UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA ”LA SAPIENZA”

- 15 Giugno 2006 -

CTF

Matematica - Seconda Parte

Codice Compito: - Numero d’Ordine

D. 1 Si disegni un possibile grafico di una funzione continua, che abbia simultaneamente le seguenti proprieta’ a) e’ definita in tutto R, b) f(0) = -2, f(1) = 0, f(-1) = 1, c) f’(0) = 0, f’(1) = 1, f’(-1) = -1, d) $f''(x) < 0$ per $x > 1$ e) il limite per x che tende a infinito di f(x) e’ uguale a 3.

D. 2 Si disegni un possibile grafico di una funzione continua, che abbia simultaneamente le seguenti proprieta’ a) e’ definita in tutto R, b) f(0) = 1, f(2) = -1, f(-2) = 0, c) f’(0) = 0, f’(2) = -1/2, f’(-2) = 1, d) $f''(x) > 0$ per $x < -2$ e) il limite per x che tende a infinito di f(x) e’ uguale a -2.

D. 3 Si trovino opportuni coefficienti a, b, c, d del polinomio $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$ in modo che la funzione da esso rappresentata abbia un flesso orizzontale nel punto (0, 1) e abbia un solo minimo, nel punto (1, 0).

D. 4 E’ data la funzione polinomiale $y = x^3 + bx^2 + cx + d$. Si dica quale relazione deve valere fra i coefficienti b e c affinche’ essa non ammetta ne’ massimo ne’ minimo. Data la funzione $y = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, si verifichi che non soddisfa la condizione precedente. Determinarne lo zero (cioe’ la soluzione dell’equazione $x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$) approssimato alla prima cifra decimale.

D. 5 Il polinomio $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$ tende a +∞ per x che tende a + ∞. Ha un flesso orizzontale nel punto (0; 1) e ha un solo minimo, nel punto (-1; 0). a) si tracci un grafico corrispondente alla descrizione data b) anche senza determinare l’equazione del polinomio, e’ possibile rispondere alle seguenti domande: - Quali sono le intersezioni del polinomio con l’asse x? - Per quali valori di x il polinomio e’ positivo? - A cosa tende il polinomio quando x tende a - ∞? - Ci sono punti di massimo?

D. 6 Si trovino opportuni coefficienti a, b, c, d del polinomio $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$, in modo che la funzione da esso rappresentata abbia un flesso orizzontale nel punto (0, 1), e abbia un solo minimo, nel punto (-1, 0).

D. 7 Data la funzione $y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+4}$
a) Si studino: insieme di definizione, positivita’, intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico

D. 8 Data la funzione $y = \frac{1}{(cosx-1)^2}$
a) Si studino: insieme di definizione, positivita’, intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico nell’intervallo $-2\pi < x < 2\pi$

D. 9 Data la funzione $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$
a) Si studino: insieme di definizione, positivita’, intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determinino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico.

D. 10 Data la funzione $y = \frac{3(x+1)^2}{x^2-4}$
a) Si studino: insieme di definizione, positivita’, intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti (verticali o orizzontali) c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico

D. 11 Data la funzione $y = \frac{3(x-1)^2}{x^2-4}$
a) Si studino: insieme di definizione, positivita’, intersezioni con gli assi. b) Se ne determinino gli asintoti. c) Se ne determino i punti di massimo o di minimo. d) Se ne tracci il grafico

D. 12 Un ambiente e’ mantenuto alla temperatura costante di 50 gradi; in esso un oggetto si raffredda in 1 ora dalla temperatura iniziale di 200^o a 100^o (si tenga presente la legge di Newton sul raffreddamento dei corpi). a) qual’e’ l’equazione della funzione che descrive l’andamento della temperatura dell’oggetto? Se ne descriva l’andamento. c) qual’e’ il valore di stabilita’ della funzione? b) in quanto tempo l’oggetto raggiungera’ una temperatura di 65^o?

D. 13 Un ambiente e’ mantenuto alla temperatura costante di 100 gradi; in esso un oggetto si riscalda in 1 ora dalla temperatura iniziale di 20^o a 50^o (si tenga presente la legge di Newton sul raffreddamento dei corpi). a) qual’e’ l’equazione della funzione che descrive l’andamento della temperatura dell’oggetto? c) qual’e’ il valore di stabilita’ della funzione? b) in quanto tempo l’oggetto raggiungera’ una temperatura di 30^o?

