'integrando. Si tratta del baricentro del triangolo.

Calcoliamo adesso il momento di inerzia. Abbiamo

$$\begin{aligned}
I_{CM} &= \int \rho dS \left(\vec{r} - \vec{r}_{CM}\right)^2 \\
&= 2m \int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left(\vec{r}_A + s\vec{AB} + t\vec{AC} - \vec{r}_A - \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}\right)^2 \\
&= 2m \int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[\left(s - \frac{1}{3}\right)\vec{AB} + \left(t - \frac{1}{3}\right)\vec{AC}\right]^2 \\
&= 2m \int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left[\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 \left|\vec{AB}\right|^2 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 \left|\vec{AC}\right|^2\right. \\
&+ \left. 2\left(s - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right)\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right]
\end{aligned}$$

I due integrali rilevanti (sfruttando ancora la possibilità di scambiare s e t nell'integrando) valgono

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 &= \int_0^1 dt\,(1-t)\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} \\
\int_0^1 dt \int_0^{1-t} ds \left(s - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 dt\,(1-t)\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{72}
\end{aligned}$$

e quindi

$$I_{CM} = \frac{m}{18}\left(\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{AC}\right|^2 - \vec{AB}\cdot\vec{AC}\right)$$

Possiamo anche scrivere

$$I_{CM} = \frac{m}{18}\left[\frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{AC}\right|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{AC}\right|^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right)\right]$$

ed usando il teorema di Carnot otteniamo infine

$$I_{CM} = \frac{m}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Applicando questi risultati all'Esercizio 6.53 otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \vec{r}_{CM} - \vec{r}_{A'} = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'} - 2\vec{r}_{A'}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{B'} - \vec{r}_{A'}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{r}_{C'} - \vec{r}_{A'}\right) \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

CC BY NC SA

e

$$\begin{aligned} I_T &= I_{CM} + m_T \left|\vec{b}\right|^2 \\ &= m_T \frac{a^2}{9} + m_T \frac{5a^2}{9} \\ &= \frac{2}{3} m_T a^2 \end{aligned}$$

dove a e m_T sono i parametri definiti nell'esercizio.

CC BY NC SA

6.56. Urto con una sbarra incastrata ⋆⋆

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa m è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. I suoi due estremi sono appoggiati a due pareti perpendicolari tra di loro come in Figura 6.26, non si possono staccare da queste ma possono scorrervi sopra liberamente.

La sbarra è inizialmente ferma ed inclinata di $\theta_0 = \pi/4$ rispetto all'orizzontale.

Un punto materiale di massa m' si muove parallelamente ad una delle due pareti ad una distanza b da essa, come in Figura, con velocità v_0 in modulo. Ad un certo istante colpisce la sbarra e rimane attaccata ad essa. Calcolate la velocità angolare del sistema asta+massa

- immediatamente dopo l'urto
- negli istanti successivi, in funzione dell'angolo θ di inclinazione rispetto all'orizzontale

Soluzione

Le forze esterne che agiscono sul sistema sono le reazioni normali delle pareti. Se prendiamo come polo l'intersezione tra le rette perpendicolari alle pareti nei punti di contatto con la sbarra vediamo che entrambe le reazioni hanno momento nullo, di conseguenza si conserva il momento angolare. Ponendo l'origine nell'intersezione tra le due pareti il polo si trova nel punto di coordinate

$$(x, y, z) = (\ell \cos\theta_0, \ell \sin\theta_0, 0) = \left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2}, \ell\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

abbiamo prima dell'urto

$$\vec{L}_i = -m'\left(b - \ell\cos\theta_0\right) v_0 \hat{z} = -m'\left(b - \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right) v_0 \hat{z}$$

ed immediatamente dopo

$$\vec{L}_f = I_0 \omega_0 \hat{z}$$

dove I_0 è il momento di inerzia del sistema rispetto al polo prescelto. Tenendo conto che la massa rimane attaccata alla sbarra ad una distanza $d = b/(\cos\theta_0)$ dal suo estremo abbiamo

$$\begin{aligned} I_0 &= m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} + m'\left[(\ell\cos\theta_0 - b)^2 + b^2\tan^2\theta_0\right] \\ &= m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} + m'\left[\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2} - b\right)^2 + b^2\right] \end{aligned}$$

Di conseguenza la velocità angolare immediatamente dopo l'urto sarà

$$\boxed{\omega_0 = -\frac{m'\left(b - \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{I_0} v_0}$$

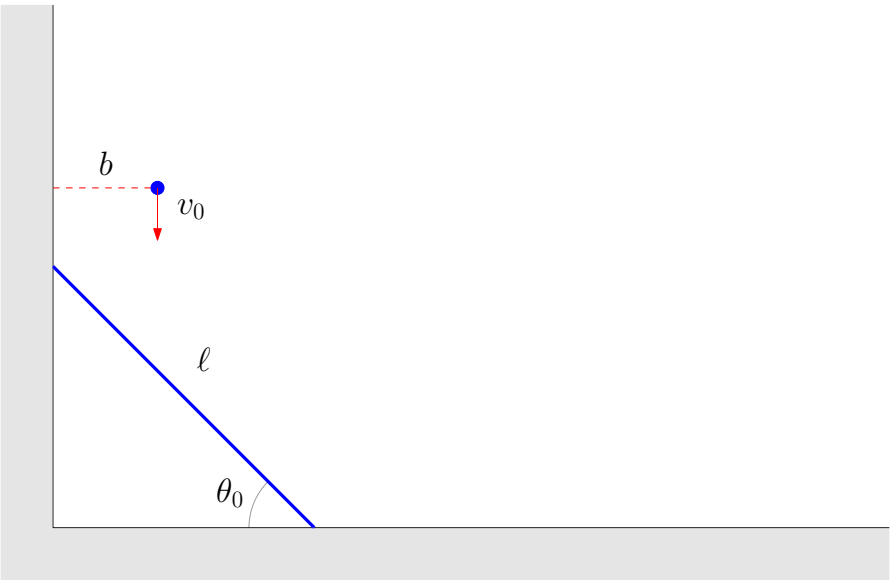


Figura 6.26.: La sbarra appoggiata ad un angolo tra due pareti.

In seguito si conserva l'energia cinetica del sistema, che scriveremo nella forma

$$E = \frac{1}{2} I(\theta)\omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

Adesso $I(\theta)$ è il momento di inerzia del sistema rispetto al suo asse di rotazione istantaneo. Ma quest'ultimo coincide con l'intersezione tra le rette perpendicolari alle pareti nei punti di contatto (e quindi inizialmente $I = I_0$). In altre parole

$$I(\theta) = m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} + m'\left[\left(\ell\cos\theta - b\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^2 + \left(b\frac{\sin\theta}{\cos\theta_0}\right)^2\right]$$

e quindi

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{\frac{I_0}{I(\theta)}}}$$

6.57. Urto anelastico contro un pendolo fisico ⋆⋆

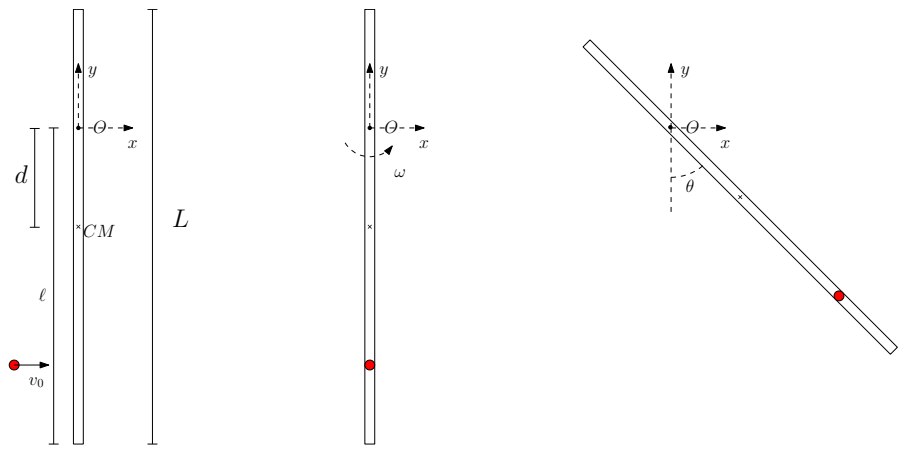


Figura 6.27.: Il pendolo fisico considerato nel problema, prima dell'urto (a sinistra) immediatamente dopo (al centro) e alla massima inclinazione raggiunta (a destra).

Un'asta di lunghezza L e massa M può ruotare liberamente attorno ad un punto posto ad una distanza $d < L/2$ dal suo centro di massa. Inizialmente si trova in equilibrio in posizione verticale. Una massa m colpisce l'asta al di sotto del punto di sospensione, ad una distanza ℓ da esso, con velocità v_0 diretta orizzontalmente, e rimane attaccata. Per quale valore minimo di v_0 l'asta inizia a ruotare? (vedere Figura 6.27).

Soluzione

Dato che durante l'urto l'unica forza impulsiva che agisce sul sistema è la reazione vincolare al punto di sospensione O, il momento angolare del sistema rispetto ad esso si conserva. Il momento angolare immediatamente prima dell'urto è quello della massa,

$$\vec{L}_i = m\left[-\ell\hat{y}\right] \wedge (v_0\hat{x}) = m\ell v_0\hat{z}$$

Dopo l'urto abbiamo un unico corpo rigido che ruota attorno al punto di sospensione con velocità angolare

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$$

quindi il momento angolare finale sarà

$$\vec{L}_f = I\omega\hat{z}$$

dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse diretto lungo $\hat{z}$ e passante per O, $I = I_{massa} + I_{asta}$ e

$$\begin{aligned} I_{massa} &= m\ell^2 \\ I_{asta} &= \frac{1}{12}ML^2 + Md^2 \end{aligned}$$

Dalla conservazione $\vec{L}_f = \vec{L}_i$ otteniamo la velocità angolare

$$\omega = \frac{m}{I}\ell v_0 \tag{6.57.1}$$

Dopo l'urto la conservazione del momento angolare non è più valida a causa del momento della forza di gravità. Si conserva però l'energia, che inizialmente (immediatamente dopo l'urto) varrà

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgd - mg\ell$$

Quando θ raggiunge il suo valore massimo ($\theta = \pi$) avremo $\omega = 0$, quindi

$$E_f = Mgd + mg\ell$$

e da $E_i = E_f$ otteniamo

$$\omega^2 = 4\frac{Mgd + mg\ell}{I}$$

cioè, sostituendo la (6.57.1)

$$v_0^2 = \frac{4Ig}{m^2}\frac{Md + m\ell}{\ell^2}$$

ed infine

$$v_0 = \sqrt{\frac{4g}{\ell^2}\left(\ell + \frac{M}{m}d\right)\left[\ell^2 + \frac{M}{m}\left(\frac{1}{12}L^2 + d^2\right)\right]}$$

6.58. Tre cilindri in equilibrio ⋆⋆

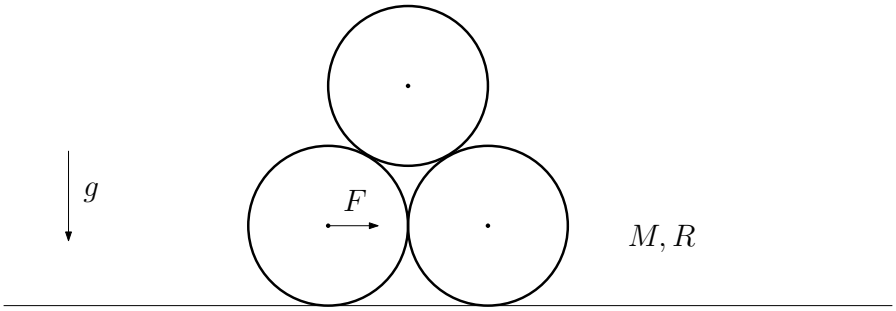


Figura 6.28.: I tre cilindri in contatto considerati nel problema.

Tre cilindri identici di massa M e raggio R sono disposti come in Figura 6.28 su un piano orizzontale privo di attrito. Al centro di massa del cilindro in basso a sinistra è applicata una forza costante F. Determinare per quali valori di F il sistema accelera come un tutto unico mantenendo invariate le posizioni relative dei cilindri.

Soluzione

Sappiamo che i tre cilindri devono avere la stessa accelerazione. Consideriamoli separatamente. Per quello in basso a sinistra avremo lungo la direzione orizzontale

$$Ma = F - N_1 - \frac{1}{2}N_3$$

e per quello in basso a destra

$$Ma = N_1 + \frac{1}{2}N_2$$

Per il cilindro in alto varranno le due equazioni

$$\begin{aligned} Ma &= \frac{1}{2}N_3 - \frac{1}{2}N_2 \\ 0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 - Mg \end{aligned}$$

Con N_1, N_2 e N_3 abbiamo indicato le forze di contatto che i cilindri esercitano reciprocamente, scelte come in Figura 6.29.

L'accelerazione si calcola facilmente sommando membro a membro le prime tre equazioni. Il risultato è

$$a = \frac{F}{3M}$$

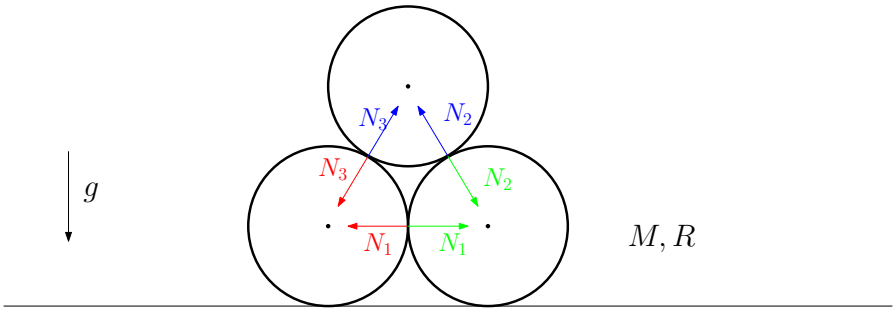


Figura 6.29.: La convenzione scelta per le forze di contatto. In rosso sono indicate le forze applicate al cilindro in basso a sinistra, in verde quelle applicate al cilindro in basso a destra, in blu quelle applicate al cilindro in alto.

come era facile anticipare considerando il moto del centro di massa del sistema. Sottraendo membro a membro otteniamo dalle prime tre equazioni e dall'ultima il sistema

$$\begin{aligned} 2N_1 + \frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_3 &= F \\ N_1 + N_2 - \frac{1}{2}N_3 &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 &= Mg \end{aligned}$$

che ha per soluzione

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}F - \frac{1}{2\sqrt{3}}Mg \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}Mg - \frac{1}{3}F \\ N_3 &= \frac{1}{3}F + \frac{1}{\sqrt{3}}Mg \end{aligned}$$

Il segno delle forze di contatto è riassunto nel diagramma 6.30 al variare di F.

Dato che queste possono essere nella situazione considerata solo positive vediamo che le posizioni relative possono rimanere invariate solo per

$$\frac{Mg}{\sqrt{3}} < F < Mg\sqrt{3}$$

che corrisponde all'intervallo di possibili accelerazioni

$$\frac{g}{3\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}g$$

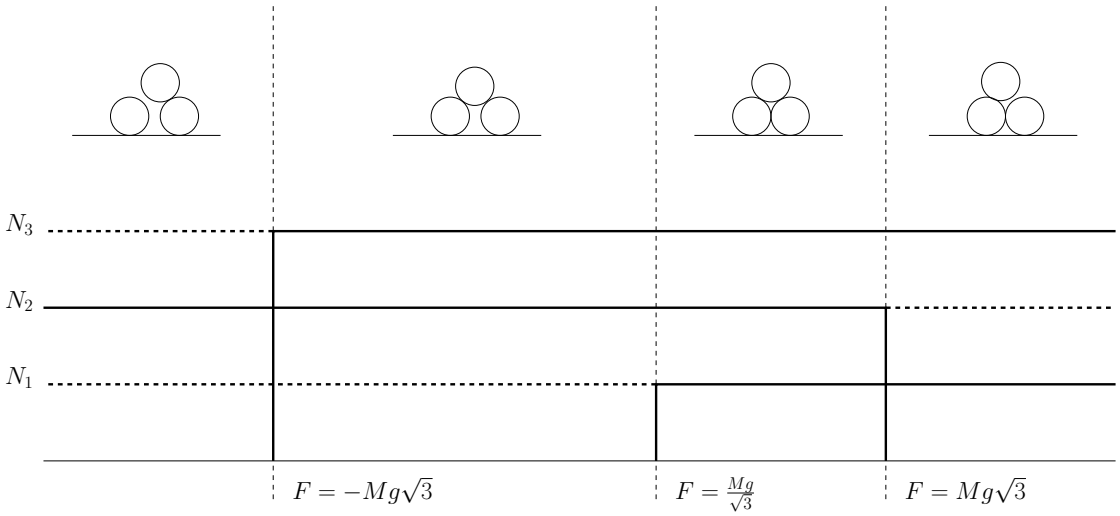


Figura 6.30.: Il segno delle reazioni normali al variare di F. Le posizioni relative rimangono invariate solo nell'intervallo $Mg/\sqrt{3} < F < Mg\sqrt{3}$. In tutti gli altri casi almeno una delle reazioni N_i diviene negativa, segnalando che i cilindri perdono contatto nel modo indicato.

6.59. Sistema di punti materiali equivalenti ad una sfera ⋆⋆⋆

Si vuole sostituire una sfera omogenea di massa M e raggio R con un insieme di punti materiali identici di collegati rigidamente tra loro, in modo che i due sistemi abbiano le stesse proprietà dinamiche. Qual'è il minimo numero di punti materiali necessari? Che massa devono avere? Come devono essere disposti?

Soluzione

Per avere le stesse proprietà dinamiche della sfera il sistema costruito deve avere la stessa massa totale e lo stesso tensore di inerzia. Ponendo il polo nel centro di massa questo sarà della forma

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostriamo anzitutto che sono necessari almeno quattro punti materiali. Un unico punto ha un tensore di inerzia nullo. Con due punti abbiamo una asse (quello passante per essi) con momento di inerzia nullo, ma una sfera ha un momento di inerzia $\frac{2}{5}MR^2$ lungo un asse qualsiasi. Infine, tre punti appartengono necessariamente ad un piano. Si è verificato in un esercizio precedente (Esercizio 6.13) che il momento di inerzia perpendicolare a tale piano è uguale alla somma dei momenti di inerzia relativi a due assi appartenenti allo stesso, mentre nel caso che ci interessa dovrebbero essere tutti uguali.

Consideriamo adesso le coordinate di quattro punti materiali. Introduciamo le quantità

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \boldsymbol{v} &= (y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \boldsymbol{w} &= (z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

dove x_i, y_i e z_i sono le coordinate del punto materiale i-simo. Dato che il centro di massa è nell'origine deve essere

$$\sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0$$

quindi $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ appartengono tutti al sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dei vettori con somma delle componenti nulle. Ciascun punto avrà massa totale $M/4$. Per ottenere i corretti elementi sulla diagonale del tensore di inerzia dovrà essere

$$\begin{aligned} I_{zz} = \frac{M}{4}\sum_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) &= \frac{M}{4}\left(|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2\right) = \frac{2}{5}MR^2 \\ I_{yy} = \frac{M}{4}\sum_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) &= \frac{M}{4}\left(|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{w}|^2\right) = \frac{2}{5}MR^2 \\ I_{xx} = \frac{M}{4}\sum_i \left(z_i^2 + y_i^2\right) &= \frac{M}{4}\left(|\boldsymbol{w}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2\right) = \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

da cui segue

$$|\boldsymbol{u}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{w}|^2 = \frac{4}{5}R^2$$

Inoltre gli elementi fuori diagonale sono nulli, quindi

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= -\frac{M}{4}\sum_i x_i y_i = -\frac{M}{4}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \\
I_{xz} &= -\frac{M}{4}\sum_i x_i z_i = -\frac{M}{4}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = 0 \\
I_{yz} &= -\frac{M}{4}\sum_i y_i z_i = -\frac{M}{4}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0
\end{aligned}$$

cioè i tre vettori sono ortogonali tra loro. Una base nel sottospazio desiderato si può scegliere ad esempio nella forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1) \\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0) \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)
\end{aligned}$$

e quindi potremo scrivere

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \sqrt{\frac{4}{5}}R\boldsymbol{e}_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}R\,(1,0,0,-1) \\
\boldsymbol{v} &= \sqrt{\frac{4}{5}}R\boldsymbol{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}R\,(0,-1,1,0) \\
\boldsymbol{w} &= \sqrt{\frac{4}{5}}R\boldsymbol{e}_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}R\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Questa è solo una delle soluzioni possibili. Tutte le altre si possono ottenere ruotando la base scelta, rimanendo però nel sottospazio scelto. Questo è equivalente ad una rotazione rigida arbitraria del sistema attorno all'origine, come ci si può aspettare. In conclusione le masse devono essere poste nei punti

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \sqrt{\frac{2}{5}}R\left(1,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\vec{r}_2 &= \sqrt{\frac{2}{5}}R\left(0,-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\vec{r}_3 &= \sqrt{\frac{2}{5}}R\left(0,1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\vec{r}_4 &= \sqrt{\frac{2}{5}}R\left(-1,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Tutti gli $\vec{r}_i$ hanno la stessa lunghezza,

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{\frac{3}{5}}R$$

e l'angolo tra due qualsiasi di essi è dato da

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{|\vec{r}_i|\,|\vec{r}_j|} = -\frac{1}{3} \qquad (i \neq j)$$

Le masse si trovano quindi ai vertici di un tetraedro, che per quanto visto può essere ruotato arbitrariamente attorno all'origine.

6.60. Tiro al piattello ⋆⋆

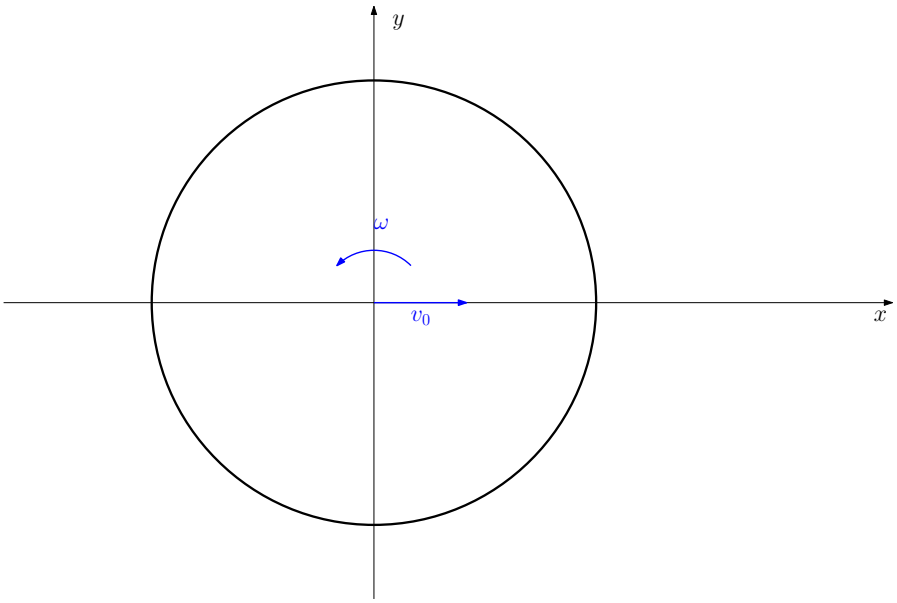


Figura 6.31.: Il disco del problema, in un sistema di riferimento con origine nel suo centro.

Un disco di massa M e raggio R si muove liberamente su un piano orizzontale $z = 0$. La velocità del centro di massa è $\vec{v} = v_0\hat{x}$, la velocità angolare $\vec{\omega} = \lambda v_0/R\hat{z}$. Con una apposita pistola si vuole trapassare il disco con un chiodo. Dopo che questo è avvenuto il disco rimane vincolato e può solo ruotare attorno al chiodo, che rimane infisso nel piano.

Determinare (se possibile) quale punto del disco è necessario trapassare per un dato valore del parametro λ se si vuole che

1. il disco perda tutta l'energia cinetica posseduta;
2. il disco conservi tutta l'energia cinetica posseduta.

Soluzione

Una quantità che si conserva durante l'impatto con il chiodo è il momento angolare rispetto al punto in cui questo viene infisso. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella posizione del centro del disco al momento dell'impatto. Il momento angolare rispetto a un punto generico posto in

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

è dato prima dell'urto da

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\left(-\vec{r}\right)\wedge\left(\vec{v}\right)+\frac{1}{2}mR^2\vec{\omega}\\ &= -m\left(x\hat{x}+y\hat{y}\right)\wedge\left(v_0\hat{x}\right)+\frac{1}{2}mR\lambda v_0\hat{z}\\ &= mv_0\left(y+\frac{\lambda}{2}R\right)\hat{z}\end{aligned}$$

1. Se tutta l'energia cinetica viene persa, allora dopo l'urto $\vec{L}=0$. Ma allora anche il momento angolare iniziale sarà nullo, e questo accade se

   $$y=-\frac{\lambda}{2}R$$

   mentre x può essere scelto arbitrariamente. Potremo dunque fermare completamente il disco con il chiodo per $-2<\lambda<2$.

2. Affinchè tutta l'energia cinetica si conservi dovremo evitare che la reazione del chiodo nel momento in cui viene infisso faccia lavoro. Colpiremo quindi il disco nel punto fermo in quell'istante. La velocità di un punto generico sarà

   $$\begin{aligned}\vec{V}\left(\vec{r}\right) &= \vec{v}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}=v_0\hat{x}+\left(\lambda\frac{v_0}{R}\hat{z}\right)\wedge\left(x\hat{x}+y\hat{y}\right)\\ &= v_0\left(1-\lambda\frac{y}{R}\right)\hat{x}+\lambda\frac{v_0}{R}x\hat{y}\end{aligned}$$

   e quindi dovremo scegliere

   $$\begin{aligned}x &= 0\\ y &= \frac{R}{\lambda}\end{aligned}$$

   Questo sarà possibile per $-1<\lambda<1$.

6.61. Cilindro in caduta su un piano inclinato ⋆⋆

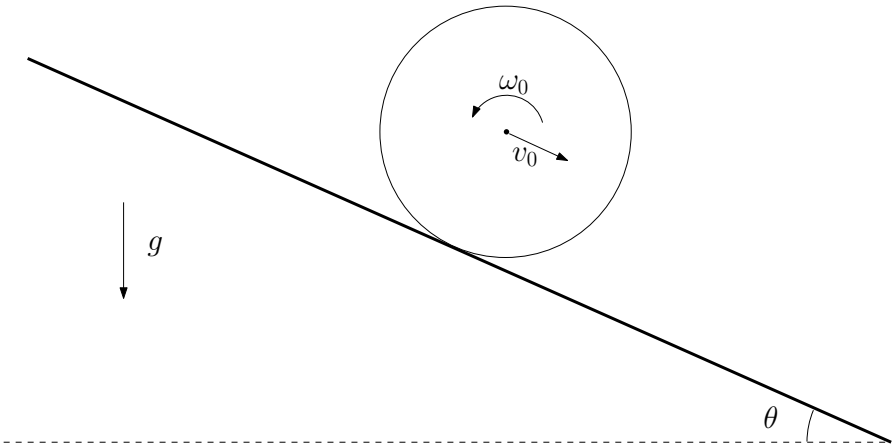


Figura 6.32.: Il cilindro nella posizione iniziale. Le velocità v_0 e ω_0 sono arbitrarie (anche in segno).

Un cilindro di massa M e raggio R viene lanciato lungo un piano inclinato con velocità iniziale v_0 e velocità angolare ω_0. Il piano è inclinato rispetto alla direzione orizzontale di un angolo θ, ed è presente attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente μ. Discutere sotto quali condizioni il cilindro dopo un tempo sufficientemente lungo inizia a compiere un moto di puro rotolamento.

Soluzione

Scriviamo la prima e la seconda equazione cardinale per il cilindro. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g\sin\theta + \frac{1}{m}F_a \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{F_a}{I}R \end{aligned} \tag{6.61.1}$$

dove abbiamo indicato con F_a la forza di attrito, che scriveremo nella forma

$$F_a = \begin{cases} \mu mg\cos\theta & v_P < 0 \\ -\mu mg\cos\theta & v_P > 0 \end{cases}$$

dove

$$v_P = v + \omega R$$

è la velocità del punto del cilindro a contatto con il piano. La condizione di rotolamento puro corrisponde a $v_P = 0$. Combinando le due equazioni del moto possiamo costruire una equazione per v_P

$$\frac{dv_P}{dt} = \frac{d}{dt}(v + \omega R) = g\sin\theta + \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)\frac{F_a}{m}$$

ossia

$$\frac{dv_P}{dt} = \begin{cases} g\sin\theta - 3\mu g\cos\theta & v_P > 0 \\ g\sin\theta + 3\mu g\cos\theta & v_P < 0 \end{cases}$$

Vediamo che nel caso $v_P < 0$ l'accelerazione $\dot{v}_P$ è costante e positiva. Di conseguenza v_P crescerà linearmente e avremo rotolamento puro dopo un intervallo di tempo

$$t = -\frac{v_0 + \omega_0 R}{g\left(\sin\theta + 3\mu\cos\theta\right)}$$

Nel caso $v_P > 0$ dobbiamo distinguere due casi. Se

$$\mu > \frac{1}{3}\tan\theta$$

avremo $\dot{v}_P > 0$, e arriveremo al rotolamento puro dopo un tempo

$$t = \frac{v_0 + \omega_0 R}{g\left(3\mu\cos\theta - \sin\theta\right)}$$

In caso contrario $\dot{v}_P < 0$ e la condizione di rotolamento puro non sarà mai raggiunta. La situazione è riassunta in Figura 6.33.

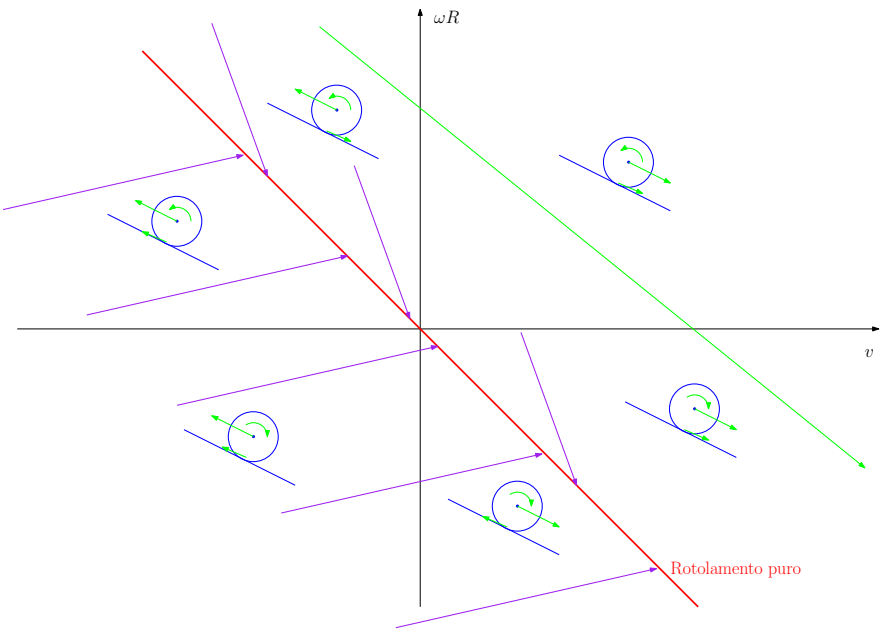


Figura 6.33.: L'evoluzione del sistema nel piano $(\omega R, v)$.

In essa un punto nel piano corrisponde ad una possibile combinazione di velocità e velocità angolare. Gli assi e la bisettrice del secondo e quarto quadrante dividono il piano in sei zone: per ciascuna è indicato il verso della velocità angolare, della velocità

del punto di contatto con il piano e del centro di massa. La linea rossa corrisponde ai moti di puro rotolamento.

Indipendentemente da μ e θ un punto al di sotto della della linea rossa evolve sempre verso di essa. Infatti dalle Equazioni (6.61.1) segue che in questa regione $\dot{\omega} > 0$, $\dot{v} > 0$, dato che $F_a > 0$. Quindi il sistema si sposterà come indicato dale frecce viola.

Un punto al di sopra della linea rossa ha $\dot{\omega} < 0$, ma $\dot{v}$ può essere sia positivo che negativo ($F_a < 0$, Equazioni (6.61.1)). Quindi può evolvere verso rotolamento puro (linee viola) oppure no (linee verdi), in accordo con l'analisi precedente.

6.62. Distacco da una calotta sferica ⋆⋆

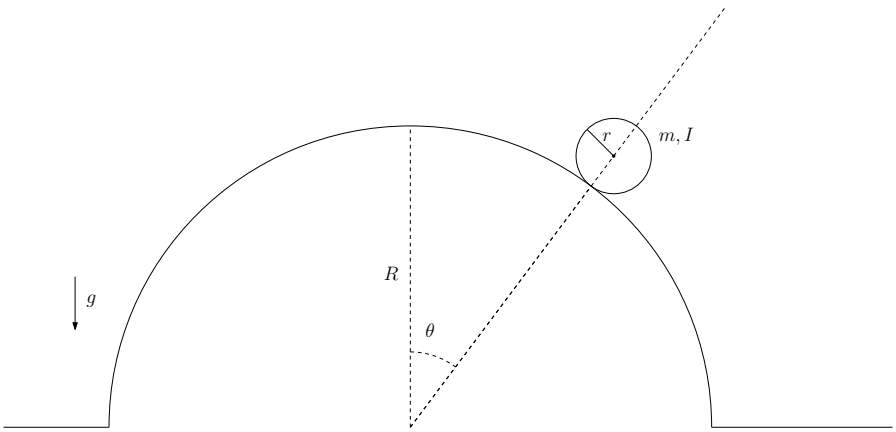


Figura 6.34.: Il corpo sferico in caduta dalla calotta.

Dalla sommità di una calotta sferica di raggio R viene lasciato cadere, con velocità iniziale trascurabile, un corpo rigido di forma sferica (raggio r). La massa totale m è distribuita simmetricamente attorno al centro del corpo in modo tale che questo ha un momento di inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro.

Se il cilindro rotola senza strisciare sulla calotta determinare l'angolo a cui avviene il distacco. Considerare in particolare il caso di massa distribuita uniformemente, e quello corrispondente al massimo e minimo valore possibile per I. Come deve essere distribuita la massa negli ultimi due casi?

Soluzione

Scriviamo l'energia totale del sistema, utilizzando l'angolo θ in figura come coordinata. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2} I' \omega^2 + mg\,(R + r)\cos\theta$$

dove

$$I' = I + mr^2$$

è il momento di inerzia del corpo rispetto al punto di contatto e ω la sua velocità angolare. Per determinare quest'ultima notiamo che il centro del corpo compie un moto circolare con velocità

$$v = (R + r)\,\dot{\theta}$$

che deve però anche essere, data la condizione di puro rotolamento,

$$v = -\omega r$$

da cui

$$\omega = -\left(1 + \frac{R}{r}\right)\dot{\theta}$$

Sostituendo nell'energia troviamo

$$E = \frac{1}{2} I' \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2 \dot{\theta}^2 + mg\,(R + r)\cos\theta$$

Uguagliando all'energia iniziale ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mg}{I'} \frac{r^2}{(R + r)} (1 - \cos\theta)$$

che ci permette di conoscere $\dot{\theta}^2$ in funzione dell'angolo.

Dato che il centro di massa del corpo compie un moto circolare, l'equazione del moto nella direzione radiale sarà

$$-m\,(R + r)\,\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta$$

dove N è la reazione normale della superficie della calotta. Il distacco si avrà per $N = 0$, ossia per

$$N = mg \left[\cos\theta - \frac{2mr^2}{I'} (1 - \cos\theta)\right] = 0$$

Questo significa

$$\cos\theta = \frac{2mr^2}{I'} \left(1 + \frac{2mr^2}{I'}\right)^{-1}$$

Se la massa è distribuita uniformemente

$$I' = \frac{2}{5} mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5} mr^2$$

e quindi

$$\cos\theta = \frac{10}{17} \simeq 0.588$$

Il minimo valore di I si ottiene concentrando tutta la massa nel centro. In questo caso $I = 0$ e $I' = mr^2$, quindi

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \simeq 0.667$$

lo stesso valore che si ottiene per la caduta di un punto materiale. Il massimo valore di I si ottiene concentrando tutta la massa sulla superficie esterna del corpo (si deve mantenere la distribuzione simmetrica). In questo caso

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{4\pi r^2} \int r^4 \sin^2\theta d\cos\theta d\phi \\ &= \frac{mr^2}{2} \int_{-1}^{1} \left(1 - u^2\right) du \\ &= \frac{2}{3} mr^2 \end{aligned}$$

Segue che $I' = 5mr^2/3$ e quindi

$$\cos\theta = \frac{6}{11} \simeq 0.545$$

Da notare che questo è il caso in cui il distacco avviene più in basso.

6.63. Piccole oscillazioni di un cilindro parabolico ⋆⋆⋆

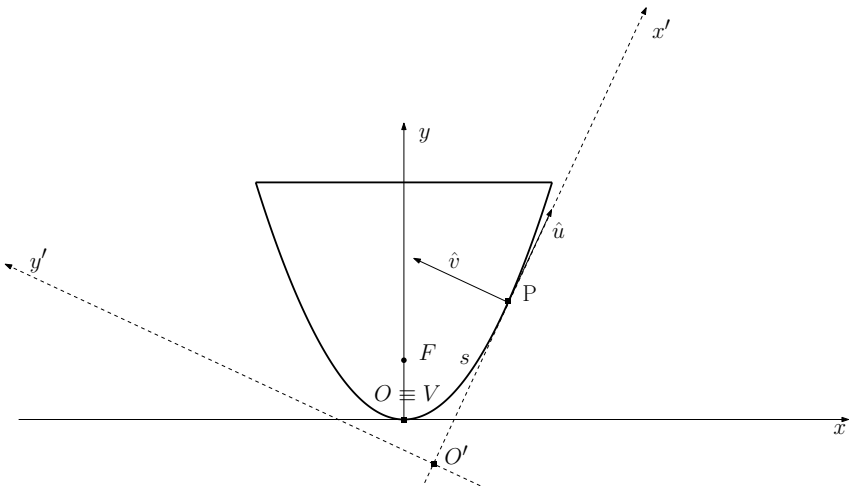


Figura 6.35.: Il cilindro parabolico nella posizione di equilibrio. L'asse rispetto al quale si vuole calcolare il momento di inerzia passa per il vertice della parabola V ed è diretto lungo l'asse z.

Un cilindro parabolico pieno è costruito con un materiale omogeneo ed è tagliato parallelamente alla direttrice della parabola che lo genera ad una altezza tale che il suo centro di massa coincide con il suo fuoco (Figura 6.35). La distanza tra il vertice e il fuoco della parabola è $p/2$, la massa totale m.

1. Discutere in maniera generale la posizione del centro di massa in funzione dell'altezza di taglio, considerando sempre tagli paralleli alla direttrice della parabola. Determinare l'altezza alla quale è stato tagliato il cilindro.

2. Supponendo che il cilindro rotoli senza strisciare su di un piano, descrivere la traiettoria percorsa dal suo fuoco nel sistema di riferimento solidale con il piano.

