



ELETTROTECNICA

Principi ed applicazioni di Ingegneria Elettrica

Corso di Laurea in Ingegneria Civile (6 CFU)

Lezione 06 – *Dalle condizione stazionarie a quelle dinamiche*



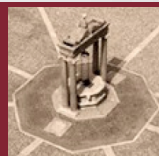
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Prof. Alberto Geri

*Dipartimento di Ingegneria Astronautica, Elettrica ed Energetica
Area Ingegneria Elettrica - Via delle Sette Sale n° 12/b, Roma
T 06 44585.534/540 F 06 4883235 alberto.geri@uniroma1.it*

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- Modellazione di componenti ed effetti capacitivi
 - La capacità
 - Il condensatore
 - Il modello zero-dimensionale
- Modellazione di componenti ed effetti induttivi
 - Le principali definizioni
 - L'auto e la mutua induzione
 - Il modello zero-dimensionale
- I circuiti elettrici in condizioni dinamiche
 - L'analogia tra i campi statici
 - I circuiti elettrici in condizioni stazionarie
 - Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

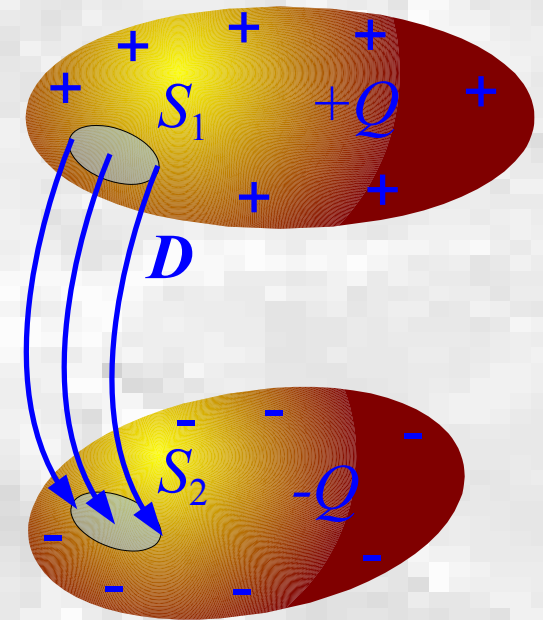
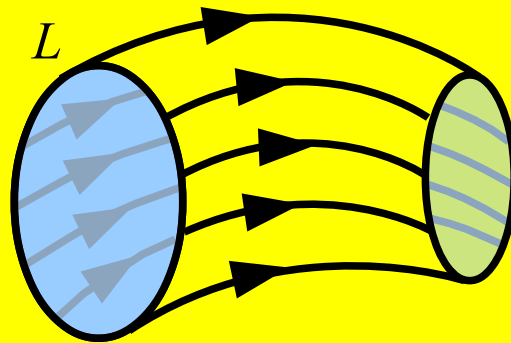


Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... i tubi di flusso di D

- Si consideri ora un tubo di flusso di D con origine in un conduttore con carica positiva, e che termina in un conduttore con carica negativa.

Si definisce tubo di flusso lo spazio tubolare delimitato dalle linee di forza passanti per ogni punto di una curva chiusa L che non sia essa stessa una linea di forza.



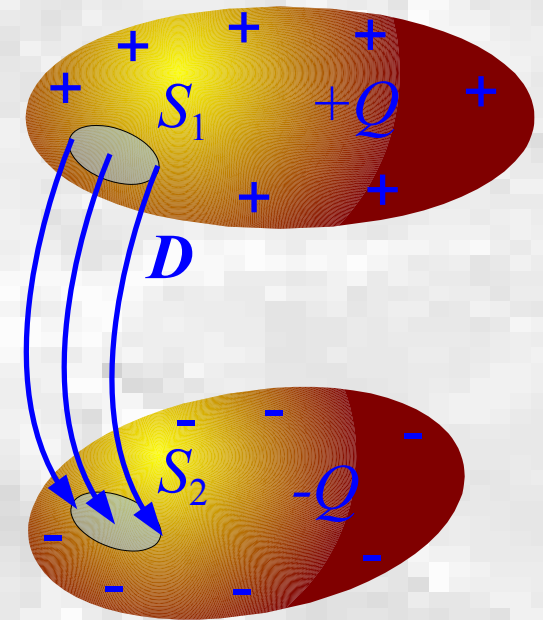
Sistema elettrodotico



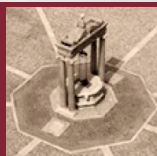
Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... le superfici corrispondenti

- In corrispondenza delle superfici S_1 ed S_2 (**superfici corrispondenti**), l'induzione elettrica D è discontinua, quindi, per quanto già visto, devono essere presenti due distribuzioni superficiali di carica elettrica, δ_1 e δ_2 .
- Si può agevolmente dimostrare, partendo dalla prima equazione di Maxwell, che le quantità di carica elettrica, q_1 e q_2 , presenti sulle due superfici corrispondenti sono uguali ed opposte (i.e., $q_1 = +q$ e $q_2 = -q$).



$$\underbrace{\iint_{S_1} \delta_1 ds}_{+q} = - \underbrace{\iint_{S_2} \delta_2 ds}_{-q}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

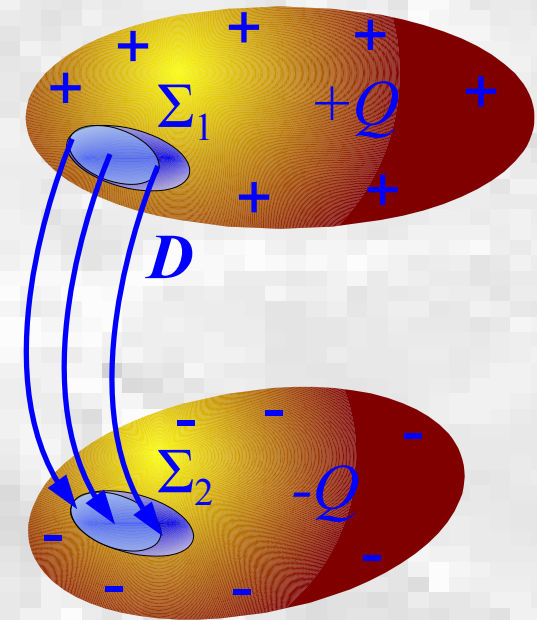
La capacità ... le superfici corrispondenti

- Si consideri ora un tubo di flusso di \mathbf{D} in un conduttore. Dalla prima equazione di Maxwell

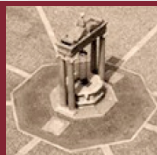
$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iiint_V \rho dv$$
 Discende che se indichiamo con V il volume delimitato dalla superficie laterale del tubo di flusso e dalle due superfici, Σ_1 e Σ_2 , che penetrano nei conduttori si ha

$$0 = \iint_{S_1} \delta_1 ds + \iint_{S_2} \delta_2 ds$$

$$\iint_{S_1} \delta_1 ds = - \iint_{S_2} \delta_2 ds = q$$
 Essendo il flusso di \mathbf{D} attraverso tale superficie identicamente nullo (nei conduttori infatti $\mathbf{D} = 0$), le cariche superficiali sono uguali ed opposte.



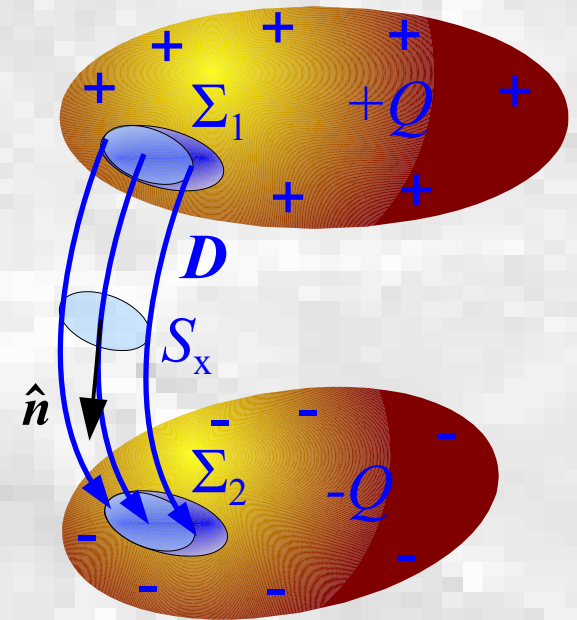
$$\underbrace{\iint_{S_1} \delta_1 ds}_{+q} = - \underbrace{\iint_{S_2} \delta_2 ds}_{-q}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... le superfici corrispondenti

- Si consideri ora un tubo di flusso di \mathbf{D} .
Dalla prima equazione di Maxwell
 - § All'esterno dei conduttori essendo
 - $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
 - v il flusso di \mathbf{D} assume lo stesso valore
 - k attraverso ogni sezione trasversale S_x
 - s del tubo di flusso, infatti
 - c $\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iiint_V \rho dv$
 - 0
 - j $\iint_{S_x} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_{S_1} \delta_1 ds = q$
 - E Avendo indicato con S la superficie Σ_1 ,
 - s la superficie laterale del tubo di flusso
 - c fino alla sezione S_x e la sezione S_x .



$$\underbrace{\iint_{S_1} \delta_1 ds}_{+q} = - \underbrace{\iint_{S_2} \delta_2 ds}_{-q}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... le superfici corrispondenti

- Si consideri ora un tubo di flusso di

Dalla prima equazione di Maxwell

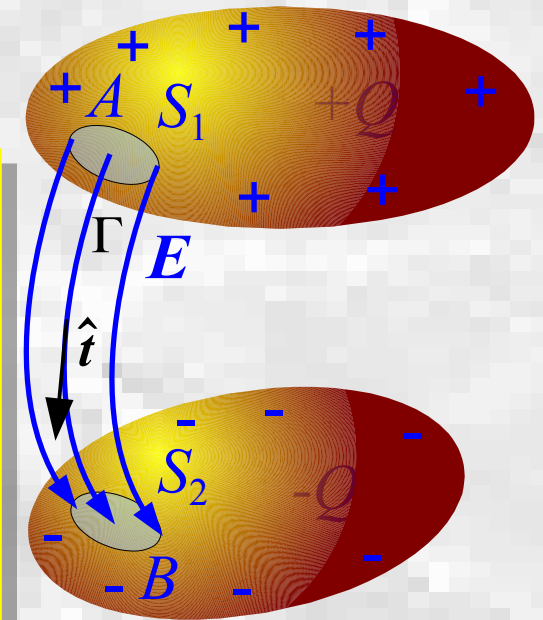
§ All'esterno dei conduttori essendo

∇ Le superfici S_1 ed S_2 sono equipoten-
 ziali e quindi le linee di campo di D e
 di E sono ad esse ortogonali. La
 tensione fra le due sezioni può essere
 espressa come

$$U_{AB} = \int_{A,\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = V_A - V_B = V_{AB}$$

∫ Dove A e B sono due punti arbitrari
 delle sezioni S_1 ed S_2 e Γ è una qual-
 siasi linea arbitraria che unisce i due
 punti.

∫ fino alla sezione S_x e la sezione S_x .



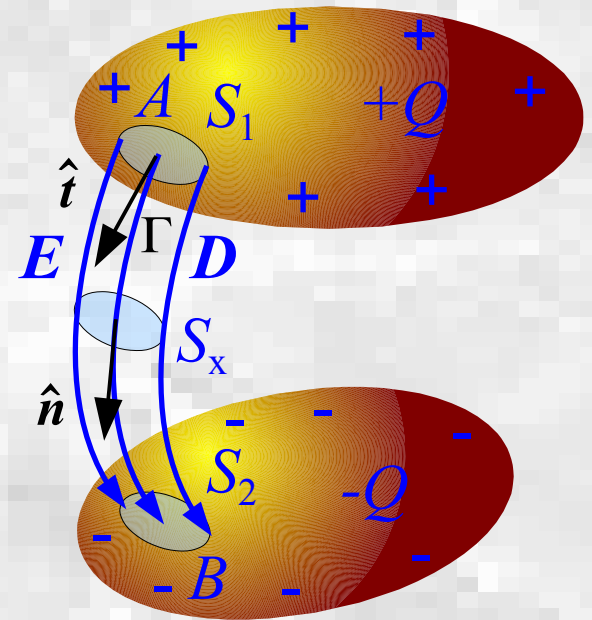
$$\underbrace{\iint_{S_1} \delta_1 \, ds}_{+q} = - \underbrace{\iint_{S_2} \delta_2 \, ds}_{-q}$$



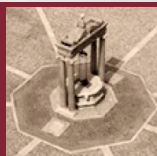
Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... di un tronco di tubo di flusso

- Con riferimento al tronco di tubo di flusso che ha come sezioni terminali S_1 ed S_2 , si definisce **capacità** C (e si misura in *farad*, F) il rapporto tra il valore assoluto della carica superficiale presente sulle due sezioni terminali (che abbiamo visto essere uguale ed opposta) e la differenza di potenziale tra i due conduttori.
- La capacità dipende solo dalla geometria del tronco di tubo di flusso e dalle proprietà elettriche del dielettrico interposto fra i due conduttori.



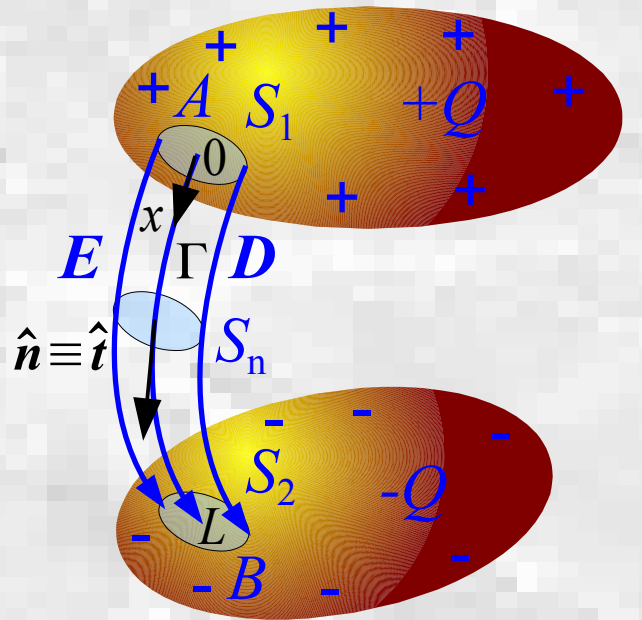
$$C_{AB} = \frac{\iint_{S_x} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds}{\int_{A, \Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl} = \frac{q}{U_{AB}}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... di un tronco di tubo di flusso

- Scegliendo la linea di integrazione Γ coincidente con una linea di campo, e come generica sezione S_x di integrazione una superficie equipotenziale (i.e., normale alle linee di campo, S_n), fissata l'ascissa curvilinea x con origine in A e termine in B , se la permittività e l'induzione dielettriche sono omogenee sulla superficie equipotenziale $S_n(x)$ si ha che l'elastanza B (i.e., l'inverso della capacità, in F^{-1}) del tronco di tubo di flusso risulta esprimibile come



$$B_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} = \frac{\int_{A,\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{t} \, dl}{\iint_{S_x} \mathbf{D} \cdot \hat{n} \, ds} = \dots$$

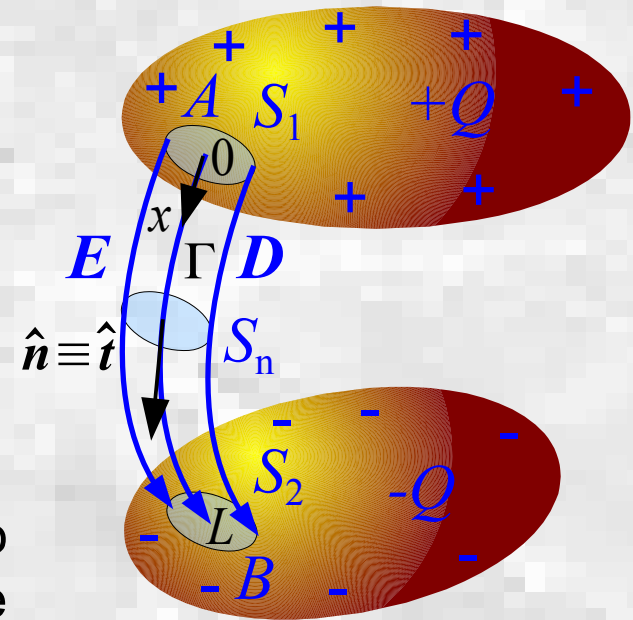


Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... di un tronco di tubo di flusso

$$\begin{aligned}
 \dots &= \frac{\int_0^L E(x) dx}{\iint_{S_n(x)} D(P(x)) ds} = \\
 &= \int_0^L \frac{E(x)}{\iint_{S_n(x)} D(P(x)) ds} dx = \\
 &= \int_0^L \frac{E(x)}{D(x) S_n(x)} dx = \int_0^L \frac{dx}{\varepsilon(x) S_n(x)}
 \end{aligned}$$

avendo indicato con $P(x)$ il generico punto della sezione equipotenziale $S_n(x)$ in corrispondenza dell'ascisa x .
L'elastanza (la capacità) dipende unicamente dal dielettrico e dalla geometria del sistema.



$$B_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} = \int_0^L \frac{dx}{\varepsilon(x) S_n(x)}$$



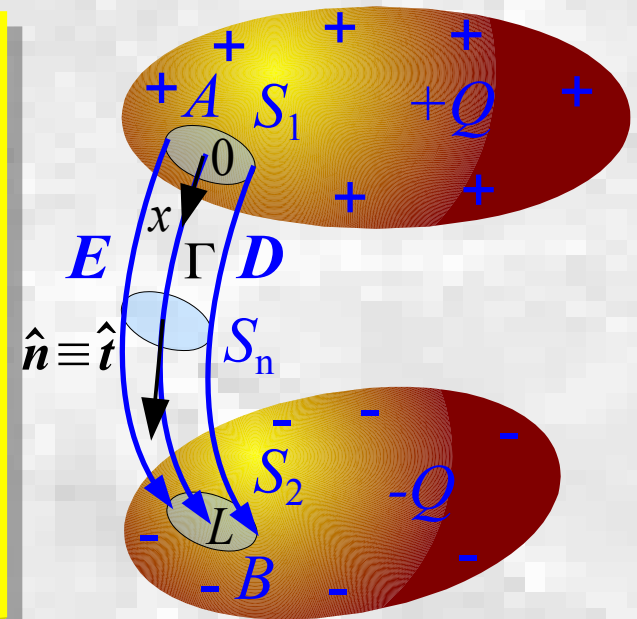
Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità ... di un tronco di tubo di flusso

Questa espressione varrà anche per tutte le configurazioni simmetriche per le quali \mathbf{D} ed ε sono uniformi in tutte le sezioni trasversali del tubo di flusso. Inoltre, se l'area della sezione è costante ed il tubo di flusso è omogeneo (ε costante), la elastanza (ovvero la capacità) assume l'espressione

$$B_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} = \frac{L}{\varepsilon A} \quad C_{AB} = \frac{1}{B_{AB}} = \varepsilon \frac{A}{L}$$

L'elastanza (la capacità) dipende unicamente dal dielettrico e dalla geometria del sistema.