D. 14 Si estrae a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane. a) Si considerino gli eventi E ”Non esce bastoni”, e F ”Esce una figura (Fante, Re o Cavallo)”. Si calcoli P(E unione F), P(E/F), P(F/E) e si dica se E e F sono indipendenti o meno. b) Estraendo a caso 2 carte dallo stesso mazzo, qual’e’ la probabilita’ che siano 2 carte di bastoni?

D. 15 Si estrae a caso una carta da un mazzo di 52 carte francesi. a) Si considerino gli eventi E ”Non esce Fiori”, e F ”Esce un numero tra 1 e 10”. Si calcoli P(E unione F), P(E/F), P(F/E) e si dica se E e F sono indipendenti o meno. b) Estraendo a caso 4 carte dallo stesso mazzo, qual’e’ la probabilita’ che siano 4 carte di fiori?

D. 16 Si estrae a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane. a) Si considerino gli eventi E ”Escono Spade o Bastoni”, e F ”Escono un asso, un tre un Re o un Cavallo”. Si calcoli P(E unione F), P(E/F), P(F/E) e si dica se E e F sono indipendenti o meno. b) Estraendo a caso 4 carte dallo stesso mazzo, qual’e’ la probabilita’ che siano 4 carte di spade?

D. 17 Un datore di lavoro vuole distribuire un premio di produzione di 150 000 Euro fra i suoi 100 dipendenti. Deve optare fra due possibilita': a) Dare 2 000 Euro a testa ai 50 dipendenti migliori, e 1 000 Euro a testa agli altri; b) Dare 4 000 Euro ai 25 dipendenti migliori, 1000 Euro ad altri 50 dipendenti buoni, e niente agli altri. c) Dare 1500 Euro a ciascun dipendente Si calcolino per le tre possibili distribuzioni: la media aritmetica, la mediana, la distanza interquartile e lo scarto quadratico medio.

D. 18 Un certo farmaco ha un tasso di smaltimento di 0,8 (80 %) rispetto alla quantita' presente nel sangue il giorno precedente. Ogni giorno viene somministrata poi una nuova dose di 2 mg. a) Si scriva l'equazione differenziale corrispondente, e la si risolva sapendo che al giorno 0 la quantita' di farmaco nel sangue e' di 4 mg. b) Si disegni il grafico della funzione ottenuta. c) Si calcoli la quantita' di farmaco presente nel sangue dopo 3 giorni. d) Qual'e' il valore di stabilita', ossia il valore a partire dal quale la quantita' di farmaco nel sangue non aumenta o diminuisce?

D. 19 Un certo farmaco ha un tasso di smaltimento di 0,5 (50 %) rispetto alla quantita' presente nel sangue il giorno precedente. Ogni giorno viene inoltre somministrata una nuova dose di 2 mg. a) Si scriva l'equazione differenziale corrispondente, e la si risolva sapendo che al giorno 0 la quantita' di farmaco nel sangue e' di 5 mg. b) Si disegni il grafico della funzione ottenuta. c) Si calcoli la quantita' di farmaco presente nel sangue dopo tre giorni. d) Qual'e' il valore di stabilita', ossia il valore a partire dal quale la quantita' di farmaco nel sangue non aumenta o diminuisce?

D. 20 Una discoteca regala ad un preside 100 biglietti omaggio da distribuire fra i 100 studenti dell'ultimo anno. Il preside pensa alle seguenti possibilita': -dare un biglietto a ciascuno studente -dare 2 biglietti ai 25 studenti piu' meritevoli, 1 biglietto a 50 studenti medi, e 0 agli altri. -dare 4 biglietti ai 25 studenti piu' meritevoli e 0 agli altri. Per ciascuna distribuzione si calcolino: Media aritmetica, mediana, intervallo di variazione, distanza interquartile e scarto quadratico medio.

D. 21 Data la funzione $y = 2x^2 + 2$ a) approssimare l'area del trapezoide racchiuso tra la curva, l'asse x e le rette x = 1 e x = 6, dividendo la base in 5 intervallini b) calcolare la stessa area servendosi dell'integrale definito. c) calcolare l'area tra le due funzioni $y = 2x^2 + 2$ e $y = -2x^2 + 6$

D. 22 Sono state rilevate, in un esperimento, le seguenti coppie di dati (x; y): (4; 3), (1; 6), (2; 1), (3; 5). Si traccino tali punti su un diagramma cartesiano; si determini la retta di regressione e la si tracci sul diagramma; si calcoli il valore di y fornito da tale retta per x = 10; si calcoli il coefficiente di correlazione.