3. Calcolare il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un asse passante per il vertice della parabola e perpendicolare alle basi.

4. Determinare la velocità angolare ω del cilindro in funzione dell'angolo di rotazione.

5. Discutere le piccole oscillazioni del cilindro attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

1. Consideriamo il cilindro nella posizione in Figura 6.35. La parabola generatrice avrà equazione

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

Dato che la massa è distribuita uniformemente, le coordinate del centro di massa saranno date da $x_{CM} = 0$ (per ragioni di simmetria) e da

$$y_{CM} = \frac{\int\int y\, dS}{\int\int dS}$$

Scriviamo l'espressione precedente nella forma

$$y_{CM} = \frac{\int_0^h dy \int_{-\sqrt{2py}}^{\sqrt{2py}} dx\, y}{\int_0^h dy \int_{-\sqrt{2py}}^{\sqrt{2py}} dx}$$

dove abbiamo indicato con h l'altezza del taglio. La prima integrazione è immediata ed abbiamo infine

$$y_{CM} = \frac{2\sqrt{2p}\int_0^h dy\, y^{3/2}}{2\sqrt{2p}\int_0^h dy\, y^{1/2}} = \frac{3}{5}h$$

Notare che il denominatore è la superfice totale della base

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{2p}h^{3/2}$$

che ci servirà in seguito. Le il centro di massa deve coincidere con il fuoco avremo

$$\frac{3}{5}h = \frac{p}{2}$$

da cui

$$h = \frac{5}{6}p$$

L'equazione della parabola sarà dunque

$$y = \frac{5x^2}{12h}$$

2. Possiamo indicare con s la lunghezza dell'arco tra il vertice V della parabola e il punto di contatto P con il piano ad un istante generico. Una coppia di versori normali e tangenti alla parabola in $P \equiv \left(x, \frac{x^2}{2p}\right)$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2+x^2}}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \\
\hat{v} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2+x^2}}\begin{pmatrix} -x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dove θ è l'angolo di rotazione del cilindro. Dato che la parabola ruota senza strisciare s è anche la distanza $\overline{O'P}$ rispetto al punto di appoggio iniziale. Quindi le coordinate del fuoco della parabola saranno

$$\begin{aligned}
x_F &= s + \overrightarrow{PF}\cdot\hat{u} \\
y_F &= \overrightarrow{PF}\cdot\hat{v}
\end{aligned}$$

ossia, dato che

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_F &= s - \frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}\left(\frac{p}{2} + \frac{x^2}{2p}\right) \\ y_F &= \frac{1}{\sqrt{p^2+x^2}}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda s, avremo

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= p \int_0^{x/p} \sqrt{1+u^2} du \\ &= \frac{p}{2}\left[\left(\frac{x}{p}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2} + \sinh^{-1}\left(\frac{x}{p}\right)\right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} x_F &= -\frac{p}{2}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) \\ y_F &= \frac{p}{2}\frac{1}{\cos\theta} \end{aligned}$$

Questa è la traiettoria del fuoco espressa parametricamente in funzione dell'angolo di rotazione. Si può anche eliminare θ. Abbiamo infatti

$$y_F = \frac{p}{2}\cosh\left(\frac{2x_F}{p}\right)$$

3. Il momento di inerzia si può determinare direttamente dall'integrale

$$\begin{aligned} I_V &= \frac{m}{S}\int_0^h dy \int_{-\sqrt{2py}}^{\sqrt{2py}} dx \left(x^2+y^2\right) \\ &= \frac{3}{4}m\frac{1}{\sqrt{2p}h^{3/2}}\int_0^h dy \left[\frac{2}{3}(2py)^{3/2} + 2\sqrt{2py}y^2\right] \\ &= \frac{3}{4}m\left[\frac{8}{15}ph + \frac{4}{7}h^2\right] = \frac{53}{84}mp^2 \end{aligned}$$

dove S è la superfice della base determinata precedentemente. Per il seguito sarà utile il momento di inerzia rispetto al centro di massa,

$$I_{CM} = I_V - m\frac{p^2}{4} = \frac{8}{21}mp^2$$

CC BY NC SA

4. La velocità angolare cercata è semplicemente $\dot{\theta}$. Usiamo la conservazione dell'energia per valutarla ad un angolo di rotazione generico. Possiamo scrivere questa nella forma
$$E = \frac{1}{2} I(\theta)\,\omega^2 + mgy_F$$
Dove $I(\theta)$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto a P, che possiamo ottenere applicando il teorema di Steiner,
$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{CM} + m\overline{FP}^2 \\ &= I_{CM} + m\left[x^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p}\right)^2\right] \\ &= I_{CM} + mp^2\left[\tan^2\theta + \frac{1}{4}\left(1 - \tan^2\theta\right)^2\right] \end{aligned}$$
e y_F ha il valore determinato precedentemente. Abbiamo quindi
$$\omega = \sqrt{\frac{mgp}{I(\theta)}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

5. Per piccole oscillazioni possiamo considerare $\theta \ll 1$ e sviluppare l'energia al secondo ordine. Otteniamo, a meno di una costante irrilevante
$$E = \frac{1}{2} I(0)\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mg\frac{p}{2}\theta^2$$
con
$$I(0) = I_{CM} + \frac{1}{4}mp^2 = \frac{53}{84}mp^2$$
da cui possiamo calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{42g}{53p}}$$

CC BY NC SA

6.64. Caduta di una ruota esagonale lungo un pendio ⋆⋆⋆

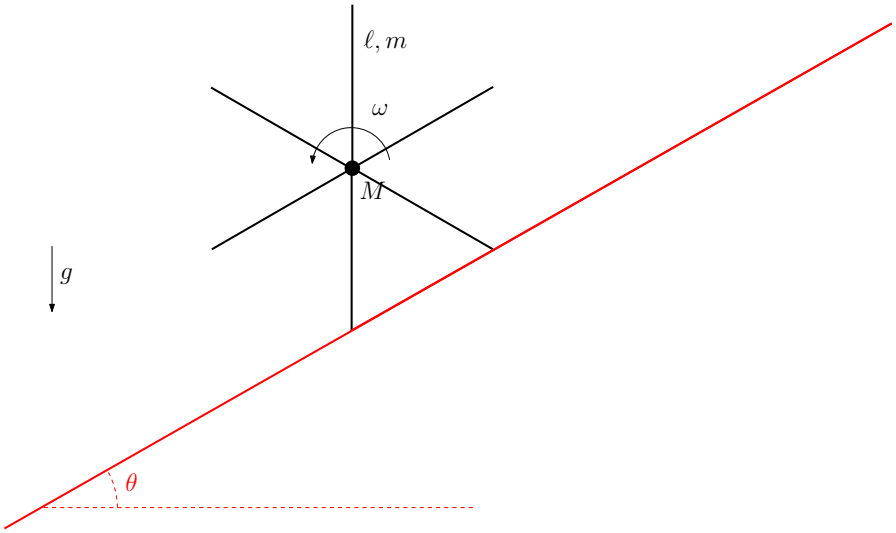


Figura 6.36.: La struttura considerata nel problema. La forma è quella di un esagono regolare.

La struttura rigida esagonale rappresentata in figura è costituita da sei aste identiche di lunghezza ℓ e massa m, e da una massa M fissata nel centro. Viene lanciata con velocità angolare iniziale ω_0 su un piano inclinato dalla posizione in Figura 6.36. Nel momento in cui una delle aste tocca il suolo rimane vincolata ad esso, ma libera di ruotare, mentre la gamba vincolata precedentemente si libera.

Studiare, al variare di ω_0 e degli altri parametri del problema, la caduta della struttura. Dire in particolare se esistono condizioni nelle quali la caduta ha termine, condizioni nelle quali la velocità angolare cresce senza limite, e condizioni nelle quali si stabilizza.

Soluzione

Nel seguito indicheremo con $\mu = M + 6m$ la massa totale della struttura, e con

$$I = 6m\frac{\ell^2}{3} = 2m\ell^2$$

il suo momento di inerzia rispetto al suo centro di massa.

Consideriamo la caduta come successione di rotazioni di $\pi/3$ della struttura. Osserviamo che ad ogni passo l'energia potenziale gravitazionale varia di

$$\Delta U = -\mu g \ell \sin\theta$$

Fino al momento del nuovo contatto della struttura con il piano inclinato si conserva l'energia totale. Invece al momento del contatto, che considereremo istantaneo, si conserva il momento angolare rispetto ad un polo posto nel nuovo punto di appoggio, se supponiamo che non vi siano forze impulsive che agiscono su P.

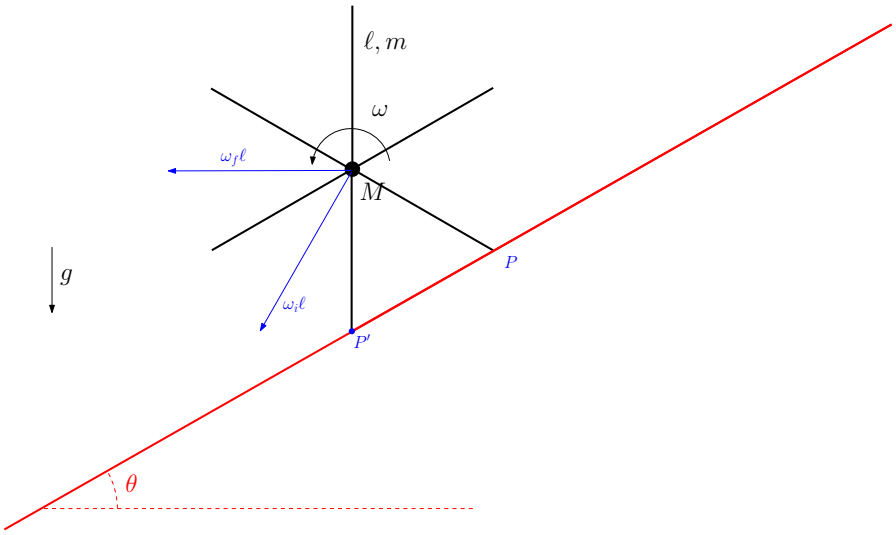


Figura 6.37.: La costruzione utilizzata per raccordare la velocità angolare della struttura tra l'istante immediatamente precedente e quello immediatamente seguente il momento del contatto con il punto P. I vettori azzurri indicano le velocità del centro di massa, prima e dopo il contatto.

Possiamo utilizzare questo fatto per calcolare la variazione della velocità angolare. Facendo riferimento alla Figura 6.37 vediamo che immediatamente prima del contatto la struttura sta ruotando attorno al punto di appoggio precedente P. Il momento angolare rispetto a P' immediatamente prima del contatto vale quindi

$$L_i = I\omega_i + \mu\ell^2\omega_i \sin\frac{\pi}{6} = \left(I + \frac{1}{2}\mu\ell^2\right)\omega_i$$

Subito dopo, la struttura ruota attorno a P', con un momento angolare

$$L_f = I\omega_f + \mu\ell^2\omega_f = \left(I + \mu\ell^2\right)\omega_f$$

Uguagliando queste due espressioni troviamo

$$\omega_i = \frac{I + \mu\ell^2}{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2}\omega_f$$

In conclusione detta ω_n la velocità angolare immediatamente dopo il contatto n-simo avremo

$$\frac{1}{2}\left(I + \mu\ell^2\right)\left(\frac{I + \mu\ell^2}{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2}\right)^2 \omega_{n+1}^2 = \frac{1}{2}\left(I + \mu\ell^2\right)\omega_n^2 - \Delta U$$

e quindi

$$\omega_{n+1}^2 = \left(\frac{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2}{I + \mu\ell^2}\right)^2 \left[\omega_n^2 - \frac{2\Delta U}{I + \mu\ell^2}\right]$$

CC BY NC SA

$$\omega_{n+1}^2 = \lambda\left(\omega_n^2 + \beta\right) \tag{6.64.1}$$

con

$$\begin{aligned}\lambda &= \left(\frac{I + \frac{1}{2}\mu\ell^2}{I + \mu\ell^2}\right)^2 < 1\\ \beta &= \frac{2\mu g\ell\sin\theta}{I + \mu\ell^2}\end{aligned}$$

Cerchiamo adesso un eventuale soluzione della (6.64.1) del tipo $\omega_n = \overline{\omega}$. Queste saranno determinate da

$$\overline{\omega}^2 = \lambda\left(\overline{\omega}^2 + \beta\right)$$

ossia

$$\overline{\omega}^2 = \frac{\lambda\beta}{1-\lambda}$$

Poniamo adesso

$$\omega_n^2 = \overline{\omega}^2 + \delta_n$$

e sostituiamo nella (6.64.1) ottenendo

$$\delta_{n+1} = \lambda\delta_n$$

da cui

$$\delta_n = \lambda^n\delta_0$$

In conclusione possiamo scrivere la soluzione generale nella forma

$$\omega_n^2 = \omega_n^2 - \overline{\omega}^2 + \overline{\omega}^2 = \delta_n + \overline{\omega}^2 = \lambda^n\left(\omega_0^2 - \overline{\omega}^2\right) + \overline{\omega}^2$$

Vediamo quindi che, indipendentemente dal valore di ω_0, le velocità angolari immediatamente dopo l'appoggio si stabilizzano al valore

$$\overline{\omega} = \sqrt{\frac{4g\sin\theta}{\ell}}\frac{\left(I + \frac{1}{2}\mu\ell^2\right)}{\sqrt{\left(2I + \frac{3}{2}\mu\ell^2\right)\left(I + \mu\ell^2\right)}}$$

In realtà è necessario imporre un'ulteriore condizione: ω_n deve essere abbastanza grande da permettere alla struttura una rotazione completa di $\pi/3$. Questo accade certamente se

$$\theta + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$$

in caso contrario l'energia cinetica deve essere sufficiente a portare il centro di massa sulla verticale della posizione di appoggio, cioè

$$\frac{1}{2}\left(I + \mu\ell^2\right)\omega_n^2 > \mu g\ell\left[1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ossia

$$\omega_n > \omega^* \equiv \sqrt{\frac{4g\sin\theta}{\ell}}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\mu\ell^2}{I + \mu\ell^2}}\sqrt{\frac{1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\theta}}$$

Se $\omega_n < \omega^\star$ la velocità angolare cambia segno. La nuova velocità angolare immediatamente dopo il contatto sarà data da

$$\omega_{n+1}^2 = \lambda^2 \omega_n^2$$

e quindi tenderà a zero.

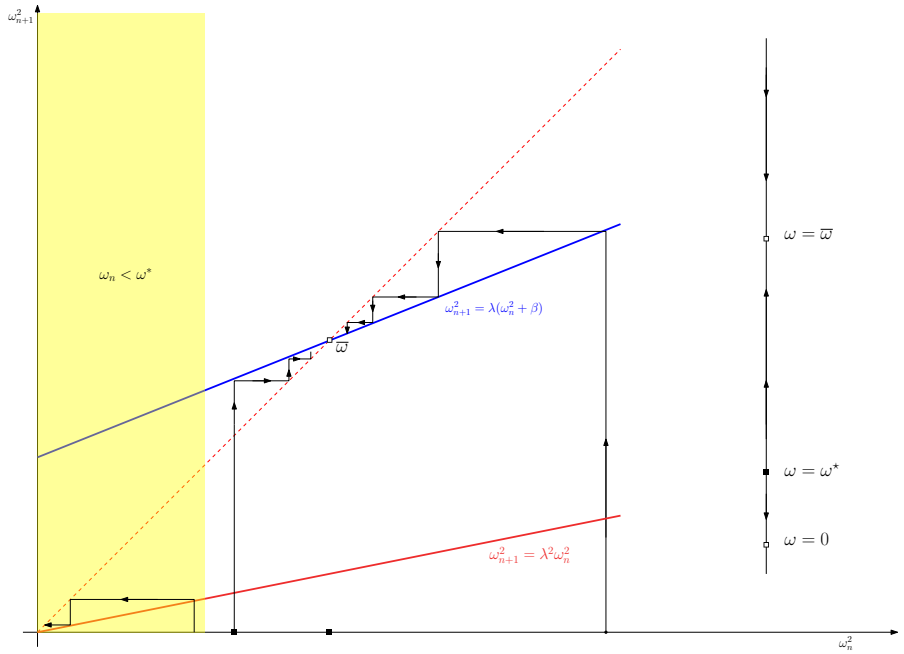


Figura 6.38.: Studio grafico della relazione ricorsiva (6.64.1). Per valori iniziali della velocità angolare maggiori di ω^* si ha convergenza verso $\overline{\omega}$, che è quindi un punto fisso "attrattivo". Per $\omega < \omega^\star$ (la fascia gialla) la velocità angolare tende invece verso 0, un altro punto fisso attrattivo. ω^* è un punto fisso "repulsivo".

La situazione è riassunta nel diagramma in Figura 6.38.

6.65. Urto tra una massa e un sistema con cilindro rotante ⋆⋆

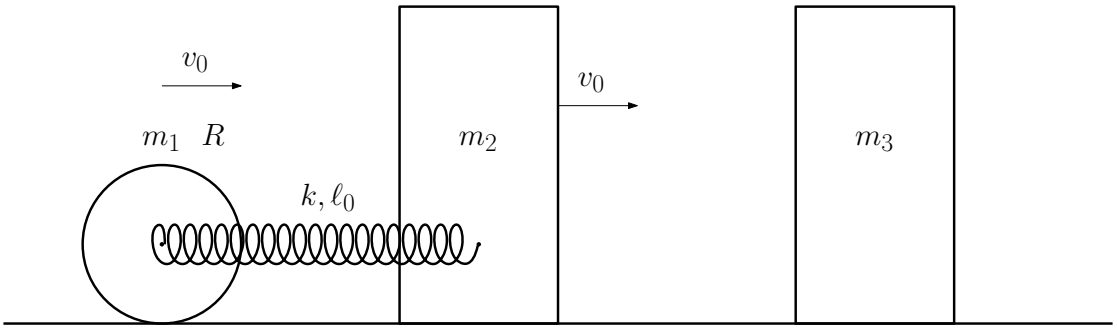


Figura 6.39.: Il sistema descritto nell'esercizio. Le masse m_2 e m_3 scorrono sul piano senza attrito, il cilindro rotola senza strisciare.

Un cilindro di massa m_1 e raggio R è collegato ad una massa m_2 da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0. La massa m_2 può muoversi sul piano senza attrito, mentre il cilindro è vincolato a ruotare senza strisciare. Inizialmente entrambi i corpi si muovono come in Figura 6.39, con la stessa velocità v_0 e con la molla alla lunghezza di riposo. Avviene quindi un urto istantaneo completamente anelastico tra la massa m_2 e una massa m_3: anche quest'ultima può muoversi senza attrito sul piano orizzontale. Calcolare la massima compressione raggiunta successivamente dalla molla.

Soluzione

Durante l'urto la molla rimane alla sua lunghezza di riposo, dato che questo avviene istantaneamente. Quindi non ci sono forze esterne orizzontali applicate al sistema m_2+m_3 e la sua quantità di moto si conserva. Detta v_0' la velocità di m_2+m_3 dopo l'urto abbiamo

$$m_2 v_0 = (m_2 + m_3)\, v_0'$$

e quindi

$$v_0' = \frac{m_2}{m_2 + m_3} v_0$$

Per la stessa ragione (molla a riposo) non ci sono forze esterne orizzontali che agiscono su m_1, quindi la sua quantità di moto non cambia e la sua velocità immediatamente dopo l'urto rimane v_0.

Abbiamo adesso il sistema rappresentato in Figura 6.40. L'energia si conserva, e la possiamo scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3)\, v_{2+3}^2 + \frac{k}{2} \Delta^2$$

dove abbiamo indicato con

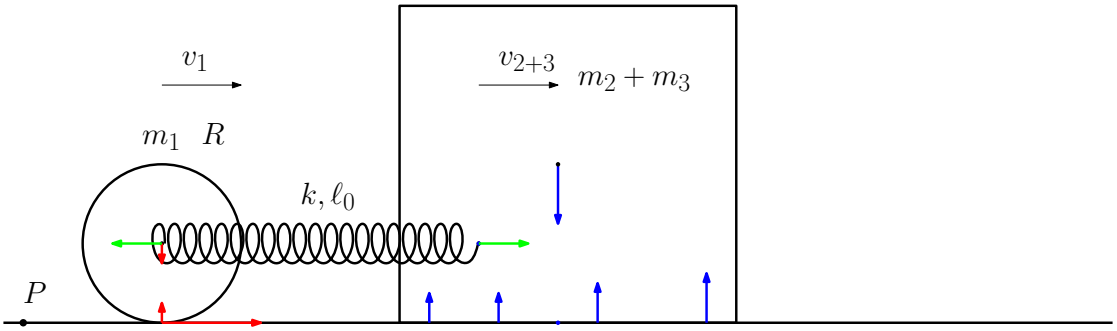


Figura 6.40.: Il sistema dopo l'urto. In rosso sono rappresentate le forze esterne che agiscono sul cilindro, in blu quelle che agiscono sul corpo $m_2 + m_3$, in verde quelle interne.

- ω la velocità angolare del cilindro;
- v_1 la velocità del centro di massa del cilindro;
- I_{CM} il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse, che passa dal centro di massa;
- v_{2+3} la velocità del corpo $m_2 + m_3$;
- Δ la compressione della molla.

Nel momento di massima compressione abbiamo $v_1 = v_{2+3} \equiv v_f$. Inoltre dalla condizione di puro rotolamento segue che $\omega = -v_1/R$. Di conseguenza eguagliando l'energia immediatamente dopo l'urto a quella nel momento di massima compressione otteniamo (usando $I_{CM} = m_1 R^2/2$)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 + \frac{m_2^2}{m_2 + m_3}\right) v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right) v_f^2 + \frac{k}{2}\Delta_{MAX}^2$$

Per calcolare v_f ci serva un'altra legge di conservazione. La quantità di moto orizzontale del sistema non si conserva: infatti a causa del vincolo di puro rotolamento al cilindro è applicata una reazione orizzontale. La seconda equazione cardinale applicata al cilindro, rispetto ad un polo posto nel punto di contatto, si scrive

$$\frac{d}{dt}\left(I_{CM}\omega - m_1 v_1 R\right) = k\Delta R$$

mentre la prima equazione per il corpo $m_2 + m_3$ si scrive

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m_2 + m_3\right) v_{2+3}\right] = k\Delta$$

Moltiplicando quest'ultima membro a membro per R e sottraendo alla prima abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left[I_{CM}\omega - m_1 v_1 R - \left(m_2 + m_3\right) R v_{2+3}\right] = 0$$

Di conseguenza la quantità

$$A = -\frac{3}{2} m_1 v_1 R - (m_2 + m_3) R v_{2+3}$$

si conserva. Da notare che questo non è in generale il momento angolare totale rispetto al punto di appoggio del cilindro, che si scriverebbbe (indicando con h_{CM} l'altezza del centro di massa del corpo m_{2+3})

$$L = -\frac{3}{2} m_1 v_1 R - (m_2 + m_3) h_{CM} v_{2+3}$$

e non sarebbe conservato. La non conservazione è dovuta al momento delle reazioni normali distribuite che il piano esercita sul corpo $m_2 + m_3$.

Eguagliando il valore iniziale e finale di A troviamo

$$v_f = \frac{\frac{3}{2} m_1 + m_2}{\frac{3}{2} m_1 + m_2 + m_3} v_0$$

e sostituendo nella conservazione dell'energia troviamo

$$k \Delta_{MAX}^2 = \left[6 m_1 + \frac{2 m_2^2}{m_2 + m_3} - \frac{2 \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right)^2}{3 m_1 + 2 m_2 + 2 m_3} \right] v_0^2$$

6.66. Urto di un settore cilindrico ⋆⋆

In un sistema di riferimento scelto come in figura un settore cilindrico di massa M si muove con velocità costante $\vec{v} = v_0\hat{y}$ su un piano orizzontale privo di attrito, in presenza di un campo di gravità uniforme $\vec{g} = -g\hat{z}$ (vedere Figura 6.41). L'ampiezza angolare del settore è $\theta = \pi/2$ e il raggio R. Ad un certo momento esso urta contro un ostacolo posto sull'asse x . Il settore può adesso ruotare liberamente attorno al suo asse, che rimane vincolato all'ostacolo. Nel seguito si può indicare con d la distanza del centro di massa del settore dal suo asse, che vale

$$d = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R$$

1. Trovare una quantità conservata durante l'urto, motivando la risposta, e calcolarne il valore iniziale in funzione dei parametri del problema.
2. Calcolare le componenti dell'impulso esercitato dall'ostacolo durante l'urto.
3. Per quali valori di v_0 il parallelepipedo si capovolge?

Soluzione

Domanda 1

Scegliendo un polo sull'asse x vediamo che si conserva la componente parallela ad esso del momento angolare. Infatti durante l'urto l'unica forza rilevante è la reazione impulsiva dell'ostacolo, che non ha momento. Inoltre dato che il corpo può ruotare liberamente attorno all'asse x il vincolo non può applicare momenti paralleli ad esso.

Dato che inizialmente il parallelepipedo ha solo un moto di traslazione il valore iniziale di questa quantità sarà

$$L_x = -Mv_0d\frac{\sqrt{2}}{2}$$

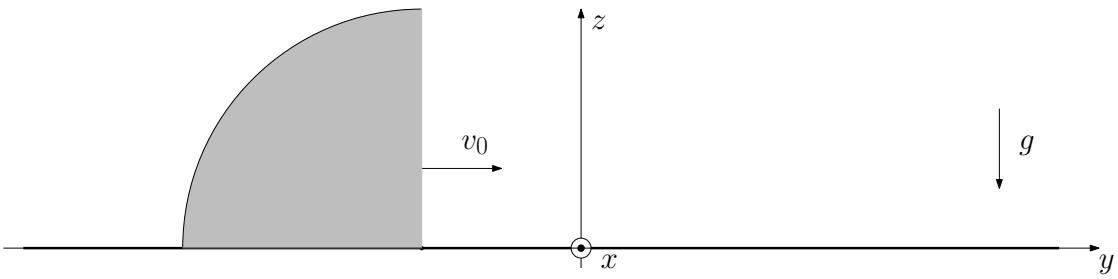


Figura 6.41.: Il settore cilindrico in moto prima dell'urto con l'ostacolo.

Domanda 2

Dalla conservazione di L_x segue che dopo l'urto il settore ruota attorno all'asse x con velocità angolare data da

$$-Mv_0 d\frac{\sqrt{2}}{2} = I\omega$$

dove $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il suo momento di inerzia rispetto all'asse specificato. Segue che

$$\omega = -\frac{v_0 d}{R^2}\sqrt{2}$$

e il centro di massa del settore avrà una velocità

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{CM} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega\hat{x} \wedge \left(-d\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + d\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}d\omega\left(-\hat{x} \wedge \hat{y} + \hat{x} \wedge \hat{z}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}d\omega\left(\hat{z} + \hat{y}\right) \\
&= v_0\frac{d^2}{R^2}\left(\hat{z} + \hat{y}\right)
\end{aligned}$$

La variazione della quantità di moto durante l'urto è uguale all'impulso cercato, e quindi

$$\vec{I} = M\vec{v}_{CM} - Mv_0\hat{y} = Mv_0\frac{d^2}{R^2}\hat{z} + Mv_0\left(\frac{d^2}{R^2} - 1\right)\hat{y}$$

Domanda 3

Dopo l'urto si conserva l'energia, e per ottenere il capovolgimento il centro di massa del settore dovrà arrivare sulla verticale dell'origine, ad una altezza d. Confrontando l'energia in questa situazione con quella immediatamente dopo l'urto abbiamo la condizione

$$Mgd < \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgd\frac{\sqrt{2}}{2}$$

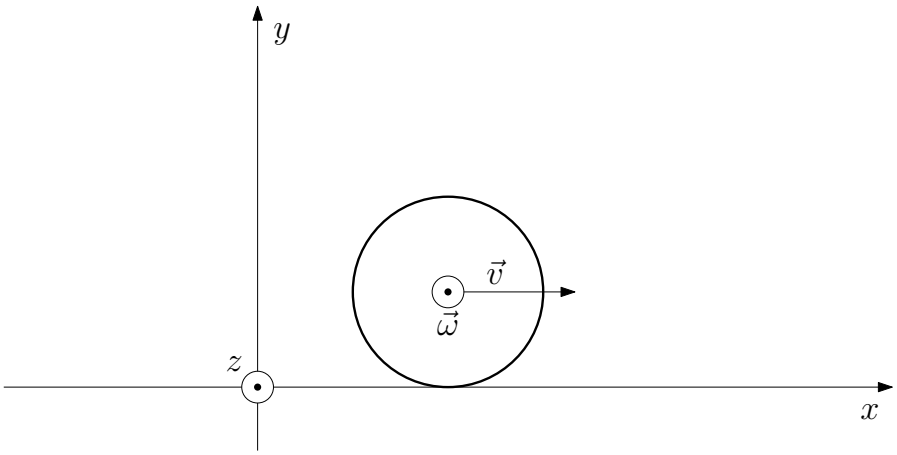
Inserendo il valore di ω determinato precedentemente troviamo

$$\frac{2v_0^2 d^2}{R^4} > \frac{2gd}{R^2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

e quindi

$$v_0 > R\sqrt{\frac{g}{d}\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

6.67. Energia persa e rotolamento puro ⋆⋆



Una sfera di raggio R e massa M viene lanciata su un piano orizzontale con velocità angolare $\vec{\omega}$ e velocità del centro di massa $\vec{v}$, scelte come in figura. Tra sfera e piano si ha attrito dinamico.

1. Mostrare che il momento angolare del cilindro rispetto a un polo scelto opportunamente si conserva.
2. Scrivere l'energia della sfera in funzione del momento angolare conservato e della velocità istantanea del punto del cilindro a contatto con il piano.
3. Utilizzare l'espressione dell'energia cinetica ottenuta per calcolare il valore dell'energia che viene dissipata per attrito prima che la sfera inizi a rotolare senza strisciare.

Soluzione

Consideriamo la retta sulla quale si muove il punto di contatto tra sfera e piano. Se scegliamo il polo in un punto qualsiasi di questa, vediamo che il momento angolare si conserva. Infatti le uniche forze che agiscono sulla sfera sono

- la reazione normale del piano $N\hat{y}$
- la forza di gravità $-Mg\hat{y}$
- La forza di attrito $F_a\hat{x}$

Dato che il centro di massa della sfera non accelera nella direzione $\hat{y}$ deve essere $N = Mg$. Ma entrambe le forze hanno lo stesso braccio rispetto al polo scelto, quindi i rispettivi momenti si cancellano. Inoltre la forza di attrito ha braccio nullo: la conclusione è che il momento di forza totale applicato alla sfera è nullo, e il suo momento angolare si conserva, e vale

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge M\vec{v} + I_{CM}\vec{\omega}$$

Dato che $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, $\vec{v} = v\hat{x}$ e $\vec{r} = x\hat{x} + R\hat{y}$ abbiamo

$$\vec{L} = (I_{CM}\omega - MRv)\,\hat{z} \equiv L_z\hat{z}$$

La velocità del punto di contatto è invece

$$\vec{v}_0 = \vec{v} - R\vec{\omega} \wedge \hat{y} = (v + R\omega)\,\hat{x} \equiv v_o\hat{x}$$

Esprimendo ω e v in funzione di L_z e v_0 otteniamo

$$v = \frac{I_{CM}v_0 - RL_z}{I_{CM} + mR^2} = \frac{I_{CM}v_0 - RL_z}{I_O}$$
$$\omega = \frac{L_z + MRv_0}{I_{CM} + mR^2} = \frac{L_z + MRv_0}{I_O}$$

dove I_O è il momento di inerzia rispetto al punto di contatto.

L'energia vale

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

e sostituendo le espressioni precedenti troviamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{I_0} + \frac{1}{2}\frac{I_{CM}}{I_0}Mv_o^2$$

Quando la sfera inizia a rotolare senza strisciare si ha $v_o = 0$. Inoltre L_z si è conservato. Segue che l'energia dissipata è il secondo termine dell'equazione precedente, ossia

$$E_{diss} = \frac{1}{2}\frac{I_{CM}}{I_0}Mv_o^2$$

In particolare se tutta la massa è concentrata al centro della sfera $I_{CM} = 0$ e non viene dissipata energia.

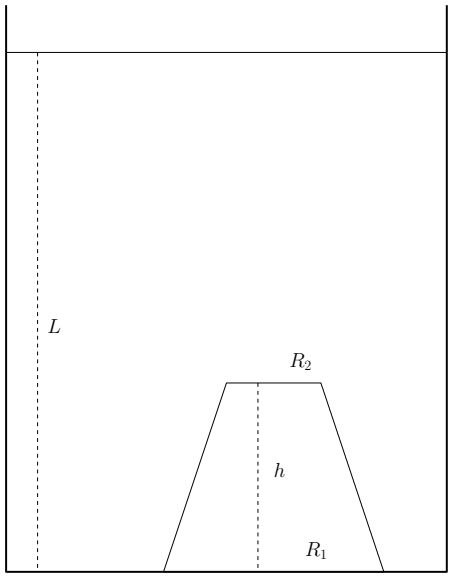
CC BY NC SA

7. Dinamica dei fluidi

7.1. Ventosa ⋆⋆

Un tronco cono di altezza h, raggio di base inferiore R_1, raggio di base superiore R_2 e densitá ρ aderisce perfettamente al fondo di un recipiente. Il recipiente é riempito fino al livello $L > h$ di un liquido di densitá $\rho_L > \rho$.

Determinare sotto quali condizioni il cono rimane sul fondo.



Soluzione

Se il cono non aderisse sul fondo le forze agenti su di esso sarebbero la forza peso e la spinta di Archimede. Nella situazione considerata é necessario sottrarre la spinta dovuta alla pressione sulla base e aggiungere la reazione vincolare N del fondo. Abbiamo quindi all'equilibrio

$$(\rho_L - \rho)\, V g - \rho_L g L \pi R_1^2 + N = 0$$

e per non avere distacco é necessario che $N > 0$. Questo significa

$$\rho_L g L \pi R_1^2 > (\rho_L - \rho)\, V g$$

ossia

$$\rho_L g L \pi R_1^2 > (\rho_L - \rho)\, g \frac{h}{3} \pi \left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)$$

da cui

$$\left(1+\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_2^2}{R_1^2}\right) < \frac{3L}{h}\frac{\rho_L}{\rho_L-\rho}\,.$$

Questo significa che il rapporto R_2/R_1 non deve essere troppo grande, più esattamente

$$\frac{R_2}{R_1} < -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3L}{h}\frac{\rho_L}{\rho_L-\rho}-\frac{3}{4}}\,.$$

Notare che per $\rho_L \leq \rho$ il corpo rimane sempre sul fondo.

CC BY NC SA

7.2. Secchio rotante ⋆⋆

Un recipiente cilindrico di raggio a ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω, e contiene un volume V di un liquido. Il fluido viene trascinato dal recipiente, e in condizioni stazionarie si muove rigidamente e solidalmente con esso. Dire se la quantità

$$H = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z \tag{7.2.1}$$

assume un valore costante in tutto il liquido e calcolare la forma della superficie libera di esso.

Soluzione

Il teorema di Bernoulli dice che in condizioni stazionarie la quantità H è costante su ogni linea di flusso del fluido. Per concludere che questa costante è la stessa su ogni linea è però necessario che il campo di velocità sia irrotazionale, ipotesi non verificata in questo caso.

Per averne conferma, possiamo cercare di rispondere alla seconda domanda supponendo che H sia veramente costante. Allora sulla superficie libera del fluido deve essere

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z = K \tag{7.2.2}$$

cioè

$$z = K' - \frac{\omega^2 r^2}{2g}\,. \tag{7.2.3}$$

Ma questo ci dice che la superficie è un paraboloide di rotazione con concavità rivolta verso il basso, il che è assurdo.

Possiamo invece porci in un sistema che ruota solidale al recipiente. In questo caso il fluido appare in quiete, quindi il suo campo di velocità è ovviamente irrotazionale. Siamo nelle condizioni per poter dedurre dal teorema di Bernoulli che la quantità

$$H = P + \rho\phi \tag{7.2.4}$$

è effettivamente costante in tutto il fluido, indicando con ϕ l'energia potenziale per unità di massa, che tiene conto della forza centrifuga apparente:

$$\phi = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\,. \tag{7.2.5}$$

Da questo segue immediatamente che

$$z = K + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{7.2.6}$$

cioè un paraboloide di rotazione con concavità rivolta verso l'alto, risultato sensato. Per determinare la costante K calcoliamo il volume del liquido:

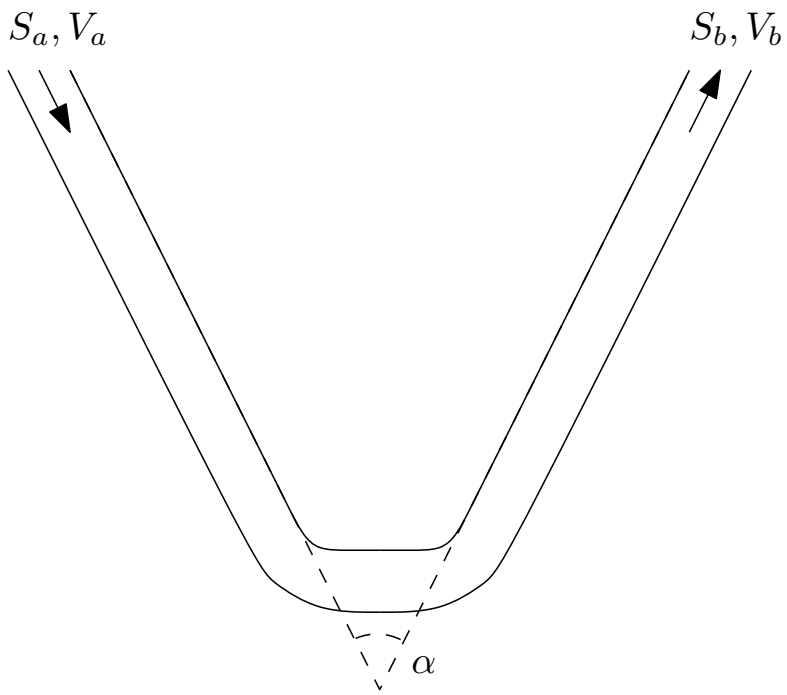
$$V = \int_0^a \left(K + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) 2\pi r dr = 2\pi\left(K\frac{a^2}{2} + \frac{\omega^2 a^4}{8g}\right) \tag{7.2.7}$$

CC BY NC SA

cioè

$$K = \frac{V}{\pi a^2} - \frac{\omega^2 a^2}{4g} \,. \tag{7.2.8}$$

7.3. Tubo piegato ⋆⋆



Un tubo ha una estremità di sezione S_A e un'altra di sezione S_B. Le due estremità del tubo si trovano alla stessa quota, e il tubo è piegato come in figura di un angolo α. Dall'estremità di sezione S_A entra un liquido di densità ρ con velocità V_A.

Calcolare la forza che il liquido esercita sul tubo. Considerare in particolare il caso $\alpha = 0$.