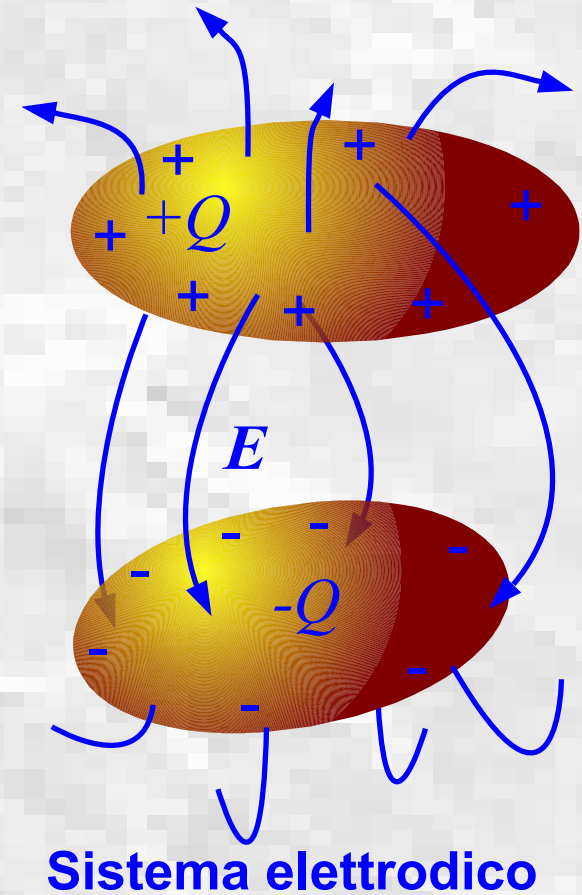
$$B_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} = \int_0^L \frac{dx}{\varepsilon(x) S_n(x)}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il condensatore ... la definizione

- Si consideri ora un sistema fisico costituito da due corpi conduttori (detti **armature**) sulle cui superfici è distribuita una quantità di carica Q uguale ma di segno opposto (e.g., per azione di una sorgente di tensione continua).
- Si supponga che tutte le linee di campo uscenti (ortogonalmente) da un conduttore terminino (sempre ortogonalmente) nell'altro.
- Al sistema elettrodico così definito si dà il nome di **condensatore**.



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

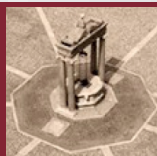
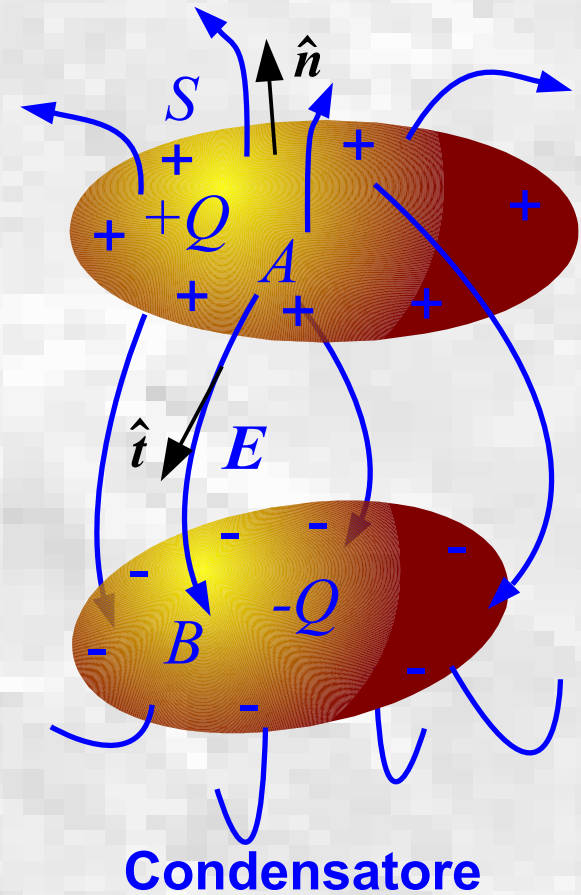
Il condensatore ... la capacità

- Si definisce **capacità** del sistema fisico (i.e. del **condensatore**) il rapporto fra il valore assoluto della quantità di carica Q presente sui conduttori e la tensione che si stabilisce fra le armature, cioè

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{U}$$

che ovviamente deriva dall'espressione generale applicata alla particolare configurazione elettrodica

$$C = \frac{\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl} = \frac{\oiint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$



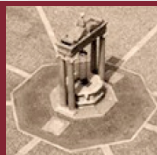
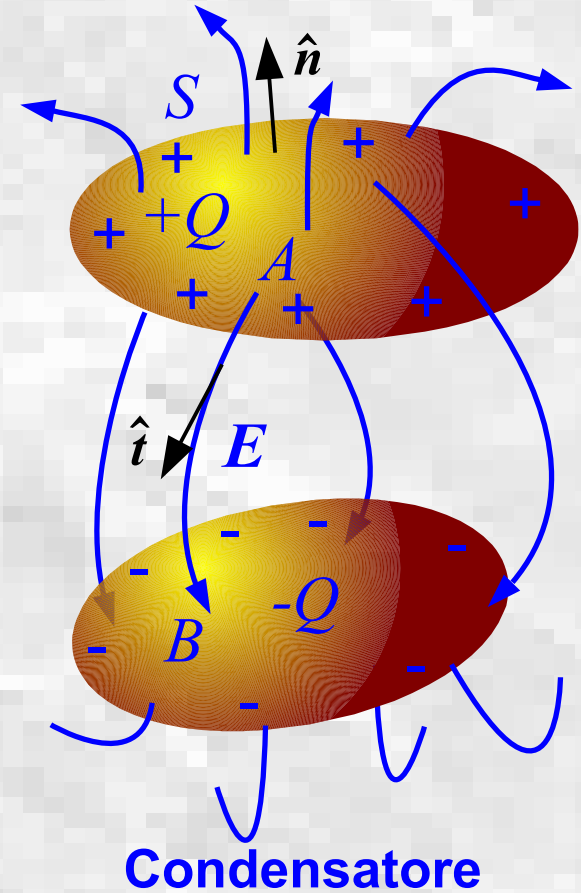
Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il condensatore ... la capacità

- Si definisce **capacità** del sistema il rapporto tra la carica totale Q e la differenza di potenziale V tra i due conduttori. Per quanto precedentemente visto, anche la capacità C del condensatore dipenderà unicamente dalla configurazione geometrica del sistema (i.e., dalla geometria del condensatore) e dalle caratteristiche del mezzo (i.e., dalla sua permittività dielettrica) in cui si sviluppano le linee di forza del campo elettrostatico.

Espressione generale applicata alla particolare configurazione elettrodica

$$C = \frac{\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl} = \frac{\oiint_S \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

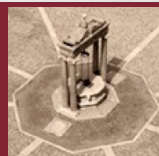
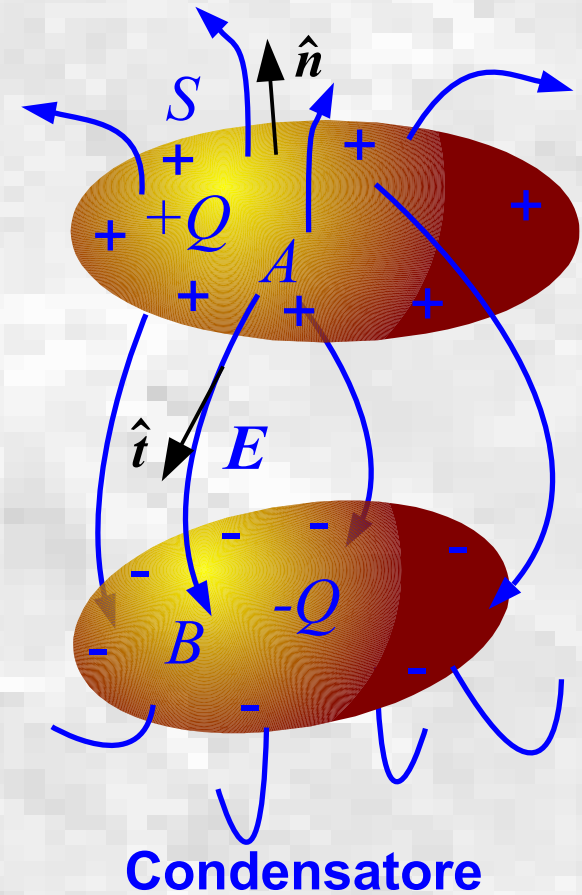


Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il condensatore ... l'energia potenziale elettrostatica

- L'**energia potenziale elettrostatica** di un sistema elettrodico (i.e., di un condensatore di capacità C) in cui è stata accumulata una quantità di carica Q quando fra le sue armature è presente una tensione U può essere determinata osservando che la variazione infinitesima di questa energia legata ad una variazione infinitesima della carica elettrica sulle armature è esprimibile come

$$dW_e = U dq = \frac{Q}{C} dq$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il condensatore ... l'energia potenziale elettrostatica

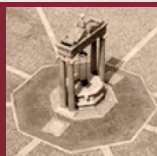
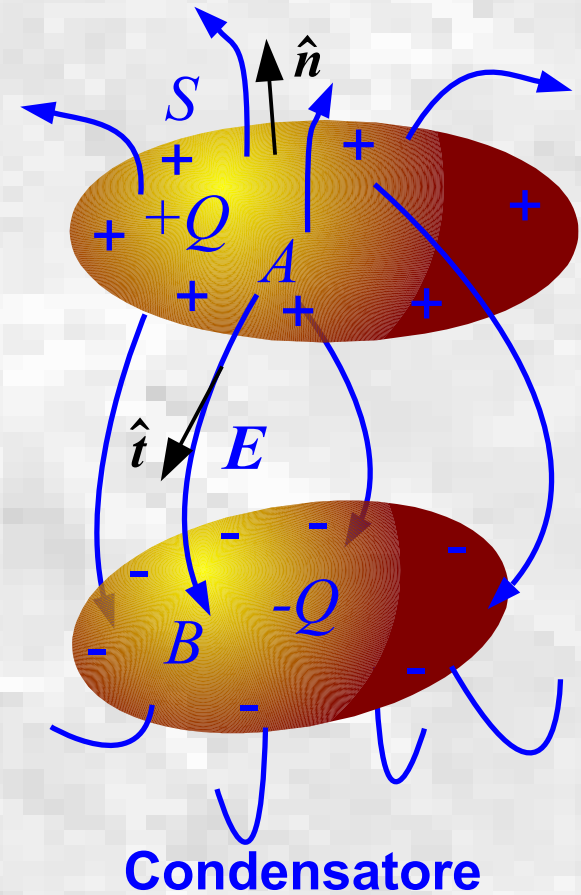
... pertanto, se il condensatore è inizialmente scarico, l'energia accumulata nel sistema quando sulle sue armature viene trasferita la quantità di carica Q è

$$W_e = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

che, sostituendo le espressioni generali della capacità e della d.d.p. diventa

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V E D dv = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_o \epsilon_r E^2 dv$$

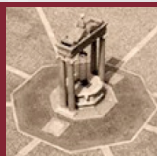
essendo V il volume entro cui si sviluppano le linee di forza di E .



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... introduzione

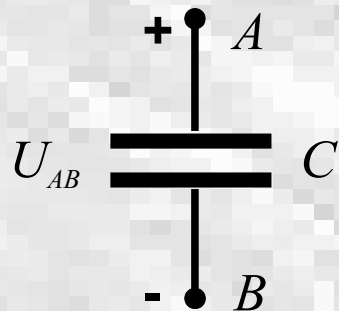
- Con riferimento alle configurazioni elettrodiche studiate in precedenza (i.e., al condensatore piano, al condensatore sferico ed a quello cilindrico) si è dimostrato che il loro comportamento in condizioni elettrostatiche risulta compiutamente descritto attraverso le grandezze integrali di tensione U fra le armature e di quantità di carica Q su di esse accumulata.
- La relazione che lega la tensione U alla quantità di carica Q tramite la capacità C è quindi sufficiente a caratterizzare il comportamento dei tronchi di tubo di flusso, **evitando di considerare le distribuzioni dei campi al loro interno**, ed è altresì sufficiente a stabilire le interrelazioni tra i vari tronchi di tubo di flusso (e.g., collegati in serie e/o parallelo).



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... il bipolo capacitivo

- Ogni tronco di tubo di flusso (a simmetria piana, sferica o cilindrica) può quindi essere schematizzato mediante un modello matematico, graficamente rappresentato dal simbolo in figura, e detto **bipolo capacitivo** (o **condensatore**), che, tralasciando il dettaglio dei fenomeni fisici presenti all'interno del tronco, si limita a considerare le due superfici terminali (coincidenti con le armature) chiamate **poli** o **morsetti** (i.e., A e B), ciascuna caratterizzata da un potenziale elettrico V , ed alle quali sono riferite la tensione U_{AB} e la quantità di carica Q .

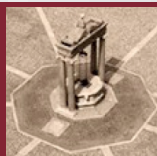


CONDENSATORE

$$Q = C U_{AB}$$

$$W_e = \frac{1}{2} C U_{AB}^2$$

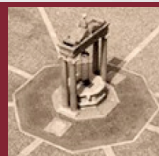
Il bipolo è caratterizzato con la capacità C (o dal suo inverso, l'elastanza, $S = C^{-1}$) del tronco di tubo di flusso di cui è modello.



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

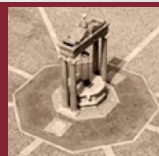
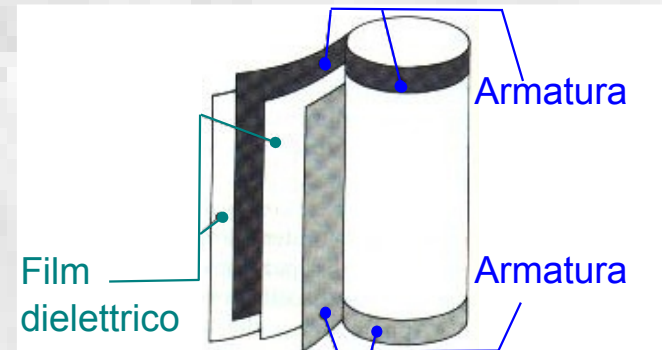
- Con il termine **modellizzazione** s'intende quel processo cognitivo che porta alla costruzione di un modello, ovvero di una rappresentazione teorica contenente gli elementi essenziali atti a descrivere in modo compiuto componenti e/o comportamenti di sistemi fisici reali. La modellizzazione permette quindi di selezionare particolari aspetti di un componente e/o di fenomeno fisico, e di rappresentarli mediante relazioni di tipo matematico validate da osservazioni e/o sperimentazioni.
- Nelle applicazioni ingegneristiche vengono impiegati dei componenti, detti **condensatori**, che con ottima approssimazione godono delle stesse proprietà dei sistemi elettrodici precedentemente studiati (detti anche essi **condensatori**).