D. 23 Le altezze di un gruppo di 1000 soldati sono distribuite secondo una gaussiana con media 175 cm e scarto quadratico medio s = 5 cm. Le divise sono disponibile in 4 taglie: A: per individui di altezza $\leq$170 cm B: per individui di altezza tra 170 e 175 C: per individui di altezza tra 175 e 180 D: per individui di altezza $\geq$ 180. Stimate il numero di divise delle varie taglie occorrenti. Si scirva l'equazione della gaussiana che descrive la distribuzione delle altezze.

D. 24 Lanciando due volte un dado: a) qual'e' la probabilita' che escano due numeri pari? b) qual'e' la probabilita' che la somma delle facce sia 4? c) qual'e' la probabilita' che la somma delle facce sia 4, sapendo che al primo lancio non e' uscito ne' il numero 5 ne' il numero 6?

D. 25 E' data la funzione $y = e^{-cosx}$ a) Se ne descriva l'andamento, per punti; b) Si approssimi l'area compresa tra la funzione e l'asse x nell'intervallo $(0; 2\pi)$, dividendo l'intervallo in quattro parti.

D. 26 Lanciando due volte un dado: a) qual'e' la probabilita' che escano due numeri il cui prodotto e' 12 ? b) qual'e' la probabilita' che la somma delle facce sia 5? c) qual'e' la probabilita' che la somma delle facce sia 5, subordinata al fatto che al primo lancio non e' uscito il numero 1?

D. 27 Data la funzione $y = x^2 + 3$. a) approssimare l'area del trapezoide racchiuso tra la curva, l'asse x e le rette x = 1 e x = 6, dividendo la base in 5 intervallini, b) calcolare la stessa area servendosi dell'integrale definito. c) calcolare l'area compresa tra la funzione data e $y = -x^2 + 5$

D. 28 Si considerino, su una popolazione di 4 individui, due caratteri, x e y, che assumono i seguenti valori (2,3), (2,-1), (6,3), (6,5) (In ogni coppia il primo valore indica il valore del carattere x su un individuo e il secondo valore indica il valore del carattere y sullo stesso individuo). Scrivere l'equazione della retta di regressione che approssima l'andamento della nuvola di punti, tracciarne il grafico, e calcolare la distanza orizzontale tra il punto di ordinata 5 della retta e il valore vero. Si calcoli il coefficiente di correlazione.

D. 29 Si dica quale deve essere il coefficiente A della funzione $f(x) = Ae^{-2(x-1)^2}$ affinche' essa sia interpretabile come curva di Gauss, determinando i valori della media μ e dello scarto quadratico σ. Si approssimi per rettangoli o per trapezi l'area racchiusa tra la funzione f(x) e l'asse x nell'intervallo (1/2; 3/2). Si confronti il valore dell'area trovato con l'area racchiusa sotto la gaussiana nello stesso intervallo, servendosi delle tavole del libro (Tab 10.1), e si dica qual'e' (circa) l'errore dell'approssimazione.

D. 30 Si dica quale deve essere il coefficiente A della funzione $f(x) = Ae^{-\frac{1}{8}(x-2)^2}$ affinche' essa sia interpretabile come curva di Gauss, determinando i valori della media μ e dello scarto quadratico σ. Si approssimi per rettangoli o per trapezi l'area racchiusa tra la funzione f(x) e l'asse x nell'intervallo (0; 4). Si confronti il valore dell'area trovato con l'area racchiusa sotto la gaussiana nello stesso intervallo, servendosi delle tavole del libro (Tab 10.1), e si dica qual'e' (circa) l'errore dell'approssimazione.

D. 31 Si dica quale deve essere il coefficiente A della funzione $f(x) = Ae^{-2(x-3)^2}$ affinche' essa sia interpretabile come curva di Gauss, determinando i valori della media μ e dello scarto quadratico σ. Si approssimi per rettangoli o per trapezi l'area racchiusa tra la funzione f(x) e l'asse x nell'intervallo (5/2; 7/2). Si confronti il valore dell'area trovato con l'area racchiusa sotto la gaussiana nello stesso intervallo, servendosi delle tavole del libro (Tab 10.1), e si dica qual'e' (circa) l'errore dell'approssimazione.

D. 32 Sono date le seguenti curve: $y = e^{2x}$; $y = x^2 - \frac{17}{4}x + 1$; x = k. a) determinare il massimo valore k per cui la regione di piano compresa tra le tre curve sia tutta nel 1¡ quadrante b) calcolare, o approssimare, l'area di tale regione (per il valore di k trovato)

D. 33 Una prova d'esame e' formata a 10 domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere la risposta corretta fra 5 alternative proposte. Si calcoli la probabilita' che, rispondendo a caso alle dieci domande, le risposte risultino a) tutte sbagliate b) nove sbagliate ed una sola corretta c) otto sbagliate e due corrette Si dica se la probabilita' che ci siano almeno tre risposte corrette e' maggiore o minore del 50%, motivando la risposta.