Soluzione

La forza che il liquido esercita sul tubo è uguale e opposta a quella che il tubo esercita sul liquido. Quest'ultima è uguale alla variazione della quantità di moto del liquido, che possiamo scrivere

$$d\vec{P} = -dM\vec{V}_A + dM\vec{V}_B \tag{7.3.1}$$

D'altra parte

$$dM = \rho S_A|V_A|dt = \rho S_B|V_B|dt \tag{7.3.2}$$

quindi possiamo scrivere

$$d\vec{P} = \rho S_A|V_A|dt\,(|V_A|\hat{n}_A + |V_B|\hat{n}_B) = \rho S_A V_A^2 dt\left(\hat{n}_A + \frac{S_A}{S_B}\hat{n}_B\right) \tag{7.3.3}$$

dove $\hat{n}_A = (-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})$, $\hat{n}_A = (\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})$. Abbiamo infine

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{P}}{dt} = -\rho S_A V_A^2 \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2}\left(-1 + \frac{S_A}{S_B}\right) \\ \cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{S_A}{S_B}\right) \end{pmatrix}. \tag{7.3.4}$$

In particolare se $\alpha = 0$

$$\vec{F} = -\rho S_A V_A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \left(1 + \frac{S_A}{S_B}\right) \end{pmatrix} = -\rho \frac{S_A}{S_B} \left(S_A + S_B\right) |V_A| \vec{V}_A \,. \tag{7.3.5}$$

CC BY NC SA

7.4. Equilibrio di un cilindro immerso in un liquido ⋆⋆⋆

Un cilindro di densità costante ρ, raggio di base R e altezza h galleggia in un liquido di densità $\rho_L > \rho$, con l'asse in direzione verticale. Studiare la stabilità della posizione di equilibrio.

Soluzione

Poniamo inizialmente un sistema di riferimento con l'origine O sull'asse del cilindro a una distanza $\overline{OP} = d$ dalla base inferiore, come mostrato in Figura 7.1. In tale sistema di riferimento il centro di massa sarà in $x = y = 0$ e $z = h/2 - d$. Immaginiamo adesso di tagliare il cilindro con un piano passante per O e inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sempre facendo riferimento alla Figura 7.1, il centro di massa della parte del cilindro al di sotto del piano, che rappresenterà la parte immersa nel fluido, si troverà in $x_G(\theta)$, $y_G = 0$, $z_G(\theta)$.

Notiamo che il volume totale di tale parte non dipende da θ e vale

$$V_I = \pi R^2 d$$

All'equilibrio, con il cilindro in posizione verticale, la spinta di Archimede deve eguagliare la forza peso, quindi $g\rho_L V_I = g\rho V$, cioè

$$\rho_L \pi R^2 d g = \rho \pi R^2 h g$$

e quindi

$$d = \frac{\rho}{\rho_L} h$$

Si verifica facilmente che il sistema è stabile verticalmente. Se l'altezza della parte immersa vale $d - x$ infatti si ha una forza di richiamo verticale

$$F(x) = -\rho_L \pi R^2 g x$$

Vediamo sotto quale condizione il sistema è stabile sotto rotazioni. Ruotando di un angolo θ il cilindro attorno ad un asse orizzontale passante per O abbiamo per le coordinate di un punto generico

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - z\sin\theta \\ z' &= x\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$$

ossia, usando i risultati precedenti,

$$\begin{aligned} x'_M &= \left(\frac{h}{2} - d\right)\sin\theta \\ x'_G &= x_G(-\theta)\cos\theta - z_G(-\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

Quindi sul cilindro agisce il momento

$$M = \rho g V \left(x'_G - x'_M\right)$$

CC BY NC SA

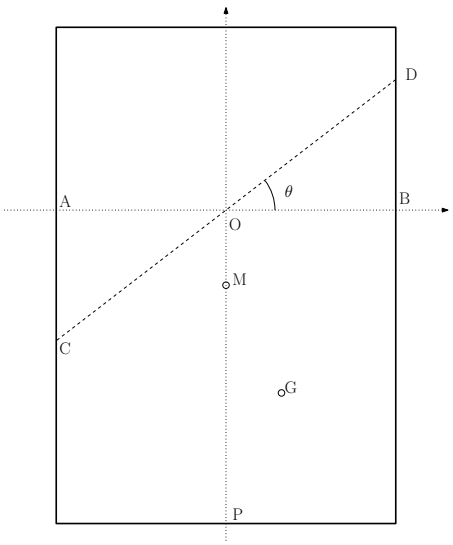


Figura 7.1.: Il cilindro del problema. L'origine del sistema di coordinate (asse verticale z, asse orizzontale x) è scelto in modo da avere $\overline{OP} = d$.

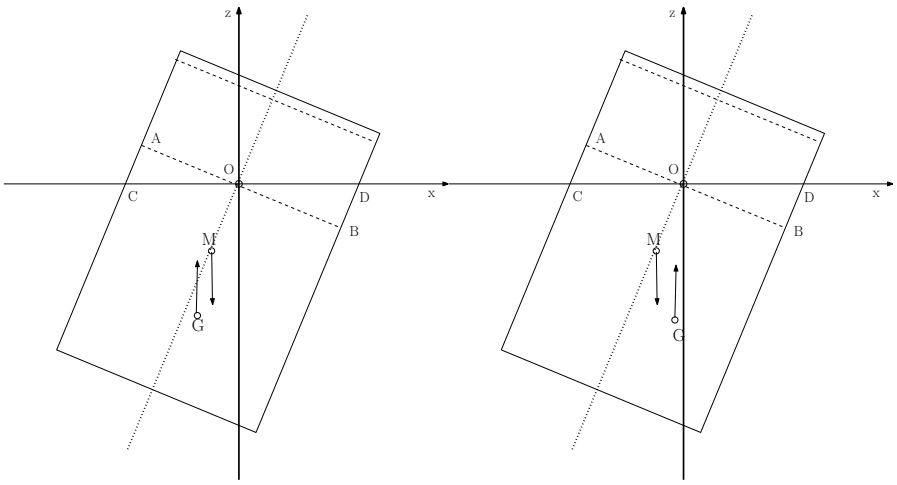


Figura 7.2.: Due possibili posizioni del centro di massa M del cilindro e del centro di galleggiamento G. La situazione a sinistra corrisponde alla instabilità, quella a destra alla stabilità.

Utilizzando le espressioni esplicite per x_G e z_G, calcolate alla fine dell'esercizio, otteniamo per piccoli angoli,

$$\begin{aligned} x'_M &= \left(\frac{h}{2} - d\right)\theta \\ x'_G &= \left(-\frac{d}{2} + \frac{R^2}{8\pi d}\right)\theta \end{aligned}$$

e il momento delle forze vale esplicitamente

$$M = \frac{1}{2}\rho g V \left(h - d - \frac{R^2}{4\pi d}\right)\theta$$

Per avere stabilità il momento deve tendere a riportare il cilindro nella posizione di equilibrio, quindi

$$\left(h - d - \frac{R^2}{4\pi d}\right) < 0$$

cioè

$$4\pi \frac{\rho}{\rho_L}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_L}\right) < \frac{R^2}{h^2}$$

Si avrà stabilità quindi quando il rapporto R/h è sufficientemente grande.

Calcolo del centro di massa della parte immersa del cilindro.

Considerando il cilindro in Figura 7.1, troviamo il centro di massa G della parte del cilindro al di sotto di un piano passante dal punto O e inclinato di un angolo θ (passante per C e D in figura). Abbiamo

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int x dV \\ z_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int z dV \end{aligned}$$

che possiamo scrivere esplicitamente in coordinate cilindriche. Per x_G si ottiene, tenendo conto che $x = r\cos\phi$ e che la faccia superiore ha equazione $z = x\tan\theta$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-d}^{r\cos\phi\tan\theta} dz\, r\cos\phi \\ &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr \cos\phi\,(r\cos\phi\tan\theta + d) \\ &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^R \frac{1}{2} r^3 dr \tan\theta \\ &= \frac{1}{8}\frac{R^4}{\pi R^2 d}\tan\theta \\ &= \frac{R^2}{8\pi d}\tan\theta \end{aligned}$$

Per quanto riguarda z_G

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_{-d}^{r\cos\phi\tan\theta} dz\, z \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \frac{1}{2}\left(r^2\cos^2\phi\tan^2\theta - d^2\right) \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^R dr \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r^3\tan^2\theta - 2\pi d^2 r\right) \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\left(\frac{R^2}{8\pi d^2}\tan^2\theta - 1\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
x'_M &= \left(\frac{h}{2} - d\right)\sin\theta \\
x'_G &= \frac{R^2}{8\pi d}\tan\theta\cos\theta + \frac{d}{2}\left(\frac{R^2}{8\pi d^2}\tan^2\theta - 1\right)\sin\theta
\end{aligned}$$

CC BY NC SA

7.5. Campo di velocità I ⋆⋆

Il campo di velocità di un fluido è descritto da $\vec{v} = (\alpha x, -\alpha y, 0)$. La regione $x^2+y^2+z^2 < 1$ viene marcata con un colorante a $t = 0$. Determinare la forma della regione colorata agli istanti successivi, e il suo volume.

Soluzione

Dall'espressione del campo di velocità si determinano le traiettorie degli elementi di fluido risolvendo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha y \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

che si integrano direttamente ottenendo

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{\alpha t} \\ y(t) &= y(0)e^{-\alpha t} \\ z(t) &= z(0) \end{aligned}$$

Dato che $x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 < 1$ otteniamo

$$\frac{x(t)^2}{e^{2\alpha t}} + \frac{y(t)^2}{e^{-2\alpha t}} + z(t)^2 < 1$$

quindi agli istanti successivi la macchia di colore ha la forma di un ellissoide con semiassi $a_x = e^{\alpha t}$, $a_y = e^{-\alpha t}$, $a_z = 1$. Il volume è dato da

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi a_x a_y a_z = \frac{4}{3}\pi$$

e si conserva.

CC BY NC SA

7.6. Recipiente conico forato ⋆⋆

Il recipiente in Figura 7.3 ha la forma di un tronco di cono rovesciato, con un foro circolare sul fondo di sezione S_0. Inizialmente è riempito fino ad una altezza h_0 con un liquido non viscoso. Detto τ il tempo necessario affinchè l'altezza del liquido si riduca a $h_1 < h_0$, scrivere τ come integrale definito e calcolarlo supponendo $h_1 \gg \sqrt{\frac{S_0}{\pi \cot^2 \theta}}$.

Soluzione

Poniamo l'origine di un sistema di coordinate nel vertice del cono. La superficie trasversa dipenderà da z come

$$S(z) = \pi z^2 \cot^2 \theta \tag{7.6.1}$$

ed in particolare il foro si troverà a una quota z_0 determinata da

$$S(z_0) = \pi z_0^2 \cot^2 \theta = S_0 \tag{7.6.2}$$

mentre la superficie del liquido sarà in

$$z = h + z_0$$

Il volume contenuto nel recipiente sarà quindi

$$V = \frac{1}{3}\left[S(z_0 + h)\,(z_0 + h) - S_0 z_0\right] = \frac{\pi}{3}\cot^2\theta\left[(h + z_0)^3 - z_0^3\right] \tag{7.6.3}$$

La variazione del volume V del liquido contenuto nel recipiente è dato da

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cot^2\theta\,(h + z_0)^2\,\frac{dh}{dt} = -S_0 v_- \tag{7.6.4}$$

dove v_- è la velocità di fuoriuscita, da cui

$$v_- = -\left(1 + \frac{h}{z_0}\right)^2 \frac{dh}{dt} \tag{7.6.5}$$

Se applichiamo il teorema di Bernoulli ad una linea di flusso che collega la superficie al foro di uscita abbiamo

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_-^2 \tag{7.6.6}$$

e sostituendo il valore di v_- determinato precedentemente troviamo

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh}{\left[\left(1 + \frac{h}{z_0}\right)^4 - 1\right]}} \tag{7.6.7}$$

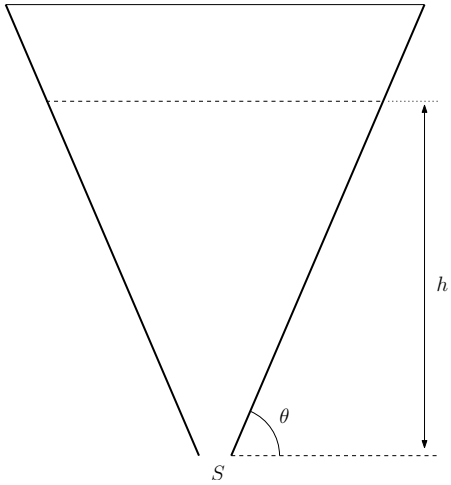


Figura 7.3.:

L'equazione differenziale è a variabili separabili e il tempo di svuotamento vale

$$t = \int_{h_1}^{h_0} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{h}{z_0}\right)^4 - 1}{2gh}} dh \tag{7.6.8}$$

Introducendo la variabile $x = h/z_0$ abbiamo infine

$$t = \sqrt{\frac{z_0}{2g}} \int_{h_1/z_0}^{h_0/z_0} \sqrt{\frac{(1+x)^4 - 1}{x}} dx \tag{7.6.9}$$

Dobbiamo calcolare questo integrale nel caso $h_1 \gg z_0$. Possiamo supporre allora $x \gg 1$ e approssimare

$$\sqrt{\frac{(1+x)^4 - 1}{x}} \simeq x^{3/2} \tag{7.6.10}$$

Otteniamo quindi

$$t = \sqrt{\frac{z_0}{2g}} \int_{h_1/z_0}^{h_0/z_0} x^{3/2} dx = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{z_0}{2g}} \left[\left(\frac{h_0}{z_0}\right)^{5/2} - \left(\frac{h_1}{z_0}\right)^{5/2} \right] \tag{7.6.11}$$

7.7. Svuotamento di un serbatoio ⋆⋆

Un recipiente cilindrico di sezione S è riempito fino ad una altezza h_1 di acqua, per la parte rimanente di vapore saturo. Sul fondo è praticato un foro di sezione $S_1 \ll S$, collegato ad una conduttura che nel tratto finale riduce la sua sezione a $S_2 < S_1$. Fornendo calore al sistema si mantiene la pressione del vapore ad un valore P. Nella conduttura si innesta un cilindro verticale aperto M, come in Figura 7.4. I diametri della conduttura sono tutti di dimensioni trascurabili rispetto ad h_1.

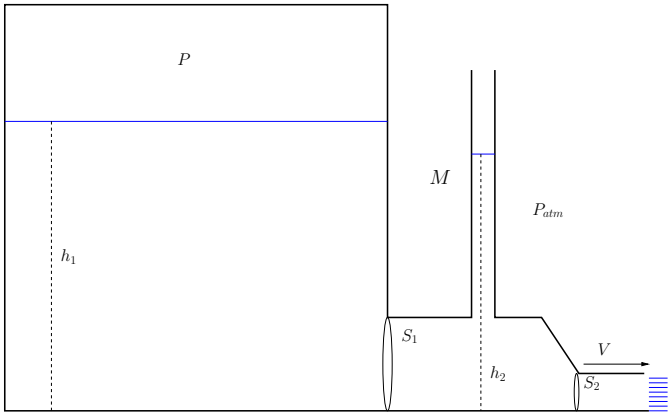


Figura 7.4.: Il sistema descritto nel problema.

1. Che altezza h_2 raggiunge l'acqua nel cilindro M se l'apertura di sezione S_2 è mantenuta chiusa?
2. Si apre adesso la conduttura, e in breve tempo si raggiunge lo stato stazionario. Calcolare la nuova altezza h_2 del liquido in M e la velocità con la quale l'acqua esce dalla conduttura.
3. Detta V la velocità calcolata al punto precedente, dire quanto calore è necessario fornire al sistema per unità di tempo per mantenere le condizioni stazionarie. Indicare con λ il calore latente di evaporazione e con ρ_V la densità del vapore.

Soluzione[1]

Domanda 1

Dato che la pressione sul fondo è la stessa ovunque deve essere

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 \tag{7.7.1}$$

e quindi

$$h_2 = h_1 + \frac{P - P_{atm}}{\rho g} \,. \tag{7.7.2}$$

[1]Secondo problema compitino 28 maggio 2008

Domanda 2

Detta V_1 la velocità nel tratto di sezione S_1 dal teorema di Bernoulli segue che

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{7.7.3}$$

e dalla conservazione della massa

$$S_1 V_1 = S_2 V\,. \tag{7.7.4}$$

Risolvendo abbiamo

$$V = \sqrt{\frac{2\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)}{\rho}} \tag{7.7.5}$$

e

$$h_2 = \frac{\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)\left(S_1^2 - S_2^2\right)}{\rho g S_1^2}\,. \tag{7.7.6}$$

Domanda 3

Dato che la sezione S è molto grande possiamo considerare h_1 costante. Man mano che il liquido defluisce è necessario rimpiazzarlo con nuovo vapore saturo, per mantenere costante la pressione P. La massa di vapore da creare per unità di tempo è

$$\rho_V V S_2 \tag{7.7.7}$$

che corrisponde alla massa di liquido da far evaporare. Quindi

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \rho_V V S_2\,. \tag{7.7.8}$$

CC BY NC SA

7.8. Traslocare un acquario ⋆⋆

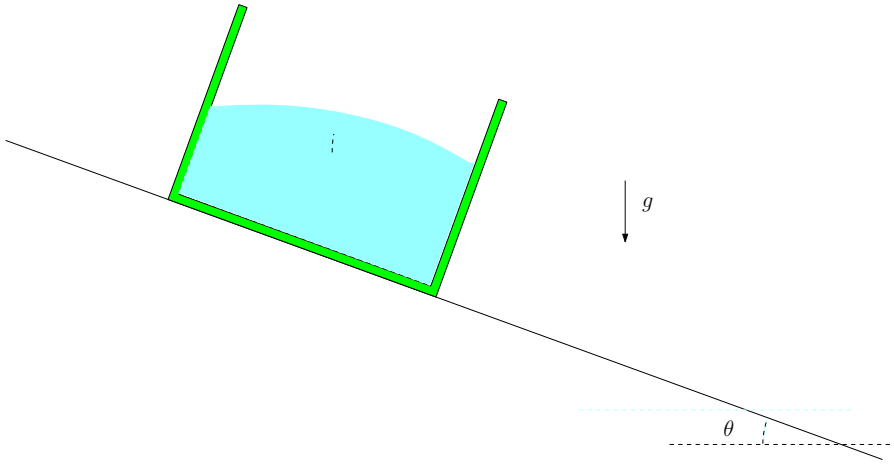


Figura 7.5.: La vasca scivola lungo un piano inclinato privo di attrito, e per le particolari condizioni iniziali scelte il liquido è in quiete rispetto alla vasca.

Una vasca rettangolare è riempita parzialmente di liquido, e viene fatta scendere da un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, come in Figura 7.5. Le condizioni iniziali sono scelte in modo tale che il liquido rimane in quiete rispetto alla vasca. Calcolare l'accelerazione di quest'ultima e descrivere le caratteristiche della superficie del liquido. Calcolare inoltre la pressione sul fondo della vasca, supponendo che il livello del liquido quando la vasca è orizzontale e in quiete sia h e la sua densità ρ.

Soluzione

Se il liquido è in quiete rispetto alla vasca, tutto il sistema è equivalente ad una unica massa che scende lungo un piano inclinato senza attrito. Di conseguenza l'accelerazione è parallela al piano e vale $a = g \sin\theta$. Se adesso ci poniamo in un sistema di riferimento solidale alla vasca, avremo che ogni elemento del fluido sarà sottoposto alla forza di gravità e ad una forza apparente costante, in totale

$$d\vec{F} = -dmg\hat{z} - dm\,(g\sin\theta)\,\hat{\tau} \tag{7.8.1}$$

dove $\hat{\tau}$ è il versore parallelo al piano. D'altra parte $\hat{z} = \hat{n}\cos\theta + \hat{\tau}\sin\theta$ ($\hat{n}$ è normale alla superficie) per cui

$$d\vec{F} = -dmg\cos\theta\hat{n} \tag{7.8.2}$$

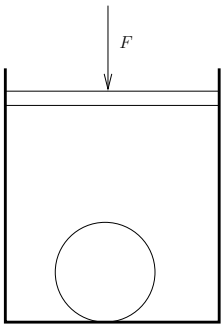
Nel sistema di riferimento scelto quindi le forze sono equivalenti a quelle di un campo gravitazionale uniforme di intensità $g\cos\theta$ perpendicolare al piano inclinato. La superficie del liquido sarà quindi un piano parallelo al piano inclinato, e la pressione sul fondo si otterrà applicando la legge di Stevino. Dato che anche il fondo è parallelo alla superficie avremo ovunque

$$P = \rho g\cos\theta h$$

Può essere utile confrontare questo esercizio con il 5.23.

7.9. Diavoletto di Cartesio ⋆⋆

Il recipiente cilindrico in figura (sezione S), non permette passaggio di calore. La sua base superiore può scorrere liberamente. All'interno del cilindro si trova una mole di esafloruro di zolfo (SF_6, massa molecolare $\mu = 146.6\,g/mol$), e una piccola sfera di un materiale di densità media ρ e capacità termica trascurabile.



Inizialmente si osserva che la sfera é appoggiata sul fondo, e l'esafluoruro di zolfo, che si assume si comporti come un gas perfetto, si trova a valori dati $T = T_0$ e $P = P_0$ di pressione e temperatura.

1. Cosa si puó dire di ρ? Di quanto si deve abbassare il pistone per fare in modo che la sfera si sollevi dal fondo?

2. Se tale abbassamento avviene aumentando molto lentamente la forza esterna F, quanto vale la variazione totale ΔF di quest'ultima? Quanto vale ΔF se la variazione è invece improvvisa?

3. Nei due casi precedenti, calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzione[2]

Osserviamo preliminarmente che la temperatura del gas sarà ovunque la stessa, dato che le diverse parti del sistema sono libere di scambiarsi calore. Al contrario, la pressione dipenderà dalla coordinata verticale, che chiameremo z. Possiamo scrivere per la legge dei gas perfetti

$$\mu P(z) = \rho(z) RT$$

ed inoltre

$$dP = -\rho g dz$$

da cui

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} P$$

[2] Primo esercizio compitino 30 maggio 2007

che si può integrare ottenendo

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{\mu g}{RT}z}\,.$$

Analogamente per la densità avremo

$$\rho_G(z) = \rho_G(0)e^{-\frac{\mu g}{RT}z}$$

che possiamo esprimere alternativamente in funzione del volume e della massa totale. Da

$$m = \mu = S\rho_G(0)\int_0^h e^{-\frac{\mu g}{RT}z}dz = S\rho_G(0)\frac{RT}{\mu g}\left(1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}}\right)$$

otteniamo

$$\rho_G(z) = \frac{\mu^2 g}{RTS}\left(1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}}\right)^{-1} e^{-\frac{\mu g}{RT}z}\,.$$

In prima approssimazione potremo trascurare ovunque la variazione di pressione e densità con l'altezza, salvo tenerne implicitamente conto per il calcolo della spinta di Archimede.

I.1

Alla sfera sono applicate due forze: quella di gravità e la spinta di Archimede, risultante dall'azione complessiva della pressione del gas. Per calcolare quest'ultima basta valutare la forza peso del gas che occuperebbe il volume della sfera, cioè

$$\vec{F}_A = F_A\hat{z} = gV_s\rho_G\hat{z}\,.$$

Se la sfera resta sul fondo avremo chiaramente

$$\rho > \rho_G = \frac{\mu P_0}{RT_0}\,.$$

Per sollevare la sfera si deve comprimere il gas fino ad avere

$$\rho'_G = \rho_G\frac{V_0}{V'} = \rho$$

da cui segue

$$\Delta h = \frac{1}{S}\left(V' - V_0\right) = \frac{V_0}{S}\left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1\right) = \frac{RT_0}{SP_0}\left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1\right) < 0\,.$$

I.2

Aumentando molto lentamente la forza esterna abbiamo una trasformazione adiabatica reversibile. In questo caso pressione e volume sono legati da

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$$

CC BY NC SA

dove $\gamma = c_p/c_v$e quindi la pressione finale vale

$$P = P_0 \left[\frac{V_0}{V_0 + V_0 \left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1 \right)} \right]^\gamma = \left(\frac{\rho}{\rho_G} \right)^\gamma P_0 \,.$$

Da questo segue che

$$\Delta F_{rev} = P_0 S \left[\left(\frac{\rho}{\rho_G} \right)^\gamma - 1 \right] .$$

Se la variazione è improvvisa, sul gas viene fatto un lavoro $W = -\left(F + \Delta F\right) \Delta h$ e quindi la sua energia interna aumenterà della stessa quantità. Da questo segue che

$$c_v \Delta T = -\left(F + \Delta F\right) \Delta h$$

cioè

$$c_v \left[\frac{(F + \Delta F)(V_0 + \Delta V_0)}{SR} - T_0 \right] = -\left(F + \Delta F\right) \frac{\Delta V_0}{S}$$

e quindi

$$(F + \Delta F) V_0 \left[\frac{c_v}{R} \frac{\rho_G}{\rho} + \left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1 \right) \right] = S c_v T_0$$

ossia

$$\Delta F_{irr} = P_0 S \frac{\gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)}{1 - \gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)} \,.$$

Da notare che $\Delta F_{rev} \geq \Delta F_{irr}$, e che se le densità iniziali sono molto vicine

$$\begin{aligned} \Delta F_{rev} &= P_0 S \gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right) + O \left[\left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)^2 \right] \\ \Delta F_{irr} &= P_0 S \gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right) + O \left[\left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)^2 \right] . \end{aligned}$$

La disuguaglianza si comprende tenendo conto che a parità di variazione di volume il lavoro fatto sul sistema è sempre maggiore nel caso irreversibile, e quindi la pressione finale sarà pure maggiore (il volume è lo stesso). I valori di ΔF sono uguali al primo ordine nella differenza tra densità perchè quando $\rho_G \simeq \rho$ le trasformazioni sono piccole, e possono essere considerate al limite entrambe reversibili.

7.10. Estrazione di una provetta ⋆⋆

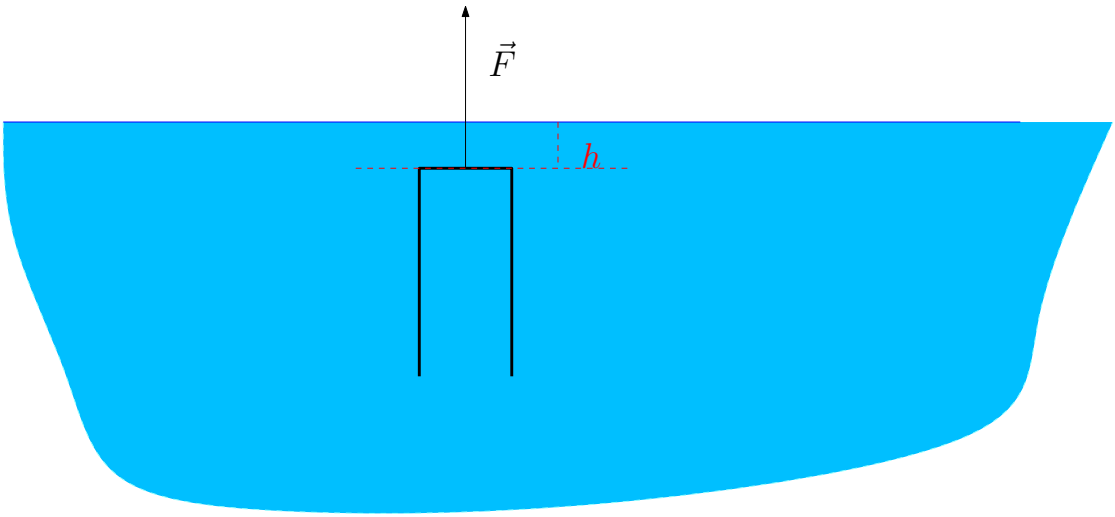


Figura 7.6.: La provetta completamente immersa nel liquido (cioè nel caso $h < 0$).

Una provetta di massa m, lunghezza ℓ e sezione S è immersa completamente in un fluido di densità ρ, che la riempie completamente. La pressione all'esterno del fluido è quella atmosferica P_A. Si può trascurare il volume occupato dalla massa della provetta. La si inizia ad estrarre mantenendola capovolta come in Figura 7.6. Vale $\rho g \ell > P_A$ e si può considerare la sezione del recipiente che contiene il fluido arbitrariamente grande.

Si chiede di determinare, sommando esplicitamente le forze in gioco, la forza $\vec{F}$ che è necessario applicare per mantenere la provetta in equilibrio in funzione della lunghezza h della parte emersa.

Soluzione

Facendo riferimento alla Figura 7.7 possiamo distinguere quattro diverse fasi dell'estrazione. Per ciascuna consideriamo il valore delle tre forze che agiscono verticalmente: la forza peso (sempre $-mg$), la forza $F_p^{(int)} = SP^{(int)}$ associata alla pressione $P^{(int)}$ applicata alla parte terminale della provetta dal suo interno, la forza $F_p^{(ext)} = -SP^{(ext)}$ associata alla pressione $P^{(ext)}$ applicata alla parte terminale della provetta dal suo esterno. Per avere equilibrio dovremo quindi applicare una forza verticale

$$F = mg - SP^{(int)} + SP^{(ext)}$$

1. La provetta è completamente immersa nel fluido. Dato che possiamo trascurare lo spessore della provetta, le pressioni $P^{(int)}$ e $P^{(ext)}$ saranno uguali (perchè alla stessa altezza), e quindi
$$F = mg$$

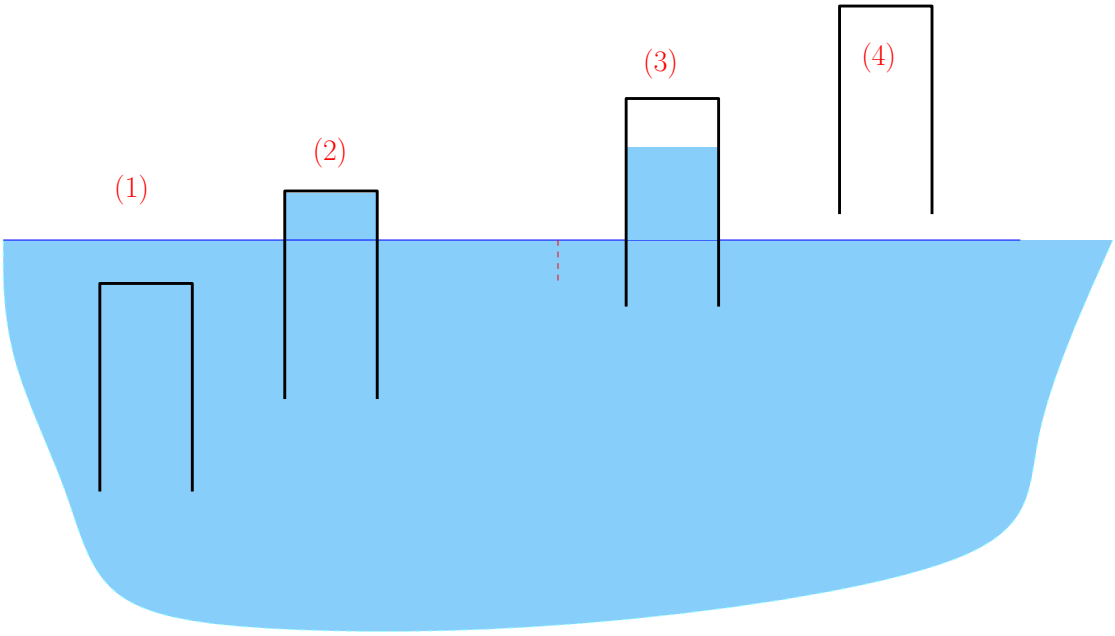


Figura 7.7.: Le quattro fasi di estrazione della provetta.

2. Adesso una parte della provetta di lunghezza h è al di fuori del fluido. Se $\rho g h < P_A$ l'interno della provetta resta completamente riempito di fluido. Avremo quindi $P^{(int)} = P_A - \rho g h$ e $P^{(ext)} = P_A$, da cui

$$F = mg + S\rho g h$$

3. Appena $\rho g h > P_A$ l'altezza della colonna di fluido all'interno della provetta smette di salire, lasciando una frazione vuota. Di conseguenza $P^{(int)} = 0$ e $P^{(ext)} = P_A$, da cui

$$F = mg + SP_A$$

4. Adesso la provetta contiene aria, quindi $P^{(int)} = P^{(ext)} = P_A$ e

$$F = mg$$

Notare che la forza F dipende da h in modo continuo, salvo che al passaggio dalla fase 3 alla fase 4 quando si svuota bruscamente di fluido.

7.11. Estrazione di una provetta, considerazioni energetiche. ⋆⋆

Vogliamo risolvere il Problema 7.11 basandoci su considerazioni energetiche. Per fare questo scriviamo l'energia potenziale del sistema in funzione della posizione verticale della provetta. Il ragionamento che segue è errato, e conduce a un risultato diverso da quello corretto ottenuto nel problema precedente. Si chiede di scoprire e correggere l'errore.

Sempre facendo riferimento alle quattro fasi rappresentate in Figura 7.7 scriviamo l'energia potenziale del sistema in funzione della posizione verticale della parte più alta della provetta rispetto alla superficie del fluido, indicandola con h.

1. *Abbiamo $h < 0$, e l'unica forza esterna che fa lavoro è la forza di gravità applicata alla provetta. Di conseguenza a meno di una costante avremo*
$$U = mgh$$

2. *Adesso le forze che fanno lavoro sono la forza di gravità applicata alla provetta, la forza di gravità applicata al fluido, la pressione esterna. Dato che la superficie del contenitore è arbitrariamente grande possiamo trascurare la variazione del suo livello e scrivere i tre contributi descritti, nell'ordine, come*
$$U = mgh + (\rho Sh)\, g \left(\frac{1}{2}h\right) + P_A Sh$$
Per scrivere il secondo termine abbiamo moltiplicato la massa totale della colonna di fluido sollevava ρSh per g e per l'altezza a cui è salito il relativo centro di massa $h/2$. L'ultimo termine infine è la pressione esterna per la variazione di volume.

3. *Dato che la colonna di fluido smette di salire quando $\rho gh = P_A$, da quel momento la forza di gravità applicata alla colonna di fluido smetterè di fare lavoro, e quindi*
$$U = mgh + P_A Sh + \frac{1}{2}\rho Sg \left(\frac{P_A}{\rho g}\right)$$
dove l'ultimo termine costante è stato scelto in modo da raccordarsi con continuità con l'espressione valida nella fase precedente.

4. *Appena $h > \ell$ la provetta si svuota e rimane il solo contributo della forza peso, e quindi*
$$U = mgh$$

Se adesso deriviamo le espressioni precedenti rispetto ad h otteniamo la forza mecessaria ad equilibrare la provetta, ossia

$$F = \frac{\partial U}{\partial h} = \begin{cases} mg & h < 0 \\ mg + P_A S + \rho g S h & 0 < h < \frac{P_A}{\rho g} \\ mg + P_A S & \frac{P_A}{\rho g} < h < \ell \\ mg & h > \ell \end{cases}$$

CC BY NC SA

Soluzione

L'espressione dell'energia potenziale nella fase 2 è scorretta, come si può notare confrontando l'espressione della forza con quella determinata nel Problema 7.11, perchè il termine legato al lavoro della pressione atmosferica $P_A Sh$ deve essere omesso. Questo si può comprendere tenendo conto che l'energia potenziale che vogliamo scrivere è quella del sistema costituito dalla provetta e dal fluido. La pressione atmosferica fa lavoro quindi non solo agendo sulla superfice della provetta, ma anche sulla superficie libera del fluido. Il totale sarà dato quindi da

$$dL = P_A dV$$

dove dV è la variazione *totale* del volume del sistema, che in questa fase coincide con il volume del fluido (la provetta è completamente piena). Ma il fluido è incomprimibile, per cui $dV = 0$.

Si può rimanere confusi dal fatto che nel limite di recipiente molto grande la variazione di altezza del livello del fluido tende a zero. Questo è vero, ma non tendi invece a zero il prodotto tra la variazione di altezza e la superficie libera.

7.12. Tempo di svuotamento di un contenitore ⋆

Un contenitore cilindrico di sezione S è riempito di un liquido di densità ρ. Ad una profondità h viene praticato un foro nella parete laterale di sezione $s \ll S$. Calcolare dopo quanto tempo il livello del liquido scende di tratto $\Delta < h$.

Soluzione

Consideriamo una linea di flusso che collega la superficie del liquido con il foro. Dal teorema di Bernoulli segue che la quantità $H = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P$ deve avere lo stesso valore sulla superficie, dove abbiamo

$$H = P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{7.12.1}$$

e al foro, dove invece

$$H = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{7.12.2}$$

da cui

$$h = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{7.12.3}$$

Abbiamo indicato con $v_1 = -dh/dt$ la velocità con cui la superficie del liquido si abbassa, e con v_2 la velocità di uscita dal foro. D'altra parte dato che il liquido è incompressibile (la densità ρ è fissata) deve essere

$$S v_1 = s v_2 \tag{7.12.4}$$

e quindi

$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) v_1^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \tag{7.12.5}$$

Separando le variabili otteniamo

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \pm \int_0^t \sqrt{\frac{2gs^2}{S^2 - s^2}}\, dt \tag{7.12.6}$$

da cui, scegliendo il segno opportunamente,

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{gs^2}{2\left(S^2 - s^2\right)}}\, t \tag{7.12.7}$$

Il tempo cercato si ottiene ponendo in questa espressione $h(t) = h_0 - \Delta$

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \Delta}\right)\sqrt{\frac{2\left(S^2 - s^2\right)}{gs^2}} \\ &\simeq \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \Delta}\right) \end{aligned} \tag{7.12.8}$$

Nella soluzione non si è tenuto conto di diverse correzioni possibili, che verranno discusse in altri esercizi. In particolare

1. non si è tenuto conto del fatto che la velocità di uscita del fluido non è perpendicolare alla superficie del foro, quindi non è del tutto corretto stimare il flusso in uscita come sv_2

2. è stato trascurato qualsiasi attrito

3. non si è tenuto conto del fatto che il fluido non è realmente in uno stato stazionario, dato che le velocità in ogni punto cambiano mel tempo. L'approssimazione dovrebbe essere buona per $s \ll S$, almeno lontano dalle fasi finali dello svuotamento.

Parte III.

Termodinamica

8. Trasmissione del calore

8.1. Sfera radiante ⋆⋆

All'interno di una sfera di raggio R e conducibilità termica η viene prodotto calore in modo omogeneo. Il calore prodotto per unità di volume e unità di tempo vale w.

La sfera è immersa in uno spazio vuoto allo zero assoluto nel quale irraggia come un corpo nero. Calcolare la temperatura all'interno del corpo all'equilibrio.

Soluzione

Per motivi di simmetria il calore si propagherà radialmente, e potremo scrivere la relativa componente della sua densità di corrente come

$$J_q(r) = -\eta \frac{\partial T(r)}{\partial r}$$

dove, sempre per simmetria, anche la temperatura dipenderà solo dal raggio.