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

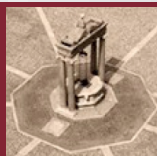
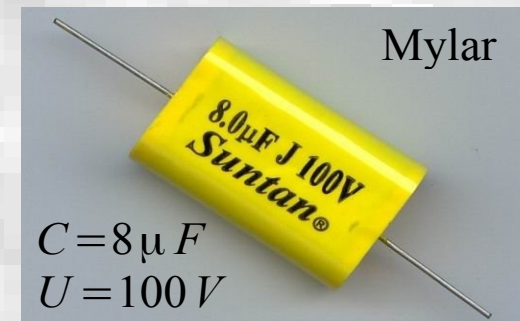
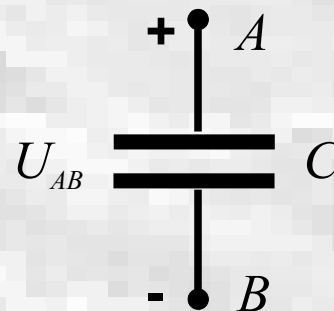
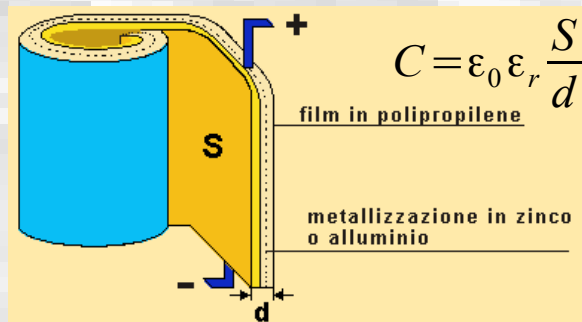
- Questi **condensatori** sono costruiti in modo tale da sviluppare ed esaltare al proprio interno quei fenomeni dielettrici che sono funzionali al corretto funzionamento del sistema.
- Tipicamente sono realizzati con due armature costituite da lamine flessibili (e.g., di stagnola o di alluminio), tra le quali è interposto un sottile materiale isolante (e.g., carta impregnata in olio o film plastico); tale struttura realizza un tronco di tubo di flusso a simmetria piana, anche se, per ridurne l'ingombro, è arrotolata in molti strati su di un supporto cilindrico di raggio molto maggiore dello spessore dello strato isolante.



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

- Ipotizzando, in prima approssimazione, che il comportamento del dielettrico sia assimilabile a quello di un dielettrico ideale ($\sigma = 0$), la descrizione del comportamento di questo componente in condizioni stazionarie (e come dimostreremo successivamente anche in condizioni quasi-stazionarie) può essere effettuata impiegando il modello di condensatore introdotto precedentemente (i.e., il bipolo capacitivo) assegnando alla capacità del bipolo la capacità del componente reale.

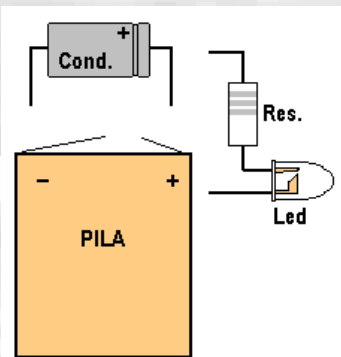


Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

- Il condensatore è un dispositivo in grado di immagazzinare energia elettrica, e lo si può dimostrare con un semplice esperimento di carica/scarica di un condensatore elettrolitico su di un bipolo resistivo collegato in serie ad un diodo led (*light emitting diode*).

Componenti

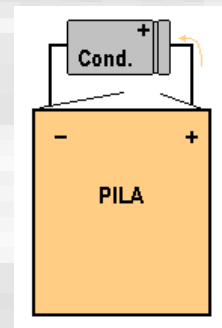


$$U = 4.5 \text{ V}$$

$$C = 1000 \text{ } \mu\text{F}$$

$$R = 100 \text{ } \Omega$$

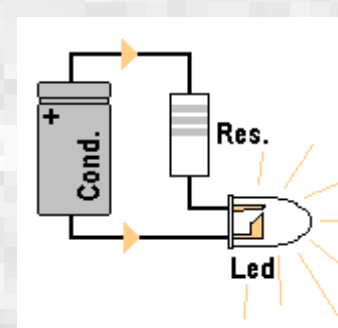
Carica



$$Q = C U = 4.5 \text{ mC}$$

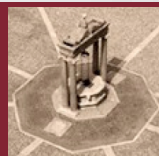
$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = 10.1 \text{ mJ}$$

Scarica



$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

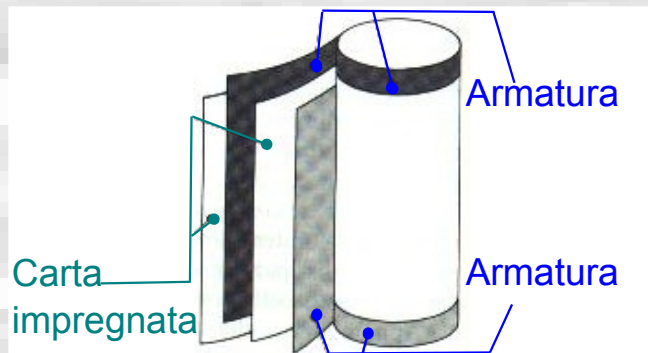
$$Q = 0$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

Esempio. *Un condensatore piano in carta impregnata (avente una rigidità dielettrica di 630 kV/cm ed una permittività relativa pari a 4) deve avere, alla tensione nominale di 260 V, una capacità di 23 nF. Assumendo un coefficiente di sicurezza pari a 5, determinare lo spessore della carta e la superficie delle armature.*

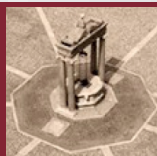


Indicando con c_s il coefficiente di sicurezza e con E_c la rigidità dielettrica, vale la relazione

$$E_c = c_s E_n = c_s \frac{U_n}{d} \qquad d = c_s \frac{E_n}{E_c} = 20 \mu\text{m}$$

Essendo nota la capacità C del condensatore, si calcola immediatamente l'area A della superficie delle armature

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \qquad A = \frac{C d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 134 \text{ cm}^2$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

Banco modulare di condensatori per il rifasamento di reti trifase in alta tensione (ABB-QBANK)

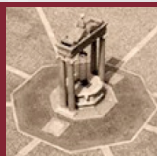
$$U_{max} = 800 \text{ kV}$$

$$Q_{max} = 600 \text{ Mvar}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$C_Y \approx 3 \text{ } \mu\text{F}$$

$$W_{em} \approx 955 \text{ kJ}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

Banco di condensatori per il rifasamento statico o dinamico di reti trifase in media tensione (ABB – ABBACUS)

Moduli da

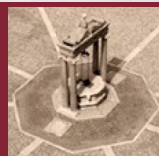
$$U_{max} = 24 \text{ kV}$$

$$Q_{max} = 3600 \text{ kvar}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$C_Y \approx 20 \text{ } \mu\text{F}$$

$$W_{em} \approx 5.7 \text{ kJ}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico “condensatore”

Batterie automatiche di condensatori di rifasamento per reti trifase in bassa tensione (ABB - APC)

$$U_{max} = 400 \text{ V}$$

$$Q_{max} = 600 \text{ kvar}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$C_Y \approx 12 \text{ mF}$$

$$W_{em} \approx 955 \text{ J}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del componente elettrico "condensatore"

Condensatori elettrolitici (polarizzati)

- ... *in alluminio* $C = 1 \mu\text{F} \div 1 \text{ F}$ $U < 500 \text{ V}$
- ... *in tantalino* $C = 1 \div 100 \mu\text{F}$ $U < 50 \text{ V}$
- ... *supercondensatori* $C = 1 \div 5000 \text{ F}$ $U = 2.5 \div 2.7 \text{ V}$



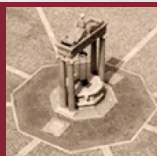
Il superamento dei limiti di tensione o la contropolarizzazione porta all'esplosione del componente.

Condensatori ceramici

$$C = 1 \text{ pF} \div 1 \mu\text{F} \quad U < 20 \text{ V}$$

Condensatori poliestere

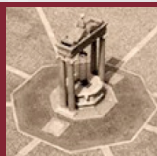
$$C < 10 \mu\text{F} \quad U < 1000 \text{ V}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... degli effetti capacitivi

- Configurazioni elettrodiche aventi tubi di flusso con simmetrie diverse da quelle esaminate (i.e., le configurazioni a simmetria piana, a simmetria sferica ed a simmetria cilindrica), ai fini della determinazione della capacità, impongono l'impiego dell'espressione generale.
- E' questo il caso, come vedremo, della *linea elettrica bifilare*, della *linea elettrica monofilare in presenza del terreno* e della generica *linea elettrica multifilare in presenza del terreno*.
- Nei casi suddetti, comunque caratterizzati da simmetrie specifiche, la distribuzione dei campi può ancora essere generalmente determinata per via analitica.
- Da ultimo, si citano alcuni effetti capacitivi indesiderati (o parassiti) che a volte possono assumere rilevanza e quindi richiedono di essere modellati con bipoli capacitivi stimando la capacità (parassita) che si manifesta tra le diverse parti in tensione.

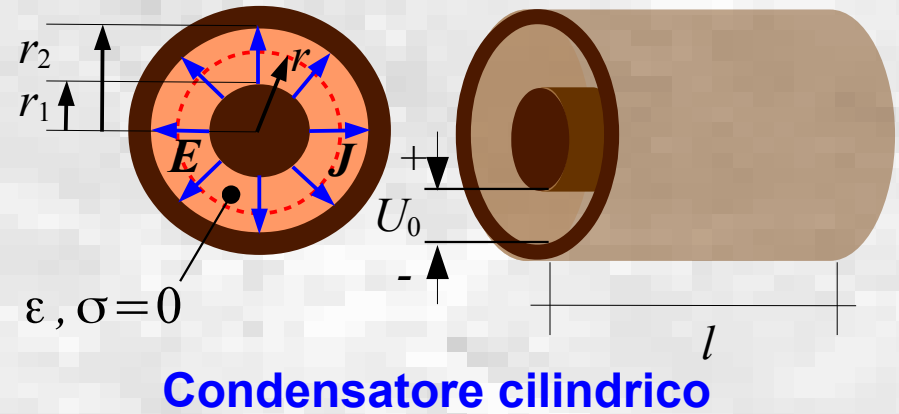


Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del cavo coassiale

- Due armature cilindriche concentriche, unitamente al tronco di tubo di flusso cilindrico cavo fra di esse interposto, costituiscono un **condensatore cilindrico**. Questo sistema elettrodico rappresenta

con buona approssimazione un cavo coassiale. Le linee di forza sono ortogonali alle armature del **condensatore cilindrico**. Se è applicata la tensione U_0 come in figura, le linee del campo elettrico sono radiali e dirette dall'interno verso l'esterno. Sia Q la quantità di carica che si accumula su tali armature (+ sull'armatura interna).



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... del cavo coassiale

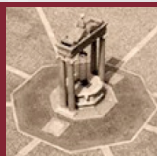
... Per la determinazione della capacità del sistema elettrodico si può procedere osservando che

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iiint_V \rho \, dv \quad DS = \varepsilon_0 \varepsilon_r E S = Q \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi r l}$$

da cui
$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

e quindi
$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E 2\pi r l}{U_0} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$
 cioè
$$C' = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \text{ F/km}$$

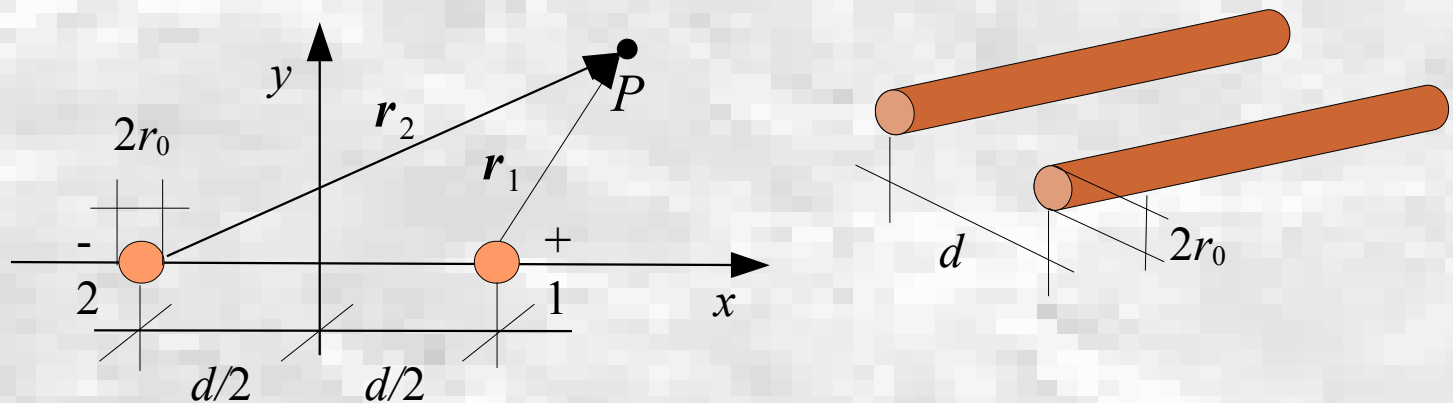
L'energia immagazzinata nel campo elettrostatico sarà
$$W_e = \frac{1}{2} C U_0^2$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

Il modello zero-dimensionale ... della linea bifilare

- Conduttori cilindrici paralleli indefiniti (*linea bifilare*)

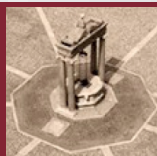


Il campo elettrico prodotto, per unità di lunghezza, dal cilindro 1

$$\lambda_1 = D S' = D 2 \pi r_1 \quad E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda_1}{2 \pi r}$$

La d.d.p. tra un generico punto dello spazio (e.g. O) ed il punto P è

$$V_1 = V(P) - V(O) = - \int_{d/2}^{r_1} E dr = \frac{\lambda_1}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \left(\frac{d/2}{r_1} \right) \quad V(O) = 0$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità di elettrodi rettilinei indefiniti

... Con riferimento al conduttore 2, la d.d.p. tra un generico punto dello spazio (e.g. O) ed il punto P è

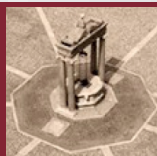
$$V_2 = V(P) - V(O) = - \int_{d/2}^{r_2} E dr = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{d/2}{r_2}\right)$$

Il potenziale nel punto P dovuto ai due conduttori, avendo assunto come riferimento dei potenziali l'origine O , e posto $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$

$$V(P) = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{d/2}{r_1}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{d/2}{r_2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Il potenziale del conduttore 1, $V_{01} = -V_{02} = V_0$ è

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right) \quad \text{che per } d \gg r_0 \text{ diventa } V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

La capacità di elettrodi rettilinei indefiniti

... La d.d.p. fra i due conduttori è data da

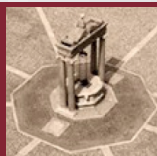
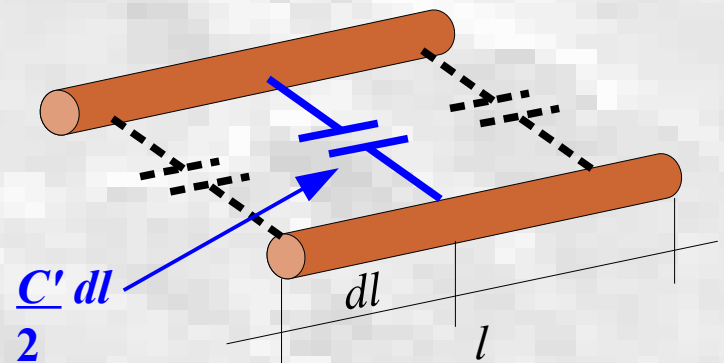
$$V_{01} - V_{02} = 2V_0 = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

e quindi la capacità dei due conduttori paralleli indefiniti, per unità di lunghezza, ha l'espressione

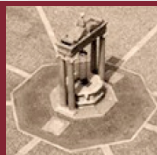
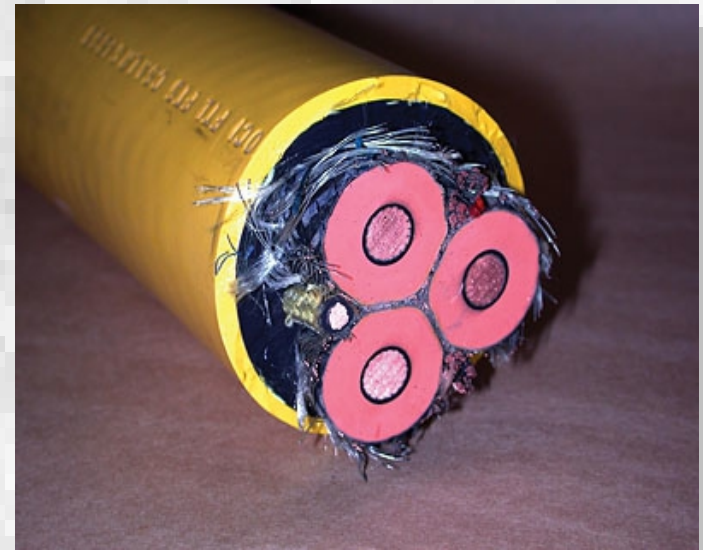
$$C' = \frac{\lambda}{V_{01} - V_{02}} = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$$