D. 34 E' data la funzione $y = Ae^{-\frac{1}{50}(x-34)^2}$. Determinare il valore di A affinche' la funzione sia una gaussiana. Determinarne quindi la media aritmetica μ e lo scarto quadratico medio σ. Servendosi della tabella di pag. 215, si fornisca a) un valore per l'area sottesa alla funzione nell'intervallo (meno infinito; 44). b) un valore approssimato per l'area sottesa alla funzione nell'intervallo (26,5; 41,5).

D. 35 E' data la funzione $y = Ae^{-\frac{1}{18}(x-72)^2}$. Determinare il valore di A affinche' la funzione sia una gaussiana. Determinarne quindi la media aritmetica μ e lo scarto quadratico medio σ. Servendosi della tabella (Tab 10.1), si fornisca a) un valore per l'area sottesa alla funzione nell'intervallo (69; 78). b) un valore approssimato per l'area sottesa alla funzione nell'intervallo (67; 77).

D. 36 E' data la funzione $y = Ae^{-\frac{1}{128}(x-67)^2}$. Determinare il valore di A affinche' la funzione sia una gaussiana. Determinarne quindi la media aritmetica μ e lo scarto quadratico medio σ. Servendosi della tabella (Tab 10.1), si fornisca a) un valore per l'area sottesa alla funzione nell'intervallo (43; infinito). b) un valore approssimato per l'area sottesa alla funzione nell'intervallo (66; 68).

D. 37 Sia data la funzione $y = Ae^{-\frac{9}{2}(x-2)^2}$. Si determini il valore di A affinche' la funzione sia una gaussiana. Si approssimi poi con un trapezio l'area racchiusa tra la funzione e l'asse x, nell'intervallo fra le ascisse del suo massimo e di un suo punto di flesso. Si valuti l'errore percentuale di tale approssimazione rispetto al valore della tabella (Tab 10.1).

D. 38 Un test diagnostico per la malattia M ha specificita' P(T^-/M^-) = 80%, e sensibilita' P(T^+/M^+) = 90%. Su 10000 soggetti, il test ha dato esito negativo in 7500 casi. a) qual'e', all'incirca, la prevalenza della malattia? b) detti veri negativi i soggetti sani per i quali il test ha dato esito negativo, ovvero $T^- \bigcap M^-$, quanti veri negativi ci possiamo attendere? c) Un individuo ha avuto testi positivo, qual'e' la probabilita' che abbia effettivamente la malattia?

D. 39 Un test diagnostico per la malattia M ha specificita' P(T^-/M^-) = 90%, e sensibilita' P(T^+/M^+) = 80%. Su 10000 soggetti, il test ha dato esito negativo in 7500 casi. a) qual'e', all'incirca, la prevalenza della malattia? b) detti veri negativi i soggetti sani per i quali il test ha dato esito negativo, ovvero $T^- \bigcap M^-$, quanti veri negativi ci possiamo attendere? c) Un individuo ha avuto testi positivo, qual'e' la probabilita' che abbia effettivamente la malattia?

D. 40 In un lago di pesca sportiva i pesci si riproducono ad un tasso del 3% alla settimana. Ogni settimana vengono pescati 36 kg di pesce. Si supponga che al tempo t=0 ci siano 200 kg di pesce nel lago. Si scriva l'equazione differenziale che descrive il problema. Qual e' il valore di stabilita'? Si descriva l'andamento delle funzione che risolve il problema. La quantita' di pesci nel lago aumenta o diminuisce? Se aumenta, dopo quanto tempo raddoppia? Se diminuisce, dopo quanto tempo il lago e' vuoto?

D. 41 In un lago di pesca sportiva i pesci si riproducono ad un tasso del 3% alla settimana. Ogni settimana vengono pescati 36 kg di pesce. Si supponga che al tempo t=0 ci siano 100 kg di pesce nel lago. Si scriva l'equazione differenziale che descrive il problema. Qual e' il valore di stabilita'? Si descriva l'andamento delle funzione che risolve il problema. La quantita' di pesci nel lago aumenta o diminuisce? Se aumenta, dopo quanto tempo raddoppia? Se diminuisce, dopo quanto tempo il lago e' vuoto?