Il calore che attraversa una superficie sferica di raggio r sarà data da

$$\frac{dQ}{dt}(r) = 4\pi r^2 J_q(r) = -4\pi\eta r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \tag{8.1.1}$$

e dovrà essere uguale al calore prodotto per unità di tempo in tutto il volume in esso contenuto:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 w = -4\pi\eta r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r}\,.$$

Otteniamo un'equazione differenziale per la temperatura della forma

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{rw}{3\eta}$$

che possiamo integrare direttamente:

$$T(r) = T(0) - \frac{w}{6\eta} r^2$$

Per determinare la costante di integrazione imponiamo che il flusso di calore irradiato sia uguale a quello determinato dalla (8.1.1)

$$4\pi R^2 J_q(R) = 4\pi R^2 \sigma T(R)^4$$

cioè

$$4\pi\eta\frac{w}{3\eta}R^3 = 4\pi R^2\sigma\left(T(0) - \frac{w}{6\eta}R^2\right)^4$$

da cui

$$T(0) = \left(\frac{wR}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{w}{6\eta}R^2\,.$$

Da tutto ciò segue

$$T(r) = \left(\frac{wR}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{w}{6\eta}\left(R^2 - r^2\right)\,.$$

CC BY NC SA

8.2. Sbarra conducibilità variabile ⋆⋆

Calcolare la resistenza termica di una sbarra di lunghezza ℓ e sezione S, se la conducibilità termica del materiale varia secondo la legge

$$\kappa(z) = \kappa_0 + (\kappa_\ell - \kappa_0)\,\frac{z}{\ell} \tag{8.2.1}$$

lungo essa.

Soluzione

In condizioni stazionarie la corrente che attraversa una sezione della sbarra deve essere indipendente da z. Inoltre

$$\frac{I}{S} = J = -\kappa(z)\frac{dT(z)}{dz} \tag{8.2.2}$$

da cui

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{I}{S}\int_0^\ell \frac{dz}{\kappa(z)} = -RI\,. \tag{8.2.3}$$

La resistenza termica vale quindi

$$R = \frac{1}{S}\int_0^\ell \frac{dz}{\kappa_0 + (\kappa_\ell - \kappa_0)\,\frac{z}{\ell}} \tag{8.2.4}$$

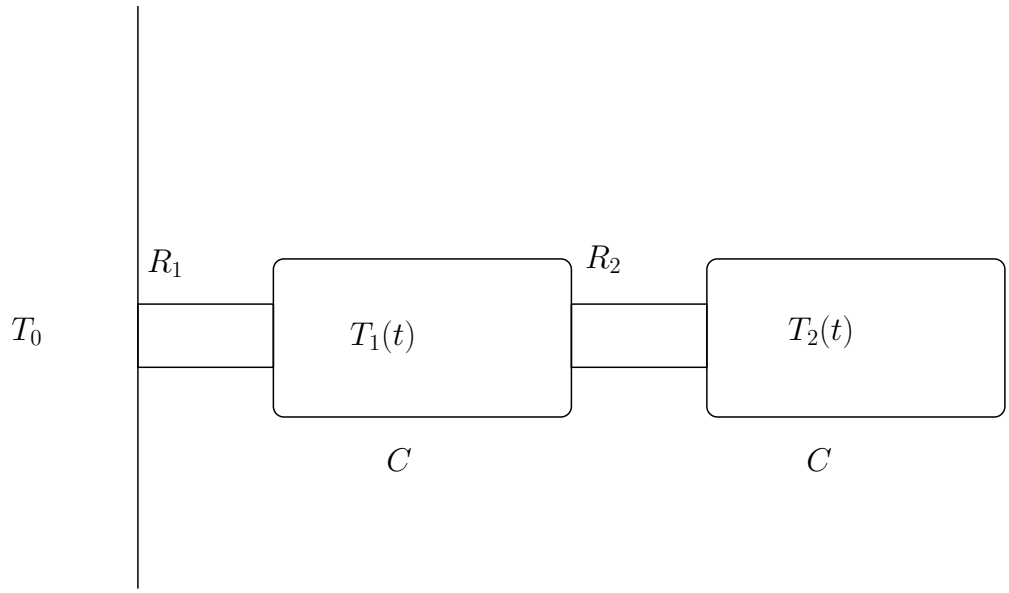
oppure, introducendo la nuova variabile

$$\kappa = \kappa_0 + (\kappa_\ell - \kappa_0)\,\frac{z}{\ell} \tag{8.2.5}$$

$$R = \frac{1}{S}\frac{\ell}{k_\ell - k_0}\int_{k_0}^{k_\ell}\frac{dk}{k} = \frac{1}{S}\frac{\ell}{k_\ell - k_0}\log\frac{k_\ell}{k_0}\,. \tag{8.2.6}$$

CC BY NC SA

8.3. Tre corpi in contatto termico ⋆⋆



Due corpi di uguale capacità termica sono collegati tra di loro e ad un bagno termico di temperatura T_0 tramite delle resistenze termiche R_1 e R_2 come in figura. Calcolare la temperatura all'equilibrio e l'evoluzione delle temperature $T_1(t)$ e $T_2(t)$ a partire da una data condizione iniziale. Trascurare la capacità termica delle resistenze.

Soluzione

La temperatura di equilibrio è ovviamente quella del bagno termico. Per verificarlo possiamo immaginare che il bagno termico abbia in realtà una capacità termica C_0 molto grande. In accordo con la formula generale all'equilibrio termico avremo

$$T_f = \frac{C_0 T_0 + C T_1 + C T_2}{C_0 + 2C} \tag{8.3.1}$$

e passando al limite $C_0 \to \infty$ otteniamo $T_f = T_0$.

Scriviamo adesso le equazioni che determinano la evoluzione delle temperature. Per le correnti di calore abbiamo

$$R_1 I_1(t) = T_0 - T_1(t) \tag{8.3.2}$$

$$R_2 I_2(t) = T_1(t) - T_2(t) \tag{8.3.3}$$

e d'altra parte

$$C\frac{dT_1(t)}{dt} = (I_1(t) - I_2(t)) \tag{8.3.4}$$

$$C\frac{dT_2(t)}{dt} = I_2(t) \tag{8.3.5}$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1+\gamma_2 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 T_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.6}$$

dove abbiamo posto $\gamma_1^{-1} = R_1 C$ e $\gamma_2^{-1} = R_2 C$. Questo è un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, non omogeneo. Cercheremo prima una soluzione particolare, quindi la soluzione generale del sistema omogeneo associato.

Se all'istante iniziale le temperature dei due corpi sono uguali a quelle di equilibrio, ci aspettiamo che rimangano tali anche successivamente. In altre parole $T_1(t) = T_2(t) = T_0$ è una soluzione particolare, come si verifica facilmente per sostituzione.

Veniamo alla soluzione generale dell'omogenea, che cercheremo nella forma

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta t}\,. \tag{8.3.7}$$

Sostituendo troviamo

$$\beta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta t} + \begin{pmatrix} \gamma_1+\gamma_2 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.8}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \gamma_1+\gamma_2+\beta & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2+\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{8.3.9}$$

Questo sistema lineare omogeneo avrà soluzioni non banali solo quando il determinante della matrice sarà nullo. Da

$$\begin{vmatrix} \gamma_1+\gamma_2+\beta & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_2+\beta \end{vmatrix} = \beta^2 + (\gamma_1+2\gamma_2)\,\beta + \gamma_1\gamma_2 = 0\,. \tag{8.3.10}$$

troviamo che questo accade per due valori (entrambi reali e negativi) di β:

$$\beta_\pm = \frac{-(\gamma_1+2\gamma_2) \pm \sqrt{\gamma_1^2+4\gamma_2^2}}{2}\,. \tag{8.3.11}$$

Le corrispondenti soluzioni per A_1 e A_2 saranno

$$\beta = \beta_+ : \qquad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \gamma_2+\beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.12}$$

$$\beta = \beta_- : \qquad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} \gamma_2+\beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.13}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Otteniamo quindi la soluzione generale sommando la soluzione generale dell'omogenea alla soluzione particolare.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \gamma_2+\beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{\beta_+ t} + c_2 \begin{pmatrix} \gamma_2+\beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{\beta_- t} + \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix}\,. \tag{8.3.14}$$

Imponiamo le condizioni iniziali a $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} T_1^0 - T_0 \\ T_2^0 - T_0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.15}$$

che ci permettono di calcolare c_1 e c_2:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} T_1^0 - T_0 & \gamma_2 + \beta_- \\ T_2^0 - T_0 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{\gamma_2 \left(T_1^0 - T_0\right) - \left(T_2^0 - T_0\right)(\gamma_2 + \beta_-)}{\gamma_2 (\beta_+ - \beta_-)} \tag{8.3.16}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & T_1^0 - T_0 \\ \gamma_2 & T_2^0 - T_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_2 + \beta_+ & \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\gamma_2 \left(T_1^0 - T_0\right) + \left(T_2^0 - T_0\right)(\gamma_2 + \beta_+)}{\gamma_2 (\beta_+ - \beta_-)} \,. \tag{8.3.17}$$

Consideriamo adesso due casi particolari, cominciando da $\gamma_2 \gg \gamma_1$. In questo caso $R_2 \ll R_1$. Abbiamo

$$\beta_+ = -2\gamma_2 \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right) - \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2^2}} \right] = -2\gamma_2 \left[\frac{\gamma_1}{2\gamma_2} + O\left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\right) \right] \simeq -\gamma_1 \tag{8.3.18}$$

$$\beta_- = -2\gamma_2 \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right) + \sqrt{1 + \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2^2}} \right] = -2\gamma_2 \left[2 + O\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \right] \simeq -2\gamma_2 \tag{8.3.19}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.20}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.21}$$

$$c_1 \simeq \frac{T_1^0 + T_2^0 - 2T_0}{2\gamma_2} \tag{8.3.22}$$

$$c_2 \simeq \frac{T_2^0 - T_1^0}{2\gamma_2} \,. \tag{8.3.23}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \simeq \frac{T_1^0 + T_2^0 - 2T_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} + \frac{T_2^0 - T_1^0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2\gamma_2 t} + \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \,. \tag{8.3.24}$$

possiamo interpretare la soluzione nel seguente modo: la differenza di temperatura tra i due corpi tende a zero molto velocemente, con un tempo caratteristico dato da $\frac{1}{2}\gamma_2^{-1}$. Invece la temperatura media dei due corpi tende alla temperature di equilibrio, ma con un tempo caratteristico molto più grande γ_1^{-1}. Questo è facilmente comprensibile, dato

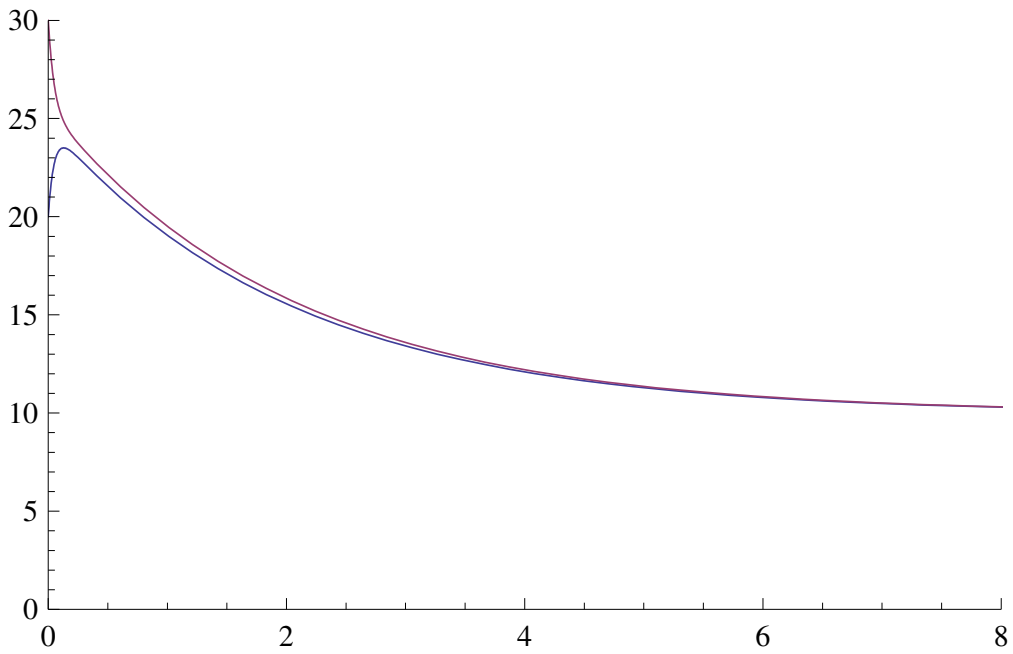


Figura 8.1.: Evoluzione delle temperature per $\gamma_1 = 1\,s^{-1}$, $\gamma_2 = 10\,s^{-1}$, $T_0 = 10\,K$, $T_1^0 = 20\,K$, $T_2^0 = 30\,K$.

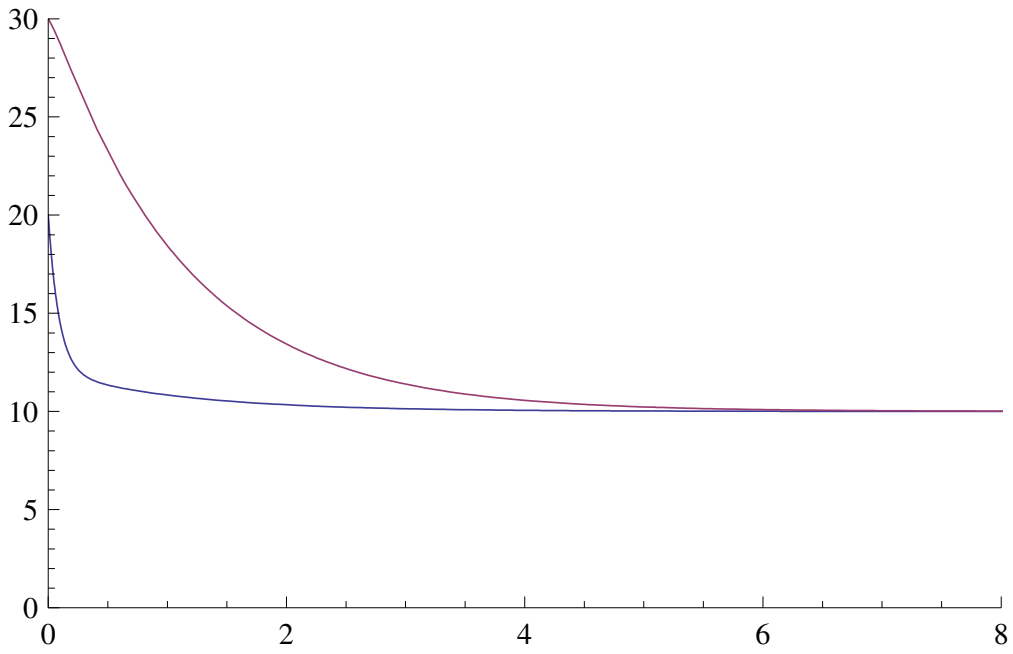


Figura 8.2.: Evoluzione delle temperature per $\gamma_1 = 10\,s^{-1}$, $\gamma_2 = 1\,s^{-1}$, $T_0 = 10\,K$, $T_1^0 = 20\,K$, $T_2^0 = 30\,K$.

che a causa della bassa resistenza termica tra i due corpi questi tenderanno a stabilire un equilibrio locale tra di loro molto velocemente. Un esempio è riportato in Figura 8.1

Vediamo invece cosa accade se $\gamma_1 \gg \gamma_2$. In questo caso

$$\beta_+ = \frac{1}{2}\gamma_1 \left[-\left(1 + 2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \sqrt{1 + 4\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}} \right] \simeq -\gamma_2 \tag{8.3.25}$$

$$\beta_- = \frac{1}{2}\gamma_1 \left[-\left(1 + 2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \sqrt{1 + 4\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}} \right] \simeq -\gamma_1 \tag{8.3.26}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_+ \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{8.3.27}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 + \beta_- \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.28}$$

$$c_1 = \frac{\left(T_2^0 - T_0\right)}{\gamma_2} \tag{8.3.29}$$

$$c_2 = \frac{-\left(T_1^0 - T_0\right)}{\gamma_1}\,. \tag{8.3.30}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \simeq \left(T_2^0 - T_0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\gamma_2 t} - \left(T_1^0 - T_0\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} + \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix}. \tag{8.3.31}$$

Anche in questo caso l'interpretazione è chiara: il primo corpo tende molto rapidamente alla temperatura del bagno termico, con un tempo caratterstico dato da γ_1^{-1}. Il secondo termalizza più lentamente, con un tempo caretteristico dato da $\gamma_2^{-1} \gg \gamma_1^{-1}$. Un esempio è in Figura 8.2.

8.4. Sbarra conduttrice ⋆⋆

La temperatura di una sbarra di lunghezza ℓ e sezione S è inizialmente

$$T(x,0) = T_1 \left(1 - \beta \cos \frac{\pi}{\ell} x\right) \tag{8.4.1}$$

con $\beta < 1$. La sbarra è isolata termicamente, ed è costituita di un materiale di conducibilità termica κ, calore specifico c e densità ρ. Calcolare la temperatura finale,

$$T_f = \lim_{t\to\infty} T(x,t) \tag{8.4.2}$$

e l'evoluzione temporale $T(x,t)$.

Soluzione

La temperatura finale si può calcolare immediatamente come media delle temperature iniziali dei diversi elementi della sbarra, pesati con le capacità termiche. Dato che la capacità termica di un tratto infinitesimo della sbarra è $\rho S c dx$ abbiamo

$$T_f = \frac{\int T(x,0)\, \rho S c\, dx}{\int \rho S c dx} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T_1 \left(1 - \beta \cos \frac{\pi}{\ell} x\right) dx = T_1 \,. \tag{8.4.3}$$

Per calcolare l'evoluzione temporale ricordiamo che la densità di corrente di calore è proporzionale al gradiente di temperatura:

$$J_q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \tag{8.4.4}$$

e che la variazione temporale della temperatura è data da

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_q}{\partial x} \tag{8.4.5}$$

da cui

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \,. \tag{8.4.6}$$

Se calcoliamo la derivata seconda della temperatura iniziale rispetto ad x otteniamo

$$\frac{\partial^2 T(x,0)}{\partial x^2} = \beta T_1 \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{\pi}{\ell} x \,. \tag{8.4.7}$$

Questo suggerisce di cercare una soluzione della forma

$$T(x,t) = T_1 + \Delta(t) \cos \frac{\pi}{\ell} x \,. \tag{8.4.8}$$

Sostituendo nell'equazione troviamo

$$\dot{\Delta}(t) \cos \frac{\pi}{\ell} x = -\frac{\kappa}{c\rho} \frac{\pi^2}{\ell^2} \Delta \cos \frac{\pi}{\ell} x \tag{8.4.9}$$

e quindi

$$\Delta(t) = C_1 e^{-\gamma t} \tag{8.4.10}$$

con $\gamma = \frac{\kappa \pi^2}{c\rho\ell^2}$. Imponendo la condizione iniziale troviamo $C_1 = -\beta T_1$ e quindi

$$T(x,t) = T_1 \left(1 - \beta e^{-\gamma t} \cos \frac{\pi}{\ell} x\right) . \tag{8.4.11}$$

CC BY NC SA

8.5. Equazione del calore unidimensionale ⋆⋆

Ricavare l'equazione del calore in una dimensione, nel caso generale in cui densità, calore specifico e conducibilità termica sono funzione della posizione.

Soluzione

La prima equazione da cui partire è quella che da la densità di corrente di calore,

$$J_q(x,t) = -\kappa(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{8.5.1}$$

la seconda quella che lega l'aumento della temperatura in un tratto della sbarra al calore entrante:

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_q(x,t)}{\partial x}\,. \tag{8.5.2}$$

Questa si ottiene applicando $cm\Delta T = \Delta Q$ a un tratto della sbarra compresa tra $x - dx/2$ e $x + dx/2$.

$$c(x)\rho(x)Sdx\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = J_q(x-dx/2,t)S - J_q(x+dx/2,t)S = -\frac{\partial J_q(x,t)}{\partial x}Sdx + O(dx^2)\,. \tag{8.5.3}$$

Derivando la prima equazione rispetto a x e eliminando la corrente di calore usando la seconda otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}\,. \tag{8.5.4}$$

8.6. Fluttuazione di temperatura su una sbarra ⋆⋆

Determinate se possibile $\Delta(t)$ e $\sigma(t)$ in modo che la funzione

$$T(x,t) = T_0 + \Delta(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A(t)}\right) \tag{8.6.1}$$

sia soluzione dell'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8.6.2}$$

con $\mu = \frac{k}{\rho c}$ (vedere l'Esercizio 8.5) e date una interpretazione del risultato.

Soluzione

Calcoliamo le derivate della (8.6.1). Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\dot{\Delta} + \frac{1}{2}\Delta\frac{\dot{A}}{A^2}x^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A}\right) \\
\mu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \mu\Delta\left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 - \frac{1}{A}\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A}\right)
\end{aligned}$$

ed uguagliando queste due espressioni vediamo che devono valere le due condizioni

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta} &= -\frac{\mu\Delta}{A} \\
\frac{1}{2}\Delta\frac{\dot{A}}{A^2} &= \frac{\mu\Delta}{A^2}
\end{aligned}$$

La seconda equazione si integra immediatamente dopo una semplice semplificazione ottenendo

$$A(t) = \sigma_0^2 + 2\mu t$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$\frac{\dot{\Delta}}{\Delta} = \frac{d}{dt}\log\Delta = -\frac{\mu}{\sigma_0^2 + 2\mu t}$$

da cui

$$\Delta(t) = \Delta_0\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}}$$

Sostituendo otteniamo

$$T(x,t) = T_0 + \Delta_0\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}\right) \tag{8.6.3}$$

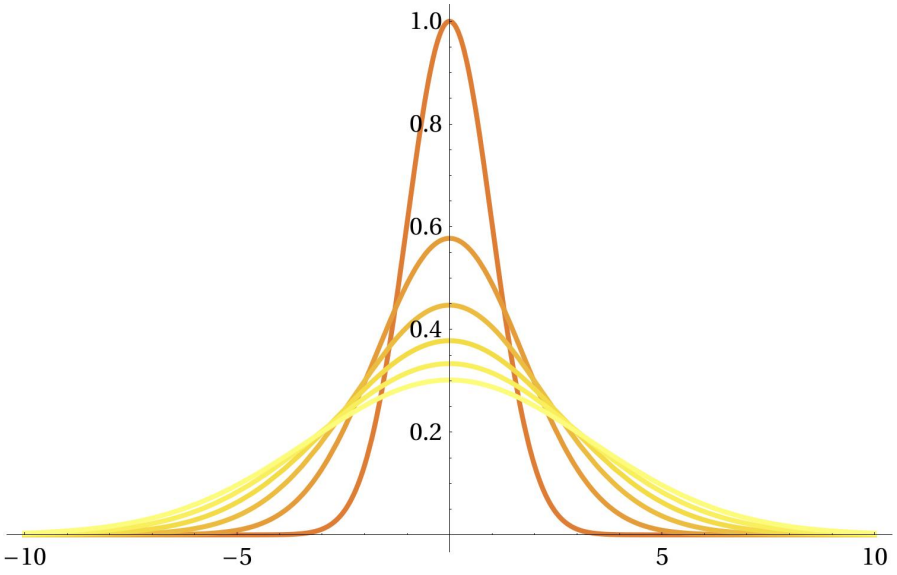


Figura 8.3.: L'evoluzione temporale della fluttuazione di temperatura considerata nel problema. La curva più alta corrisponde alla fluttuazione iniziale, le successive via via più basse a $\mu t = 1, 2, 3, 4, 5$. Sulle ascisse la posizione in unità σ_0, sulle ordinate la fluttuazione in unità Δ_0.

Possiamo interpretare il risultato come l'evoluzione temporale di una fluttuazione di temperatura Gaussiana su un sistema unidimensionale omogeneo (per esempio una sbarra). La larghezza della fluttuazione cresce con legge $\sigma(t) \equiv \sqrt{\sigma_0^2 + 2\mu t}$. La sua ampiezza al tempo stesso si riduce: questo è una conseguenza della conservazione dell'energia: infatti l'energia totale della fluttuazione è data dall'integrale

$$E_f = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_0 \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_0^2 + 2\mu t}\right) dx \tag{8.6.4}$$

Introducendo la nuova variabile $y = x/\sigma(t)$ vediamo che l'integrale si scrive nella forma

$$E_f = \rho c \Delta_0 \sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \tag{8.6.5}$$

che è evidentemente indipendente dal tempo.

8.7. Una soluzione particolare dell'equazione del calore unidimensionale ⋆⋆⋆

Data l'equazione del calore unidimensionale

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

studiare, se esistono, soluzioni particolari del tipo

$$T(x,t) = N(t)\Phi\left(\frac{x}{f(t)}\right)$$

dove $N(t)$ e $f(t)$ sono funzioni incognite da determinare. Assumere che l'energia della sbarra si finita e si conservi.

Soluzione

L'energia totale della sbarra si può scrivere nella forma

$$U(t) = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx$$

cioè, per la soluzione proposta,

$$\begin{aligned} U(t) &= \rho c \int_{-\infty}^{\infty} N(t)\Phi\left(\frac{x}{f(t)}\right) dx \\ &= \rho c N(t) f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)\, du \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la variabile $u = x/\sigma$. Dato che l'integrale è ovviamente indipendente dal tempo, dovrà essere

$$N = \frac{1}{f}$$

Calcolando le derivate abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\dot{f}}{f^2}\Phi - \frac{x}{f^3}\dot{f}\Phi' \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{f^3}\Phi'' \end{aligned}$$

e sostituendo otteniamo

$$\frac{\mu}{f^2}\Phi''(u) + \frac{\dot{f}}{f}u\Phi'(u)\frac{\dot{f}}{f}\Phi(u) = 0$$

Ma questo si può anche scrivere nella forma

$$\Phi'' + \frac{f\dot{f}}{\mu}\frac{d}{du}(u\Phi) = 0$$

Integrando rispetto ad u otteniamo

$$\Phi'(u) + \frac{f\dot{f}}{\mu}u\Phi(u) = C_1$$

Derivando membro a membro rispetto al tempo vediamo che deve essere

$$\frac{d}{dt}f\dot{f} = 0$$

cioè

$$\frac{d^2}{dt^2}f^2 = 0$$

e integrando otteniamo

$$f^2 = f_0^2 + \alpha t$$

dove α e f_0 sono costanti arbitrarie. L'equazione differenziale per Φ si può riscrivere allora nella forma

$$\Phi'(u) + \frac{\alpha}{2\mu}u\Phi(u) = C_1$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del prio ordine. Il metodo standard per la risoluzione consiste nel moltiplicare membro a membro per un opportuno fattore integrante. In questo caso ad esempio otteniam

$$\left[\Phi'(u) + \frac{\alpha}{2\mu}u\Phi(u)\right]e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2} = C_1 e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2}$$

che si può riscrivere come

$$\frac{d}{du}\left[\Phi e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2}\right] = C_1 e^{\frac{\alpha}{4\mu}u^2}$$

Integrando abbiamo

$$\Phi = C_1 e^{-\frac{\alpha}{4\mu}u^2}\int_0^u e^{\frac{\alpha}{4\mu}w^2}dw + C_2 e^{-\frac{\alpha}{4\mu}u^2}$$

Infine

$$T(x,t) = \frac{1}{\sigma(t)}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}\right)\left[C_1'\int_0^{\frac{x}{\sigma}} e^{\frac{w^2}{2}}dw + C_2'\right]$$

dove abbiamo definito

$$\sigma(t) \equiv \sqrt{\frac{2\mu f_0^2}{\alpha} + 2\mu t} = \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}f(t)$$

Notiamo adesso che termine proporzionale a C_1' non è accettabile fisicamente. Infatti essendo una funzione dispari di x, assume valori negativi (temperature negative non sono accettabili) o per x positivi o per x negativi, e domina per $|x|$ sufficientemente grandi su quello proporzionale a C_2'. Di conseguenza le uniche soluzioni accettabili sono

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \frac{A}{\sigma(t)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}\right) \\ \sigma(t) &= \sqrt{\sigma_0^2 + 2\mu t} \end{aligned}$$

cioè quelle studiate nell'Esercizio 8.6.

CC BY NC SA

8.8. Temperatura a regime di una sbarra radioattiva ⋆⋆

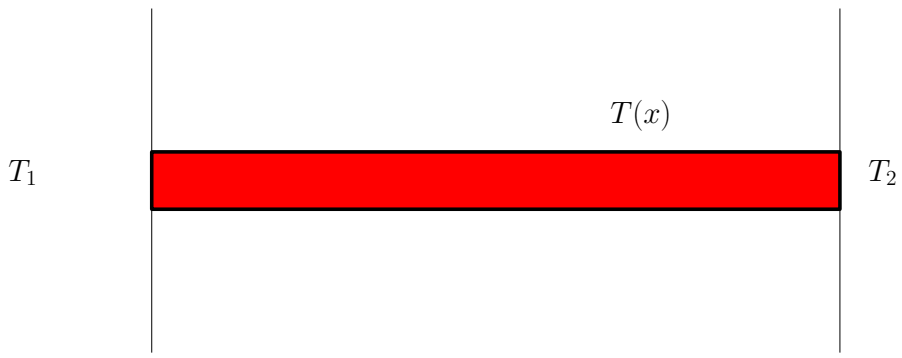


Figura 8.4.: La sbarra radioattiva considerata nel problema

Una sbarra di lunghezza ℓ, sezione S e conducibilità termica σ è montata tra due corpi molto grandi mantenuti a temperatura costante T_1 e $T_2 > T_1$ (Figura 8.4). La sbarra è radioattiva, e al suo interno viene continuamente prodotta energia: il calore generato per unità di volume e di tempo è η.

- Determinare la temperatura della sbarra a regime.
- Per quali valori di η il punto più caldo della sbarra non si trova ad un estremo?
- In quali condizioni non si ha trasmissione di calore tra la sbarra e il corpo a temperatura T_2?

Soluzione

A regime il calore uscente da un tratto di sbarra compreso tra $x = x_1$ e $x = x_2$ deve essere uguale a quello prodotto all'interno. Detta $J(x)$ la densità di corrente di calore abbiamo dunque

$$SJ(x_2) - SJ(x_1) = (x_2 - x_1)\, S\eta$$

ed in particolare prendendo $x_1 = 0$ e $x_2 = x$

$$J(x) = J(0) + x\eta$$

Dato che il calore viene trasmesso per conduzione abbiamo dalla legge di Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma} J(x) = -\frac{1}{\sigma} J(0) - \frac{\eta}{\sigma} x$$

ed integrando troviamo

$$T(x) = T_1 - \frac{x}{\sigma} J(0) - \frac{\eta}{2\sigma} x^2$$

Imponendo le condizioni al contorno $T(\ell) = T_2$

$$T_1 - \frac{\ell}{\sigma} J(0) - \frac{\eta \ell^2}{2\sigma} = T_2$$

troviamo la corrente all'estremo sinistro della sbarra,

$$J(0) = \frac{\sigma}{\ell} (T_1 - T_2) - \frac{\eta \ell}{2}$$

e quindi

$$T(x) = T_1 + \frac{x}{\ell} (T_2 - T_1) + \frac{\eta}{2\sigma} x (\ell - x)$$

Il punto più caldo non si trova ad un estremo se il massimo della funzione $T(x)$ è all'interno dell'intervallo $0 < x < \ell$. Dato che

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\ell} (T_2 - T_1) + \frac{\eta}{2\sigma} (\ell - 2x)$$

deve essere

$$-\frac{\ell}{2} < \frac{\sigma}{\eta \ell} (T_2 - T_1) < \frac{\ell}{2}$$

dato che

$$x_{max} = \frac{\sigma}{\eta \ell} (T_2 - T_1) + \frac{\ell}{2}$$

cioè per

$$\eta > \frac{2\sigma}{\ell^2} (T_2 - T_1)$$

Infine, dalla legge di Fourier troviamo che J si annulla nel massimo di $T(x)$. Questo si troverà in $x = \ell$ quando

$$\eta = \frac{2\sigma}{\ell^2} (T_2 - T_1)$$

e in tali condizioni $J(\ell) = 0$. Notare che non è mai possibile ottenere $J(0) = 0$, in altre parole del calore viene sempre scambiato con il corpo più freddo.

CC BY NC SA

8.9. Resistenza termica di una scala (semi)infinita ⋆⋆

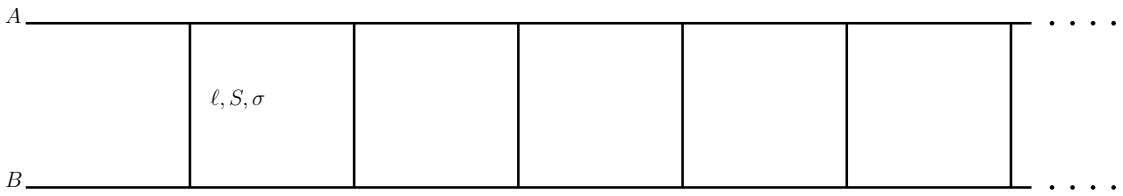


Figura 8.5.: La scala semi infinita: tutti i tratti sono sbarre di identiche caratteristiche.

Una scala di lunghezza infinita è costruita come in Figura 8.5 saldando tra loro delle sbarre sottili identiche (lunghezza ℓ, sezione S e conducibilità σ). Determinare la resistenza termica tra l'estremo A e quello B.

Soluzione

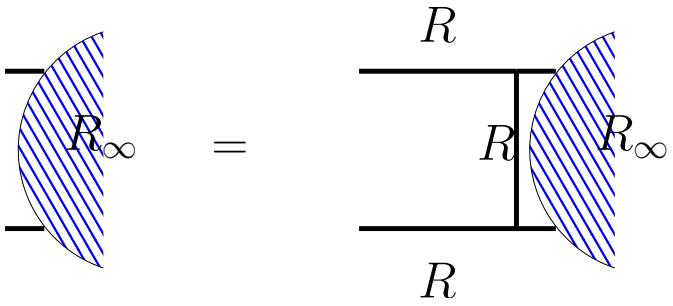


Figura 8.6.: La scala semi infinita: tutti i tratti sono sbarre di identiche caratteristiche.

Dato che la scala è semiinfinita, se rimuoviamo le prime tre sbarre a sinistra ne otteniamo un'altra con la stessa resistenza termica R_∞. Di conseguenza possiamo scrivere la relazione

$$R_\infty = R + \frac{RR_\infty}{R + R_\infty} + R$$

basata sul Diagramma 8.6. In alte parole, la resistenza termica totale della scala si può ottenere considerando in serie una sbarra, il parallelo tra una sbarra e il resto della scala, e una terza sbarra. Questa relazione da una equazione di secondo grado per R_∞

$$R_\infty^2 - 2RR_\infty - 2R^2 = 0$$

che ha come unica soluzione accettabile (perchè positiva)

$$R_\infty = R\left(1 + \sqrt{3}\right) = \frac{\ell}{\sigma S}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

CC BY NC SA

9. Trasformazioni termodinamiche

9.1. Adiabaticità e velocità di una trasformazione ⋆⋆⋆

Il recipiente schematizzato in Figura 9.1 ha le pareti e il pistone impermeabili al calore, mentre la base ha una resistenza termica R. Viene riempito con n moli di gas perfetto, e si trova inizialmente in equilibrio con l'ambiente esterno, $P = P_0$ e $T = T_0$ (il pistone viene lasciato libero di muoversi).

Dal tempo $t = 0$ si obbliga il pistone a muoversi secondo la legge $x = A \sin \omega t$, dove x è lo spostamento dalla posizione iniziale di equilibrio. Si attende quindi un tempo sufficientemente lungo, in modo da far perdere al sistema memoria della condizione iniziale.

Supponendo di poter considerare la temperatura e la pressione del gas uniforme si calcoli $T(t)$, e si verifichi che per ω abbastanza grandi la trasformazione si può considerare adiabatica.

Considerare piccola la variazione relativa di volume.

Soluzione

Dal primo principio e dall'equazione di stato abbiamo

$$dQ = nc_v dT + nRT \frac{dV}{V} \tag{9.1.1}$$

d'altra parte possiamo anche scrivere

$$R \frac{dQ}{dt} = T_0 - T \tag{9.1.2}$$

e quindi

$$nc_v \frac{dT}{dt} + nRT \frac{d \log V}{dt} = \frac{1}{R_T} \left(T_0 - T \right) . \tag{9.1.3}$$

Il volume è una funzione nota del tempo,

$$V = V_0 + SA \sin \omega t \tag{9.1.4}$$

e possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\tau R}{c_v} \frac{d \log V}{dt} \right) T = \frac{T_0}{\tau} \tag{9.1.5}$$

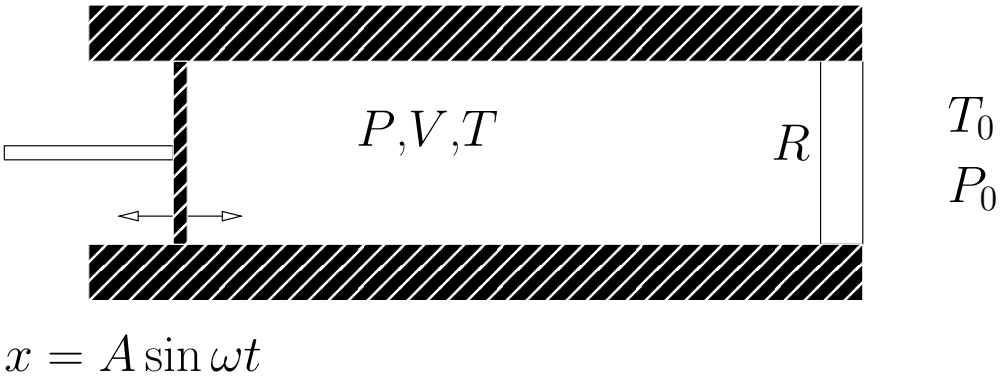


Figura 9.1.: Il sistema considerato nel problema. Le pareti scure sono impermeabili al calore.

dove abbiamo introdotto $\tau = nc_v R_T$, che possiamo considerare la scala temporale caratteristica degli scambi di calore tra gas e ambiente esterno. In effetti tenendo fissato il volume vediamo che τ e proprio il tempo nel quale una differenza di temperatura tra esterno e interno si riduce di un fattore e^{-1}.