Per una linea bipolare in aria si ha:

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)} = \frac{27.8}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)} \quad \text{nF/km}$$



Modellazione di componenti ed effetti capacitivi

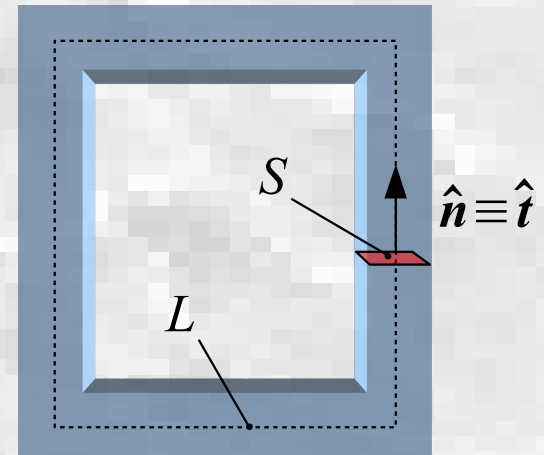


Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... il tubo di flusso chiuso

- Dalla natura solenoidale dell'induzione magnetica discende che, non solo le linee di forza sono chiuse (eventualmente all'infinito), ma anche i corrispondenti **tubi di flusso**.
- Dalla definizione di tubo di flusso discende che è nullo il flusso dell'induzione magnetica B attraverso la superficie laterale che delimita il tubo di flusso.
- Si può concludere quindi che all'interno di un tubo di flusso, il flusso dell'induzione magnetica B attraverso generiche sezione trasversali S rimane invariato, e cioè

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \text{cost.}$$



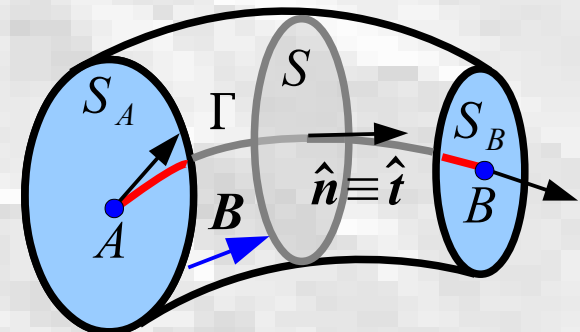
Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... la tensione magnetica

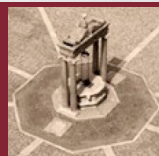
- Si consideri ora un tronco di tubo di flusso delimitato dalle superficie terminali S_A ed S_B ortogonali alle linee di forza dell'induzione magnetica B .
- Si assuma per ipotesi che al suo interno il mezzo sia isotropo omogeneo e lineare.
- Se all'interno del tubo di flusso il campo di corrente di conduzione è nullo (i.e. $J = 0$), allora si avrà che

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

- Abbiamo visto che si può allora definire, all'interno del tronco di tubo di flusso (che è semplicemente connesso), un **potenziale scalare magnetico** φ_m , tale che



$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$$



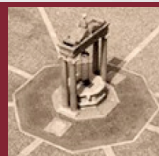
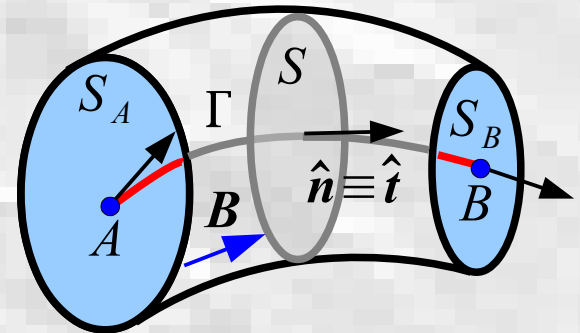
Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... la tensione magnetica

- Poiché, per le ipotesi fatte, le superficie terminali S_A ed S_B risultano ortogonali anche alle linee di forza del campo magnetico H , tali superfici sono delle **superfici equipotenziali**.
- La **tensione magnetica** (espressa in A) tra le due superfici terminali del tronco di tubo di flusso è data da

$$\varphi_{mAB} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB} = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl$$

dove A e B sono due generici punti, rispettivamente, di S_A ed S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ , interamente contenuta nel tronco di tubo di flusso, che collega i punti A e B .



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... la riluttanza e la permeanza

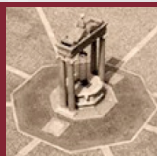
- Si definisce **riluttanza** del tronco del tubo di flusso di B , delimitato dalle due superfici equipotenziali S_A ed S_B , il rapporto fra la tensione φ_{mAB} ed il flusso Φ (**legge di Hopkinson**)

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\int_A^B \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \frac{\varphi_{mA} - \varphi_{mB}}{\Phi} = \frac{\varphi_{mAB}}{\Phi} \quad (\text{H}^{-1})$$

- Il reciproco della riluttanza è detta **permeanza**

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\int_A^B \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl} = \frac{\Phi}{\varphi_{mAB}} = \frac{\Phi}{\varphi_{mA} - \varphi_{mB}} = \frac{1}{\mathcal{R}_{AB}} \quad (\text{H})$$

La \mathcal{R}_{AB} e la \mathcal{P}_{AB} non dipendono da H e da B , ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla permeabilità del mezzo.



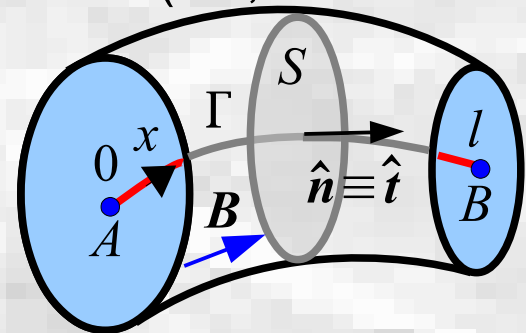
Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... la riluttanza e la permeanza

- Per un calcolo agevole della \mathcal{R}_{AB} si ipotizzi che
 - la linea di integrazione Γ coincida con una linea di campo
 - la generica sezione S sia equipotenziale (i.e., normale alle linee di campo)

da ciò segue che

- $\hat{n} \equiv \hat{t}$
- \mathbf{H} e \mathbf{B} risultano paralleli a \hat{t}



- Quindi, tenendo conto del fatto che il flusso di \mathbf{B} ha lo stesso valore su tutte le sezioni trasversali, si ottiene

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Phi_{mAB}}{\Phi} = \frac{\int_A^B \mathbf{H} \cdot \hat{t} dl}{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} ds} = \frac{\int_0^l H(x) dx}{\iint_S B ds} = \int_0^l \frac{H(x)}{\iint_{S(x)} B(x) ds} dx$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

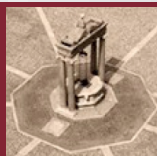
Le principali definizioni ... la riluttanza e la permeanza

- Applicando il risultato ottenuto ad un **tubo di flusso filiforme**, i.e., ad un tubo di flusso per il quale le dimensioni trasversali, $A(x)$ (i.e., l'area della sezione $S(x)$ in corrispondenza dell'ascissa curvilinea x), siano trascurabili rispetto a quelle longitudinali, l , (così da poter assumere l'induzione magnetica B uniforme sulla generica superficie S) si ottiene

$$\mathcal{R}_{AB} = \int_0^l \frac{H(x)}{\iint_{S(x)} B(x) ds} dx = \int_0^l \frac{H(x)}{\mu_0 \mu_r \iint_{S(x)} H(x) ds} dx = \int_0^l \frac{dx}{\mu_0 \mu_r A(x)}$$

- Se l'area $A(x)$ della sezione ha valore costante in tutto il tronco di tubo di flusso, la precedente espressione diventa

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{A}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

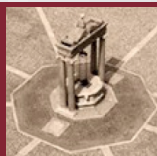
Le principali definizioni ... la riluttanza e la permeanza

- Si osservi che l'espressione generale della riluttanza a cui si è pervenuti per un tronco di tubo di flusso filiforme

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_0^l \frac{dx}{A(x)}$$

è in realtà applicabile in tutti quei casi in cui **l'induzione magnetica B è uniforme su ogni sezione normale** del tronco di tubo di flusso stesso.

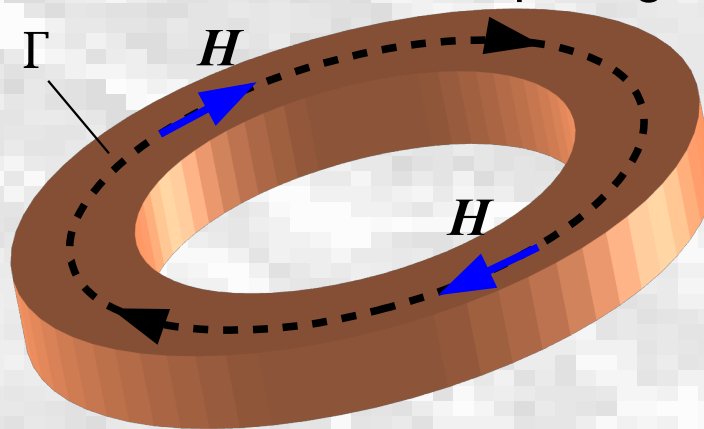
- Si osservi, altresì, che esistono alcune tipiche configurazioni per le quali, in virtù delle particolari condizioni di simmetria soddisfatte dal tubo di flusso, si può ritenere che l'induzione magnetica B sia uniforme in tutte le sezioni normali del conduttore.



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... il circuito elementare

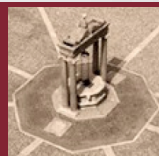
- Si definisce **circuito magnetico elementare** qualsiasi tubo di flusso chiuso dell'induzione magnetica B (si osservi che in generale, ed analogamente ai circuiti elettrici, i circuiti magnetici hanno strutture ben più complesse, i.e. ramificate).
- Per ogni tubo di flusso chiuso deve necessariamente essere diversa da zero la corrente concatenata: infatti, se la corrente concatenata è nulla, per ogni linea di campo Γ di H contenuta



nel tubo di flusso si avrebbe

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = 0$$

essendo il verso di H lungo le linee di campo invariante, ne discende $H = 0$, da cui $B = 0$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... il circuito elementare

...

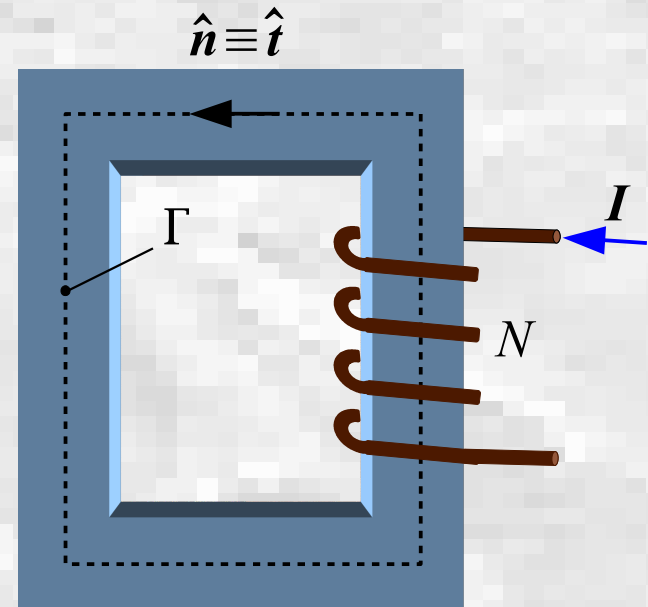
- In presenza di correnti concatenate, l'espressione della riluttanza del tubo di flusso chiuso, per la legge di Ampere, diventa

$$\mathcal{R} = \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl}{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds} = \frac{I_c}{\Phi}$$

- Conseguentemente la legge di Hopkinson assume la forma

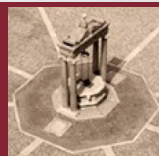
$$\mathcal{R} \Phi = I_c$$

- Se il tubo di flusso si concatena con un avvolgimento formato da N spire percorso da una corrente I , si ha



$$\mathcal{R} \Phi = I_c = N I = \mathcal{F}$$

...

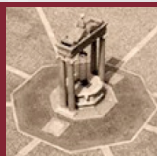


Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... il circuito elementare

...

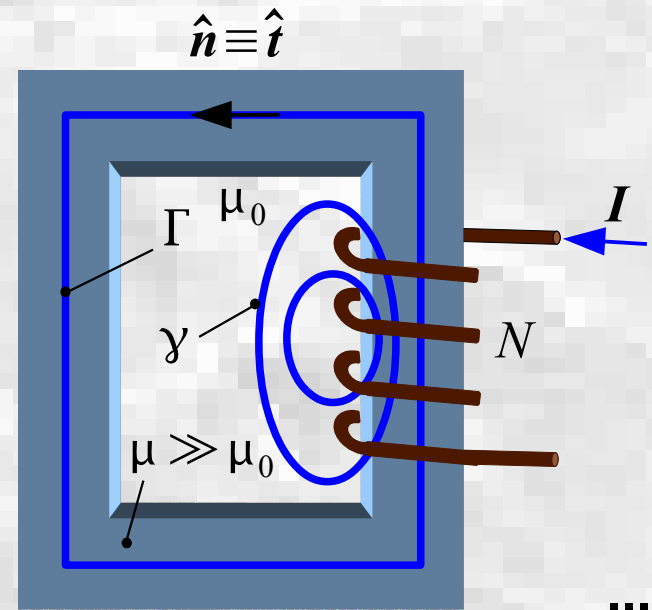
- La corrente concatenata $I_c = N I = \mathcal{I}$ è detta **forza magnetomotrice** (f.m.m.) ed in un circuito magnetico ha un ruolo analogo a quello della f.e.m. in un circuito elettrico.
- A partire dalle equazioni fondamentali è possibile derivare leggi analoghe alle *leggi di Kirchhoff* per i circuiti elettrici.
- Sfruttando le analogie tra le equazioni dei circuiti elettrici e dei circuiti magnetici è possibile ricondurre lo studio di un circuito magnetico all'analisi di un **circuito elettrico "equivalente"**.
- Il modello circuitale è utilizzabile solo nei casi in cui l'andamento dei tubi di flusso di \mathbf{B} è noto a priori, cioè quando:
 - i sistemi sono dotati di particolari simmetrie;
 - i circuiti magnetici sono costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti.



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... i circuiti di materiale ferromagnetico

- Sebbene dal punto di vista del comportamento magnetico non esistono materiali analoghi agli isolanti (tra i materiali conduttori e quelli isolati la resistività variano fino a 29 ordini di grandezza, mentre le permeabilità magnetiche variano al più di 6 ordini di grandezza), la riluttanza dei tubi di flusso (e.g., Γ) che si richiudono nei materiali ad elevata permeabilità magnetica (e.g., i ferromagnetici) è in genere trascurabile rispetto a quella dei tubi di flusso (e.g., γ) che si richiudono nei materiali a bassa permeabilità (e.g., l'aria).



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... i circuiti di materiale ferromagnetico

- A titolo di esempio, si osservi che se si considerano due tubi di flusso filiformi individuati rispettivamente dalle linee chiuse Γ e γ passanti per i loro assi, dall'applicazione della *legge di Hopkinson* si ha

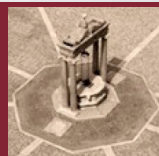
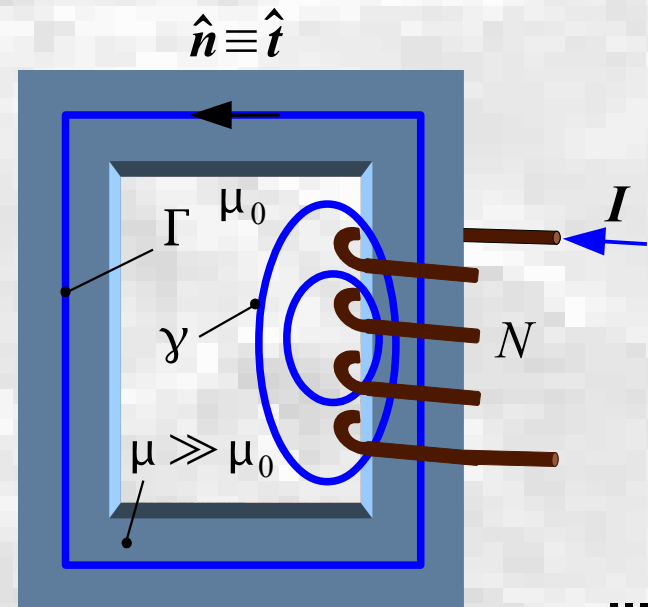
$$\Phi_{\Gamma} = \frac{N I}{\mathcal{R}_{\Gamma}} \quad \Phi_{\gamma} = \frac{N I}{\mathcal{R}_{\gamma}}$$

poiché $\mathcal{R}_{\Gamma} \ll \mathcal{R}_{\gamma}$

si ha

$$\Phi_{\Gamma} \gg \Phi_{\gamma}$$

- Pertanto, il flusso Φ_{γ} , pur essendo ineliminabile, è in generale del tutto trascurabile rispetto al flusso Φ_{Γ} .



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

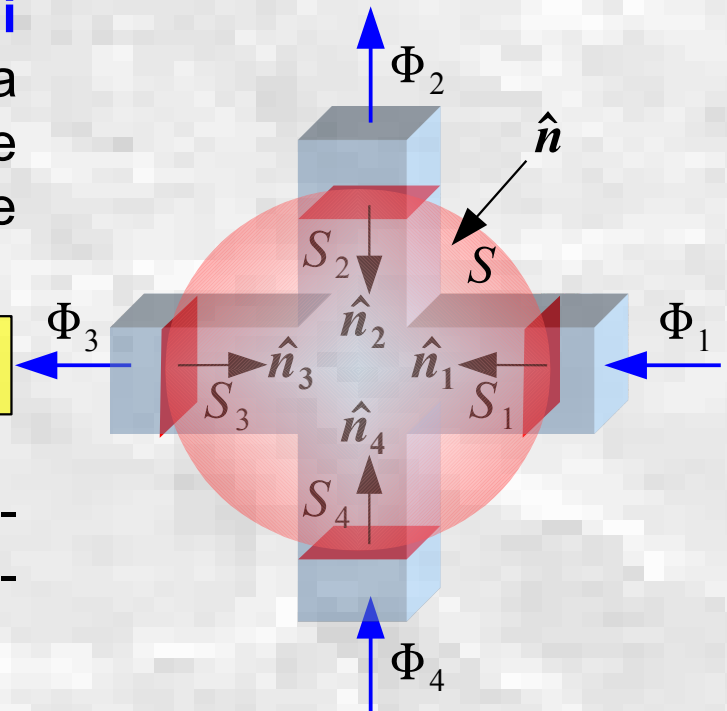
Le principali definizioni ... la legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

- **Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici:** la somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla

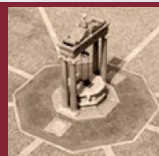
$$\sum_k \Phi_k = 0$$

- Questa legge è diretta conseguenza della natura solenoidale di \mathbf{B} ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \sum_k \iint_{S_k} \mathbf{B}_k \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dS = \\ &= \sum_k \Phi_k = 0 \end{aligned}$$



$$\sum_k \Phi_k = \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 = 0$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

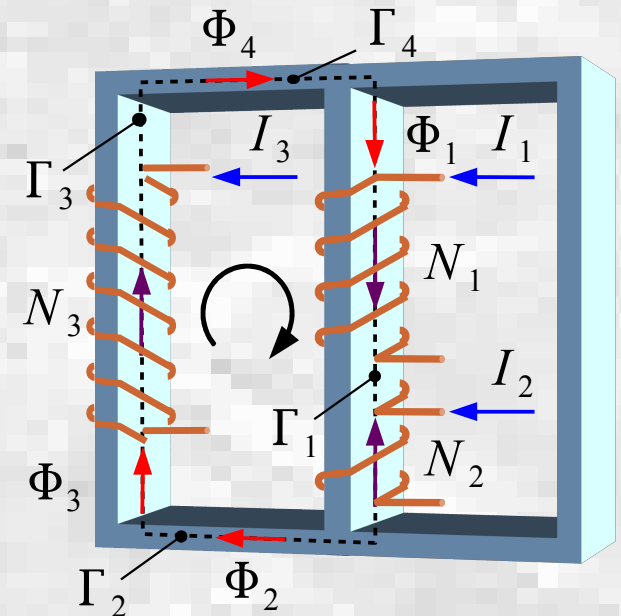
Le principali definizioni ... la legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche

- Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche:** la somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alla f.m.m. concatenata con la maglia stessa

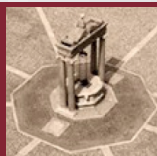
$$\sum_k \varphi_m = \sum_k \mathcal{F}_k$$

- Questa legge è diretta conseguenza delle legge di Ampere

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl &= \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H}_k \cdot \hat{\mathbf{t}}_k \, dl = \\ &= \sum_k \varphi_{mk} = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \mathcal{F}_k = \\ &= \sum_k N_k I_k = I_c = \iint_S \mathbf{J}_c \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \end{aligned}$$

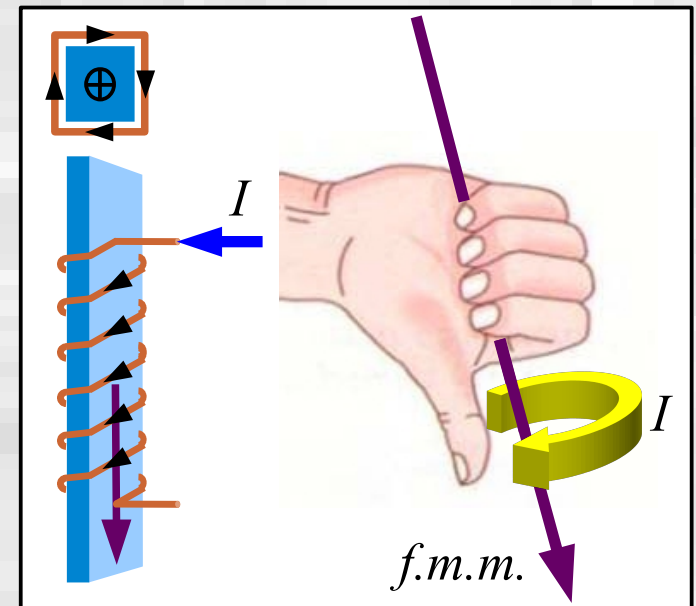
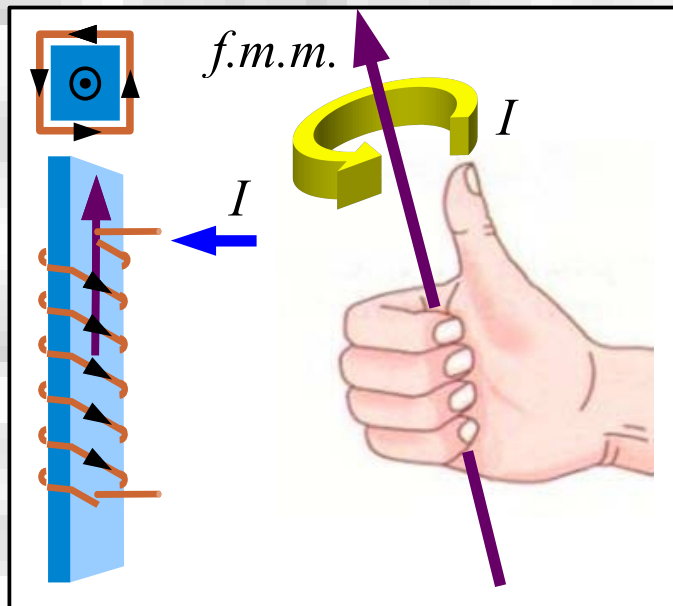


$$\begin{aligned} \varphi_{m1} + \varphi_{m2} + \varphi_{m3} + \varphi_{m4} &= \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 + \mathcal{R}_4 \Phi_4 &= \\ &= N_1 I_1 - N_2 I_2 + N_3 I_3 \end{aligned}$$

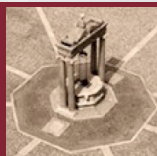


Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... il verso della f.m.m.

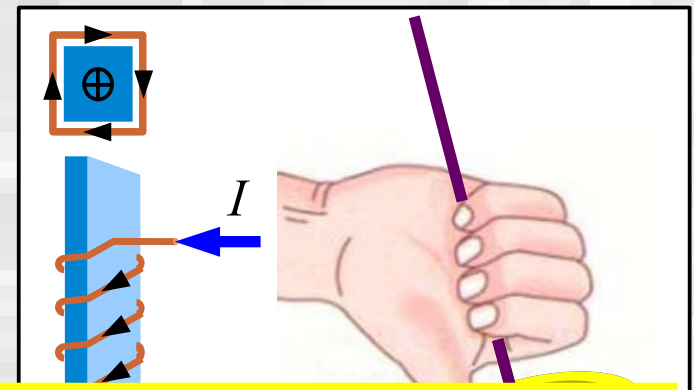
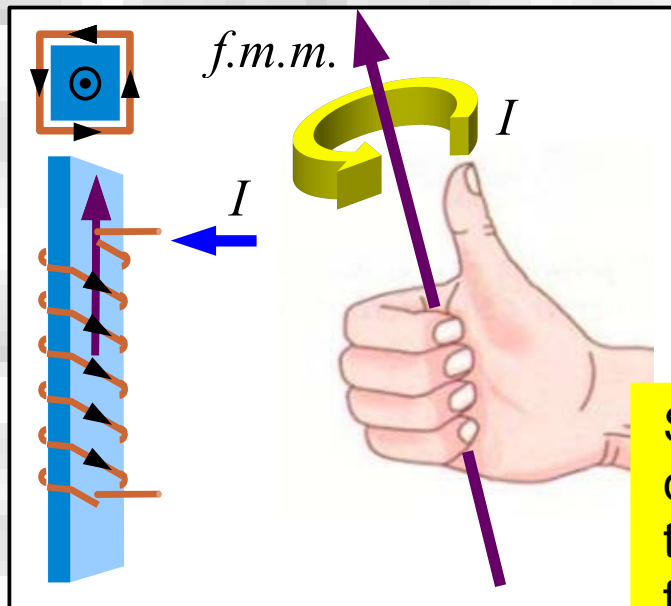


- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si associano versi di riferimento positivi definiti mediante la regola della mano destra (in genere il verso positivo di percorrenza dell'avvolgimento è assunto coincidente con quello di riferimento della corrente).



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... il verso della f.m.m.



Si osservi che a secondo membro dell'equazione di equilibrio delle tensioni magnetiche di una maglia, alla f.m.m. di un avvolgimento si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso positivo di percorrenza della maglia, segno - se è discorde.

- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso positivo di percorrenza della maglia, segno - se è discorde.



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analogia fra i circuiti elettrici e magnetici

Circuiti elettrici

 R U I e

$$U = R I$$

$$\sum_k I_k = 0$$

$$\sum_k U_k = \sum_k R_k I_k$$

Circuiti magnetici

 \mathcal{R} φ Φ

$$\mathcal{F} = N I$$

$$\varphi_m = \mathcal{R} \Phi$$

$$\sum_k \Phi_k = 0$$

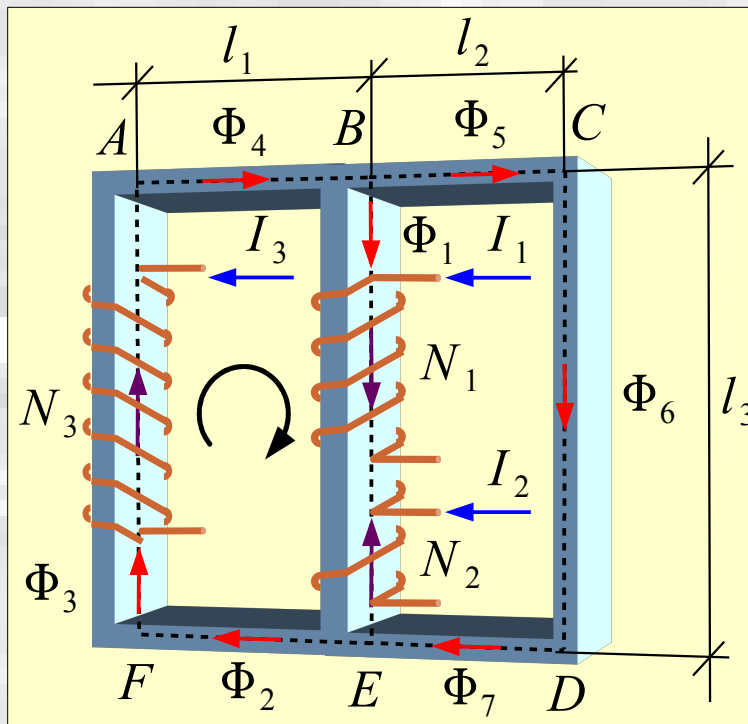
$$\sum_k \varphi_k = \sum_k \mathcal{R}_k \Phi_k$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:

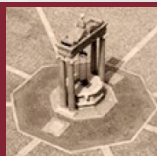


- si rappresenta, attraverso la corrispondente riluttanza, ciascun tronco di tubo di flusso individuato nel circuito magnetico

$$\mathcal{R}_{1(BE)} = \mathcal{R}_{3(FA)} = \mathcal{R}_{6(CD)} = \frac{1}{\mu} \frac{l_3}{S}$$

$$\mathcal{R}_{2(EF)} = \mathcal{R}_{4(AB)} = \frac{1}{\mu} \frac{l_1}{S}$$

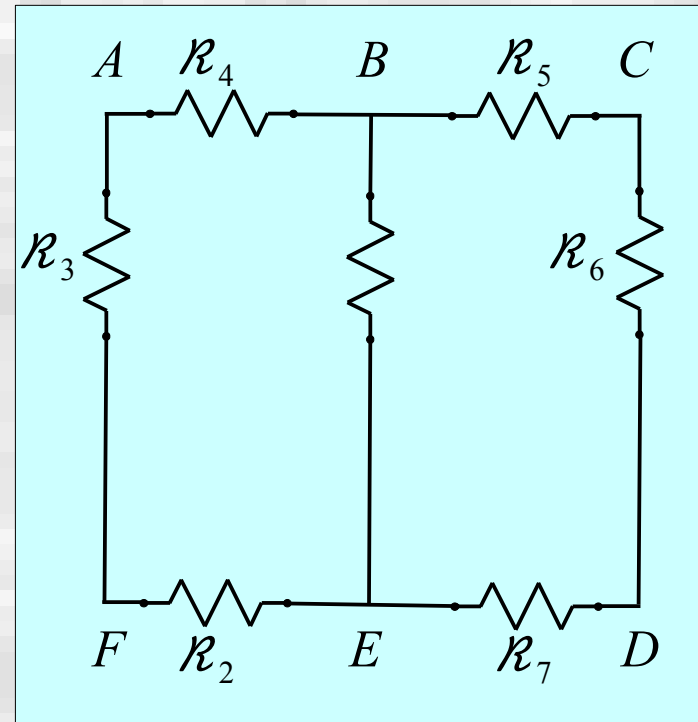
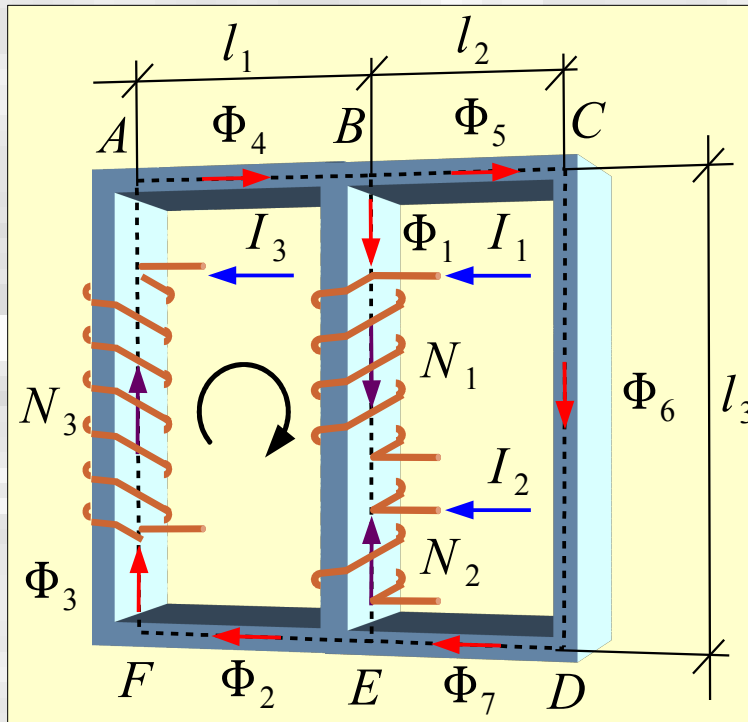
$$\mathcal{R}_{5(DE)} = \mathcal{R}_{7(BC)} = \frac{1}{\mu} \frac{l_2}{S}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

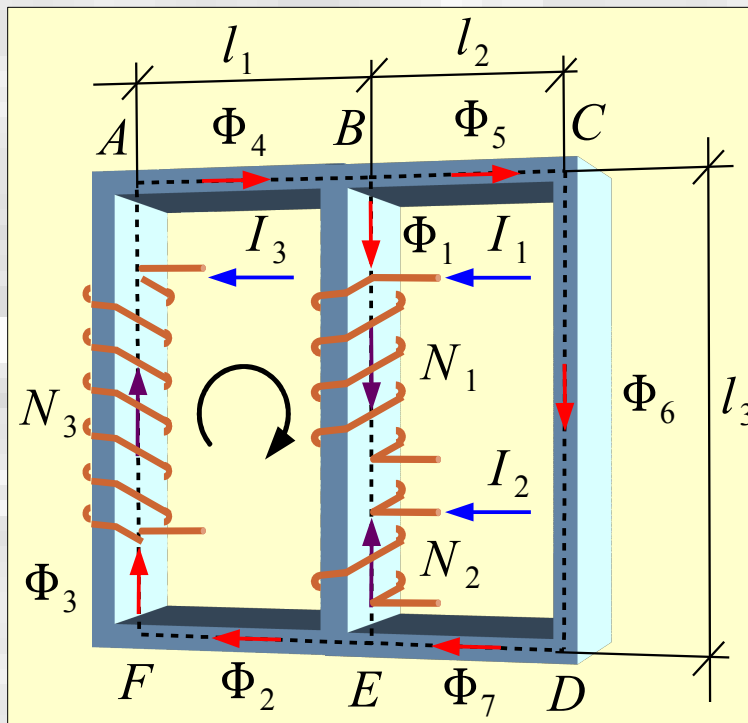
- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:

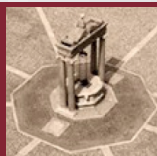


2. si rappresentano le f.m.m. che agiscono nei tronchi di tubo di flusso attraverso sorgenti orientate in accordo con il verso di riferimento positivo fissato per ciascuna bobina mediante la regola della mano destra

$$\mathcal{F}_1 = N_1 I_1$$

$$\mathcal{F}_2 = N_2 I_2$$

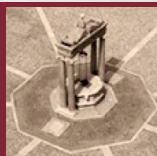
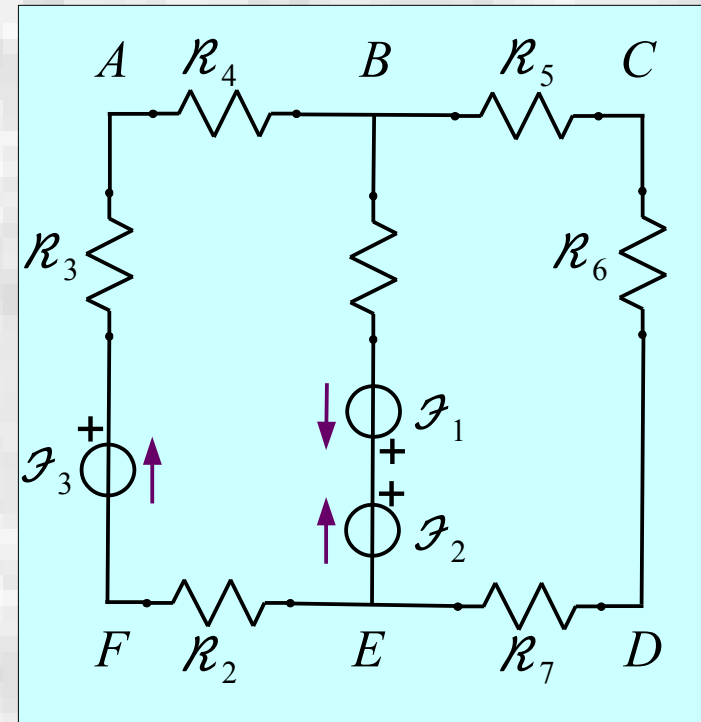
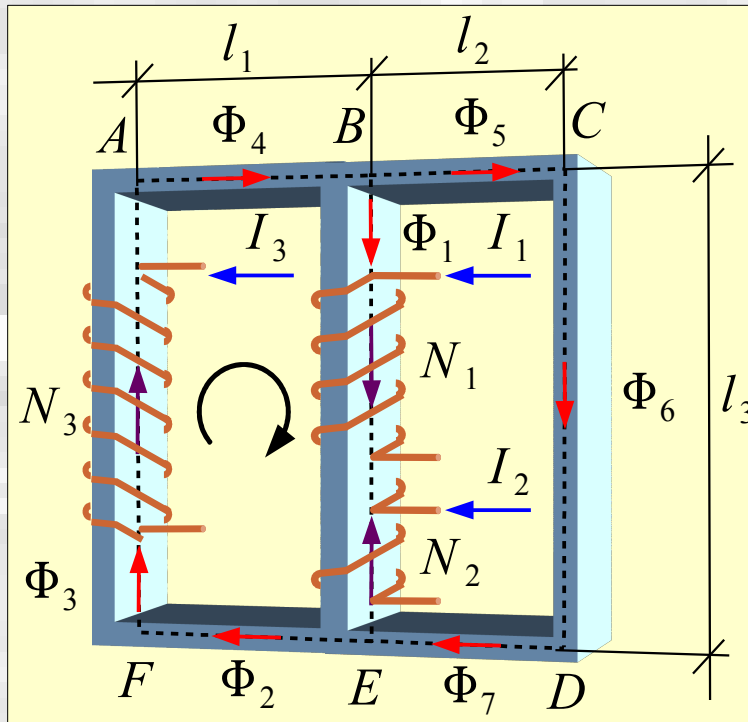
$$\mathcal{F}_3 = N_3 I_3$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

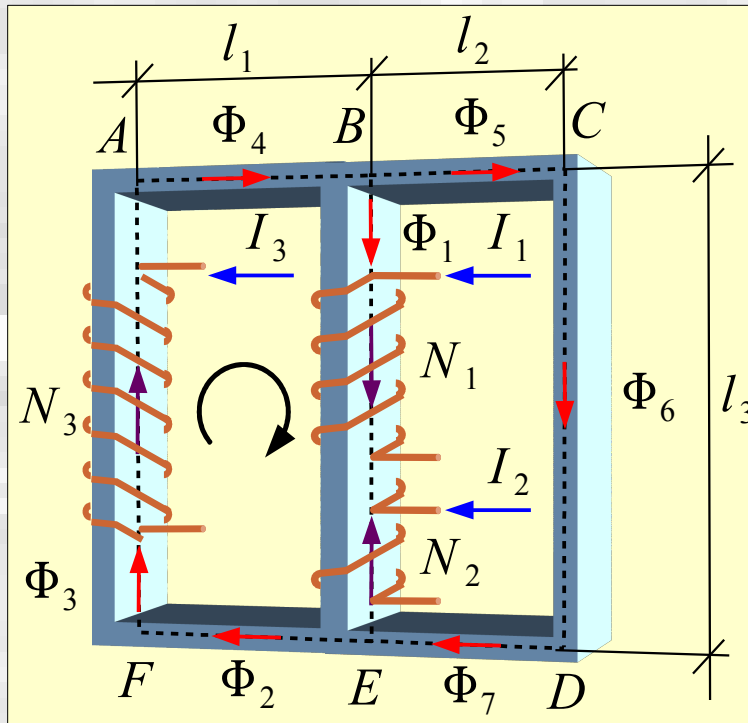
- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:



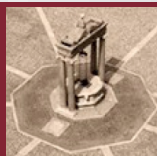
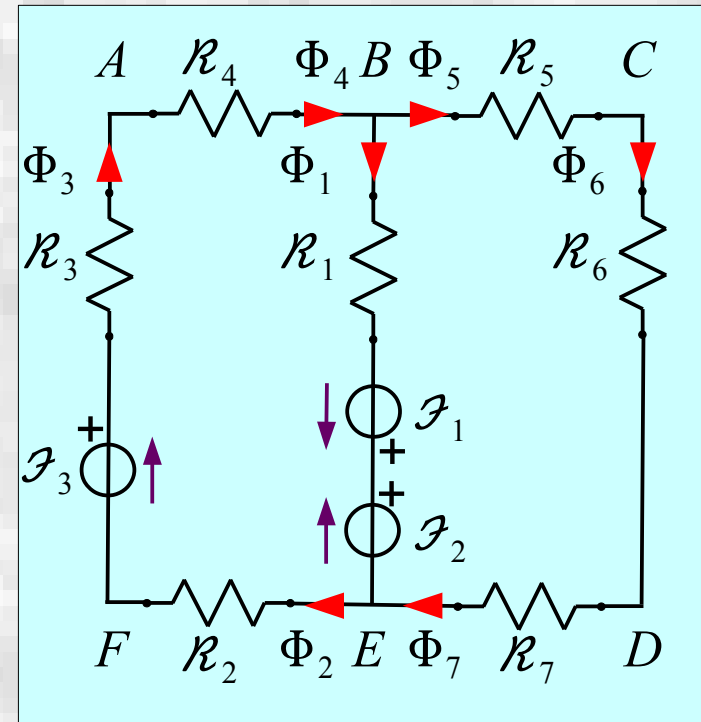
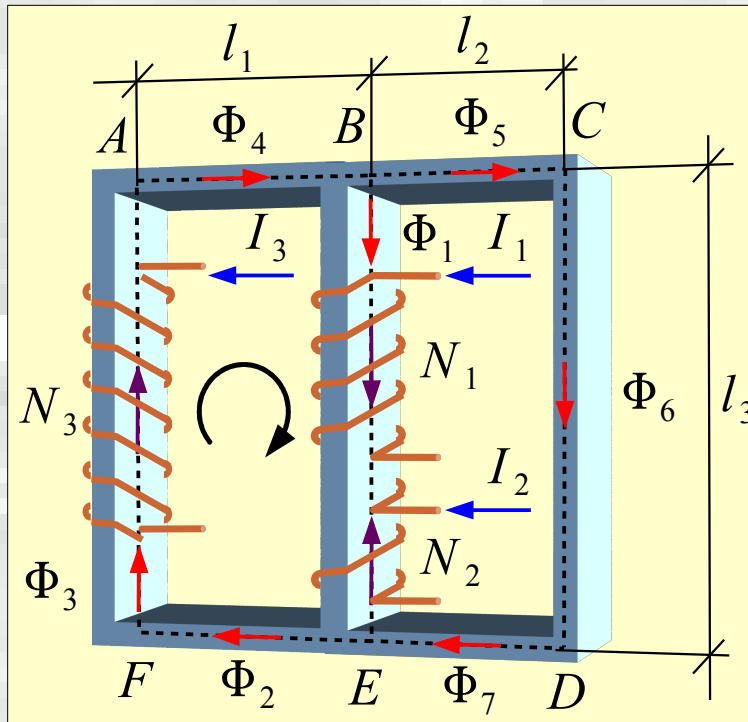
3. si riportano le orientazioni di riferimento positive per i flussi del vettore induzione magnetica all'interno di ciascun tronco di tubo di flusso del circuito magnetico



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

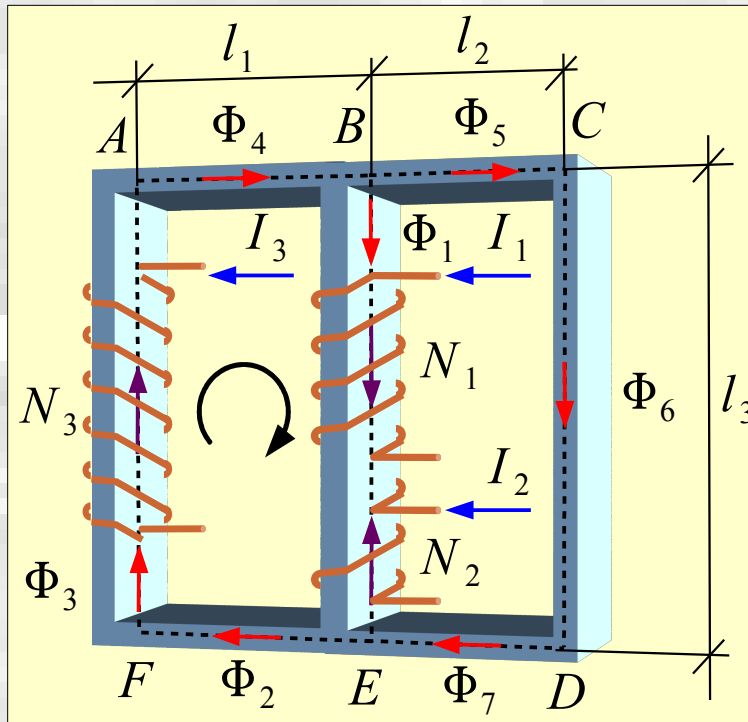
- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

- La risposta di un circuito magnetico è pertanto riconducibile all'analisi di un circuito elettrico equivalente così definito:



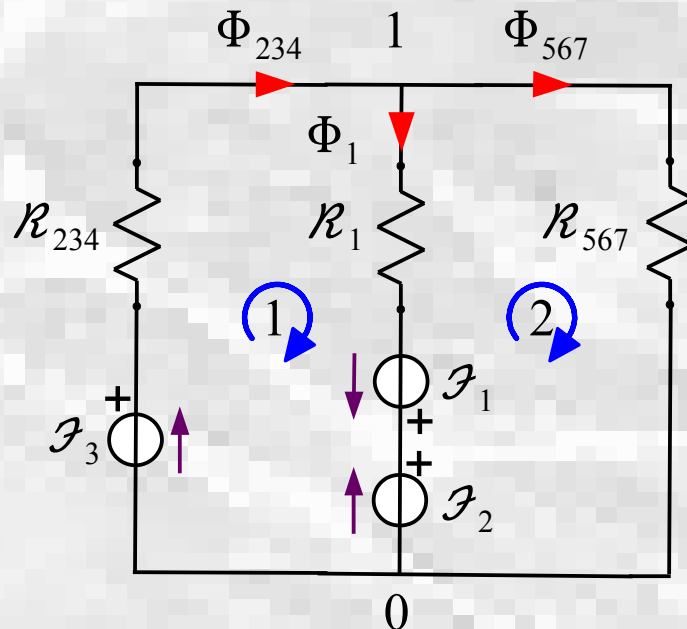
4. la rete così ottenuta è l'equivalente circuitale del circuito magnetico assegnato; studiare il circuito magnetico assegnato equivale quindi a studiare il circuito equivalente ed a tal fine si potranno applicare le tecniche di analisi relative alle reti elettriche in regime stazionario.



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Le principali definizioni ... l'analisi dei circuiti magnetici

- Il circuito elettrico equivalente ha quindi due nodi ($n = 2$), tre lati ($l = 3$) e due maglie indipendenti ($m = l - p = l - (n - 1) = 2$), le incognite sono i flussi nei tre lati della rete:



posto $\Phi_{234} = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4$

$\Phi_{567} = \Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7$

$\mathcal{R}_{234} = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4$

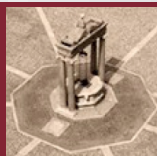
$\mathcal{R}_{567} = \mathcal{R}_5 + \mathcal{R}_6 + \mathcal{R}_7$

ed applicando il metodo generale di analisi **il sistema risolvante è**

$$\Phi_{234} - \Phi_1 - \Phi_{567} = 0$$

$$\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 = \mathcal{R}_{234} \Phi_{234} + \mathcal{R}_1 \Phi_1$$

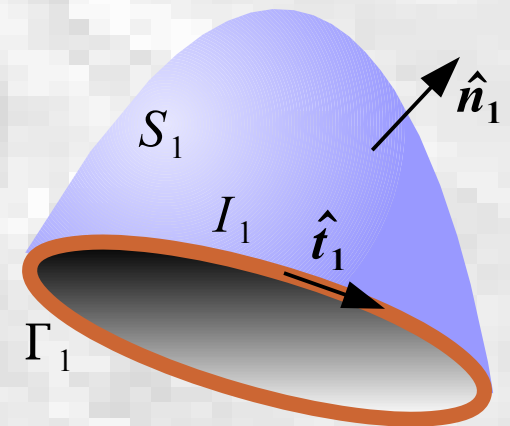
$$\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1 = -\mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_{567} \Phi_{567}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... il coefficiente di autoinduzione

- Si consideri un circuito elettrico elementare (tubo di flusso filiforme chiuso), avente Γ_1 come linea mediana, interessato al passaggio dalla corrente di conduzione I_1 , ed immerso in un mezzo omogeneo, isotropo e lineare. Senza scapito di generalità, assumiamo che il verso di riferimento positivo della corrente coincida con il verso di riferimento positivo di percorrenza del circuito, individuato dal versore \hat{t}_1 tangente alla linea chiusa Γ_1 . Sia S_1 la superficie aperta che ha per contorno il circuito elettrico elementare, ed \hat{n}_1 la sua normale orientata in accordo con la regola della mano destra (applicata con riferimento al verso positivo di percorrenza del circuito elementare).



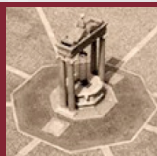
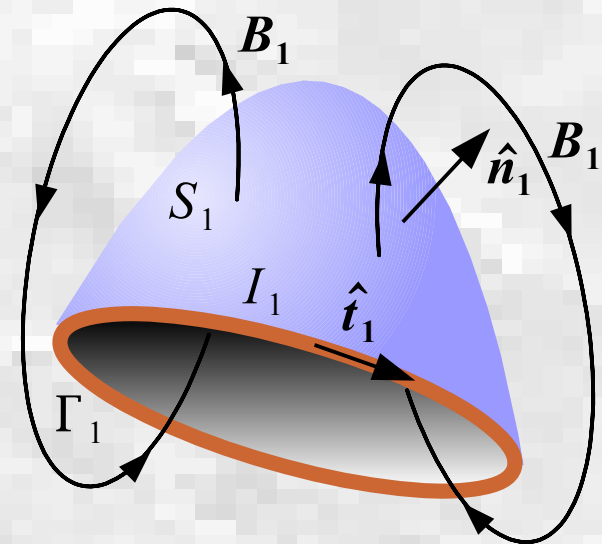
Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... il coefficiente di autoinduzione

- In base alle ipotesi fatte, la relazione che descrive il campo magnetico generato dalla corrente I_1 è lineare. Il flusso dell'induzione magnetica che si concatena con il circuito elettrico elementare, Φ_{11} , sarà pertanto direttamente proporzionale alla corrente I_1 che scorre nel circuito stesso.
- Al coefficiente di proporzionalità che lega la corrente al flusso concatenato

$$L_1 = \frac{\iint_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds}{I_1} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} \quad (\text{H})$$

si da il nome di coefficiente di **autoinduzione** del circuito o **induttanza propria** (in Henry, H).