L'equazione differenziale ottenuta è lineare e del primo ordine, e la sua soluzione si determina con un metodo standard. Moltiplicando membro a membro per un opportuno fattore integrante

$$\left[\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau R}{c_v}\frac{d\log V}{dt}\right)T\right] e^{t/\tau + R/c_v \log V(t)} = \frac{T_0}{\tau} e^{t/\tau + R/c_v \log V(t)} \tag{9.1.6}$$

abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left[T e^{t/\tau + R/c_v \log V}\right] = \frac{T_0}{\tau} e^{t/\tau + R/c_v \log V} \tag{9.1.7}$$

e integrando otteniamo

$$T = \frac{T_0}{\tau} e^{-t/\tau - R/c_v \log V(t)} \int_0^t e^{t'/\tau + R/c_v \log V(t')} dt' + C e^{-t/\tau - R/c_v \log V(t)} \tag{9.1.8}$$

ossia (indicando con $\varepsilon = AS/V$ la massima variazione relativa di volume, $\varepsilon \ll 1$)

$$T = C\frac{e^{-t/\tau}}{(1+\varepsilon \sin\omega t)^{R/c_v}} + \frac{T_0}{\tau}\frac{e^{-t/\tau}}{(1+\varepsilon\sin\omega t)^{R/c_v}} \int_0^t \left(1+\varepsilon \sin\omega t'\right)^{R/c_v} e^{t'/\tau} dt' \,. \tag{9.1.9}$$

Sviluppando al primo ordine in ε, e osservando che a causa delle condizioni iniziali $C = T_0$, otteniamo

$$T = T_0 e^{-t/\tau}\left(1 - \varepsilon\frac{R}{c_v}\sin\omega t\right) + \frac{T_0}{\tau} e^{-t/\tau}\left(1 - \varepsilon\frac{R}{c_v}\sin\omega t\right)\int_0^t \left(1 + \varepsilon\frac{R}{c_v}\sin\omega t'\right) e^{t'/\tau} dt' \,. \tag{9.1.10}$$

CC BY NC SA

e calcolando l'integrale otteniamo

$$T = T_0 \left\{ 1 - \varepsilon \frac{R}{c_v} \frac{e^{-t/\tau}}{1+\omega^2\tau^2} \left[-\omega\tau + e^{t/\tau}\omega\tau\cos\omega t - \left(1+\omega^2\tau^2\right)\sin\omega\tau + e^{t/\tau}\omega^2\tau^2\sin\omega t \right] \right\} . \tag{9.1.11}$$

Per tempi grandi rispetto a τ possiamo eliminare i termini che tendono a zero esponenzialmente, e troviamo

$$T = T_0 \left[1 - \varepsilon \frac{R}{c_v} \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \left(\cos\omega t + \omega\tau\sin\omega t\right) \right] . \tag{9.1.12}$$

Per $\omega \gg \tau^{-1}$ abbiamo

$$T \simeq T_0 \left[1 - \varepsilon \frac{R}{c_v} \sin\omega t \right] . \tag{9.1.13}$$

e confrontanto con l'andamento del volume

$$V = V_0 \left(1 + \varepsilon \sin\omega t\right) \tag{9.1.14}$$

troviamo che la combinazione $V^{R/c_v}T$ è approssimativamente costante

$$V^{R/c_v}T = V_0^{R/c_v}T + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{9.1.15}$$

cioè la trasformazione del gas è adiabatica.

9.2. Rendimento di un ciclo di Carnot ⋆

Calcolare esplicitamente il rendimento di un ciclo di Carnot di un gas perfetto, esprimendolo in funzione delle sole temperature della sorgente calda e della sorgente fredda utilizzate.

Soluzione

Il rendimento è definito dal rapporto tra lavoro e calore assorbito. Calcoliamo il lavoro fatto in una trasformazione isoterma

$$L_{X\to Y} = \int_{V_X}^{v_Y} PdV = nRT \int_{V_X}^{V_Y} \frac{dV}{V} = nRT \log \frac{V_Y}{V_X} \tag{9.2.1}$$

e in una trasformazione adiabatica, per la quale il prodotto PV^γ è costante:

$$\begin{aligned} L_{X\to Y} &= \int_{V_X}^{V_Y} PdV = P_X V_X^\gamma \int_{V_X}^{V_Y} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} P_X V_X^\gamma \left(\frac{1}{V_Y^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_X^{\gamma-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{P_X V_X^\gamma}{V_X^{\gamma-1}} - \frac{P_Y V_Y^\gamma}{V_Y^{\gamma-1}} \right) = \frac{1}{\gamma-1} \left(P_X V_X - P_Y V_Y \right) \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $P_X V_X^\gamma = P_Y V_Y^\gamma$. Alternativamente potevamo osservare che per una trasformazione adiabatica $dU = -dL$, e quindi

$$L_{X\to Y} = nc_v \left(T_X - T_Y \right) \tag{9.2.3}$$

che coincide con l'espressione precedente.

Per quanto riguarda il calore scambiato, sappiamo che è nullo in una trasformazione adiabatica. In una trasformazione isoterma dal primo principio, e dal fatto che per un gas perfetto l'energia interna dipende dalla sola temperatura segue, facendo riferimento alla figura,

$$dQ = dU + dL = c_v dT + dL = dL \tag{9.2.4}$$

cioè il calore assorbito è uguale al lavoro fatto dal gas. Abbiamo in conclusione

$$\eta = \frac{L}{Q_{A\to B}} = \frac{L_{A\to B} + L_{B\to C} + L_{C\to D} + L_{D\to A}}{L_{A\to B}} \tag{9.2.5}$$

$$= \frac{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A} + nc_v \left(T_1 - T_2 \right) + nRT_2 \log \frac{V_D}{V_C} + nc_v \left(T_2 - T_1 \right)}{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A}} \tag{9.2.6}$$

$$= 1 + \frac{T_2}{T_1} \frac{\log V_D/V_C}{\log V_B/V_A} = 1 + \frac{T_2}{T_1} \frac{\log V_D/V_C}{\log V_B/V_A} \tag{9.2.7}$$

ma utilizzando le relazioni

$$V_D = V_A \frac{T_1^\alpha}{T_2^\alpha}, \qquad V_C = V_B \frac{T_1^\alpha}{T_2^\alpha} \tag{9.2.8}$$

CC BY NC SA

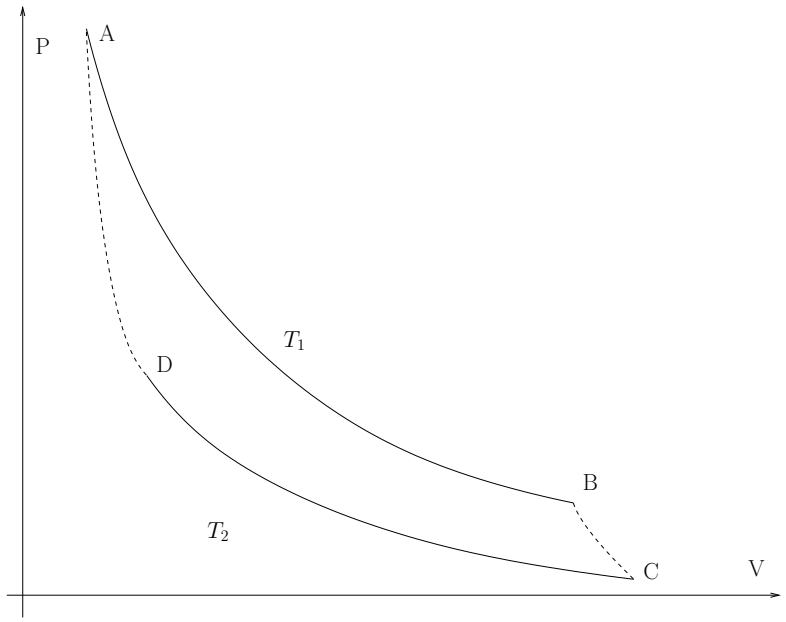


Figura 9.2.: Il ciclo di Carnot rappresentato nel piano $P-V$ per un gas perfetto. Le adiabatiche sono tratteggiate, le isoterme continue. T_1 e T_2 sono le temperature rispettivamente della sorgente calda e fredda.

otteniamo semplicemente

$$\eta = 1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\log V_A/V_B}{\log V_B/V_A} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\,. \tag{9.2.9}$$

9.3. Ciclo di Carnot con gas di fotoni ⋆⋆

La radiazione elettromagnetica può essere descritta dal punto di vista termodinamico come un gas con energia interna

$$U = bVT^4 \tag{9.3.1}$$

e pressione

$$P = \frac{1}{3}bT^4 \tag{9.3.2}$$

dove b è una costante. Rappresentare un ciclo di Carnot di questo sistema nel piano $P - V$ e calcolarne esplicitamente il rendimento in termini delle sole temperature della sorgente calda e fredda.

Soluzione

Dall'equazione $P = \frac{1}{3}bT^4$ segue che una trasformazione isoterma è anche isobara. Per una trasformazione adiabatica si ha invece

$$dQ = dU + PdV = 4bVT^3dT + bT^4dV + \frac{1}{3}bT^4dV \tag{9.3.3}$$

$$= \frac{4}{3}bT^4dV + 4bVT^3dT = 0 \tag{9.3.4}$$

ossia

$$\frac{1}{3}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0 \tag{9.3.5}$$

ed integrando

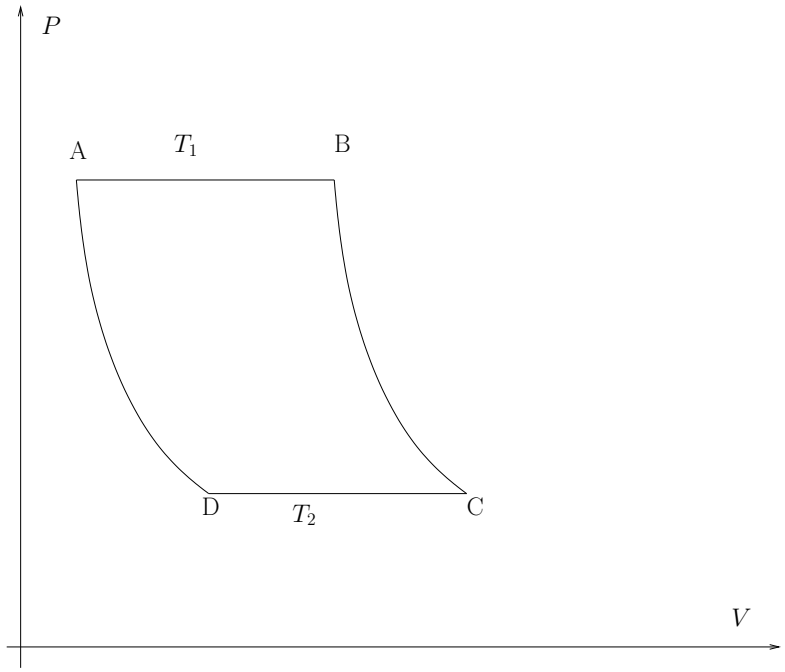
$$V^{1/3}T = \text{costante} \tag{9.3.6}$$

che si può riscrivere come una relatione tra P e V:

$$PV^{4/3} = \text{costante}\,. \tag{9.3.7}$$

Un ciclo di Carnot si rappresenta dunque nel piano $P - V$ come in figura.

CC BY NC SA



Calcoliamo adesso il rendimento. Come conseguenza del primo principio, il lavoro fatto nelle trasformazioni adiabatiche è uguale alla variazione dell'energia interna cambiata di segno:

$$L_{B\to C} = b\left(V_B T_B^4 - V_C T_C^4\right) = b\left(V_B T_1^4 - V_C T_2^4\right) \tag{9.3.8}$$

$$L_{D\to A} = b\left(V_D T_2^4 - V_A T_1^4\right) \tag{9.3.9}$$

mentre per le trasformazioni isoterme si ha semplicemente

$$L_{A\to B} = P_A\left(V_B - V_A\right) = \frac{1}{3} b T_1^4 \left(V_B - V_A\right) \tag{9.3.10}$$

$$L_{C\to D} = P_C\left(V_D - V_C\right) = \frac{1}{3} b T_2^4 \left(V_D - V_C\right) . \tag{9.3.11}$$

Calcoliamo infine il calore assorbito dalla sorgente calda. Diversamente dal caso del gas perfetto, questo non è uguale al lavoro fatto, poichè l'energia interna dipende dal volume. Per una isoterma abbiamo

$$dQ = \frac{4}{3} b T^4 dV \tag{9.3.12}$$

e quindi

$$Q_{A\to B} = \frac{4}{3} b T_1^4 \left(V_B - V_A\right) . \tag{9.3.13}$$

Calcoliamo infine il rendimento:

$$\eta = \frac{\frac{1}{3} b T_1^4 \left(V_B - V_A\right) + b\left(V_B T_1^4 - V_C T_2^4\right) + \frac{1}{3} b T_2^4 \left(V_D - V_C\right) + b\left(V_D T_2^4 - V_A T_1^4\right)}{\frac{4}{3} b T_1^4 \left(V_B - V_A\right)} \tag{9.3.14}$$

$$= \frac{T_1^4 \left(V_B - V_A\right) + T_2^4 \left(V_D - V_C\right)}{T_1^4 \left(V_B - V_A\right)} = 1 + \frac{T_2^4 \left(V_D - V_C\right)}{T_1^4 \left(V_B - V_A\right)} \tag{9.3.15}$$

CC BY NC SA

ed utilizzando

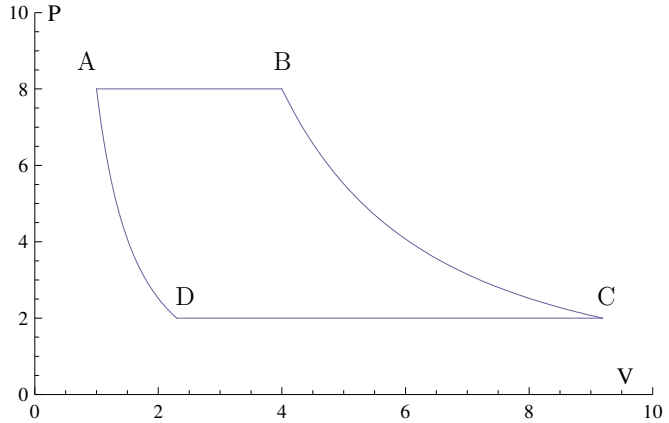
$$V_D T_2^3 = V_A T_1^3, \qquad V_C T_2^3 = V_B T_1^3 \tag{9.3.16}$$

conseguenza dell'Equazione (9.3.6) otteniamo

$$\eta = 1 + \frac{T_2 \left(V_A T_1^3 - V_B T_1^3\right)}{T_1^4 \left(V_B - V_A\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \,. \tag{9.3.17}$$

CC BY NC SA

9.4. Ciclo Brayton ⋆



Un ciclo Brayton è costituito da due adiabatiche e due isobare. In figura è rappresentato nel piano $P - V$ per un gas perfetto. Calcolarne il rendimento.

Soluzione

Il lavoro fatto in una adiabatica è l'opposto della variazione dell'energia interna. In una isobara il lavoro è chiaramente $P\Delta V$, ed il calore scambiato è dato da

$$Q = nc_p \Delta T \,. \tag{9.4.1}$$

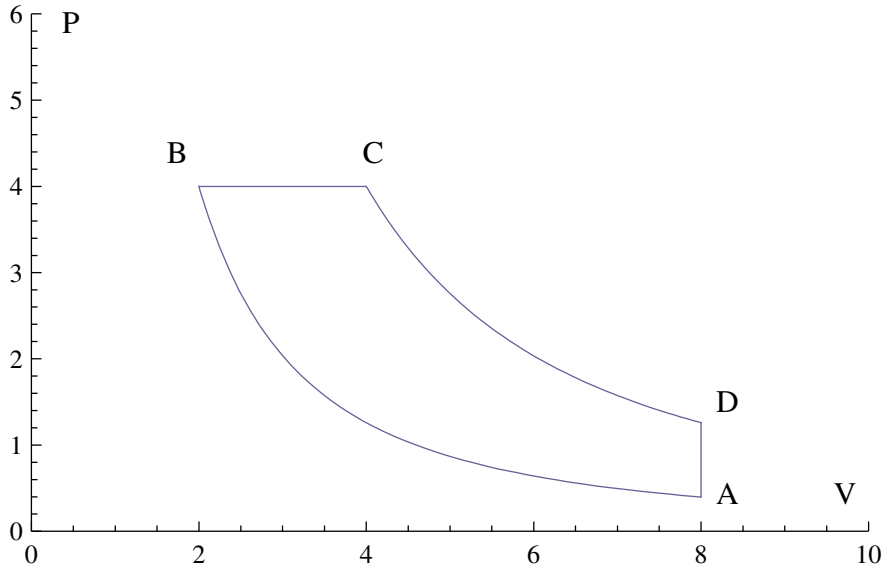
Calcoliamo adesso l'efficienza:

$$\eta = \frac{P_A (V_B - V_A) + nc_v (T_B - T_C) + P_D (V_D - V_C) + nc_v (T_D - T_A)}{nc_p (T_B - T_A)} \tag{9.4.2}$$

$$= \frac{nR (T_B - T_A) + nc_v (T_B - T_C) + nR (T_D - T_C) + nc_v (T_D - T_A)}{nc_p (T_B - T_A)} \tag{9.4.3}$$

$$= 1 - \frac{(T_C - T_D)}{(T_B - T_A)} \,. \tag{9.4.4}$$

9.5. Ciclo Diesel ⋆



Un ciclo Diesel ideale è costituito dalle seguenti trasformazioni in successione, rappresentate in fugura per un gas perfetto:

1. una compressione adiabatica (A-B);
2. un riscaldamento a pressione costante (B-C);
3. una espansione adiabatica (C-D);
4. un raffreddamento a volume costante (D-A).

Calcolarne esplicitamente l'efficienza, esprimendola in termini dei rapporti

$$r = V_D/V_B, \qquad \alpha = V_C/V_B\,. \tag{9.5.1}$$

Soluzione

Il calore viene scambiato durante il riscaldamento a pressione costante e durante il raffreddamento a volume costante. Nel primo caso $dQ = c_P dT > 0$, quindi il calore viene assorbito. Nel secondo caso viene ceduto, come si verifica da $dQ = c_V dT$. Il calore assorbito è quindi

$$Q_{ass} = nc_P\left(T_C - T_B\right)\,. \tag{9.5.2}$$

Calcoliamo adesso il lavoro fatto dal gas in tutto il ciclo:

$$L = L_{BC} + L_{CD} + L_{AB} \tag{9.5.3}$$

$$= P_B\left(V_C - V_B\right) - nc_V\left(T_D - T_C\right) - nc_V\left(T_B - T_A\right)\,. \tag{9.5.4}$$

Abbiamo quindi

$$\eta = \frac{P_B\left(V_C - V_B\right) + c_V/R\left(P_B V_C - P_D V_D\right) + c_V/R\left(P_A V_D - P_B V_B\right)}{c_P/R P_B\left(V_C - V_B\right)} \tag{9.5.5}$$

$$= \frac{P_B\left(V_C - V_B\right) + c_V/R\left(P_B V_C - P_B V_C^{\gamma}/V_D^{\gamma-1}\right) + c_V/R\left(P_B V_B^{\gamma}/V_D^{\gamma-1} - P_B V_B\right)}{c_P/R P_B\left(V_C - V_B\right)} \tag{9.5.6}$$

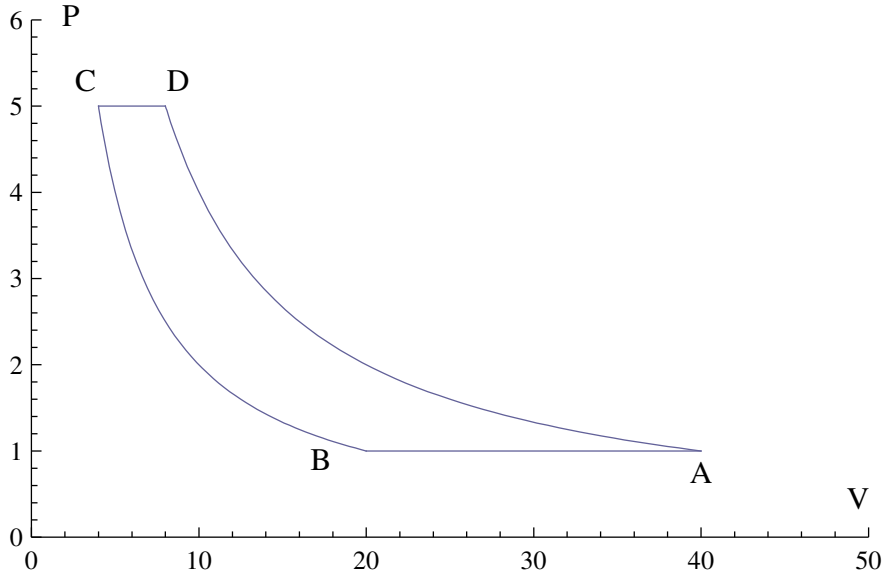
$$= \frac{R\left(V_C - V_B\right) + c_V\left(V_C - V_C^{\gamma}/V_D^{\gamma-1}\right) + c_V\left(V_B^{\gamma}/V_D^{\gamma-1} - V_B\right)}{c_P\left(V_C - V_B\right)} \tag{9.5.7}$$

$$= \frac{c_P\left(V_C - V_B\right) + c_V\left(V_B^{\gamma}/V_D^{\gamma-1} - V_C^{\gamma}/V_D^{\gamma-1}\right)}{c_P\left(V_C - V_B\right)} \tag{9.5.8}$$

$$= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\frac{\alpha^{\gamma} - 1}{\gamma(\alpha - 1)}\,. \tag{9.5.9}$$

CC BY NC SA

9.6. Ciclo Ericsson ⋆



Il ciclo Ericsson ideale, rappresentato in figura nel piano $P - V$ per un gas perfetto, è costituito da due trasformazioni isoterme e due trasformazioni isobare. In linea di principio se una certa quantità di calore viene assorbita da una sorgente ad una data temperatura e in seguito restituita alla stessa non se ne deve essere considerato nel calcolo dell'efficienza (viene "riciclato"). Verificare se questo è possibile in questo caso e calcolare l'efficienza.

Soluzione

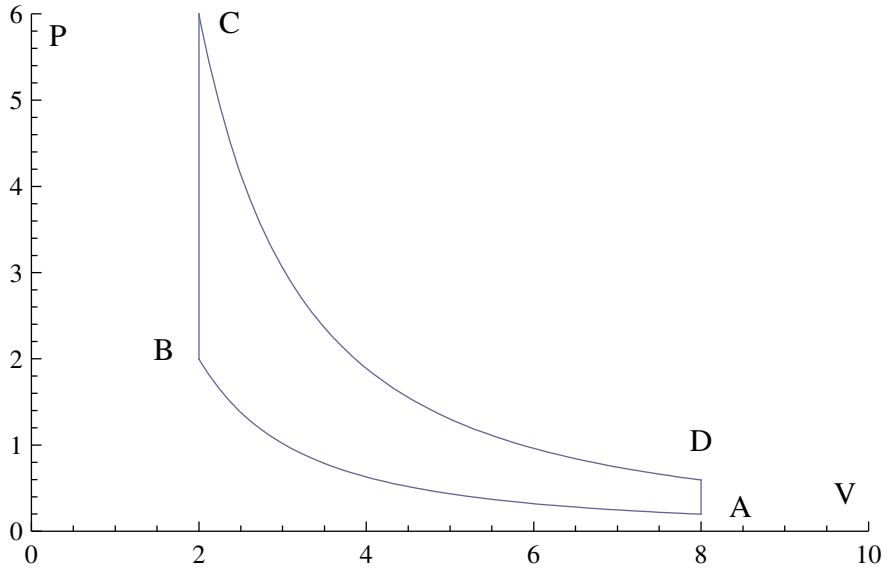
Calcoliamo calore assorbito, variazione di energia interna e lavoro compiuto dal sistema nelle diverse trasformazioni. Abbiamo la seguente tabella (notare che in conseguenza del primo principio $Q = L + \Delta U$:

$$\begin{array}{ccccc} & Q & L & \Delta U \\ A \to B & nc_P\,(T_B - T_A) & P_B\,(V_B - V_A) = nR\,(T_B - T_A) & nc_V\,(T_B - T_A) \\ B \to C & nRT_B \log \frac{V_C}{V_B} & nRT_B \log \frac{V_C}{V_B} & 0 \\ C \to D & nc_P\,(T_A - T_B) & P_C\,(V_D - V_C) = nR\,(T_A - T_B) & nc_V\,(T_D - T_C) \\ D \to A & nRT_A \log \frac{V_A}{V_D} & nRT_A \log \frac{V_A}{V_D} & 0 \end{array} \tag{9.6.1}$$

Il calore assorbito in $C \to D$ può essere completamente riciclato in $A \to B$, per cui non ne terremo conto nel calcolo dell'efficienza che diviene

$$\eta = \frac{nRT_B \log \frac{V_C}{V_B} + nRT_A \log \frac{V_A}{V_D}}{nRT_A \log \frac{V_A}{V_D}} = 1 + \frac{T_B}{T_A} \frac{\log \frac{P_B}{P_C}}{\log \frac{P_D}{P_A}} = 1 - \frac{T_B}{T_A}\,. \tag{9.6.2}$$

9.7. Ciclo Otto ⋆



Un ciclo Otto ideale, rappresentato in figura nel piano $P - V$ per un gas perfetto, è costituito da due adiabatiche e da due isocore. Calcolarne il rendimento ed esprimerlo in termini del rapporto di compressione $\alpha = V_D/V_C$.

Soluzione

Il sistema compie lavoro solo sulle adiabatiche, e si ottiene

$$L_{C\to D} = U_C - U_D = nc_V\left(T_C - T_D\right) \tag{9.7.1}$$

$$L_{A\to B} = U_A - U_B = nc_V\left(T_A - T_B\right)\,. \tag{9.7.2}$$

Il sistema assorbe calore nell'isocora $B \to C$, e dato che il lavoro è nullo si ottiene

$$Q_{B\to C} = U_C - U_B = nc_V\left(T_C - T_B\right)\,. \tag{9.7.3}$$

In conclusione

$$\eta = \frac{L_{C\to D} + L_{A\to B}}{Q_{B\to C}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\,. \tag{9.7.4}$$

Utilizzando la relazione $VT^{\gamma-1} =$ costante valida per una adiabatica abbiamo

$$\frac{T_D}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \tag{9.7.5}$$

e

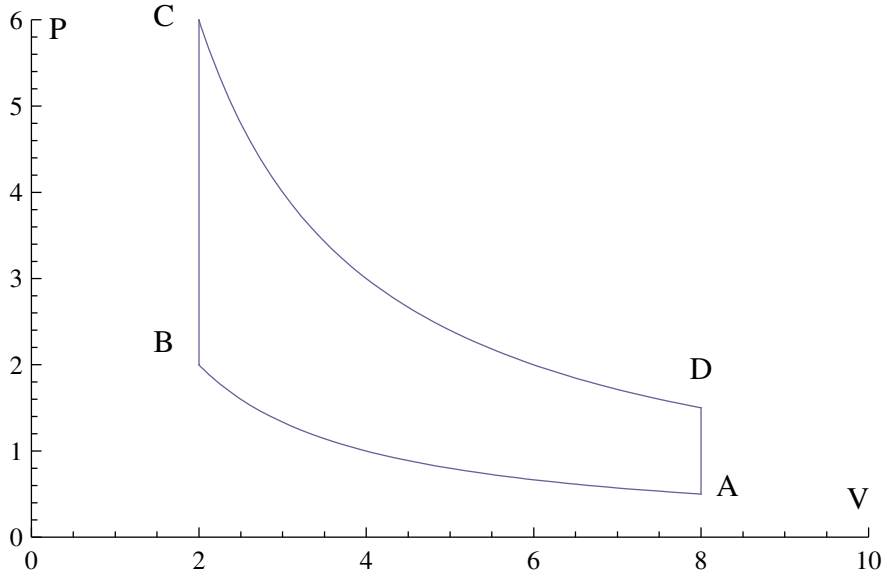
$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \tag{9.7.6}$$

abbiamo

$$\eta = 1 - \frac{\alpha^{1-\gamma}\left(T_C - T_B\right)}{T_C - T_B} = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\,. \tag{9.7.7}$$

CC BY NC SA

9.8. Ciclo Stirling ⋆



Un ciclo Stirling ideale, rappresentato in figura nel piano $P - V$ per un gas perfetto, è formato da due trasformazioni isoterme e da due isocore. Calcolarne il rendimento e esprimerlo in funzione delle temperature massime e minime accessibili, assumendo che il calore ceduto nell'isocora $D - A$ venga riutilizzato per riscaldare il sistema nell'isocora $B - C$.

Soluzione

Il sistema compie lavoro solo sulle isoterme, e vale

$$L_{CD} = \int_C^D PdV = nRT_C \log \frac{V_D}{V_C} \tag{9.8.1}$$

$$L_{AB} = \int_A^B PdV = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \log \frac{V_C}{V_D} \,. \tag{9.8.2}$$

Il sistema assorbe calore nella trasformazione $B \to C$ e $C \to D$, e lo cede nella trasformazione $D \to A$, quindi

$$Q_{BC} = U_C - U_B = nc_V \left(T_C - T_A\right) \tag{9.8.3}$$

$$Q_{CD} = L_{CD} \tag{9.8.4}$$

$$Q_{DA} = nc_V \left(T_A - T_C\right) = -Q_{BC} \,. \tag{9.8.5}$$

Notare che il calore assorbito e ceduto nelle due isocore si compensano, e quindi ha senso tenere conto del solo calore assorbito Q_{CD} nella valutazione dell'efficienza. Abbiamo quindi

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{CD}}{Q_{CD}} = \frac{nR\left(T_C - T_A\right) \log \frac{V_D}{V_C}}{nRT_C \log \frac{V_D}{V_C}} = 1 - \frac{T_A}{T_C} \,. \tag{9.8.6}$$

9.9. Differenziale esatto ⋆⋆⋆

Date n moli di gas perfetto, verificare esplicitamente che dQ non è un differenziale esatto. Trovare se possibile una funzione $A(T,V)$ tale che $A(T,V)dQ$ sia un differenziale esatto. É possibile trovare una soluzione indipendente dalla natura del gas (monoatomico, biatomico etc.)?

Soluzione

Scegliendo come variabili indipendenti V e T possiamo scrivere il primo principio nella forma

$$dQ = \alpha(V,T)dT + \beta(V,T)dV = nc_v dT + \frac{nRT}{V}dV \tag{9.9.1}$$

e se esistesse una funzione $Q(V,T)$ di cui dQ è il differenziale sarebbe

$$\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V, \qquad \beta = \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T \tag{9.9.2}$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_T \tag{9.9.3}$$

ma questo non è vero come si mostra direttamente:

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{nRT}{V}\right)_V = \frac{nR}{V} \tag{9.9.4}$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial V}nc_v\right)_T = 0\,. \tag{9.9.5}$$

Supponiamo adesso che per una opportuna funzione $A(T,V)dQ$ sia il differenziale di una funzione X. Allora

$$dX = Anc_v dT + A\frac{nRT}{V}dV \tag{9.9.6}$$

e ripetendo il ragionamento precedente le due derivate

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{nRT}{V}A\right)_V = \frac{nR}{V}A + \frac{nRT}{V}\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V \tag{9.9.7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial V}nc_v A\right)_T = nc_v\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T\,. \tag{9.9.8}$$

dovranno essere uguali. Dobbiamo quindi trovare la soluzione di

$$\frac{c_v}{R}V\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T = A + T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V \tag{9.9.9}$$

che si può anche scrivere, ponendo $x = R/c_v \log V$ e $y = \log T$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = A\,. \tag{9.9.10}$$

Cambiamo ancora variabili. Se poniamo

$$u = x + y \tag{9.9.11}$$
$$v = x - y \tag{9.9.12}$$

otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \tag{9.9.13}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \tag{9.9.14}$$

e quindi

$$2\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_u = A \tag{9.9.15}$$

che si integra direttamente,

$$A = k(u)e^{v/2} = f(u)\exp\frac{1}{2}\left(\frac{R}{c_v}\log V - \log T\right) = f\left(V^{R/c_v}T\right)V^{\frac{R}{2c_v}}T^{-\frac{1}{2}} \tag{9.9.16}$$

dove f è una funzione arbitraria. Notare che $V^{R/c_v}T$ rimane costante in una trasformazione adiabatica. La funzione A dipende dalla natura del gas tramite il calore specifico c_v. Scegliendo $f(x) = k/\sqrt{x}$ abbiamo $A = kT^{-1}$, cioè

$$dX = k\frac{dQ}{T} \tag{9.9.17}$$

è un differenziale esatto per qualsiasi gas perfetto.

9.10. Calore specifico gas perfetto ⋆⋆

Calcolare il calore specifico c_α di un gas perfetto in funzione di c_V. Esso è definito come

$$c_\alpha = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{PV^\alpha} \tag{9.10.1}$$

cioè come rapporto tra calore fornito e aumento di temperatura, a PV^α costante. Discutere i casi $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ e $\alpha = c_P/c_V$. É necessario che sia sempre $c_\alpha > 0$?

Soluzione

Dal primo principio abbiamo per una mole di gas

$$dQ = c_V dT + PdV \tag{9.10.2}$$

Inoltre, se PV^α è costante lo è anche $TV^{\alpha-1}$ da cui

$$VdT + (\alpha - 1)TdV = 0 \tag{9.10.3}$$

e quindi

$$dQ = \left[c_V + \frac{RT}{V}\frac{V}{(1-\alpha)T}\right] dT \tag{9.10.4}$$

da cui

$$c_\alpha = c_V + \frac{R}{1-\alpha}\,. \tag{9.10.5}$$

Per $\alpha = 0$ la pressione è costante, e infatti $c_\alpha = c_V + R = c_P$. Per $\alpha = 1$ abbiamo una trasformazione isoterma, e c_α diverge (la temperatura non può aumentare qualunque sia il calore fornito). Per $\alpha = c_P/c_V$ abbiamo una trasformazione adiabatica, e si verifica che $c_\alpha = 0$. In questo caso infatti non l'aumento di temperatura non viene causato dal calore fornito, che è nullo, ma dal lavoro fatto sul sistema.

Il calore specifico c_α può anche essere negativo, è sufficiente che $1 < \alpha < c_P/c_V$.

CC BY NC SA

9.11. Trasformazione ciclica irreversibile ⋆⋆

Su n moli di gas perfetto si esegue una trasformazione ciclica tra tre stati termodinamici A, B e C come segue:

- Partendo da A, si cede reversibilmente calore mantenendo il gas a volume costante, fino ad arrivare a B.
- Il gas subisce adesso una espansione isoterma, anche essa reversibile, che lo porta nello stato C.
- A questo punto il gas viene messo in contatto con un bagno termico ad una temperatura T_A non nota. La trasformazione irreversibile che segue avviene abbastanza lentamente da poter considerare istante per istante ben definito lo stato termodinamico del gas, che viene mantenuto a pressione costante. Quando si raggiunge nuovamente l'equilibrio termico il gas si trova nuovamente in A.

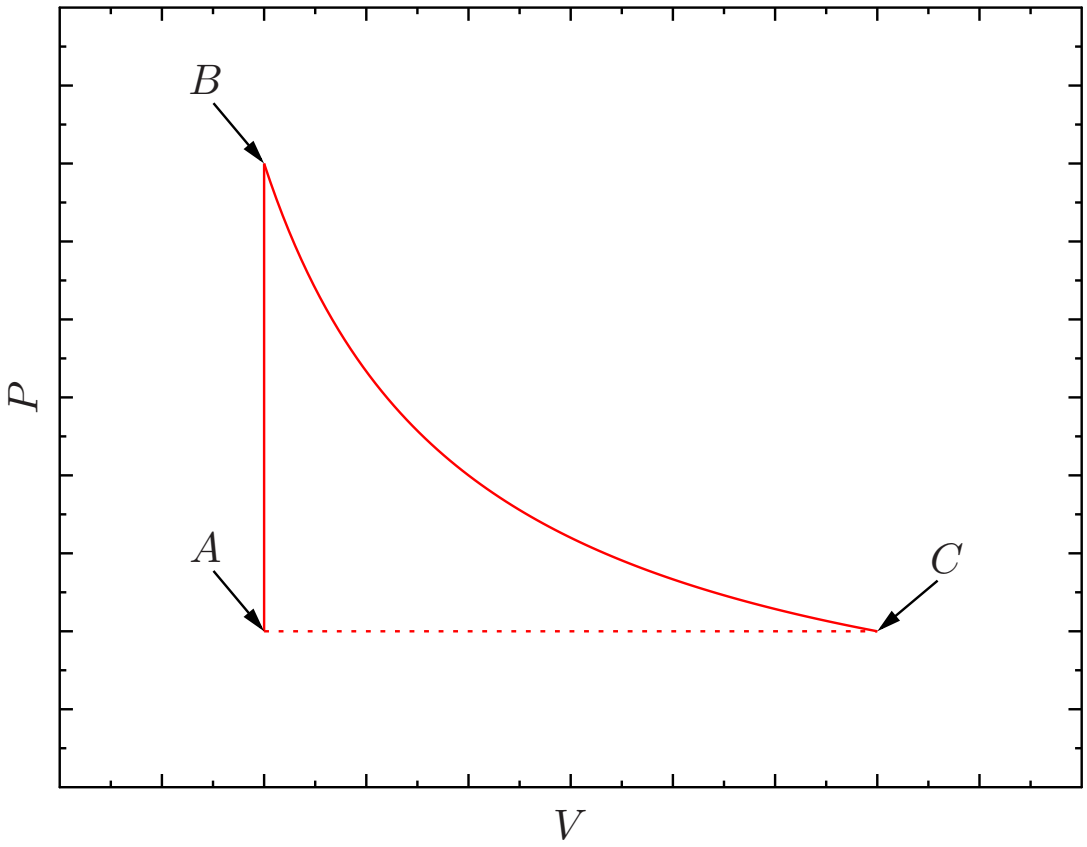


Figura 9.3.: Il ciclo considerato nel problema. La linea tratteggiata identifica la trasformazione irreversibile.

Si conosce la temperatura T_B, e il calore Q_{BC} assorbito dal gas durante la trasformazione isoterma. Si vuole calcolare:

1. La variazione di entropia del gas ΔS^g_{BC} tra B e C.
2. La temperatura T_A.
3. Il lavoro $L_{CA} + L_{AB}$ fatto dal gas tra C e B.
4. La variazione di entropia dell'universo dopo una trasformazione ciclica completa.

Soluzione

1. La trasformazione isoterma è reversibile, e conosciamo il calore assorbito dal gas, quindi
$$\Delta S^g_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_B}\int_B^C dQ = \frac{Q_{BC}}{T_B} \tag{9.11.1}$$
2. Dato che la trasformazione è ciclica, e che l'entropia è una funzione di stato, sappiamo che l'entropia del gas non può cambiare in un ciclo. Possiamo quindi scrivere
$$\Delta S^g = \Delta S^g_{AB} + \Delta S^g_{BC} + \Delta S^g_{CA} = 0 \tag{9.11.2}$$
ma
$$\Delta S^g_{AB} = nc_v \log\frac{T_B}{T_A} \tag{9.11.3}$$
$$\Delta S^g_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_B} \tag{9.11.4}$$
$$\Delta S^g_{CA} = nc_p \log\frac{T_A}{T_B} \tag{9.11.5}$$
Notare che non è necessario calcolare alcun integrale di Clausius, ma solo utilizzare ancora una volta il fatto che l'entropia è una funzione di stato. Allora
$$n(c_p - c_v)\log\frac{T_A}{T_B} + \frac{Q_{BC}}{T_B} = 0 \tag{9.11.6}$$
da cui segue
$$T_A = T_B e^{-\frac{Q_{BC}}{nRT_B}} \tag{9.11.7}$$
3. Dal primo principio abbiamo
$$Q_{CA} + Q_{AB} = \Delta U_{CB} + L_{CA} + L_{AB} \tag{9.11.8}$$
e inoltre $\Delta U_{CB} = 0$ dato che l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura e $T_C = T_B$. Possiamo scrivere
$$Q_{AB} = nc_v\left(T_B - T_A\right) \tag{9.11.9}$$
$$Q_{CA} = nc_P\left(T_A - T_C\right) \tag{9.11.10}$$

CC BY NC SA

Nel secondo caso osserviamo che, nonostante la trasformazione $C \to A$ sia irreversibile, lo stato termodinamico del gas è per ipotesi ben definito istante per istante e quindi è lecito applicare a quest'ultimo la legge dei gas perfetti e il primo principio. Otteniamo quindi

$$L_{CA} + L_{AB} = nR(T_A - T_C) \tag{9.11.11}$$

Alternativamente si poteva osservare che $L_{AB} = 0$ e calcolare direttamente

$$L_{CA} = \int_C^A PdV = P_A V_A - P_C V_C = nR\left(T_A - T_C\right) \tag{9.11.12}$$

ottenendo lo stesso risultato.