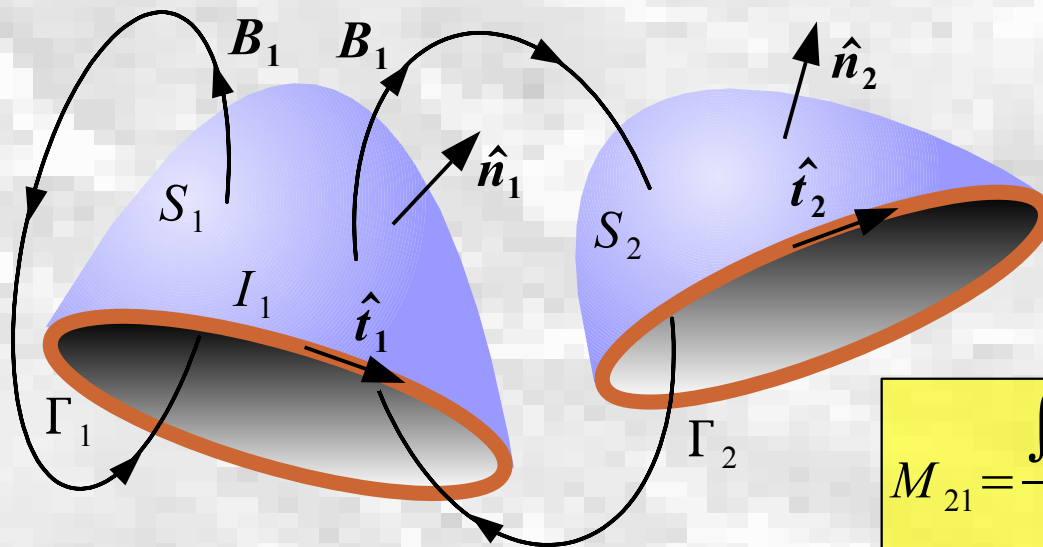


Modellazione di componenti ed effetti induttivi

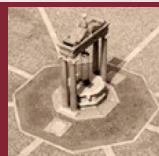
L'auto e la mutua induzione ... il coefficiente di mutua induzione

- Si consideri ora un secondo circuito avente Γ_2 come linea mediana, siano \hat{t}_2 ed \hat{n}_2 i corrispondenti versori definiti per il primo circuito. Si supponga che il primo circuito sia interessato dal passaggio della corrente I_1 . Al coefficiente di proporzionalità che lega il flusso dell'induzione magnetica, Φ_{21} , concatenato con il circuito

Γ_2 alla corrente I_1 che lo ha prodotto si da il nome di coefficiente di **mutua induzione** o **induttanza mutua**



$$M_{21} = \frac{\iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (\text{H})$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

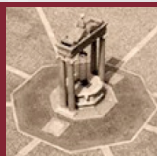
L'auto e la mutua induzione ... i coefficienti di auto e mutua induzione

- Se ad essere alimentato con la corrente I_2 diretta come il versore \hat{t}_2 è il secondo circuito elettrico elementare, Γ_2 , anziché il primo, si potranno analogamente definire i coefficienti di proporzionalità

$$L_2 = \frac{\iint_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds}{I_2} = \frac{\Phi_{22}}{I_2} \quad (\text{H})$$

$$M_{12} = \frac{\iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds}{I_2} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \quad (\text{H})$$

- I coefficienti di *auto* e di *mutua induzione* sono indipendenti dalla corrente: **dipendono unicamente dalla geometria del sistema e dalle caratteristiche magnetiche del mezzo.**



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

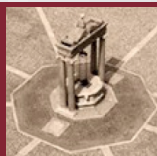
L'auto e la mutua induzione ... i flussi totali concatenati

- I flussi, Φ_{1c} e Φ_{2c} , che complessivamente si concatenano con i circuiti elementari Γ_1 e Γ_2 , quando questi sono percorsi dalle correnti I_1 ed I_2 , possono pertanto essere definiti mediante i coefficienti di auto e muta induzione (vale ovviamente il *principio di sovrapposizione degli effetti*)

$$\Phi_{1c} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_{2c} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$

- Si osservi che i coefficienti di muta induzione, M_{12} ed M_{21} , sono fra loro uguali, i.e. $M_{12} = M_{21}$, ciò intuitivamente deriva dal fatto che il tubo di flusso dell'induzione magnetica, che si concatena con entrambi i circuiti elettrici elementari, è ovviamente unico (nel prosieguo se ne darà dimostrazione).



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

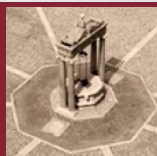
L'auto e la mutua induzione ... i flussi totali concatenati

- Più in generale, se siamo in presenza di N circuiti elettrici elementari, i flussi che con essi si concatenano potranno essere espressi come

$$\begin{aligned}\Phi_{1c} &= \Phi_{11} + \Phi_{12} + \dots + \Phi_{1N} = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + \dots + M_{1N} I_N \\ \Phi_{2c} &= \Phi_{21} + \Phi_{22} + \dots + \Phi_{2N} = M_{21} I_1 + L_2 I_2 + \dots + M_{2N} I_N \\ &\vdots \\ \Phi_{Nc} &= \Phi_{N1} + \Phi_{N2} + \dots + \Phi_{NN} = M_{N1} I_1 + M_{N2} I_2 + \dots + L_N I_N\end{aligned}$$

essendo i coefficienti di auto e mutua induzione così definiti

$$L_k = \left(\frac{\Phi_{kc}}{I_k} \right)_{I_j=0 \forall j \neq k} \quad M_{hk} = \left(\frac{\Phi_{hc}}{I_k} \right)_{I_j=0 \forall j \neq k} \quad \text{con} \quad M_{hk} = M_{kh}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... i flussi totali concatenati

Il coefficiente di autoinduzione L_k rappresenta il rapporto fra il flusso concatenato con il circuito k -esimo e la corrente che in esso vi scorre quando tutte le altre correnti sono nulle.

$$\Phi_{N1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + \dots + M_{1N} I_N$$

$$\Phi_{N2} = M_{21} I_1 + L_2 I_2 + \dots + M_{2N} I_N$$

$$\Phi_{Nc} = \Phi_{N1} + \Phi_{N2} + \dots + \Phi_{NN} = M_{N1} I_1 + M_{N2} I_2 + \dots + L_N I_N$$

essendo i coefficienti di auto e mutua induzione così definiti

$$L_k = \left(\frac{\Phi_{kc}}{I_k} \right)_{I_j=0 \forall j \neq k} \quad M_{hk} = \left(\frac{\Phi_{hc}}{I_k} \right)_{I_j=0 \forall j \neq k} \quad \text{con} \quad M_{hk} = M_{kh}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... i flussi totali concatenati

Il coefficiente di autoinduzione L_k di un circuito k -esimo in presenza di N circuiti elettrici concatenati con essi si concatenano potranno essere determinati. Il coefficiente di mutua induzione M_{hk} rappresenta il rapporto fra il flusso concatenato con il circuito h -esimo, e la corrente che scorre nel circuito k -esimo, quando tutte le altre correnti sono nulle.

$$L_1 I_1 + M_{12} I_2 + \dots + M_{1N} I_N$$

$$M_{21} I_1 + L_2 I_2 + \dots + M_{2N} I_N$$

$$M_{N1} I_1 + M_{N2} I_2 + \dots + L_N I_N$$

essendo i coefficienti di auto e mutua induzione così definiti

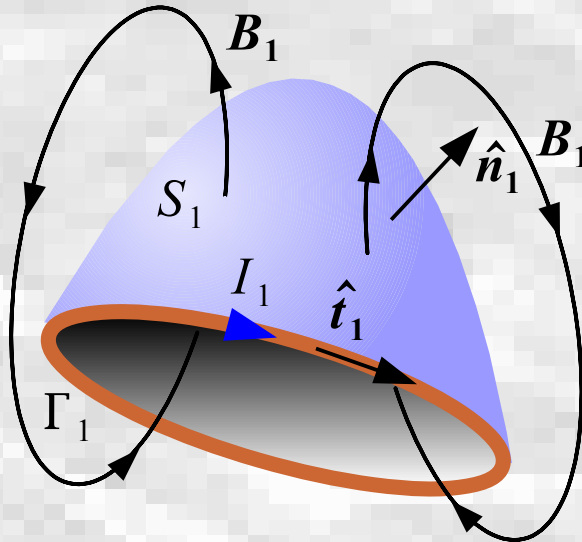
$$L_k = \left(\frac{\Phi_{kc}}{I_k} \right)_{I_j=0 \forall j \neq k} \quad M_{hk} = \left(\frac{\Phi_{hc}}{I_k} \right)_{I_j=0 \forall j \neq k} \quad \text{con} \quad M_{hk} = M_{kh}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

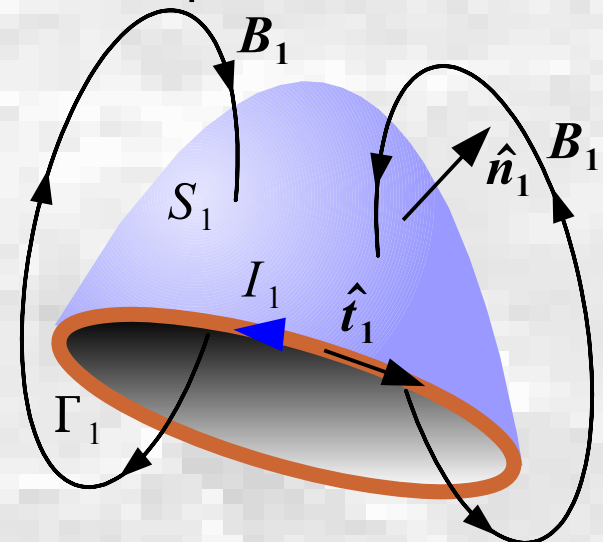
L'auto e la mutua induzione ... i segni dei coefficienti di induzione

- I coefficienti di auto e mutua induzione **hanno un segno** che deriva da come i flussi dell'induzione magnetica si combinano con le orientazioni dei vettori normali alle superfici.

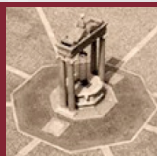


$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}$$

L'autoinduzione è sempre positiva



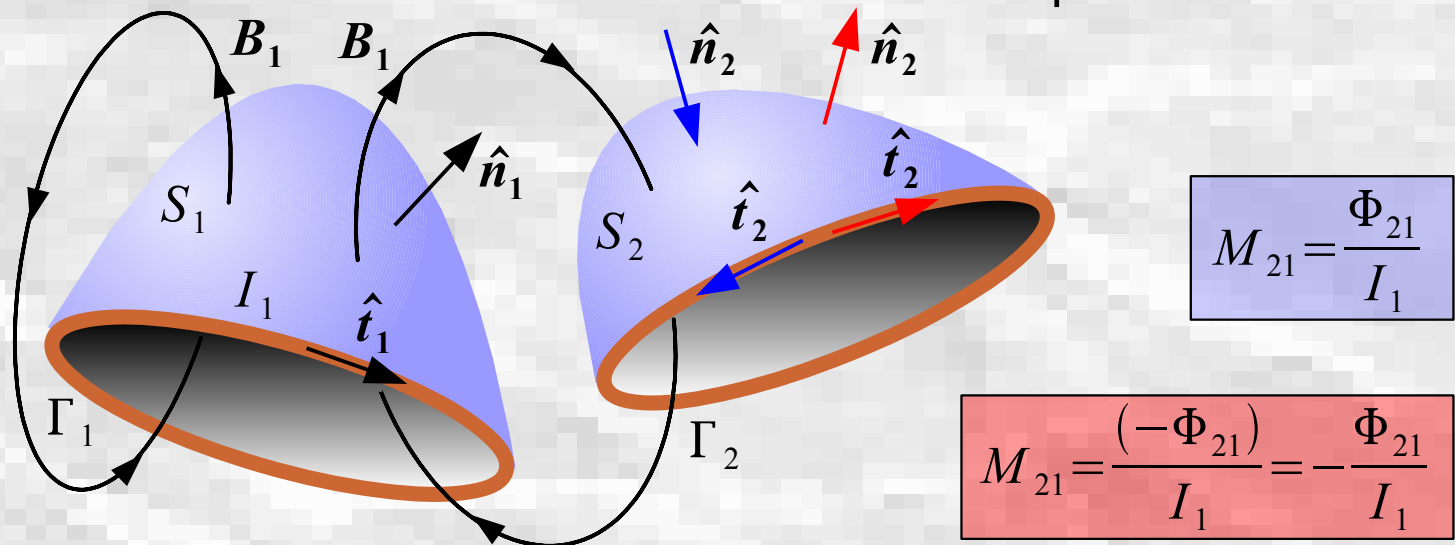
$$L_1 = \frac{-\Phi_{11}}{-I_1} = \frac{\Phi_{11}}{I_1}$$



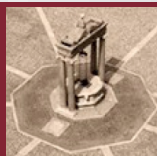
Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... i segni dei coefficienti di induzione

- I coefficienti di auto e mutua induzione **hanno un segno** che deriva da come i flussi dell'induzione magnetica si combinano con le orientazioni dei vettori normali alle superfici.