4. Osserviamo che durante le trasformazione $A \to B$ e $B \to C$ l'entropia dell'universo non cambia, dato che le trasformazioni sono reversibili. Resta da calcolare la variazione di entropia nella trasformazione $C \to A$. Abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_{CA} = \Delta S^g_{CA} + \Delta S^s_{CA} \tag{9.11.13}$$

dove ΔS^g_{CA} è la variazione di entropia del gas e ΔS^s_{CA} quella del bagno termico. Dato che, come abbiamo detto, lo stato termodinamico del gas è ben definito possiamo scrivere

$$\Delta S^g_{CA} = \int_C^A \frac{dQ}{T} = \int_C^A \frac{nc_p dT}{T} = nc_P \log \frac{T_A}{T_B} \tag{9.11.14}$$

Per quanto riguarda la sorgente, da essa è estratto il calore ceduto al gas

$$Q_{CA} = nc_p\left(T_A - T_B\right) \tag{9.11.15}$$

e quindi

$$\Delta S^S_{CA} = nc_P \frac{T_B - T_A}{T_A} \tag{9.11.16}$$

Abbiamo in conclusione

$$\Delta S = nc_P \log \frac{T_A}{T_B} + nc_P \frac{T_B - T_A}{T_A} \tag{9.11.17}$$

Mostriamo che $\Delta S \geq 0$. Consideriamo ΔS una funzione di T_A a fissato T_B. Per $T_A = T_B$ si trova $\Delta S = 0$. Inoltre

$$\frac{d}{dT_A}\Delta S = nc_p \frac{1}{T_A} - nc_P \frac{T_B}{T_A^2} = \frac{nc_P}{T_A}\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right) \tag{9.11.18}$$

e quindi la funzione è crescente per $T_A > T_B$ e decrescente per $T_A < T_B$. Il valore $\Delta S = 0$ in $T_A = T_B$ è quindi un minimo.

9.12. Sistema termodinamico a tre corpi ⋆⋆⋆

Si considerino tre corpi di capacità termica C indipendente dalla temperatura, che si trovano all'inizio alle temperature T_{1i}, T_{2i} e T_{3i}. Calcolare la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei tre corpi senza fare lavoro sul sistema dall'esterno.

Soluzione

Se consideriamo una generica trasformazione termodinamica agente sul sistema, in essa verranno cedute delle quantità di calore Q_1, Q_2 e Q_3 a ciascuno dei tre corpi.

Per la conservazione dell'energia dovrà essere

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \tag{9.12.1}$$

da cui, dette T_{1f}, T_{2f} e T_{3f} le temperature finali avremo

$$T_{1f} + T_{2f} + T_{3f} = T_{1i} + T_{2i} + T_{3i} \tag{9.12.2}$$

Se nel corso della trasformazione si ha una variazione di entropia totale ΔS avremo inoltre

$$\Delta S = C \log \frac{T_{1f}}{T_{1i}} + C \log \frac{T_{2f}}{T_{2i}} + C \log \frac{T_{3f}}{T_{3i}} \tag{9.12.3}$$

ossia

$$T_{1f} T_{2f} T_{3f} = T_{1i} T_{2i} T_{3i} e^{\frac{\Delta S}{C}} \tag{9.12.4}$$

Osserviamo adesso che nella configurazione finale i due corpi più freddi dovranno avere la stessa temperatura T_-. Se così non fosse sarebbe possibile ottenere lavoro da essi, e usarlo per innalzare ulteriormente la temperatura del corpo più caldo. Porremo quindi

$$T_+ = T_{1f} \tag{9.12.5}$$

$$T_- = T_{2f} + T_{3f} \tag{9.12.6}$$

Notare che abbiamo stabilito che alla fine il corpo più caldo sarà il primo. Siamo liberi di farlo, perchè le equazioni (9.12.2) e (9.12.4) sono simmetriche rispetto ai tre corpi. Questo dipende dal fatto che le tre capacità termiche sono uguali. Riscriviamo quindi le equazioni (9.12.2) e (9.12.4) nella forma

$$T_+ + 2T_- = T_{1i} + T_{2i} + T_{3i} \tag{9.12.7}$$

$$T_+ T_-^2 = T_{1i} T_{2i} T_{3i} e^{\frac{\Delta S}{C}} \tag{9.12.8}$$

Studiamo graficamente le soluzioni di questo sistema nel piano $T_+ - T_-$.

I grafici delle due relazioni sono rappresentate in Figura 9.4. All'aumentare dell'entropia ΔS prodotta la retta rimane fissa, mentre il secondo grafico (del tipo $y = k/x^2$) si sposta verso l'alto.

Le uniche intersezioni fisicamente accettabili sono nel primo quadrante, perchè $T_- > 0$. Delle due, quella indicata con A nel grafico corrisponde alla massima temperatura raggiungibileT_+^{MAX}. Vediamo che T_+^{MAX} diminuisce all'aumentare di ΔS. Il caso migliore corrisponde quindi a $\Delta S = 0$.

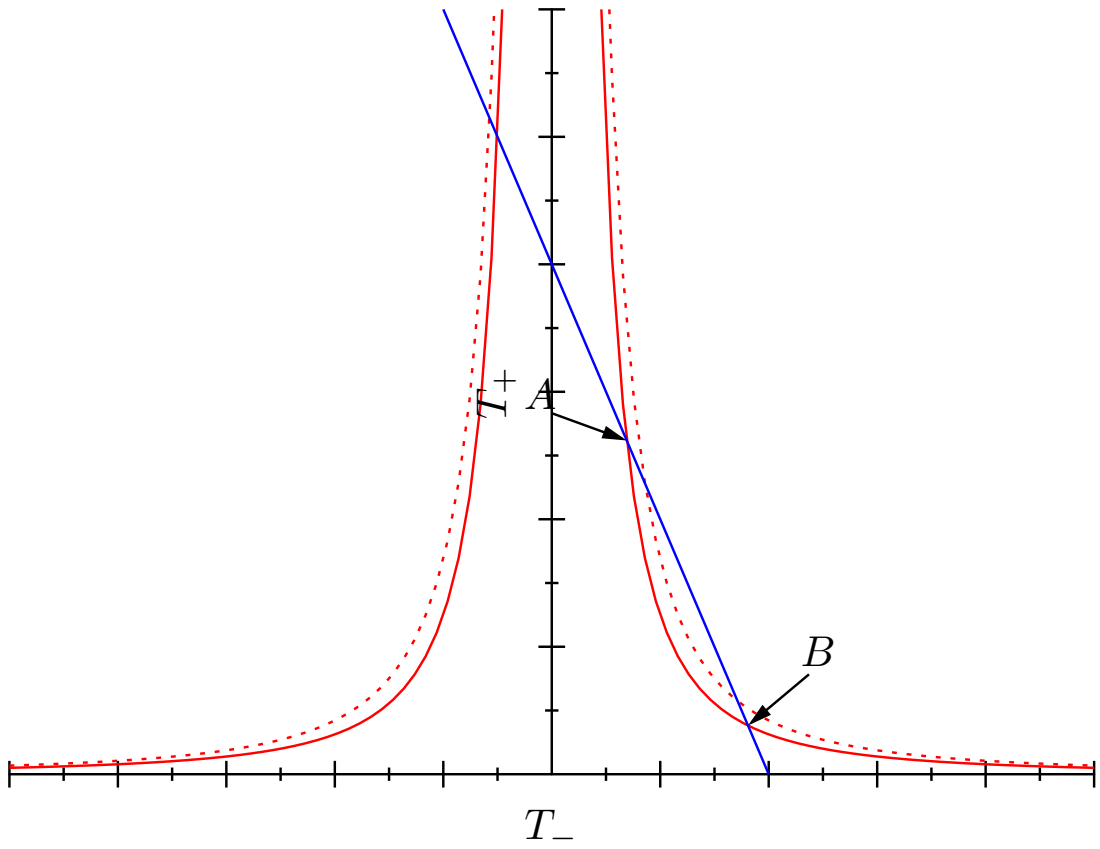


Figura 9.4.: Soluzione grafica del sistema (9.12.7)-(9.12.8). La retta corrisponde alla (9.12.7), la curva continua alla (9.12.8) per $\Delta S = 0$. Infine la curva tratteggiata corrisponde alla (9.12.8) per un valore $\Delta S > 0$.

Il calcolo esplicito di T_+^{MAX} si può ottenere ricavando T_- dalla (9.12.7) e sostituendo nella (9.12.8). Si ottiene un'equazione di terzo grado

$$T_+ \left(S - T_{1i} + T_{2i} + T_{3i}\right)^2 \quad = \quad 4T_{1i}T_{2i}T_{3i}e^{\frac{\Delta S}{C}} \tag{9.12.9}$$

Concludiamo con alcune osservazioni:

- Una procedura possibile per portare il sistema nello stato A è la seguente:
  1. supponiamo che il corpo 2 e il corpo 3 siano inizialmente i più freddi. Utilizzando una macchina termica reversibile si ricava lavoro L dalla loro differenza di temperatura.
  2. adesso il corpo 2 e il corpo 3 hanno la stessa temperatura. Possiamo quindi metterli in contatto in modo reversibile e considerarli da quel momento come un corpo unico di capacità termica $2C$

3. utilizzando nuovamente una macchina termica reversibile si sfrutta tutto il lavoro L ottenuto in precedenza per pompare calore dal corpo 2+3 al corpo 1

- Per ΔS abbastanza grande non si hanno più intersezioni. Questo corrisponde a produzioni di entropia non realizzabili.
- L'intersezione B corrisponde alla situazione in cui la temperatura T_- comune a due corpi raggiunge il massimo valore possibile.
- La massima produzione di entropia corrisponde al caso in cui le intersezioni A e B coincidono.

CC BY NC SA

9.13. Lavoro da un termos di caffè ⋆⋆

Un termos, che possiamo schematizzare come un contenitore completamente impermeabile al calore, contiene del caffè caldo a una temperatura T_0. Il termos non è completamente pieno: schematizzeremo il contenuto come una miscela di liquido e di n moli di gas perfetto. Inoltre indicheremo con C la capacità termica a volume costante della lattina, che considereremo indipendente dalla temperatura, e trascureremo la variazione del volume del liquido con la temperatura. La pressione del gas è inizialmente P_0.

Consideriamo l'ambiente esterno come un sistema termodinamico molto grande, con temperatura $T_A < T_0$ e pressione $P_A < P_0$ fissata. Vogliamo calcolare il lavoro massimo che possiamo ricavare dal sistema.

Soluzione

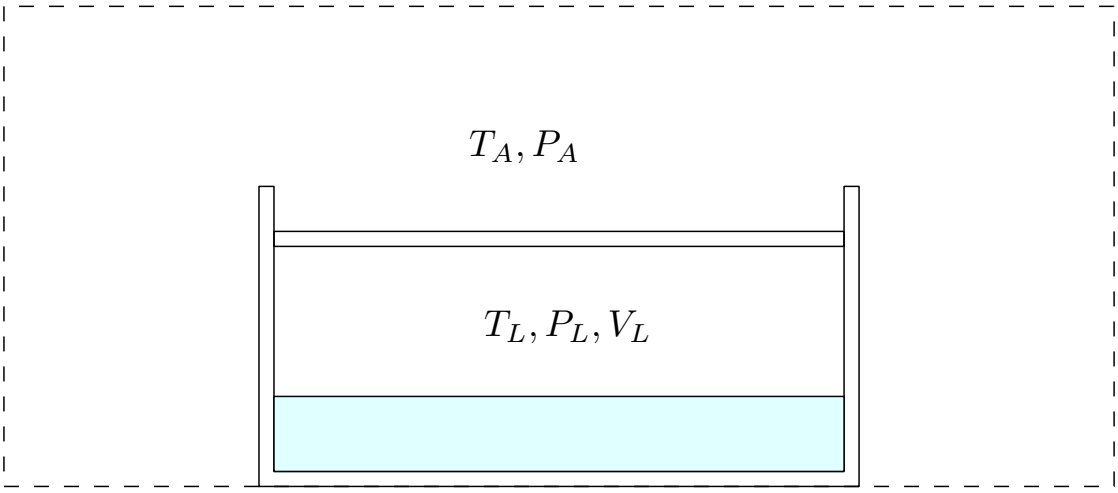


Figura 9.5.: La lattina nell'ambiente esterno. La temperatura e la pressione ambientali, T_A e P_A, si possono considerare fissate.

Indichiamo con il suffisso L le quantità che si riferiscono alla lattina, e con il suffisso A quelle che si riferiscono all'ambiente. Dato che il volume del liquido non cambia, indicheremo con V_L il volume del solo gas perfetto. Applicando il primo principio alla lattina abbiamo

$$dQ_L = dU_L + P_L dV_L$$

Qui dQ_L è il calore fornito alla lattina e dU_L la variazione della sua energia interna. Analogamente per l'ambiente abbiamo

$$dQ_A = dU_A - P_A dV_L$$

dove si è usato il fatto che $dV_A = -dV_L$. Scriviamo la variazione dell'entropia totale

come somma delle variazioni di entropia della lattina e dell'ambiente, cioè

$$dS = \frac{dQ_L}{T_L} + \frac{dQ_A}{T_A}$$

Infine per la conservazione dell'energia il lavoro utile che possiamo estrarre dal sistema deve essere dato da

$$dW = -dU_A - dU_L$$

Eliminando le variazioni di calore dalle equazioni precedenti rimaniamo con

$$dS = \frac{dU_L + P_L dV_L}{T_L} + \frac{dU_A - P_A dV_L}{T_A}$$

Ricaviamo dU_A ed abbiamo infine

$$dW = \left(\frac{T_A}{T_L} - 1\right) dU_L + \left(\frac{T_A}{T_L} P_L - P_A\right) dV_L - T_A dS$$

Notiamo anzitutto l'ultimo termine: dato che l'entropia di tutto il sistema (lattina e ambiente) non può diminure, $dS \geq 0$. Verifichiamo subito che per ottenere la massima quantità di lavoro utile si deve procedere in maniera reversibile, $dS = 0$. Per l'energia della lattina possiamo scrivere inoltre considerando una trasformazione a volume costante

$$dQ_L = dU_L = C dT_L$$

e quindi, usando anche la legge dei gas perfetti,

$$dW = C\left(\frac{T_A}{T_L} - 1\right) dT_L + \left(\frac{nRT_A}{V_L} - P_A\right) dV_L - T_A dS$$

Possiamo integrare direttamente questa ultima espressione su una data trasformazione reversibile, ottenendo

$$W_{max} = C\left(T_A \log\frac{T_f}{T_0} - T_f + T_0\right) + \left(nRT_A \log\frac{V_f}{V_0} - P_A V_f + P_A V_0\right)$$

dove abbiamo indicato con V_f e T_f il volume e la temperatura finale della lattina. Il massimo di W_{max} corrisponderà a

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{max}}{\partial T_f} &= 0 \\ \frac{\partial W_{max}}{\partial V_f} &= 0 \end{aligned}$$

ma dall'espressione di dW vediamo subito che deve essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{max}}{\partial T_f} &= C\left(\frac{T_A}{T_f} - 1\right) = 0 \\ \frac{\partial W_{max}}{\partial V_f} &= \frac{nRT_A}{V_f} - P_A = \frac{T_A}{T_f} P_f - P_A = 0 \end{aligned}$$

CC BY NC SA

Quindi lo stato finale della lattina sarà $T_f = T_A$ e $P_f = P_A$. Come è intuitivo, temperatura e pressione devono coincidere con quella dell'ambiente. Inserendo nell'espressione precedente otteniamo il risultato finale

$$W_{max} = (C + nR)\, T_A \log \frac{T_A}{T_0} - C\,(T_A - T_0) + nRT_A \log \frac{P_0}{P_A} - P_A\,(V_f - V_0)$$

con $V_f = nRT_A/P_A$. Notiamo che possiamo interpretare

$$-CT_A \log T_L - CT_L - nRT_A \log V_L + P_A V_L = -T_A S_L - U_L + P_A V_L$$

come lavoro utile che è possibile estrarre dalla lattina.

9.14. Lavoro da un termos di caffè II ⋆⋆

Calcolare nuovamente il lavoro massimo estraibile dal sistema descritto nel problema precedente, questa volta però utilizzando una trasformazione concreta del sistema. Le operazioni possibili sono due: muovere il pistone che chiude il termos in maniera controllata e mettere il contenuto in contatto termico con l'ambiente.

Soluzione

Dato che sappiamo di dover operare in modo reversibile per massimizzare il lavoro utile estratto, non possiamo porre immediatamente in contatto il contenuto del termos con l'ambiente: si avrebbe un passaggio spontaneo di calore e quindi un aumento di entropia del sistema.

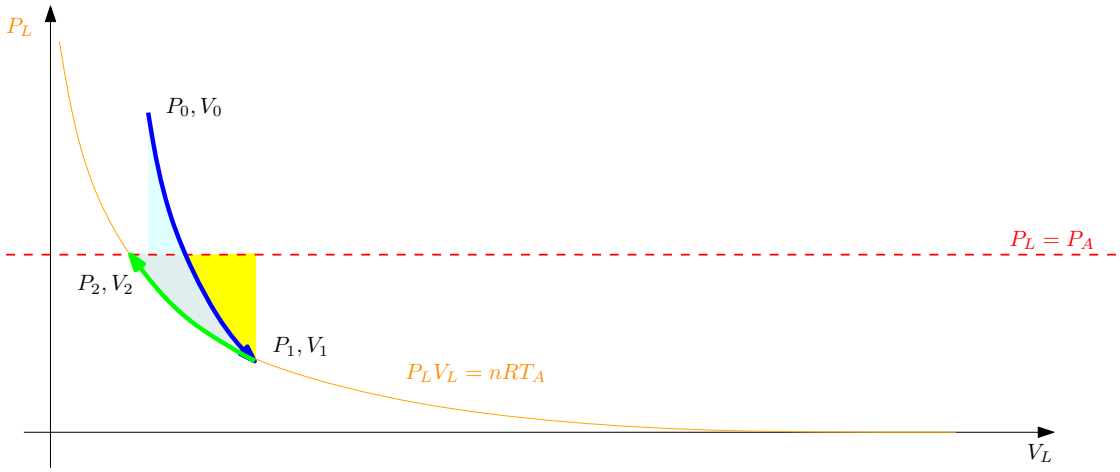


Figura 9.6.: La trasformazione utilizzata nel piano P_L, V_L. L'espansione adiabatica iniziale è rappresentata dalla curva blu, l'isoterma in verde.

Per prima cosa quindi eseguiamo un'espansione adiabatica reversibile, durante la quale il gas all'interno del termos compie un lavoro positivo e l'ambiente negativo. Il lavoro utile estratto sarà

$$dW = (P_L - P_A)\, dV_L = -dU_L - P_A dV_L$$

dove si è approfittato del fatto che l'espansione è adiabatica per esprimere il risultato nella seconda forma. Notare che fino a quando $P_L > P_A$ (cioè fino a quando la pressione all'interno del termos è maggiore di quella dell'ambiente) il bilancio totale è positivo. Noi procederemo però fino a quando $T_L = T_A$. Dato che l'espansione è adiabatica avremo

$$dU_L + P_L dV_L = 0$$

cioè

$$C dT_L + \frac{nRT_L}{V_L} dV_L = 0$$

da cui, integrando,

$$C \log T_L + nR \log V_L = \text{costante}$$

oppure

$$V_L T_L^{\frac{C}{nR}} = \text{costante}$$

e quindi il volume finale dell'espansione sarà dato da

$$V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_A} \right)^{\frac{C}{nR}}$$

Il lavoro utile estratto durante questa fase di espansione sarà quindi

$$W_1 = C \left(T_0 - T_A \right) - P_A \left(V_1 - V_0 \right)$$

Adesso che la temperatura del contenuto del termos è identica a quella esterna possiamo mettere in contatto termico i due sottosistemi, e ricavare ulteriore lavoro con una trasformazione isoterma. Ancora una volta otteremo lavoro utile fino a quando la pressione del gas all'interno del termos diverrà uguale a quella dell'ambiente, quindi

$$W_2 = \int_{V_1}^{V_2} \left(P_L - P_A \right) dV_L$$

Calcoliamo il volume corrispondente alla pressione interna P_A. Dato che abbiamo a che fare con una trasformazione isoterma sarà

$$P_A V_2 = P_1 V_1 = nRT_A$$

e quindi

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{V_1}^{\frac{nRT_A}{P_A}} \left(P_L - P_A \right) dV_L \\ &= \int_{V_1}^{\frac{nRT_A}{P_A}} \frac{nRT_A}{V_L} dV_L - P_A \left(\frac{nRT_A}{P_A} - V_1 \right) \\ &= nRT_A \log \frac{nRT_A}{P_A V_1} - P_A \left(\frac{nRT_A}{P_A} - V_1 \right) \end{aligned}$$

Sommando otteniamo

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = C \left(T_0 - T_A \right) - P_A \left(V_1 - V_0 \right) + nRT_A \log \frac{nRT_A}{P_A V_1} - P_A \left(\frac{nRT_A}{P_A} - V_1 \right) \\ &= C \left(T_0 - T_A \right) + P_A \left(V_0 - V_2 \right) + \left(C + nR \right) T_A \log \frac{T_A}{T_0} + nRT_A \log \frac{P_0}{P_A} \end{aligned}$$

che è lo stesso risultato ottenuto nell'esercizio precedente.

La trasformazione seguita rappresentata in Figura 9.6. Notare che il lavoro utile è l'area compresa tra la curva e la retta $P_L = P_A$, dato che è necessario sottrarre il

lavoro negativo dell'ambiente. In particolare nell'espansione adiabatica iniziale si ottiene lavoro utile fino a quando $P_L > P_A$ (area azzurra) e si perde successivamente (area gialla). L'espansione adiabatica termina quanto $T_L = T_A$. A questo punto si procede su un'isoterma fino a raggiungere la pressione ambientale. Nel caso in figura in cui $P_1 < P_A$ si tratta di una compressione (un esercizio consigliato è disegnare il grafico nel caso $P_1 > P_A$). Si guadagna lavoro utile, più di quello che serve a compensare quello giallo perso precedentemente. Il lavoro utile totale è la somma dell'area azzurra e di quella grigia.

9.15. Lavoro da un termos di caffè III ⋆⋆

Il sistema è ancora quello precedente, ma cambiamo ancora le regole del gioco. Possiamo solo trasferire calore dal termos all'ambiente mediante una macchina termica ciclica, o lasciare il pistone libero di muoversi.

Soluzione

Dobbiamo portare la pressione e la temperatura del termos agli stessi valori dell'ambiente. Utilizzeremo una macchina termica reversibile per trasferire calore dal termos all'ambiente esterno. La macchina lavora come schematizzato in Figura 9.7. Dato che dobbiamo lavorare in maniera reversibile per prima cosa lasceremo il pistone fissato, ed estrarremo calore fino a quando la pressione del gas sarà uguale a quella ambientale. Avremo quindi una trasformazione reversibile a volume costante nella quale

$$Q_1 = -C\left(T_1 - T_0\right) = -C\left(\frac{P_A V_0}{nR} - \frac{P_0 V_0}{nR}\right)$$

e

$$\Delta S = C \log \frac{T_1}{T_0} + \frac{Q_2}{T_A} = 0$$

dato che l'entropia non deve cambiare. Il lavoro ottenuto in questa prima fase sarà

$$W_1 = Q_1 - Q_2 = \frac{CV_0}{nR}\left(P_0 - P_A\right) + CT_A \log \frac{T_1}{T_0}$$

Adesso possiamo liberare il pistone e far raggiungere al gas la temperatura finale. A seconda delle condizioni iniziali per fare questo dovremo estrarre ancora calore (caso rappresentato in rosso nella figura) o aggiungerlo (caso rappresentato in verde). Avremo comunque

$$Q_1 = -\left(C + nR\right)\left(T_A - T_1\right)$$

e

$$\Delta S = \left(C + nR\right) \log \frac{T_A}{T_1} + \frac{Q_2}{T_A} = 0$$

che danno una seconda frazione di lavoro utile uguale a

$$W_2 = Q_1 - Q_2 = -\left(C + nR\right)\left(T_A - T_1\right) + \left(C + nR\right) T_A \log \frac{T_A}{T_1}$$

Il totale

$$W = W_1 + W_2 = C\left(T_0 - T_A\right) + \left(C + nR\right) T_A \log \frac{T_A}{T_0} + P_A\left(V_0 - V_2\right) + nRT_A \log \frac{P_0}{P_A}$$

coincide ancora una volta coi risultati ottenuti precedentemente.

CC BY NC SA

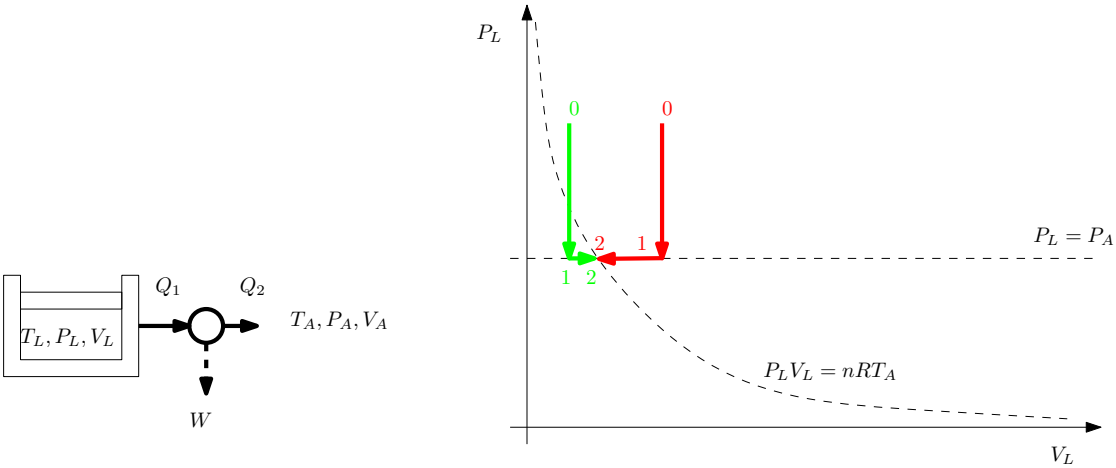


Figura 9.7.: La trasformazione rappresentata nel piano P_L,V_L. Si tratta di una isocora (pistone bloccato) seguita da un'isobara (pistone libero). I colori rosso e verde si riferiscono a due diverse condizioni iniziali.

9.16. Lavoro estraibile da un sistema chiuso ⋆⋆

Il recipiente in Figura 9.8, impermeabile al calore, è diviso in due scomparti da un setto scorrevole. Anche il setto è impermeabile al calore. Inizialmente nei due scomparti si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$. Si conosce il volume totale del recipiente V.

1. Determinare i volumi iniziali occupati dai due gas.
2. Se si permette al calore di passare spontaneamente attraverso il setto, quanto vale la temperatura finale di equilibrio del sistema? Di quanto è cambiata l'entropia?
3. Considerando nuovamente la situazione iniziale, e un setto impermeabile, determinare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema.

Soluzione

Domanda 1 Dato che il pistone è scorrevole, i due setti sono in equilibrio meccanico e quindi alla stessa pressione. Abbiamo quindi le tre equazioni

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V \\ PV_1 &= nRT_1 \\ PV_2 &= nRT_2 \end{aligned}$$

che permettodo di determinare P, V_1 e V_2. Sostituendo i volumi nella prima otteniamo la pressione

$$P = nR\frac{T_1 + T_2}{V}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{T_1}{T_1 + T_2}V \\ V_2 &= \frac{T_2}{T_1 + T_2}V \end{aligned}$$

Domanda 2 Dato che il contenitore è isolato l'energia interna non cambia. Di conseguenza, detta T_f la temperatura finale dovrà essere

$$nc_V T_1 + nc_V T_2 = 2nc_V T_f$$

da cui

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

CC BY NC SA

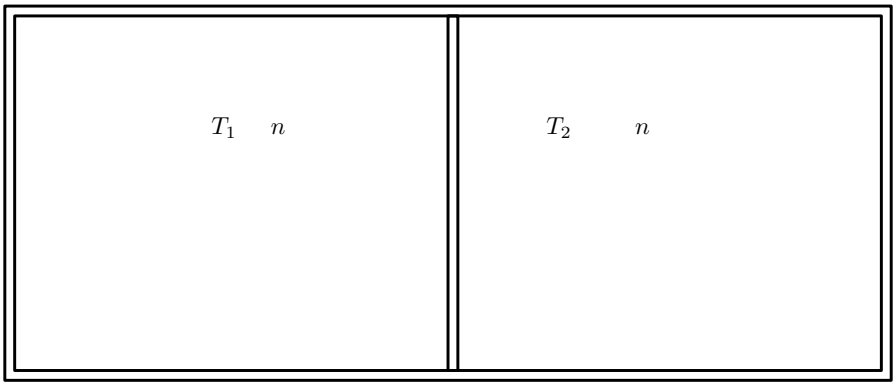


Figura 9.8.: Il sistema descritto nel testo. Il setto intermedio è scorrevole, le pareti impermeabili al calore.

In questo stato il volume di ciascun setto è la metà del totale, come segue dalle espressioni ottenute alla domanda precedente. Quindi la variazione di entropia sarà

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = nc_V \log \frac{T_f}{T_1} + nR \log \frac{\frac{1}{2}V}{V_1} + nc_V \log \frac{T_f}{T_2} + nR \log \frac{\frac{1}{2}V}{V_2} \\
&= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + nR \log \frac{V^2}{4V_1 V_2} \\
&= nc_V \log \frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} + nR \log \frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} \\
&= 2nc_P \log \frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}
\end{aligned}$$

Questo risultato si poteva derivare più rapidamente osservando che se il calore viene scambiato molto lentamente possiamo considerare i gas nei due scomparti istante per istante all'equilibrio, ad una pressione costante. Quindi possiano utilizzare per ciascuno di essi

$$dS = \frac{dQ}{T} = nc_P \frac{dT}{T}$$

cioè

$$\Delta S = nc_P \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} + nc_P \int_{T_2}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

Domanda 3 Il massimo lavoro estraibile si ottiene operando in modo reversibile sul sistema. Supponendo di estrarre una quantità di calore Q_2 dal setto più caldo e di fornirne Q_1 a quello freddo avremo infine ottenuto un lavoro utile

$$W = Q_2 - Q_1$$

D'altra parte dal primo principio abbiamo

$$\begin{aligned}
Q_2 &= -nc_V (T_f - T_2) - PdV_2 \\
Q_1 &= nc_V (T_f - T_1) + PdV_1
\end{aligned}$$

e quindi sottraendo membro a membro

$$Q_2 - Q_1 = W = nc_V \left(T_1 + T_2 - 2T_f\right) - P\left(dV_1 + dV_2\right)$$

Dato che il volume totale non cambia $dV_1 + dV_2 = dV = 0$, e quindi

$$W = nc_V \left(T_1 + T_2 - 2T_f\right)$$

Resta da determinare la temperatura finale. Dato che lavoriamo in modo reversibile la variazione di entropia è nulla. Quindi

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log \frac{T_f}{T_1} + nR \log \frac{V}{2V_1} + nc_V \log \frac{T_f}{T_2} + nR \log \frac{V}{2V_2} \\
&= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + nR \log \frac{V^2}{4V_1 V_1} \\
&= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + nR \log \frac{\left(T_1 + T_2\right)^2}{4T_1 T_2} = 0
\end{aligned}$$

da cui

$$T_f = \left[\frac{2\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}\right]^{R/c_V} \sqrt{T_1 T_2}$$

Sostituendo otteniamo il risultato finale che possiamo scrivere nella forma

$$W = nc_V \left(T_1 + T_2\right) \left[1 - \left(\frac{2\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}\right)^{\gamma}\right]$$

dalla quale si vede immediatamente che $W > 0$, dato che è sempre

$$\frac{T_1 + T_2}{2} \geq \sqrt{T_1 T_2}$$

9.17. Massima potenza di un ciclo di Carnot ⋆⋆⋆

Si vuole ricavare lavoro da una trasformazione ciclica che usa come sorgenti due bagni termici di temperatura T_L e $T_H > T_L$. La trasformazione consiste in un ciclo di Carnot in cui le temperature T_1 e T_2 delle isoterme sono intermedie a quelle delle sorgenti:

$$T_L < T_1 < T_2 < T_H \tag{9.17.1}$$

Quando il sistema è alla temperatura T_1 è in contatto con la sorgente alla temperatura T_L mediante una resistenza termica R_T. Analogamente quando è alla temperatura T_2 è in contatto con la sorgente alla temperatura T_H, sempre tramite la stessa resistenza termica.

Si vogliono determinare le temperature di lavoro T_1 e T_2 in modo da massimizzare la potenza utile, considerando trascurabile il tempo necessario ad eseguire le trasformazioni adiabatiche. Calcolare per le temperature T_1 e T_2 ottimali l'efficienza del ciclo.

Soluzione

Consideriamo le varie fasi del ciclo di Carnot:

1. Compressione isoterma alla temperatura T_1, a contatto con la sorgente a temperatura T_L. Il sistema riceve un calore $Q_1 = T_1 \Delta S_1$ (negativo) dalla sorgente a temperatura T_L. Affinchè questo avvenga è necessario un tempo τ_1 determinato dalla
$$Q_1 = -\frac{1}{R_T}\left(T_1 - T_L\right)\tau_1 \tag{9.17.2}$$

2. Compressione adiabatica dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2. Non si hanno scambi di calore e, come detto in precedenza, il tempo necessario è trascurabile.

3. Espansione isoterma alla temperatura T_2, a contatto con la sorgente a temperatura T_H. Il sistema riceve un calore $Q_2 = T_2 \Delta S_2$ dalla sorgente a temperatura T_H. Il tempo τ_2 necessario alla trasformazione sarà determinato da
$$Q_2 = \frac{1}{R_T}\left(T_H - T_2\right)\tau_2$$

4. Espansione adiabatica dalla temperatura T_2 alla temperatura T_1. Non si hanno scambi di calore ed anche questa volta il tempo necessario è trascurabile.

Il lavoro complessivo fatto dal sistema vale per il primo principio

$$L = Q_1 + Q_2 = T_1 \Delta S_1 + T_2 \Delta S_2 \tag{9.17.3}$$

e quindi la potenza sarà

$$P_W = \frac{L}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{R_T Q_1}{T_L - T_1} + \frac{R_T Q_2}{T_H - T_2}} \tag{9.17.4}$$

Dato che dopo un ciclo il sistema torna nello stato iniziale, e che durante le adiabatiche non varia la propria entropia, dovrà essere $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$. Di conseguenza

$$P_W = \frac{1}{R_T} \frac{T_2 - T_1}{\frac{T_1}{T_1 - T_L} + \frac{T_2}{T_H - T_2}} = \frac{1}{R_T} \frac{(T_1 - T_2)(T_2 - T_H)(T_1 - T_L)}{T_1 T_H - T_2 T_L} \tag{9.17.5}$$

che si può riscrivere nella forma

$$P_W = \frac{1}{R_T} \frac{(1-x)(1-y)(T_L x - T_H y)}{x - y} \tag{9.17.6}$$

introducendo le variabili $x = T_1/T_L$ e $y = T_2/T_H$. Derivando abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_W}{\partial x} &= \frac{(1-y)\left[T_H(1-y) + T_L\left(2xy - y - x^2\right)\right]}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial P_W}{\partial y} &= \frac{(1-x)\left[T_L(1-x) + T_H\left(2xy - x - y^2\right)\right]}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

I valori $x = 1$ e $y = 1$ che annullano le espressioni precedenti non sono accettabili, perchè corrispondono a $P_W = 0$ (minimi). Il massimo sarà quindi determinato dalle soluzioni contemporanee di

$$\begin{aligned} \frac{T_H}{T_L} y(1-y) + \left(2xy - y - x^2\right) &= 0 \\ \frac{T_L}{T_H} x(1-x) + \left(2xy - x - y^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Le soluzioni chiaramente dipendono solo dal rapporto T_L/T_H. Risolvendo il sistema si trovano le soluzioni

$$\begin{aligned} (x,y) &= (0,0) \\ (x,y) &= (1,1) \\ (x,y) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_H}{T_L}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_L}{T_H}}\right) \\ (x,y) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_H}{T_L}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_L}{T_H}}\right) \end{aligned}$$

Solo l'ultima soddisfa le condizioni $T_L < T_1 < T_2 < T_H$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\left(T_L + \sqrt{T_L T_H}\right) \\ T_2 &= \frac{1}{2}\left(T_H + \sqrt{T_L T_H}\right) \end{aligned}$$

CC BY NC SA

che corrispondono ad una potenza

$$P_W = \left(\frac{T_H + T_L - 2\sqrt{T_H T_L}}{4R_T} \right) \tag{9.17.7}$$

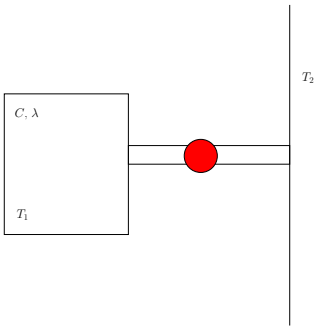
e ad una efficienza

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} = \frac{1 - \frac{T_L}{T_H}}{1 + \sqrt{\frac{T_L}{T_H}}} \tag{9.17.8}$$

Notare che l'efficienza non dipende da R_T.

CC BY NC SA

9.18. Trasferimento di calore tra un corpo e un bagno termico $\star\star\mathcal{S}$



Un contenitore riempito con una miscela al 50% in massa di ghiaccio ed acqua viene posto in contatto con un bagno termico di temperatura $T_2 = 300\,K$ mediante una barra di rame (conducibilità termica $\sigma = 391\,W/(m\,K)$), lunghezza $\ell = 10^{-1}\,m$ e sezione $S = 10^{-4}\,m^2$. Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 335 \times 10^3\,J/kg$, il calore specifico dell'acqua $c = 4.18 \times 10^3\,J/(kg\,K)$ e la massa totale della miscela $M = 1\,kg$. Si trascuri la capacità termica della barra e si considerino isolanti le pareti del contenitore e della barra.

1. Calcolare la temperatura e la variazione di entropia del contenitore in funzione del tempo.
2. Calcolare la variazione finale di entropia dell'universo.
3. Se al posto del contatto termico si utilizza una macchina termica reversibile quale è il massimo lavoro utile estraibile dal sistema?

Soluzione[1]

Domanda 1

Il passaggio di calore avviene per conduzione, e possiamo scrivere per il calore ceduto alla miscela per unità di tempo

$$\dot{Q} = \frac{\sigma S}{\ell}\,(T_2 - T)$$

In una prima fase questo calore serve a sciogliere il ghiaccio, la temperatura della miscela rimane quindi quella di fusione del ghiaccio T_0 e possiamo scrivere per la massa di ghiaccio sciolto $m(t)$

$$\lambda \dot{m} = \dot{Q} = \frac{\sigma S}{\ell}\,(T_2 - T_0)$$

[1] Secondo esercizio scritto 31 gennaio 2007

da cui

$$\lambda m(t) = Q(t) = \frac{\sigma S}{\ell}\left(T_2 - T_0\right) t$$

La temperatura resta quindi costante e l'entropia aumenta linearmente

$$\Delta S_R(t) = \frac{Q(t)}{T_0} = \frac{\sigma S}{\ell}\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) t$$

Quando $m(t) = M/2$ tutto il ghiaccio si è sciolto. Questo avviene per

$$t = t_1 = \frac{\lambda \ell M}{2\sigma S\left(T_2 - T_0\right)}$$

Da questo momento vale

$$cM\dot{T} = \dot{Q} = \frac{\sigma S}{\ell}\left(T_2 - T\right)$$

L'equazione

$$\dot{T} = \frac{\sigma S}{c\ell M}\left(T_2 - T\right)$$

si integra immediatamente:

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT'}{\left(T_2 - T'\right)} = \int_{t_1}^{t} \frac{\sigma S}{c\ell M} dt$$

da cui

$$\log \frac{T(t) - T_2}{T_0 - T_2} = -\frac{\sigma S}{c\ell M}\left(t - t_1\right)$$

e quindi

$$T(t) = T_2 + \left(T_0 - T_2\right) \exp\left[-\frac{\sigma S}{c\ell M}\left(t - t_1\right)\right]$$

Per l'entropia avremo

$$\dot{S}_R = \frac{1}{T}\dot{Q} = cM\frac{\dot{T}}{T} = cM\frac{d}{dt}\log T$$

da cui

$$\Delta S_R(t) = \Delta S_R(t_1) + cM \log \frac{T(t)}{T_0}$$

Domanda 2

La variazione di entropia finale del contenitore vale

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \Delta S_R(t) &= \frac{\sigma S}{\ell}\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) t_1 + cM \log \frac{T_2}{T_0} \\ &= \frac{\lambda M}{2T_0} + cM \log \frac{T_2}{T_0}\end{aligned}$$

CC BY NC SA

Invece l'entropia del bagno termico è variata di

$$\Delta S_B = -\frac{Q}{T_2}$$

dove Q è il calore totale ceduto al recipiente (e estratto dal bagno). Abbiamo quindi

$$\Delta S_B = -\frac{1}{T_2}\left[\frac{\lambda M}{2} + cM\left(T_2 - T_0\right)\right]$$

In conclusione

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_B = \frac{\lambda M}{2}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}\right) + cM\left[\log\frac{T_2}{T_0} - \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right)\right]$$

Domanda 3

Detto Q_1 il calore ceduto al recipiente e Q_2 quello estratto dal bagno termico abbiamo dal primo principio che il lavoro estratto W vale

$$W = Q_2 - Q_1$$

Dato che la temperatura finale del recipiente deve essere T_2 avremo

$$Q_1 = \frac{M\lambda}{2} + cM\left(T_2 - T_0\right)$$

Per estrarre la massima quantità di lavoro possibile si deve operare in modo reversibile, quindi

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_B = 0$$

ma

$$\Delta S = \frac{\lambda M}{2T_0} + cM\log\frac{T_2}{T_0} - \frac{Q_2}{T_2}$$

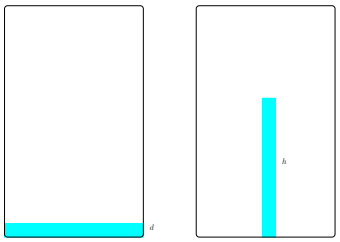
da cui

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_0}\frac{\lambda M}{2} + cMT_2\log\frac{T_2}{T_0}$$

Otteniamo infine

$$W = \left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right)\frac{\lambda M}{2} + cM\left[T_2\log\frac{T_2}{T_0} - \left(T_2 - T_0\right)\right]$$

9.19. Tre modi per sciogliere una massa di ghiaccio ⋆⋆$\mathcal{S}$



Si considerino due recipienti cilindrici identici di sezione S. In entrambi si trova una massa m di ghiaccio alla temperatura di fusione. Nel primo recipiente il ghiaccio è distribuito sul fondo in uno strato di spessore d, nel secondo ha la forma di un cilindro di altezza $h \gg d$ disposto verticalmente.

1. Si calcoli in entrambi i casi il calore che è necessario fornire al ghiaccio per scioglierlo completamente.
2. Con una piccola spinta si fa cadere il cilindro del secondo recipiente, e si osserva che il ghiaccio si scioglie completamente senza apporto di calore. Calcolare la minima altezza h per la quale questo puó accadere, e la variazione di entropia del sistema.
3. Calcolare il massimo lavoro ottenibile utilizzando il secondo recipiente come sorgente fredda, avendo a disposizione un bagno termico a $T = 300\,K$.

Soluzione[2]

Domanda 1

Dalla conservazione dell'energia segue che

$$Q = \lambda m + \Delta U_g$$

dove Q è il calore fornito e ΔU_g la variazione di energia potenziale gravitazionale, λ il calore latente di fusione. Trascurando la variazione di volume nella transizione di fase possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lambda m \\ Q_2 &= \lambda m + \frac{1}{2} mg\,(d-h) \simeq \lambda m - \frac{1}{2} mgh \end{aligned}$$

dato che nel primo caso l'altezza del centro di massa del sistema è invariata, mentre nel secondo passa da $h/2$ a $d/2$.

[2]Secondo esercizio compitino 30 maggio 2007

Domanda 2

Dalla formula trovata in precedenza abbiamo che $Q_2 = 0$ quando

$$h = \frac{2\lambda}{g}\,.$$

Per calcolare la variazione di entropia consideriamo una trasformazione reversibile nella quale il ghiaccio viene prima coricato sul fondo del recipiente, e quindi sciolto fornendo una opportuna quantità di calore tramite una sorgente di temperatura di poco superiore alla temperatura di fusione. Nella prima fase l'entropia non cambia, nella seconda si ha

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T_f} = \frac{\lambda m}{T_f}\,.$$

Domanda 3

Possiamo prima adagiare la sbarra sul fondo del recipiente, ottenendo un lavoro utile $W_1 = mgh/2$. A questo punto utilizziamo una macchina reversibile tra la sorgente calda e quella fredda. La variazione di entropia complessiva deve essere nulla, da cui

$$\frac{\lambda m}{T_f} + C \log \frac{T_{300}}{T_f} = \frac{Q_{ass}}{T_{300}}$$

e d'altra parte

$$\lambda m + C\left(T_{300} - T_f\right) = Q_{ced}\,.$$

Otteniamo infine

$$W_2 = Q_{ass} - Q_{ced} = \lambda m \left(\frac{T_{300}}{T_f} - 1\right) + C T_{300} \log \frac{T_{300}}{T_f} - C\left(T_{300} - T_f\right)$$

e quindi

$$W = W_1 + W_2 = \frac{mgh}{2} + \lambda m \left(\frac{T_{300}}{T_f} - 1\right) + C T_{300} \log \frac{T_{300}}{T_f} - C\left(T_{300} - T_f\right)\,.$$

CC BY NC SA

9.20. Trasformazione termodinamica con attrito ⋆⋆$\mathcal{S}$

Una macchina termica è costituita da un cilindro di sezione S munito di pistone, contenente n moli di un gas perfetto. Tra cilindro e pistone si ha attrito statico e dinamico, con $|F_{stat}| \leq |F_{dyn}| = F_0$, dove F_0 è una costante assegnata. L'energia dissipata per attrito passa interamente all'interno del contenitore.

1. In assenza di attrito determinare il lavoro necessario, in una lenta compressione adiabatica, per dimezzare il volume del gas partendo da $V = V_0$ e $T = T_0$.
2. Stessa domanda in presenza di attrito. Determinare anche la variazione di entropia del gas.
3. Discutere l'efficienza che è possibile ottenere utilizzando la macchina termica descritta per ottenere lavoro avendo a disposizione due bagni termici di temperature T_1 e $T_2 > T_1$, mediante cicli di Carnot.

Può essere utile il seguente risultato. L'integrale generale di una equazione del tipo

$$y' + \frac{a}{x} y = b$$

con a e b costanti è dato da

$$y = \frac{A}{x^a} + \frac{b}{a+1} x$$

dove A è una costante di integrazione.

Soluzione[3]

Esercizio 1

In assenza di attrito abbiamo a che fare con una compressione adiabatica, per la quale

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma = nRT_0 V_0^{\gamma-1} \,.$$

Abbiamo quindi

$$W = -\int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} P dV = -nRT_0 V_0^{\gamma-1} \int_{V_0}^{\frac{1}{2}V_0} \frac{dV}{V^\gamma}$$

da cui

$$W = nRT_0 V_0^{\gamma-1} \frac{1}{\gamma-1} \left[\frac{1}{(V_0/2)^{1-\gamma}} - \frac{1}{V_0^{1-\gamma}} \right] = nc_v T_0 \left(2^{\gamma-1} - 1\right) \,.$$

[3] Secondo esercizio scritto 19 giugno 2007

Esercizio 2

In presenza di attrito il lavoro fatto sul sistema è dato da

$$dW = -P_{ext} dV$$

dove la pressione esterna è legata a quella del gas dalla relazione

$$P_{ext} = P + \frac{F_0}{S} .$$

Abbiamo inoltre

$$0 = dU + P_{ext} dV$$

e quindi

$$nc_v dT = -\left(\frac{nRT}{V} + \frac{F_0}{S}\right) dV .$$

Otteniamo una equazione differenziale

$$\frac{dT}{dV} + \frac{R}{c_v V} T = -\frac{F_0}{nc_v S}$$

del tipo descritto nel testo, con $y = T$, $x = V$, $a = R/c_v = \gamma - 1$ e $b = -F_0/(nc_v S)$. Otteniamo infine

$$T = \frac{A}{V^{\gamma-1}} - \frac{F_0}{nc_v \gamma S} V .$$

In termini delle condizioni iniziali

$$T = \left(T_0 + \frac{F_0 V_0}{nc_v \gamma S}\right) \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} - \frac{F_0 V_0}{nc_v \gamma S} \left(\frac{V}{V_0}\right) .$$

Possiamo adesso calcolare il lavoro:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\alpha V_0}^{V_0} \left(\frac{nRT}{V} + \frac{F_0}{S}\right) dV \\ &= V_0 \int_{\alpha}^{1} \left(\frac{nR}{V_0} T(u) + \frac{F_0}{S}\right) du \end{aligned}$$

dove $u = V/V_0$ e α è il rapporto tra volume finale e iniziale ($\alpha = 1/2$ nel caso considerato). Sostituendo l'espressione ottenute precedentemente per la temperatura si ottiene

$$W = V_0 \int_{\alpha}^{1} \left[\left(P_0 + \frac{F_0 R}{c_v \gamma S}\right) \frac{1}{u^{\gamma-1}} + \frac{1}{\gamma} \frac{F_0}{S} u\right] du$$

e quindi

$$W = V_0 \left[\frac{1}{\gamma - 2} \left(P_0 + \frac{F_0 R}{c_v \gamma S}\right) \left(\frac{1}{\alpha^{\gamma-2}} - 1\right) + \frac{1}{2\gamma} \frac{F_0}{S} \left(1 - \alpha^2\right)\right]$$

Per calcolare la variazione dell'entropia possiamo semplicemente usare la formula

$$S = nc_v \log T + nR \log V + C$$

valida per qualsiasi gas perfetto. Dato che l'entropia è una funzione di stato abbiamo

$$\Delta S = nc_v \log \left[\left(1 + \frac{1}{P_0} \frac{F_0}{S} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} - \frac{1}{P_0} \frac{F_0}{S} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha \right] + nR \log \alpha$$

che si può anche scrivere

$$\Delta S = nc_v \log \left[\left(1 + \frac{1}{P_0} \frac{F_0}{S} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) - \frac{1}{P_0} \frac{F_0}{S} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha^{\gamma} \right] .$$

Notare che $\Delta S \to 0$ se il rapporto tra la pressione iniziale del gas e F_0/S tende a zero.

Esercizio 3

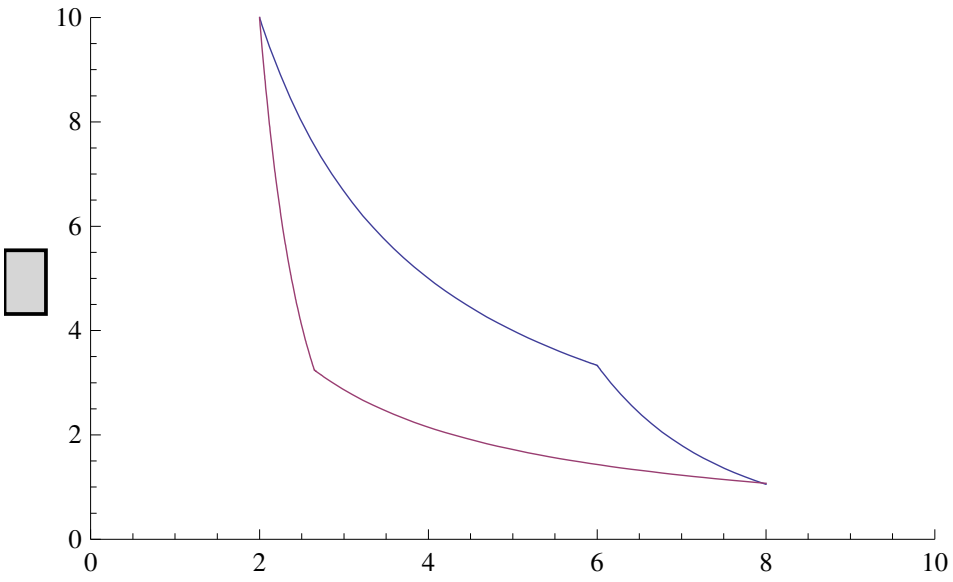
L'efficienza è minore di quella di una macchina reversibile ideale. Questo si può mostrare scrivendo

$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= W + Q^* \\ \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} &= \Delta S \end{aligned}$$

dove $Q^* > 0$ è il calore prodotto dall'attrito e $\Delta S > 0$ l'entropia prodotta. Segue che

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1 - Q^*}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} - \frac{Q^*}{Q_2} - \Delta S \frac{T_1}{Q_2} .$$

L'efficienza è vicina a quella ideale quando il calore prodotto per attrito è trascurabile rispetto a quello assorbito dalla sorgente calda (notare che $\Delta S < Q^*/T_1$).



Calcoliamo il lavoro utile estratto in un ciclo. Per la compressione adiabatica possiamo utilizzare la formula ricavata all'esercizio precedente. Per l'espansione adiabatica dobbiamo tenere conto del fatto che la forza di attrito cambia segno, essendo sempre opposta al movimento del pistone. Quindi

$$W_{D\to A} = V_D \left[\frac{1}{\gamma-2}\left(P_D + \frac{\gamma-1}{\gamma}P^*\right)\left(\frac{1}{(V_A/V_D)^{\gamma-2}} - 1\right) + \frac{1}{2\gamma}P^*\left(1-(V_A/V_D)^2\right)\right]$$

$$W_{B\to C} = V_B \left[\frac{1}{\gamma-2}\left(P_B - \frac{\gamma-1}{\gamma}P^*\right)\left(\frac{1}{(V_C/V_B)^{\gamma-2}} - 1\right) - \frac{1}{2\gamma}P^*\left(1-(V_C/V_B)^2\right)\right]$$

il lavoro sulle isoterme si calcola direttamente:

$$W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} (P - P^*)\, dV = nRT_2 \log\frac{V_B}{V_A} - P^*(V_B - V_A)$$

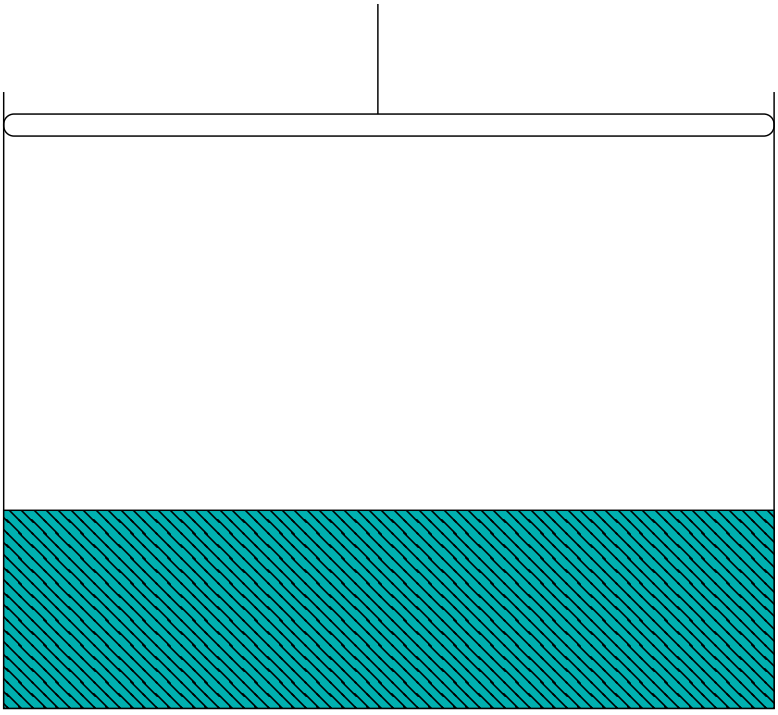
$$W_{C\to D} = \int_{V_C}^{V_D} (P + P^*)\, dV = nRT_1 \log\frac{V_D}{V_C} + P^*(V_D - V_C)\,.$$

Per quanto riguarda il calore assorbito dalla sorgente calda, dato che esso viene estratto durante una trasformazione isoterma avremo $Q_2 = W_{A\to B}$. L'efficienza sarà dunque

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A}}{W_{A\to B}}\,.$$

Le formule precedenti si discostano da quelle in presenza di attrito per correzioni che saranno trascurabili quando $P \gg P^*$. Segue che sarà possibile ottenere una efficienza arbitrariamente vicina al caso irreversibile lavorando a pressioni del gas elevate.

9.21. Effetto della capacità termica di un recipiente ⋆$\mathcal{S}$



Sul fondo di un cilindro di sezione S munito di un pistone mobile e impermeabile al calore si trova uno strato di materiale di capacità termica C_1. Nella parte superiore si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico. Inizialmente il sistema è all'equilibrio termodinamico, con pressione e temperatura P_0 e T_0 note.

1. Si raddoppia molto lentamente la pressione. Calcolare la nuova temperatura.
2. Partendo dalla stessa condizione iniziale si raddoppia istantaneamente la forza applicata al pistone. Calcolare anche in questo caso la temperatura nello stato finale di equilibrio.
3. Calcolare la variazione di entropia del sistema e dell'universo nei due casi precedenti.

Soluzione[4]

Problema 1

Dal primo principio abbiamo, considerando che non si hanno scambi di calore con l'esterno,

$$0 = dU + pdV \tag{9.21.1}$$

[4]Secondo problema scritto 21 gennaio 2009

ma l'energia interna del sistema si può scrivere come la somma di quella del gas e del materiale, quindi

$$dU = \frac{3}{2}nRdT + C_1 dT \tag{9.21.2}$$

e quindi

$$\left(\frac{3}{2}nR + C_1\right) dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \tag{9.21.3}$$

che può essere integrata direttamente:

$$\left(\frac{3}{2}nR + C_1\right) \log T + nR \log V = K \tag{9.21.4}$$

ossia

$$T^{\left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)} V^{nR} = \text{costante} \tag{9.21.5}$$

oppure, usando la legge dei gas perfetti,

$$TP^{-\eta} = \text{costante} \tag{9.21.6}$$

con

$$\eta = \frac{nR}{\frac{5}{2}nR + C_1}\,. \tag{9.21.7}$$

Da questo segue subito che

$$T_f = T_0 \left(\frac{P_f}{P_0}\right)^{\eta} = T_0 2^{\eta}\,. \tag{9.21.8}$$

Problema 2

In questo caso non abbiamo a che fare con una trasformazione reversibile, quello che possiamo dire è che l'aumento dell'energia interna sarà dato dal lavoro fatto sul sistema:

$$-2P_0 (V_f - V_0) = \Delta U = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)(T_f - T_0) \tag{9.21.9}$$

ma d'altra parte negli stati iniziale e finale di equilibrio

$$P_0 V_0 = nRT_0 \tag{9.21.10}$$

$$2P_0 V_f = nRT_f \tag{9.21.11}$$

e sostituendo

$$-nR(T_f - 2T_0) = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)(T_f - T_0) \tag{9.21.12}$$

ossia

$$T_f = \frac{\frac{7}{2}nR + C_1}{\frac{5}{2}nR + C_1} T_0\,. \tag{9.21.13}$$

Problema 3

Nel primo caso la trasformazione è reversibile, quindi l'entropia dell'universo non cambia. Ma neppure si hanno scambi di calore con il sistema, quindi anche l'entropia di quest'ultimo non varia.

Nel secondo caso la trasformazione è irreversibile. La variazione di entropia del sistema si trova calcolando la differenza tra l'entropia dello stato di equilibrio finale e quella dello stato di equilibrio iniziale. Dato che

$$dS = \frac{dQ}{T} = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)\frac{dT}{T} + \frac{nR}{V}dV \tag{9.21.14}$$

possiamo scrivere

$$\Delta S = \left(\frac{3}{2}nR + C_1\right)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0} = \left(\frac{5}{2}nR + C_1\right)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{P_0}{P_f} \tag{9.21.15}$$

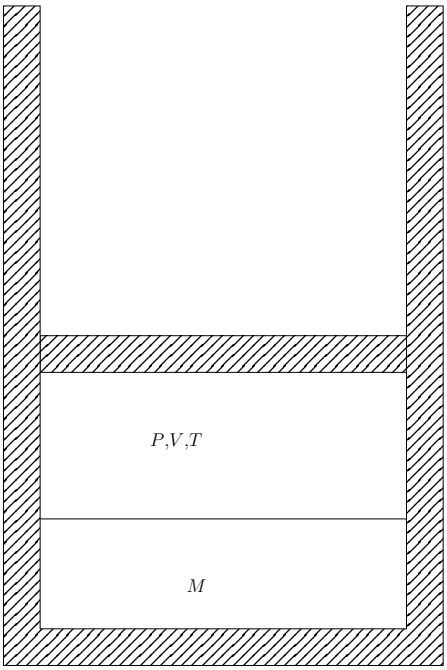
e quindi

$$\Delta S = \left(\frac{5}{2}nR + C_1\right)\log\frac{\frac{7}{2}nR + C_1}{\frac{5}{2}nR + C_1} - nR\log 2\,. \tag{9.21.16}$$

Questa sarà anche la variazione di entropia dell'universo.

CC BY NC SA

9.22. Acqua e ghiaccio a pressione costante ⋆⋆$\mathcal{S}$



Il recipiente in figura è chiuso da un setto scorrevole $\mathcal{S}$. Recipiente e setto sono impermeabili al calore, ed il setto ha massa trascurabile. Il volume interno è ulteriormente diviso in due parti da una parete rigida, che permette invece il contatto termico tra le due parti. Nella parte inferiore si trova una massa M di ghiaccio a $0\,°C$, in quella superiore n moli di un gas perfetto. L'esterno del recipiente si trova a pressione atmosferica.

1. Determinare il volume V del gas nella condizione iniziale.
2. Si comprime adesso il setto superiore fino a portare la temperatura del gas a $20\,°C$ in modo reversibile. Determinare la dipendenza della pressione del gas dal suo volume per questa trasformazione, e rappresentarla su un grafico. Di quanto è variata l'entropia del sistema?
3. Supponendo di utilizzare il sistema come sorgente fredda, e che l'ambiente esterno possa essere considerato un bagno termico a temperatura $T = 20\,°C$, trasferendo calore mediante una macchina termica, determinare il massimo lavoro estraibile.

Soluzione[5]

Domanda 1

Dato che il gas è in equilibrio termico con il ghiaccio deve essere

$$P_{atm}V_0 = nRT_0 \tag{9.22.1}$$

[5]Secondo problema scritto 11 novembre 2008

dove $T_0 = 0\,°C$, da cui

$$V = V_0 = \frac{nRT_0}{P_{atm}} \tag{9.22.2}$$

Domanda 2

Finchè del ghiaccio è presente, la temperatura del sistema è fissata a T_0. Quindi

$$P = \frac{nRT_0}{V} \tag{9.22.3}$$

Dal primo principio segue che

$$\delta Q = 0 = \lambda dm + PdV \tag{9.22.4}$$

dove dm è la massa di ghiaccio che si scioglie e λ il calore latente di fusione. Segue che

$$nRT_0 \frac{dV}{V} + \lambda dm \tag{9.22.5}$$

e quindi quando tutto il ghiaccio si è sciolto il volume è diventato

$$V_1 = V_0 \exp\left(-\frac{\lambda M}{nRT_0}\right) \tag{9.22.6}$$

Da questo momento in poi vale

$$\delta Q = 0 = (C + nc_V)\, dT + PdV \tag{9.22.7}$$

dove C è la capacità termica dell'acqua. Abbiamo quindi

$$(C + nc_V) \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V} nR \frac{dV}{V} = 0 \tag{9.22.8}$$

ossia

$$(C + nc_V) \log \frac{T}{T_0} + nR \log \frac{V}{V_1} = 0 \tag{9.22.9}$$

che si può esprimere nella forma

$$V^{nR} T^{C+nc_V} = \text{cost} \tag{9.22.10}$$

oppure

$$PV^{\beta} = \text{cost} \tag{9.22.11}$$

dove

$$\beta = \frac{c_P + C/n}{c_V + C/n} \tag{9.22.12}$$

Quindi la trasformazione si rappresenta come una isoterma per $V_1 < V < V_0$, e come una adiabatica con un esponente modificato per $V_f < V < V_1$. Il volume finale si ottiene dalla (9.22.10):

$$V_f = V_1 \left(\frac{T_0}{T_f}\right)^{\frac{C+nc_V}{nR}} \tag{9.22.13}$$

con $T_f = 20\,°C$.

Dato che il sistema non scambia calore con l'esterno la sua variazione di entropia è nulla.

Domanda 3

Sia δQ_1 il calore assorbito dall'ambiente e δQ_2 quello ceduto al sistema. Chiaramente $W = Q_1 - Q_2$. Fino a quando è presente del ghiaccio le temperature sono fissate, e dato che l'entropia totale non varia deve essere

$$\frac{Q_2}{T_0} = \frac{Q_1}{T_f} \tag{9.22.14}$$

e d'altra parte $Q_2 = \lambda M$, quindi

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) \lambda M \tag{9.22.15}$$

sarà il lavoro prodotto in questa prima fase.

Appena tutto il ghiaccio si è sciolto deve essere

$$\delta Q_2 = (C + nc_V)\, dT + PdV \tag{9.22.16}$$

$$dS = (C + nc_V)\, \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV - \frac{\delta Q_1}{T_f} = 0 \tag{9.22.17}$$

Integrando la seconda relazione otteniamo, tenendo conto che la pressione è costante

$$Q_1 = T_f\, (C + nc_V + nR) \log \frac{T_f}{T_0} \tag{9.22.18}$$

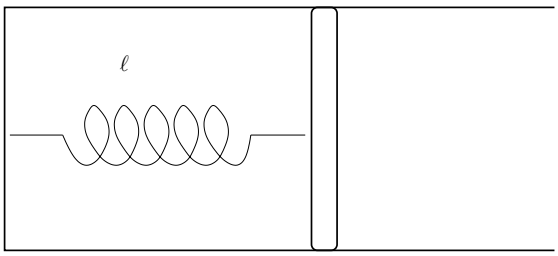
e dalla prima

$$Q_2 = (C + nc_V + nR)\, (T_f - T_0) \tag{9.22.19}$$

da cui otteniamo il risultato finale

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) \lambda M + (C + nc_P) \left[T_f \log \frac{T_f}{T_0} - (T_f - T_0)\right] \tag{9.22.20}$$

9.23. Cilindro con gas e molla non lineare ⋆⋆$\mathcal{S}$



Nel cilindro di sezione S in figura sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico, e la molla che collega il setto mobile al fondo ha lunghezza a riposo nulla ed esercita una forza di richiamo di modulo

$$F = k\ell^\alpha \tag{9.23.1}$$

dove ℓ è l'allungamento. Inizialmente il sistema è all'equilibrio, ad una temperatura T_0, e all'esterno del cilindro c'è il vuoto.

1. Determinare la legge che lega la pressione del gas al suo volume.
2. Si fornisce al sistema una quantità di calore dQ. Determinare la capacità termica.
3. Calcolare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema avendo a disposizione un bagno termico di temperatura $T_B < T_0$.

Soluzione[6]

Domanda 1

La pressione del gas deve equilibrare la forza che la molla applica al pistone, quindi

$$P = \frac{F}{S} = \frac{k\ell^\alpha}{S} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha \,. \tag{9.23.2}$$

Domanda 2

Abbiamo

$$dQ = dU = nc_V dT + k\ell^\alpha d\ell \tag{9.23.3}$$

$$= nc_V dT + \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha dV \tag{9.23.4}$$

d'altra parte

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha \tag{9.23.5}$$

[6] Primo problema compitino 28 maggio 2008

cioè

$$V = S\left(\frac{nRT}{k}\right)^{1/(1+\alpha)} \tag{9.23.6}$$

e

$$dV = \frac{nRS}{k(1+\alpha)}\left(\frac{nRT}{k}\right)^{-\alpha/(1+\alpha)} dT\,. \tag{9.23.7}$$

Sostituendo otteniamo

$$dQ = CdT = \left[nc_V + \frac{k}{S^{1+\alpha}}S^{\alpha}\left(\frac{nRT}{k}\right)^{\alpha/(1+\alpha)}\frac{nRS}{k(1+\alpha)}\left(\frac{nRT}{k}\right)^{-\alpha/(1+\alpha)}\right]dT \tag{9.23.8}$$

quindi

$$C = nc_V + n\frac{R}{(1+\alpha)}\,. \tag{9.23.9}$$

Domanda 3

Ponendo uguale a zero la variazione di entropia del sistema abbiamo

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_B} + nc_v \log\frac{T_B}{T_0} + nR\log\left(\frac{T_B}{T_0}\right)^{1/(1+\alpha)} = 0 \tag{9.23.10}$$

da cui

$$Q_2 = nT_B\left(c_v + \frac{R}{1+\alpha}\right)\log\frac{T_0}{T_B}\,. \tag{9.23.11}$$

D'altra parte

$$Q_1 = -\int_{T_0}^{T_B} CdT = n\left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)}\right)(T_0 - T_B) \tag{9.23.12}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_2 = n\left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)}\right)\left[(T_0 - T_B) - T_B\log\frac{T_0}{T_B}\right]\,. \tag{9.23.13}$$

9.24. Congelamento di una provetta ⋆⋆

Una lunga provetta è riempita di un certo liquido di densità ρ_L e calore latente di fusione λ noti. Si osserva che ad una certa temperatura T_0 tutto il liquido al di sotto di una certa altezza si è solidificato. Si abbassa adesso la temperatura, portandola a $T_1 = T_0 - \Delta T$, e si osserva che la superficie di separazione tra solido e liquido è salita di un tratto ℓ. Ignorando l'espansione termica dei materiali calcolare la densità ρ_S del solido in funzione di ρ_L, λ, T_0, ℓ e ΔT.

Soluzione

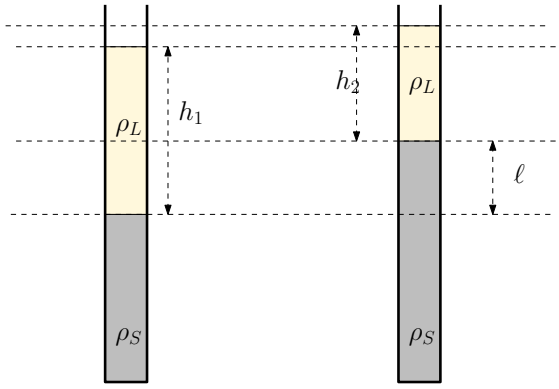


Figura 9.9.: La provetta prima (a sinistra) e dopo (a destra) l'abbassamento della temperatura. La parte solida è rappresentata in grigio, quella liquida in rosa.

La situazione prima e dopo l'abbassamento di temperatura è rappresentata in Figura 9.9. Scendendo lungo la provetta la pressione aumenta in accordo con la legge di Stevino. La separazione tra fase liquida e fase solida sarà quindi ad una altezza corrispondente alla pressione P_f del punto di fusione ad una data temperatura. Indicando con $h(T)$ l'altezza della colonna di liquido per una generica temperatura T avremo

$$P_f(T) = \rho_L g h(T)$$

Prendendo la derivata rispetto alla temperatura ed utilizzando l'equazione di Clapeyron abbiamo

$$\frac{dP_f}{dT} = \frac{\lambda}{T\left(\rho_L^{-1} - \rho_S^{-1}\right)} = \rho_L g \frac{dh}{dT} \tag{9.24.1}$$

Inoltre la massa deve essere conservata, per cui

$$\rho_L h(T) = \rho_S d\ell + \rho_L \left[h(T + dT) - d\ell\right]$$

dove $d\ell$ è la variazione della posizione verticale della separazione tra solido e liquido. Sviluppando al primo ordine in dT otteniamo

$$\frac{dh}{dT} = \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_L} \frac{d\ell}{dT}$$

e sostituendo nella (9.24.1) avremo

$$\frac{\lambda}{T} = -g\frac{(\rho_L - \rho_S)^2}{\rho_L \rho_S}\frac{d\ell}{dT} \tag{9.24.2}$$

Possiamo integrare separando le variabili

$$\int_{T_0}^{T_1} \lambda \frac{dT}{T} = -g\frac{(\rho_L - \rho_S)^2}{\rho_L \rho_S}\ell \tag{9.24.3}$$

ottenendo

$$\sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_S}} - \sqrt{\frac{\rho_S}{\rho_L}} = \sqrt{\frac{\lambda}{g\ell}\log\frac{T_0}{T_1}} \tag{9.24.4}$$

che è equivalente ad un'equazione di secondo grado in $\sqrt{\rho_S/\rho_L}$. Risolvendo e prendendo la sola soluzione accettabile (positiva) troviamo

$$\rho_S = \rho_L \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{g\ell}\log\frac{T_0}{T_1}} + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{4g\ell}\log\frac{T_0}{T_1}}\right]^2$$

Per $\Delta T/T_0 \ll 1$ possiamo semplificare e ottenere[7]

$$\boxed{\rho_S \simeq \rho_L \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta T}{T_0}\frac{\lambda}{g\ell}}\right)} \tag{9.24.5}$$

[7]Ipotizzando sin dall'inizio $\Delta T \ll T_0$ potevamo evitare di integrare, semplificando l'analisi.

9.25. Calori specifici di un gas di Van der Waals ⋆⋆⋆

Un gas di Van der Waals è descritto dall'equazione di stato

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Calcolare la differenza $c_P - c_V$ tra il calore specifico molare a pressione costante e quello a volume costante.

Soluzione

L'equazione di stato per il gas di Van der Waals è una relazione tra P, V e T che permette di calcolare la derivata parziale di una rispetto all'altra, calcolata mantenendo la terza costante. Dal primo principio della termodinamica abbiamo

$$dQ = dU + PdV$$

che dovremo valutare rispettivamente a volume e pressione costante. Il termine pdV non pone particolari problemi, ma dobbiamo avere informazioni sull'energia interna. Per ottenerle possiamo scegliere come variabili indipendenti T e V, e scrivere il differenziale dell'entropia nella forma

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T}\right] dV$$

ma dato che questo deve essere un differenziale esatto deve valere la relazione

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T}\right]$$

e sviluppando otteniamo

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \tag{9.25.1}$$

Riscriviamo adesso l'equazione di stato nella forma

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \tag{9.25.2}$$

che permette di calcolare facilmente i termini da inserire al membro destro della (9.25.1):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T\left(\frac{nR}{V - nb}\right) - \frac{nRT}{V - nb} + \frac{n^2 a}{V^2} \\ &= \frac{n^2 a}{V^2}\end{aligned}$$

CC BY NC SA

Integrando in V troviamo che deve essere

$$U(T,V) = -\frac{n^2 a}{V} + f(T)$$

dove $f(T)$ è una funzione arbitraria della sola temperatura. Troviamo subito che

$$c_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = \frac{1}{n}\frac{df}{dT}$$

mentre a pressione costante

$$\begin{aligned} dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV \\ &= nc_V dT + \left[\frac{an^2}{V^2} + \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}\right] dV \\ &= nc_V dT + \frac{nRT}{V-nb}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \end{aligned}$$

e quindi

$$c_P - c_V = \frac{RT}{V-nb}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Resta da calcolare la derivata parziale. Differenziando la (9.25.2) a pressione costante troviamo

$$0 = \frac{nR}{V-nb}dT + \left(\frac{2n^2 a}{V^3} - \frac{nRT}{(V-nb)^2}\right) dV$$

che permette di ottenere

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= \frac{nR}{V-nb}\left(\frac{nRT}{(V-nb)^2} - \frac{2n^2 a}{V^3}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{V-nb} - \frac{V-nb}{nRT}\frac{2n^2 a}{V^3}\right)^{-1} \\ &= \frac{RV^3(V-nb)}{RTV^3 - 2an(V-nb)^2} \end{aligned}$$

da cui il risultato finale

$$\boxed{c_P - c_V = R\frac{1}{1 - \frac{2an}{RTV^3}(V-nb)^2}} \tag{9.25.3}$$

CC BY NC SA

9.26. Raffreddare un corpo, scaldarne un altro ⋆⋆$\mathcal{S}$

Due corpi di capacità termica costante C sono inizialmente ad una temperatura T_i, e sono collegati mediante una macchina termica ciclica. Si vuole raffreddare il primo dei due corpi ad una temperatura finale $T_1 < T_i$, e si trova che per farlo è necessario fare un lavoro W.

1. Supponendo di conoscere W calcolare la temperatura T_2 del secondo corpo.
2. Supponendo che la macchina termica sia reversibile, calcolare $W = W_R$.
3. Se in realtà il lavoro necessario è $W = kW_R$, dove k è una costante data, calcolare la variazione di entropia del sistema. Può accadere che $k < 1$?

Soluzione[8]

Domanda 1 Se Q_1 è il calore estratto dal primo corpo, e Q_2 quello fornito al secondo, dal primo principio abbiamo

$$Q_2 - Q_1 = W$$

ma d'altra parte

$$\begin{aligned} Q_2 &= C\left(T_2 - T_i\right) \\ Q_1 &= -C\left(T_1 - T_i\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$W = C\left(T_1 + T_2 - 2T_i\right)$$

da cui

$$T_2 = \frac{W}{C} + 2T_i - T_1 \tag{9.26.1}$$

Domanda 2 Se la macchina è reversibile l'entropia del sistema non è cambiata. Quest'ultima si scrive come

$$dS = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2}$$

ed integrando

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_i}^{T_1} \frac{CdT'}{T'} + \int_{T_i}^{T_2} \frac{CdT'}{T'} \\ &= C \log \frac{T_1 T_2}{T_i^2} \end{aligned} \tag{9.26.2}$$

Quindi

$$T_2 = \frac{T_i^2}{T_1}$$

[8] Secondo esercizio scritto Fisica I del 10 settembre 2010.

CC BY NC SA

e

$$W_R = CT_i \left(\frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_1} - 2 \right) \equiv CT_i \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \tag{9.26.3}$$

con $x = T_1/T_i$.

Domanda 3 Mettendo insieme l'Equazione (9.26.1) e l'Equazione (9.26.2) otteniamo

$$x \left(\frac{kW_R}{CT_i} + 2 - x \right) = e^{\Delta S/C}$$

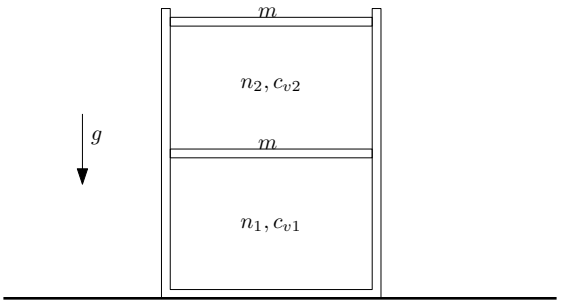
ossia

$$(k-1)(x-1)^2 = e^{\Delta S/C} - 1$$

Dato che $\Delta S \geq 0$, segue che $k \geq 1$. Infine

$$\Delta S = C \log \left[1 + (k-1)(x-1)^2 \right]$$

9.27. Recipiente a due scomparti ⋆⋆$\mathcal{S}$



Il recipiente in figura di sezione S è diviso in due parti da due setti scorrevoli di massa m. I due volumi sono occupati ciascuno da una mole di un gas perfetto monoatomico. Il setto superiore è impermeabile al calore, ed il sistema si trova inizialmente all'equilibrio (la pressione esterna è trascurabile) con entrambi i gas ad una temperatura T_0.

1. Determinare pressioni e volumi dei due gas nello stato iniziale.
2. Adesso anche il setto intermedio diviene impermeabile al calore, e si agisce reversibilmente su quello superiore fino a raddoppiare la pressione del gas nello scomparto superiore. Calcolare le nuove temperature dei due gas e dire di quanto è variata l'entropia del sistema.
3. Si permette adesso il passaggio di calore attraverso il setto intermedio, mantenendo bloccato quello superiore. Determinare la temperatura finale, e dire se è maggiore o minore di T_0. C'è stata variazione di entropia?

Soluzione[9]

Problema 1

Imponendo l'equilibrio meccanico abbiamo

$$\begin{aligned} P_{10} &= \frac{2mg}{S} \\ P_{20} &= \frac{mg}{S} \end{aligned}$$

e dalla legge dei gas perfetti otteniamo

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{RT_0}{P_{10}} = \frac{RT_0 S}{2mg} \\ V_2 &= \frac{RT_0}{P_{20}} = \frac{RT_0 S}{mg} \end{aligned}$$

[9] Secondo esercizio scritto Fisica 1 dell'8 febbrario 2012

CC BY NC SA

Problema 2

La trasformazione dei due gas è adiabatica, quindi l'entropia non cambia. Per quanto riguarda le temperature abbiamo ($c_v = 3/2R$, $c_p = 5/2R$, $\gamma = c_p/c_V = 5/3$)

$$\begin{aligned} T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{10}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{20}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Sappiamo che $P_2 = 2mg/S$ e $P_1 = 3mg/S$, quindi

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5} \simeq 1.18\, T_0 \\ T_2 &= T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 2^{2/5} \simeq 1.32\, T_0 \end{aligned}$$

Problema 3

L'energia del sistema

$$E = c_v \left(T_1 + T_2\right) + mg\frac{V_1}{S}$$

si conserva perchè durante l'evoluzione del sistema non ci sono forze esterne che fanno lavoro su di esso. Inoltre il volume totale $V_{tot} = V_1 + V_2$ non cambia. Abbiamo quindi

$$2c_v T_f + mg\frac{V_{1f}}{S} = c_v T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3} T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = kRT_0$$

dove per brevità abbiamo posto

$$\begin{aligned} kR &= c_v \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= R\left[\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \\ &\simeq 4.13\, R \end{aligned}$$

Dall'equilibrio meccanico tra i due scomparti otteniamo

$$\frac{RT_f}{V_{1f}} = \frac{RT_f}{(V_{tot} - V_{1f})} + \frac{mg}{S}$$

da cui

$$\left(V_{tot} - 2V_{1f}\right) T_f = \frac{mg}{RS} V_{1f} \left(V_{tot} - V_{1f}\right)$$

Sostituendo il volume ricavato dalla prima equazione

$$V_{1f} = \frac{SR}{mg}\left(kT_0 - 3T_f\right)$$

otteniamo un'equazione di secondo grado in T_f

$$R\left(V_{tot}-\frac{2S}{mg}kRT_0+\frac{4S}{mg}c_vT_f\right)T_f=(kRT_0-2c_vT_f)\left(V_{tot}-\frac{S}{mg}kRT_0+2\frac{S}{mg}c_vT_f\right)$$

Ricordando che

$$V_{tot}=\frac{3}{2}\frac{RT_0S}{mg}$$

possiamo riscrivere quest'ultima come

$$30\left(\frac{T_f}{T_0}\right)^2-4(4k-3)\frac{T_f}{T_0}+k(2k-3)=0$$

che ha le due soluzioni

$$T_{f1}=0.6\,T_0,\qquad T_{f2}=1.20\,T_0$$

Solo la seconda è però accettabile, dato che la prima corrisponde ad un volume

$$V_{f1}=\frac{SR}{mg}\left(kT_0-3T_f\right)\simeq 2.3\frac{RS}{mg}T_0$$

maggiore di quello totale a disposizione. Dato che la trasformazione del sistema è irreversibile, ci aspettiamo un aumento di entropia.

9.28. Massimo riscaldamento e raffreddamento ⋆⋆

Due corpi di identica capacità termica C, indipendente dalla temperatura, si trovano inizialmente alle temperature T_1 e T_2 differenti da quella T_0 dell'ambiente circostante, che può essere considerato un bagno termico. Calcolare

- il massimo aumento di entropia possibile per l'universo
- la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei due corpi a scelta
- la minima temperatura a cui è possibile portare uno dei due corpi a scelta

Soluzione

Indichiamo con Q_0 il calore assorbito dall'ambiente e con Q_1 e Q_2 quelli assorbiti dai due corpi in una trasformazione arbitraria. Dal primo principio segue che dovrà essere

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0 \tag{9.28.1}$$

La massima produzione di entropia si avrà con una trasformazione spontanea che porta l'universo in uno stato di equilibrio complessivo, con tutti e tre i corpi alla stessa temperatura T_0 dell'ambiente. Per essa avremo

$$dS = dS_0 + dS_1 + dS_2 = \frac{dQ_0}{T_0} + \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} \tag{9.28.2}$$

e quindi

$$dS = \frac{1}{T_0}\left(-dQ_1 - dQ_2\right) + \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} \tag{9.28.3}$$

Dato che per ciascun corpo $dQ = CdT$ questo si può anche scrivere nella forma

$$dS = -\frac{C}{T_0}\left(dT_1 + dT_2\right) + C\frac{dT_1}{T_1} + C\frac{dT_2}{T_2} \tag{9.28.4}$$

ed integrando

$$\Delta S = C\log\frac{T_0^2}{T_1T_2} - \frac{C}{T_0}\left(2T_0 - T_1 - T_2\right) \tag{9.28.5}$$

Per determinare la massima e la minima temperatura a cui è possibile portare uno dei due corpi consideriamo nuovamente la (9.28.4). Nella situazione finale uno dei due corpi (supponiamo si tratti di quello ad una temperatura iniziale T_2) sarà in equilibrio con l'ambiente. Allora

$$\Delta S = -\frac{C}{T_0}\left(T_1' - T_1 + T_0 - T_2\right) + C\log\frac{T_1'}{T_1} + C\log\frac{T_0}{T_2} \tag{9.28.6}$$

e quindi

$$\log\frac{T_1'}{T_1} - \frac{T_1'}{T_0} = \frac{\Delta S}{C} - \log\frac{T_0}{T_2} + \left(1 - \frac{T_2 + T_1}{T_0}\right) \tag{9.28.7}$$

CC BY NC SA

che possiamo scrivere nella forma più simmetrica

$$\log \frac{T_1'}{T_0} - \frac{T_1'}{T_0} = 1 + \frac{\Delta S}{C} - \log \frac{T_0^2}{T_1 T_2} - \frac{T_2 + T_1}{T_0} \tag{9.28.8}$$

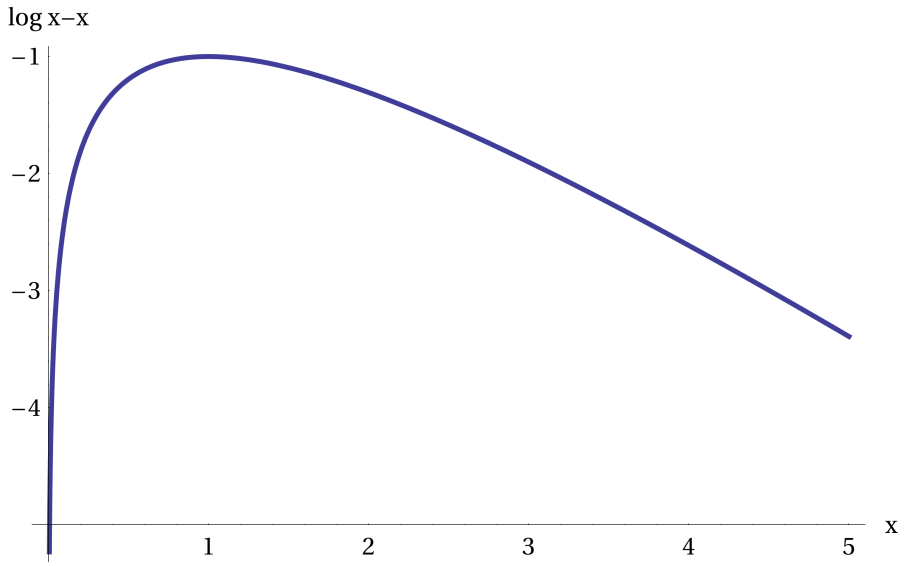


Figura 9.10.: La funzione $f(x) = \log x - x$

La funzione $f(x) = \log x - x$ (vedere Figura (9.10)) ha un unico massimo in $x = 1$ con $f(x) = -1$. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \tag{9.28.9}$$

Segue che sia il massimo che il minimo rapporto T_1'/T_0 si ha per $\Delta S = 0$, cioè nel caso di una trasformazione reversibile. Le relative temperature massime e minime saranno quindi le due soluzioni dell'equazione

$$\log \frac{T_1'}{T_0} - \frac{T_1'}{T_0} = 1 - \log \frac{T_0^2}{T_1 T_2} - \frac{T_2 + T_1}{T_0} \tag{9.28.10}$$

Notare che la massima produzione di entropia determinata precedentemente corrisponde a $T_1' = T_0$.

9.29. Lavoro estraibile da due corpi: studio grafico ⋆⋆

Due corpi di capacità termica costante C si trovano inizialmente alle temperature T_1 e T_2. Mediante una certa trasformazione termodinamica che non coinvolge altri sistemi termodinamici le temperature vengono portate ai valori finali rispettivamente T_{1f} e T_{2f}. Nel corso della trasformazione il sistema complessivo varia la sua entropia di ΔS e viene estratto un lavoro utile W.

Rappresentare nel piano T_{1f}, T_{2f} il luogo dei punti accessibili per un fissato valore di ΔS. Sempre sullo stesso diagramma rappresentare il luogo dei punti che corrispondono ad un fissato valore di W. Discutere i casi particolari che corrispondono al massimo lavoro estraibile ed a $W = 0$.

Soluzione

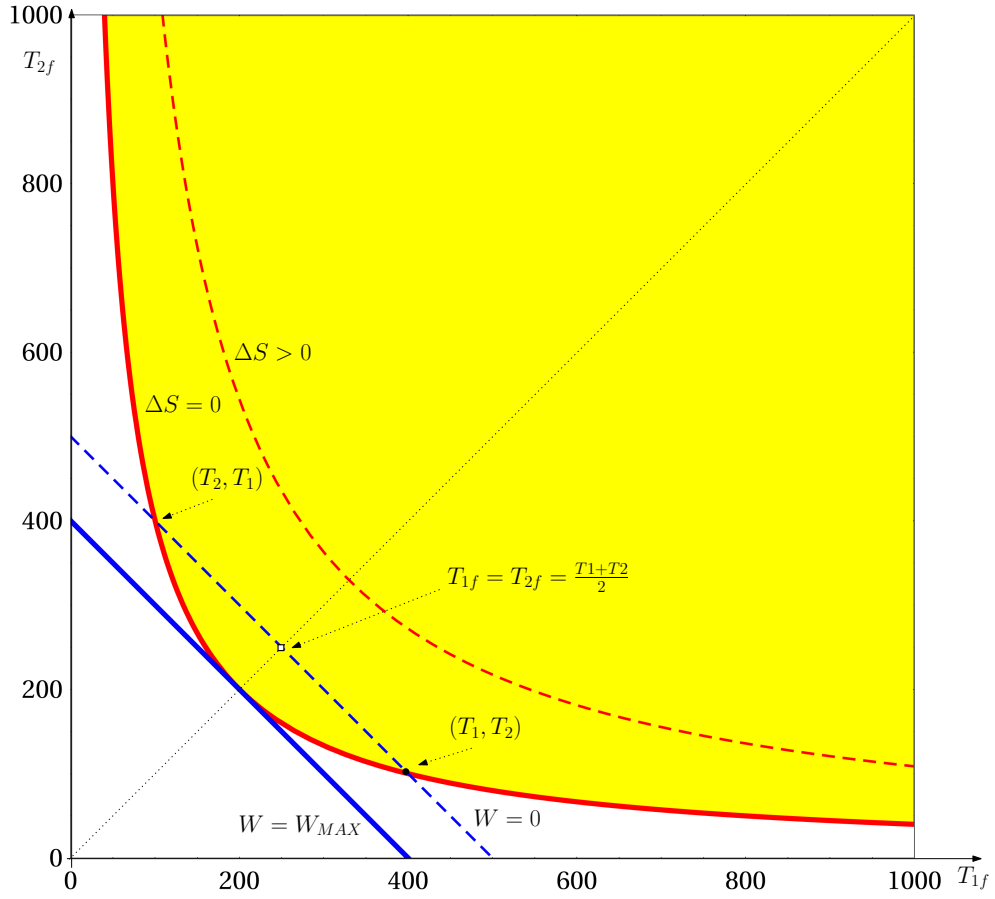


Figura 9.11.: Il piano corrispondente alle temperature finali T_{1f}, T_{2f} dei due corpi. Si è scelto $T_1 = 400$ e $T_2 = 100$. L'iperbole rossa unita corrisponde alle temperature finali accessibili in una trasformazione reversibile ($\Delta S = 0$). Per una trasformazione qualsiasi $\Delta S \geq 0$ e le temperature finali accessibili si trovano nella regione in giallo. Le rette blu corrispondono alle temperature finali accessibili per un dato lavoro estratto W.

La variazione di entropia dei due corpi durante la trasformazione è data da

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= C \log \frac{T_{1f}}{T_1} \\ \Delta S_2 &= C \log \frac{T_{2f}}{T_2} \end{aligned}$$

di conseguenza

$$\Delta S = C \log \frac{T_{1f} T_{2f}}{T_1 T_2}$$

da cui troviamo l'equazione che determina il luogo dei punti accessibili nel piano T_{1f}, T_{2f}:

$$T_{1f}T_{2f} = T_1T_2e^{\Delta S/C}$$

Si tratta di un'iperbole equilatera che passa per il punto corrispondente alla temperatura iniziale nel caso $\Delta S = 0$. Alcune iperboli sono rappresentate in Figura 9.11.

Per quanto riguarda i punti che corrispondono a un dato lavoro estratto W, detti Q_1 e Q_2 i calori ceduti ai due corpi durante la trasformazione, abbiamo

$$\begin{aligned} Q_1 &= C\left(T_{1f} - T_1\right) \\ Q_2 &= C\left(T_{2f} - T_2\right) \end{aligned}$$

e per la conservazione dell'energia deve essere $W + Q_1 + Q_2 = 0$ da cui troviamo

$$W = C\left(T_1 + T_2 - T_{1f} - T_{2f}\right)$$

Si tratta quindi di una retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, che intercetta l'asse $T_{1f} = 0$ in $T_{2f} = T_1 + T_2 - W/C$,

$$T_{2f} = -T_{1f} + T_1 + T_2 - \frac{W}{C}$$

Alcune di queste rette sono pure indicate in Figura 9.11. Gli stati finali possibili devono in ogni caso corrispondere a $\Delta S \geq 0$, che corrisponde alla regione gialla in figura.

Ad esempio quando $W = 0$ sono accessibili tutti i punti della retta blu tratteggiata nella regione gialla. Se anche $\Delta S = 0$ le temperature finali saranno quelle iniziali, oppure scambiate tra di loro, invece la massima produzione di entropia corrisponde a

$$T_{1f} = T_{2f} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

che è indicato in Figura 9.11 da un quadrato. Questo è ciò che si ottiene mettendo direttamente i corpi in contatto tra di loro e attendendo l'equilibrio.

All'aumentare di W la retta si sposta verso il basso: il massimo valore $W = W_{MAX}$ corrisponde alla retta tangente all'iperbole, cioè a

$$T_{1f} = T_{2f} = \sqrt{T_1T_2}$$

e

$$W_{MAX} = C\left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}\right)$$

CC BY NC SA

9.30. Adiabatica di un elastico ⋆⋆

Un elastico può essere descritto a livello macroscopico dalla sua energia interna U, dalla lunghezza ℓ, dalla temperatura T e dalla tensione τ. Supporremo che sia possibile scrivere l'energia interna nella forma

$$U = k\bar{\ell}T \tag{9.30.1}$$

e che valga

$$\tau = \gamma T\left(\ell - \bar{\ell}\right) \tag{9.30.2}$$

dove k, $\bar{\ell}$ e γ sono costanti positive opportunamente dimensionate. Determinare la forma di una trasformazione adiabatica reversibile (per $\ell > \bar{\ell}$) e rappresentarla nei piani $\tau - \ell$, $T - \ell$ e $T - S$.

Soluzione

Dalla primo principio della termodinamica abbiamo che

$$dQ = dU + dL$$

Nel caso in questione il lavoro fatto dall'elastico si scrive

$$dL = -\tau d\ell$$

dato che la forza applicata dall'elastico ad un suo estremo vale τ in modulo (per $\ell > \bar{\ell}$) ed è diretta in verso opposto allo spostamento. Quindi

$$dQ = k\bar{\ell}dT - \gamma T\left(\ell - \bar{\ell}\right)d\ell$$

da cui troviamo il differenziale dell'entropia

$$dS = \frac{dQ}{T} = k\bar{\ell}\frac{dT}{T} - \gamma\left(\ell - \bar{\ell}\right)d\ell$$

Questa espressione si può immediatamente integrare, ottenendo

$$S = k\bar{\ell}\log T - \frac{\gamma}{2}\left(\ell - \bar{\ell}\right)^2 + C$$

dove C è una costante di integrazione. Ma in un'adiabatica reversibile l'entropia resta costante, per cui la trasformazione nel piano $T-S$ si rappresenta come una retta verticale. Inoltre deve essere

$$T = \overline{T}\exp\left[\frac{\gamma\bar{\ell}}{2k}\left(\frac{\ell}{\bar{\ell}} - 1\right)^2\right] \tag{9.30.3}$$

dove $\overline{T}$ è una costante arbitraria che si può interpretare come temperatura dell'elastico alla lunghezza di riposo. Questa è la legge che lega T a ℓ rappresentata in Figura (9.12).

Scegliendo di misurare la temperatura in unità $\overline{T}$ e la lunghezza in unità $\bar{\ell}$ la curva è completamente caratterizzata dal parametro adimensionale $\Pi = \gamma\bar{\ell}/(2k)$. Come si vede l'elastico allungato si riscalda, tanto più rapidamente quanto più Π è grande.

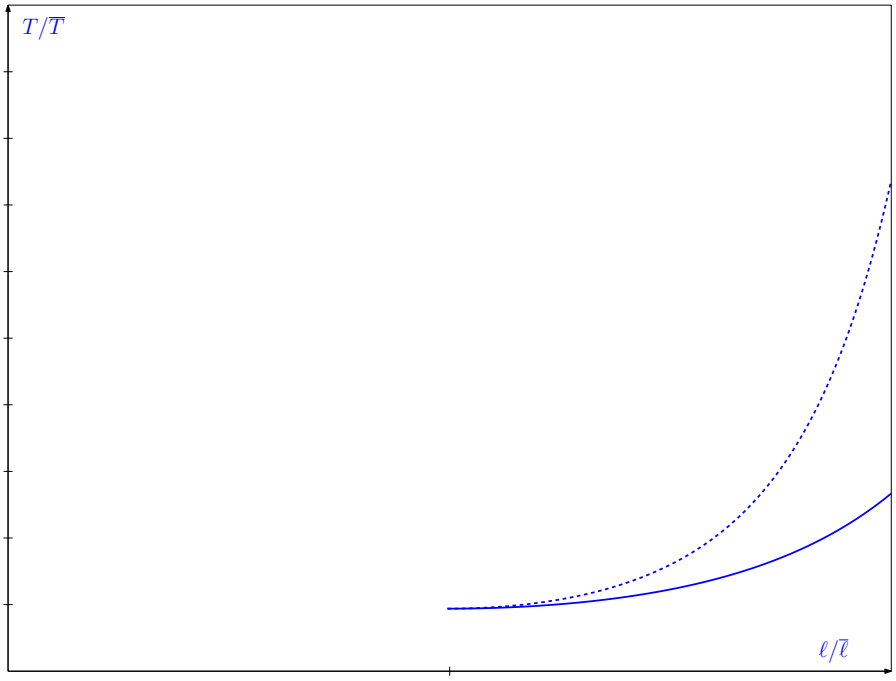


Figura 9.12.: La dipendenza della temperatura dalla lunghezza dell'elastico, per una trasformazione adiabatica reversibile (Eq. (9.30.3)). La temperatura è misurata in unità $\overline{T}$, e la lunghezza dell'elastico in unità della lunghezza a riposo $\overline{\ell}$. Si è scelto $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 1$ per la curva continua e $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 2$ per quella tratteggiata.

Veniamo alla dipendenza della tensione dall'allungamento. Usando l'Equazione (9.30.2) si può anche scrivere

$$\tau = 2k\overline{T}\frac{\gamma\overline{\ell}}{2k}\left(\frac{\ell}{\overline{\ell}} - 1\right)\exp\left[\frac{\gamma\overline{\ell}}{2k}\left(\frac{\ell}{\overline{\ell}} - 1\right)^2\right]$$

che è rappresentata nel piano $\tau - \ell$ in Figura 9.13

Anche in questo caso se misuriamo la tensione in unità $2k\overline{T}$ e la lunghezza in unità $\overline{\ell}$ la curva è completamente caratterizzata dal parametro Π. L'area sotto la curva cambiata di segno rappresenta il lavoro fatto dall'elastico durante la trasformazione, in unità $2k\overline{T}\overline{\ell}$.

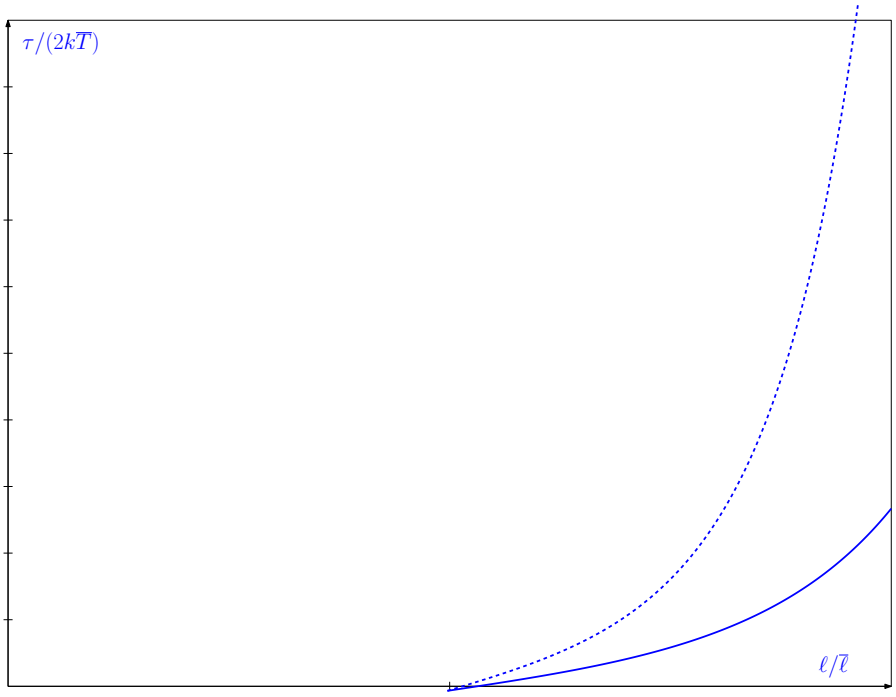


Figura 9.13.: La dipendenza della tensione dalla lunghezza dell'elastico, per una trasformazione adiabatica reversibile (Eq. (9.30.3)). La tensione è misurata in unità $2k\overline{T}$, e la lunghezza dell'elastico in unità della lunghezza a riposo $\overline{\ell}$. Si è scelto $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 1$ per la curva continua e $\gamma\overline{\ell}/(2k) = 2$ per quella tratteggiata.

9.31. Stati accessibili ⋆⋆

Due corpi hanno la stessa capacità termica C dipendente linearmente dalla temperatura, $C = bT$, e si trovano inizialmente alla stessa temperatura T_0,. Si dispone inoltre di un bagno termico di temperatura T_B. Si possono eseguire sul sistema trasformazioni termodinamiche arbitrarie, reversibili o irreversibili, facendo anche uso di macchine termiche. Gli scambi di calore devono però avvenire solo tra le tre parti (i due corpi e il bagno termico). Inoltre non si dispone inizialmente di lavoro utile da impiegare, anche se è possibile volendo estrarlo dal sistema, conservarlo e/o impiegarlo nuovamente.

Determinare nel piano T_1-T_2 la regione accessibile per il sistema partendo dallo stato iniziale. Localizzare in tale regione

- lo stato iniziale
- lo stato di massima entropia
- lo stato di massima e minima temperatura per uno dei due corpi, scelto arbitrariamente.

Soluzione

Indichiamo con Q_1, Q_2 e Q_B il calore ceduto rispettivamente ai due corpi e al bagno termico durante le trasformazioni. Dal primo principio abbiamo

$$Q_1 + Q_2 + Q_B + W = 0$$

dove W è il lavoro utile prodotto. Inoltre

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{T_0}^{T_1} kT dT = b\left(\frac{T_1^2}{2} - \frac{T_0^2}{2}\right) \\ Q_2 &= \int_{T_0}^{T_2} kT dT = b\left(\frac{T_2^2}{2} - \frac{T_0^2}{2}\right) \end{aligned}$$

L'entropia prodotta sarà

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{Q_B}{T_B} + \int \frac{dQ_1}{T_1} + \int \frac{dQ_2}{T_2} \\ &= \frac{Q_B}{T_B} + \int_{T_0}^{T_1} \frac{bT dT}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{bT dT}{T} \\ &= \frac{Q_B}{T_B} + b\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta S = -\frac{1}{T_B}\left(W + Q_1 + Q_2\right) + b\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right)$$

ossia

$$b\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right) - \frac{b}{2T_B}\left(T_1^2 + T_2^2 - 2T_0^2\right) = \Delta S + \frac{W}{T_B}$$

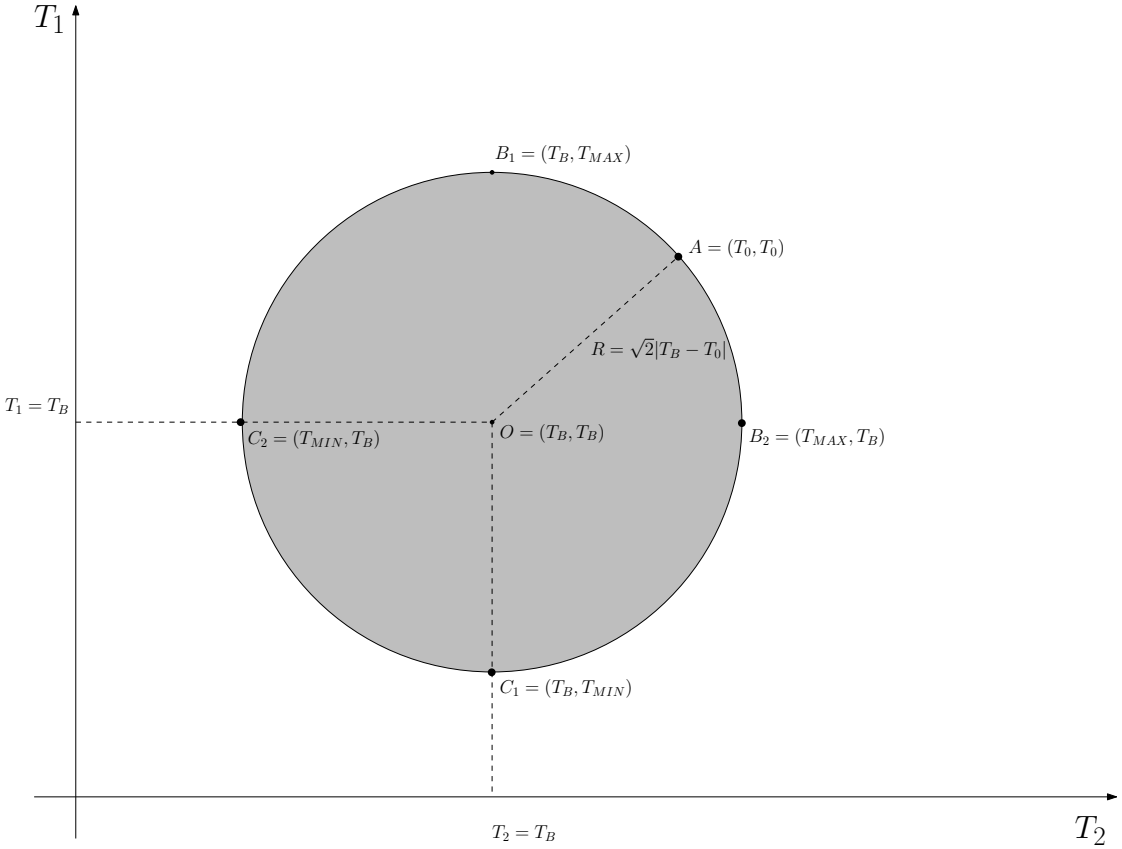


Figura 9.14.: L'insieme degli stati accessibili nel piano T_1-T_2. Si tratta di una circonferenza con centro nello stato accessibile di massima entropia $T_1 = T_2 = T_B$ e raggio $R = \sqrt{2}\,|T_B - T_0|$.

Affinchè lo stato sia accessibile dovrà essere $\Delta S \geq 0$ (per non violare il secondo principio della termodinamica) e $W \geq 0$ (non abbiamo a disposizione lavoro utile da fare sul sistema). La regione accessibile sarà dunque

$$2T_B\,(T_1 + T_2 - 2T_0) - \left(T_1^2 + T_2^2 - 2T_0^2\right) \geq 0$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$(T_1 - T_B)^2 + (T_2 - T_B)^2 \leq 2\,(T_B - T_0)^2$$

Si tratta quindi della circonferenza con centro in $(T_1, T_2) = (T_B, T_B)$ e raggio $\sqrt{2}\,|T_B - T_0|$ rappresentata in Figura 9.14.

Nello stato iniziale abiamo $T_1 = T_2 = T_0$, si tratta quindi del punto indicato con A.

Nello stato di massima entropia $T_1 = T_2 = T_B$: si tratta quindi del centro O della circonferenza.

Lo stato di massima temperatura per uno dei due corpi corrisponde a B_1 ($T_1 = T_{MAX}$ e $T_2 = T_B$) oppure a B_2 ($T_1 = T_B$ e $T_2 = T_{MAX}$) a seconda del corpo scelto. In entrambi

i casi

$$T_{MAX} = T_B + \sqrt{2}\,|T_B - T_0|$$

Analogamente lo stato di minima temperatura per uno dei due corpi corrisponde a C_1 ($T_1 = T_{MIN}$ e $T_2 = T_B$) oppure a B_2 ($T_1 = T_B$ e $T_2 = T_{MIN}$), con

$$T_{MIN} = T_B - \sqrt{2}\,|T_B - T_0|$$

9.32. Riscaldamento massimo di un corpo ⋆⋆

Un corpo ha una capacità termica C e si trova inizialmente ad una temperatura T_0,. Si dispone inoltre di un bagno termico di temperatura T_B. Si possono eseguire sul sistema trasformazioni termodinamiche arbitrarie, reversibili o irreversibili, facendo anche uso di macchine termiche. Gli scambi di calore devono però avvenire solo tra le due parti (i due corpi e il bagno termico). Inoltre non si dispone inizialmente di lavoro utile da impiegare, anche se è possibile volendo estrarlo dal sistema, conservarlo e/o impiegarlo nuovamente.

Determinare la massima temperatura raggiungibile dal corpo, discutendo i casi $T_0 < T_b$ e $T_0 > T_b$.

Soluzione

Prima di eseguire calcoli dettagliati consideriamo qualitativamente la situazione. Supponiamo che inizialmente $T_0 > T_b$. Chiaramente non sarà possibile riscaldare ulteriormente il corpo, dato che se questo fosse possibile allora esisterebbe una trasformazione termodinamica capace unicamente di trasferire calore da un corpo più freddo ad uno più caldo. Se $T_0 < T_b$ potremmo anzitutto pensare di mettere in contatto bagno termico e corpo, portando quest'ultimo alla temperatura T_b. In realtà è possibile fare meglio: inizialmente si può trasferire reversibilmente del calore dal bagno al corpo, ottenendo del lavoro utile. Avremo a questo punto portato nuovamente il corpo a T_b, e potremo utilizzare il lavoro ottenuto per spostare ulteriormente calore dal bagno al corpo ottenendo una temperatura finale $T_f > T_b$. Veniamo adesso ad una analisi dettagliata.

Durante le trasformazioni verrà ceduto complessivamente un calore Q_c al corpo, e Q_b al bagno termico. Al termine disporremo eventualmente di un lavoro estratto W. Dal primo principio abbiamo

$$Q_c + Q_b + W = 0 \tag{9.32.1}$$

Inoltre possiamo scrivere

$$Q_c = \int_{T_0}^{T_f} C dT = C\left(T_f - T_0\right) \tag{9.32.2}$$

L'aumento di entropia del sistema sarà dato da

$$\Delta S = \int \frac{dQ_c}{T} + \int \frac{dQ_b}{T_b}$$

dove il primo termine rappresenta la variazione di entropia del corpo e il secondo quella del bagno termico. Da $dQ_c = CdT$ otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_0}^{T_f} \frac{C}{T} dT + \frac{Q_b}{T_b} \\ &= C \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{Q_b}{T_b} \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$Q_b = T_b \Delta S - C T_b \log \frac{T_f}{T_0} \tag{9.32.3}$$

Sostituendo la (9.32.2) e la (9.32.3) nella (9.32.1) otteniamo

$$\frac{T_f}{T_b} - \log \frac{T_f}{T_b} = \frac{T_0}{T_b} - \log \frac{T_0}{T_b} - \frac{W}{CT_b} - \frac{\Delta S}{C}$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$F\left(\frac{T_f}{T_b}\right) = F\left(\frac{T_0}{T_b}\right) - \frac{W}{CT_b} - \frac{\Delta S}{C} \tag{9.32.4}$$

con $F(x) = x - \log x$. Ci interessano i valori di T_f che verificano l'espressione precedente. $F(x)$ ha un unico minimo in $x = 1$, cioè per $T_f = T_b$ (vedere Figura 9.15). Al variare della costante al secondo membro avremo quindi due soluzioni oppure nessuna. Se le soluzioni esistono, la maggiore tra le due crescerà al crescere del valore del membro destro. Quindi la temperatura maggiore si otterrà per $W = 0$ e $\Delta S = 0$. In questo caso l'equazione diviene

$$\frac{T_f}{T_b} - \log \frac{T_f}{T_b} = \frac{T_0}{T_b} - \log \frac{T_0}{T_b}$$

ed una soluzione è chiaramente $T_f = T_0$.

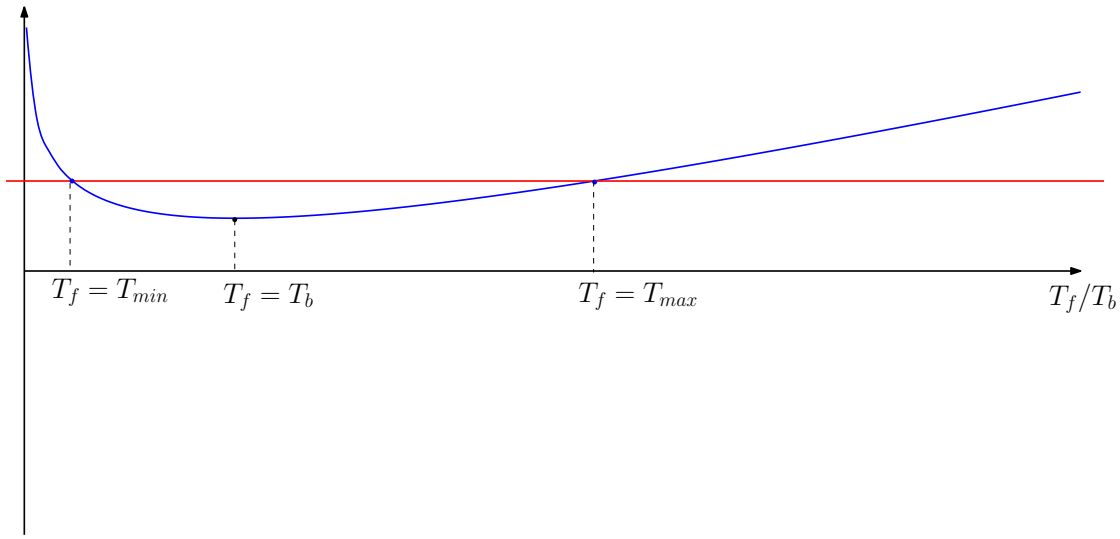


Figura 9.15.: La funzione $F(T_f/T_b)$ (in blu) confrontata con un possibile valore della costante $F(T_0/T_b) - W/(CT_b) - \Delta S/C$ a secondo membro nell'Equazione (9.32.4) (in rosso). Come discusso nel testo, la funzione ha un minimo per $T_f = T_b$. Se la costante è abbastanza grande si hanno due intersezioni, che corrispondono alle possibili temperature massime e minime finali del corpo.

Possiamo concludere che se $T_0 < T_b$ la seconda soluzione corrisponderà ad un valore $T_f > T_b$, e quindi in questo caso è possibile portare la temperatura del corpo ad un valore maggiore di quello del bagno termico. Se invece $T_0 > T_b$ la seconda soluzione darà $T_f < T_b < T_0$. In questo caso non sarà possibile aumentare la temperatura del corpo. Entrambe le possibilità confermano la discussione qualitativa iniziale.

9.33. Dummy