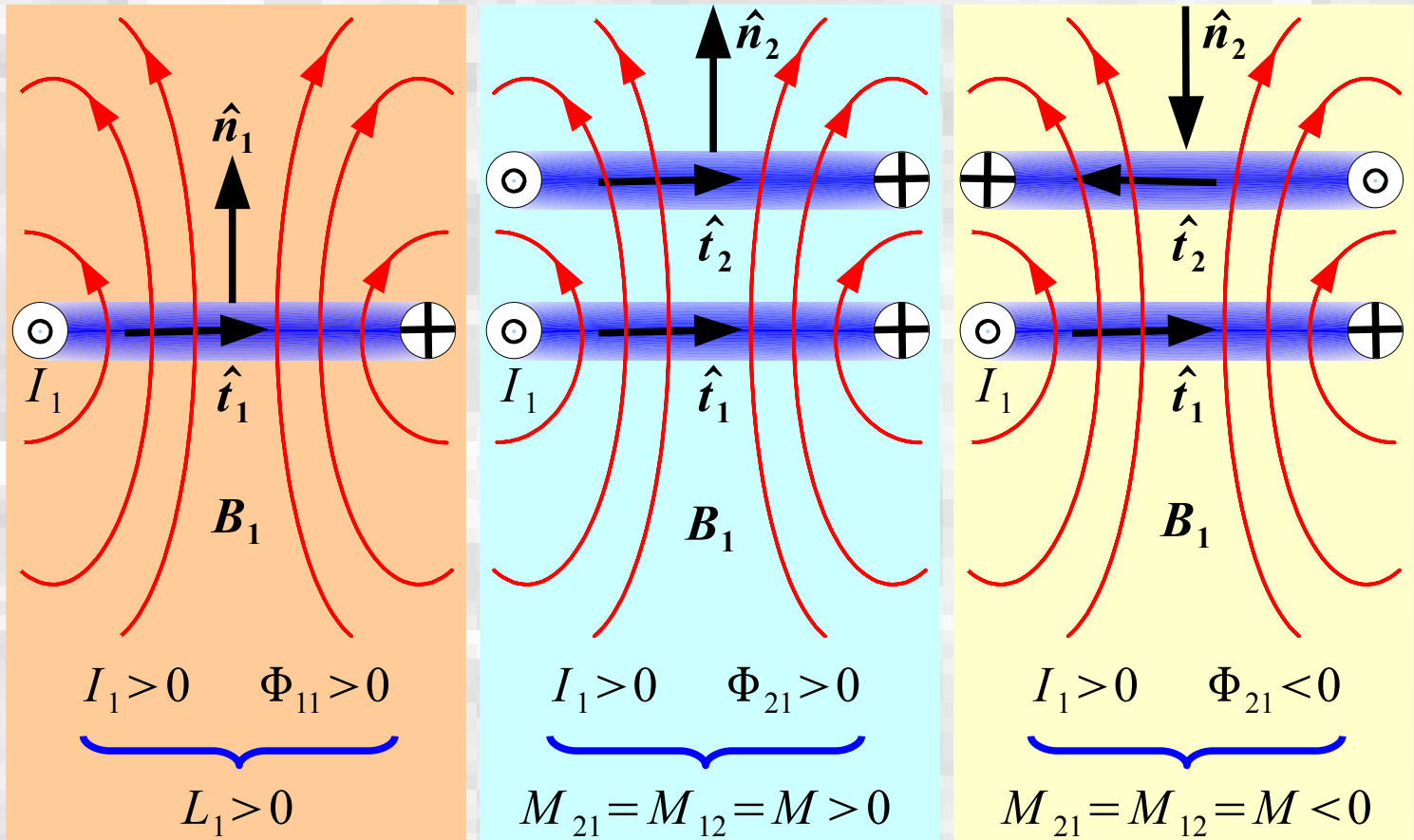


La mutua induzione può essere **positiva** o **negativa**



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

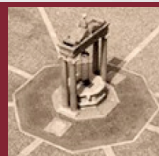
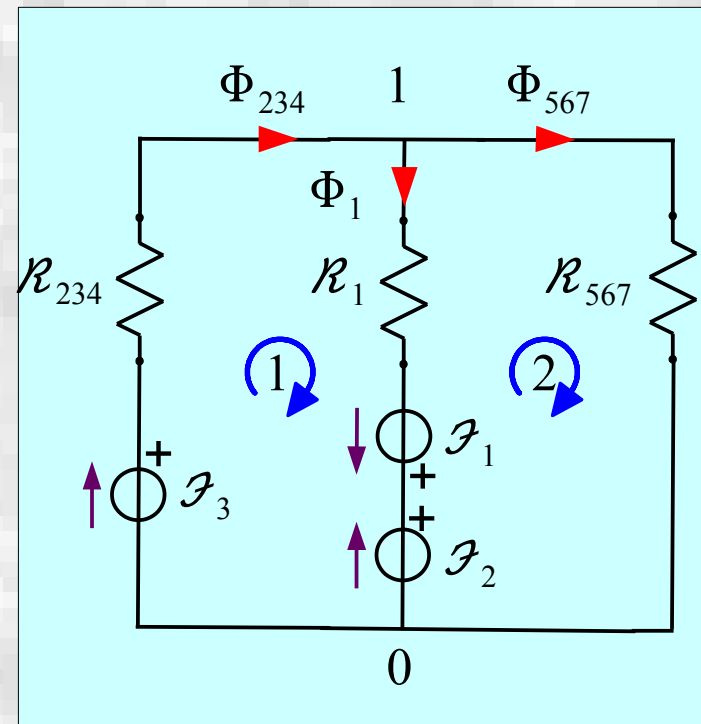
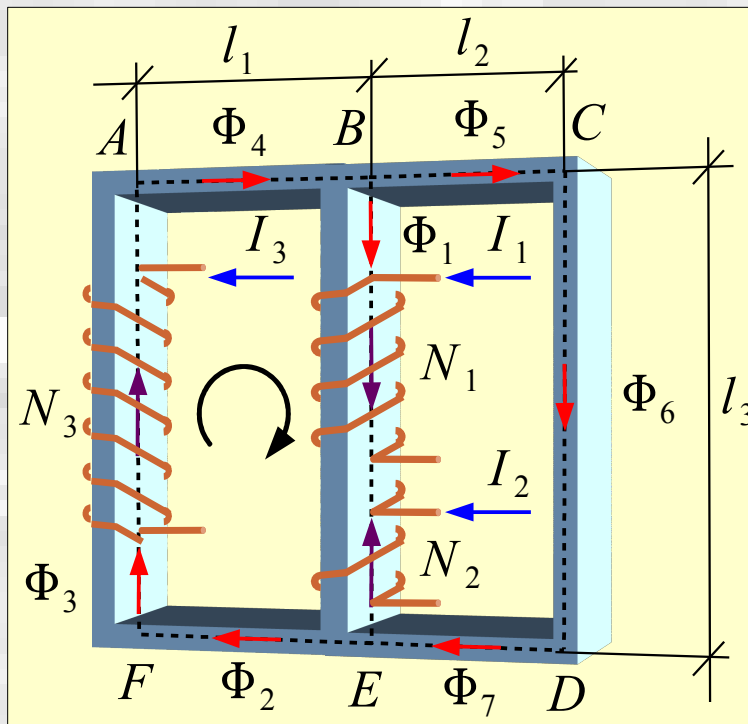
L'auto e la mutua induzione ... i segni dei coefficienti di induzione



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

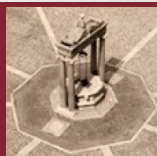
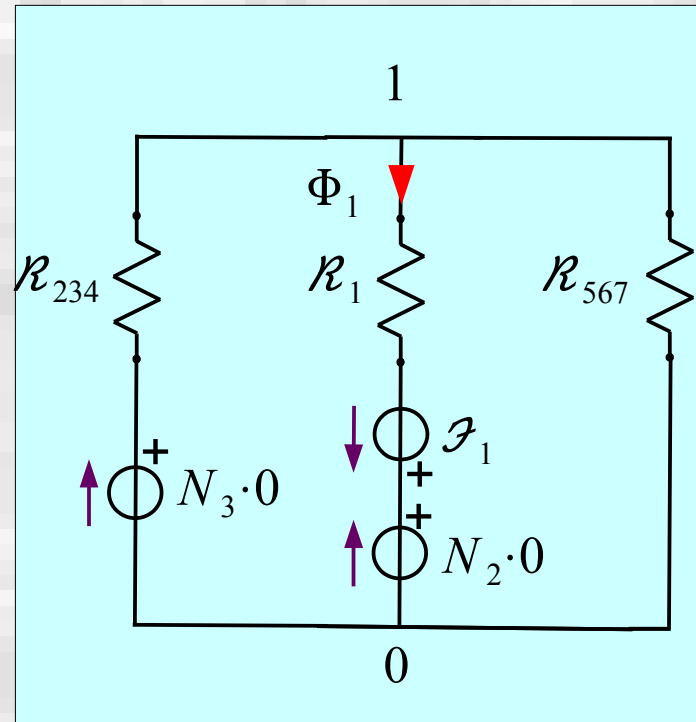
1. Coefficiente di autoinduzione L_1

$$L_1 = \frac{\Phi_{1c}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1}$$

$$\mathcal{F}_1 = \Phi_1 \left[\underbrace{\mathcal{R}_1 + \left(\frac{1}{\mathcal{R}_{234}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{567}} \right)^{-1}}_{\mathcal{R}_e} \right]$$

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_e}$$

$$L_1 = \frac{N_1 N_1 I_1}{I_1 \mathcal{R}_e} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_e}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

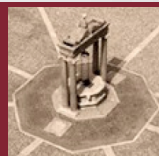
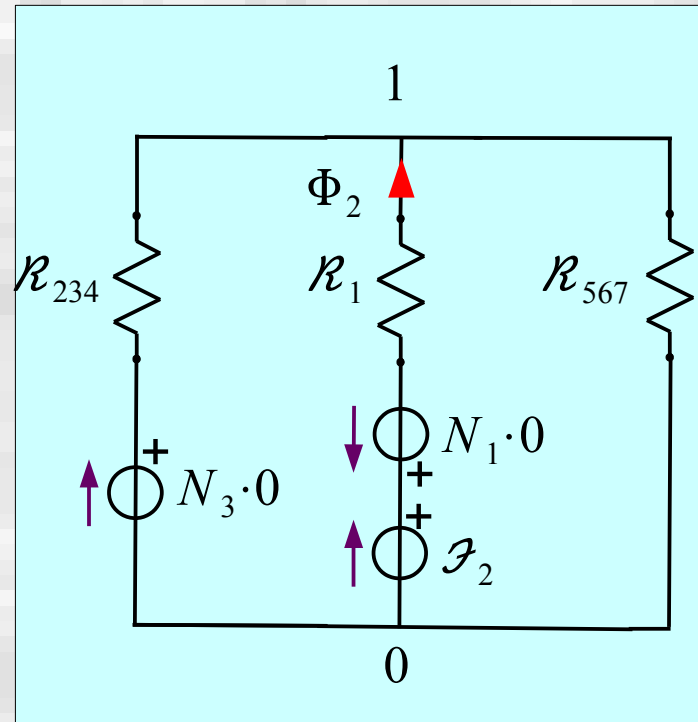
2. Coefficiente di autoinduzione L_2

$$L_2 = \frac{\Phi_{2c}}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2}$$

$$\mathcal{F}_2 = \Phi_2 \left[\underbrace{\mathcal{R}_1 + \left(\frac{1}{\mathcal{R}_{234}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{567}} \right)^{-1}}_{\mathcal{R}_e} \right]$$

$$\Phi_2 = \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_e}$$

$$L_2 = \frac{N_2 N_2 I_2}{I_2 \mathcal{R}_e} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_e}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

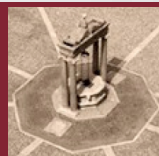
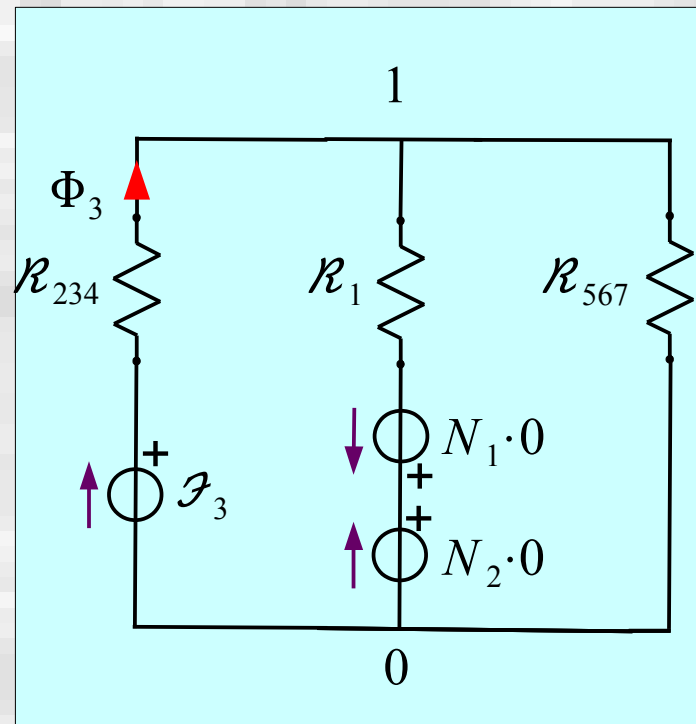
3. Coefficiente di autoinduzione L_3

$$L_3 = \frac{\Phi_{3c}}{I_3} = \frac{N_3 \Phi_3}{I_3}$$

$$\mathcal{F}_3 = \Phi_3 \left[\underbrace{\mathcal{R}_{234} + \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_{567}} \right)^{-1}}_{\mathcal{R}'_e} \right]$$

$$\Phi_3 = \frac{N_3 I_3}{\mathcal{R}'_e}$$

$$L_3 = \frac{N_3 N_3 I_3}{I_3 \mathcal{R}'_e} = \frac{N_3^2}{\mathcal{R}'_e}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

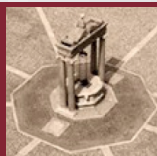
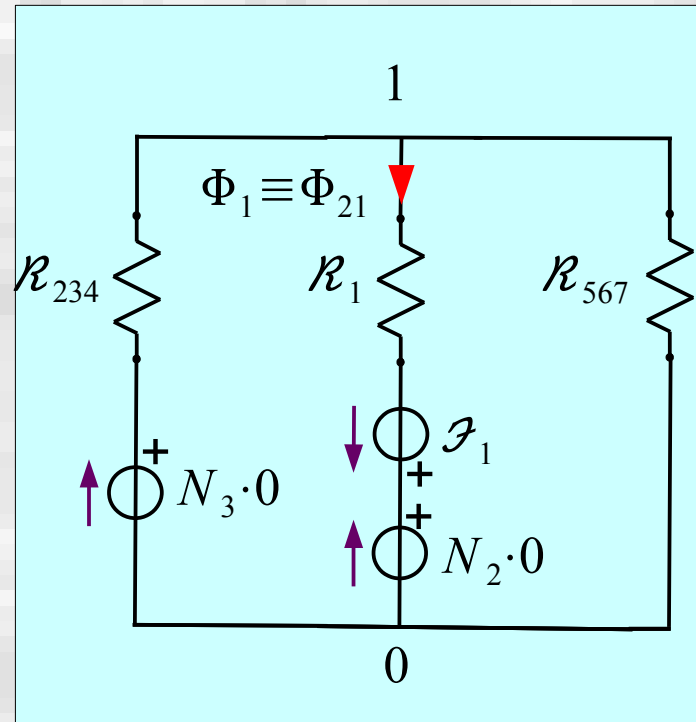
- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

4. Coefficiente di mutua induzione

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21c}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \quad (= M_{12})$$

$$\Phi_{21} \equiv \Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_e}$$

$$M_{21} = -\frac{N_2 N_1 I_1}{I_1 \mathcal{R}_e} = -\frac{N_2 N_1}{\mathcal{R}_e}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

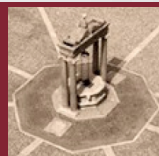
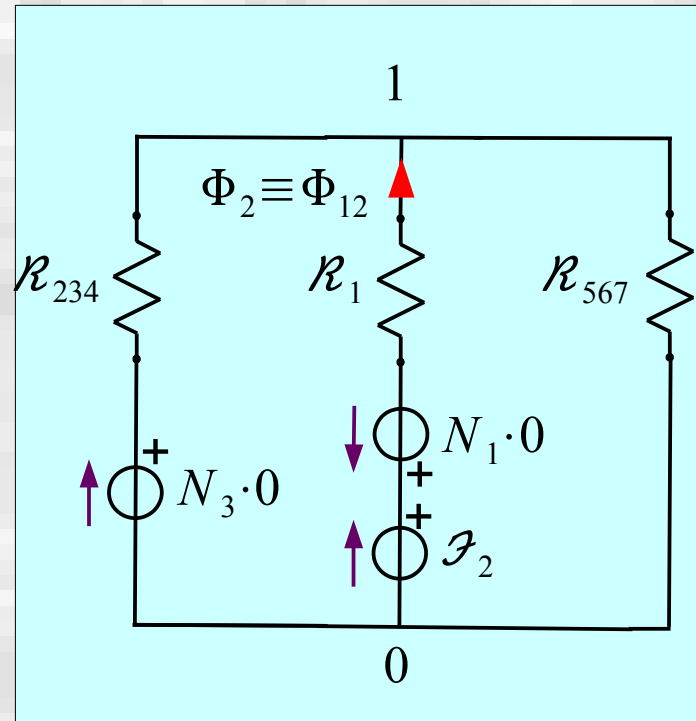
- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

5. Coefficiente di mutua induzione

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12c}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \quad (= M_{21})$$

$$\Phi_{12} \equiv \Phi_2 = \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_e}$$

$$M_{12} = - \frac{N_1 N_2 I_2}{I_2 \mathcal{R}_e} = - \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_e}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

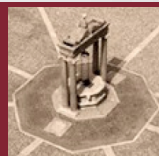
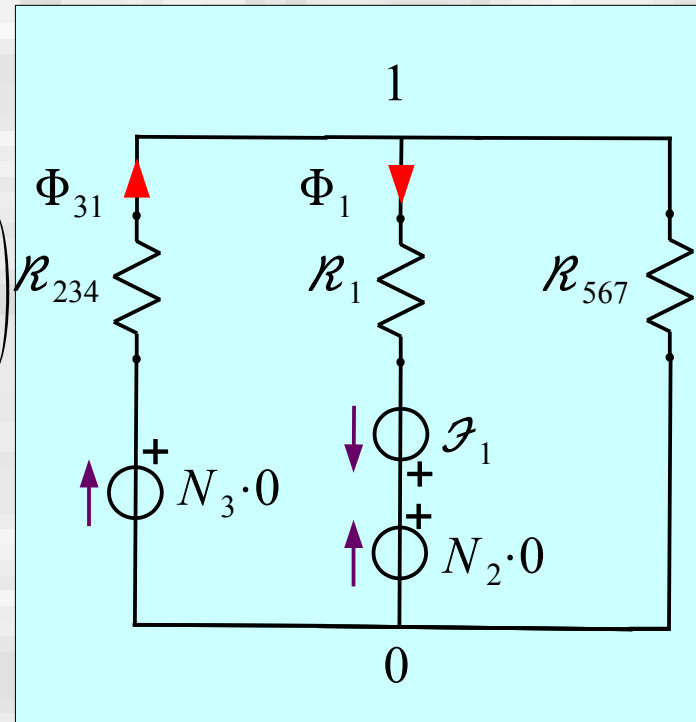
6. Coefficiente di mutua induzione

$$M_{31} = \frac{\Phi_{31c}}{I_1} = \frac{N_3 \Phi_{31}}{I_1} \quad (= M_{13})$$

$$\Phi_{31} = \frac{\mathcal{F}_1 - \mathcal{R}_1 \Phi_1}{\mathcal{R}_{234}} = \frac{N_1 I_1 \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_e}\right)}{\mathcal{R}_{234}}$$

$$M_{31} = \frac{N_3 N_1 I_1 \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_e}\right)}{I_1 \mathcal{R}_{234}} =$$

$$= \frac{N_3 N_1}{\mathcal{R}_{234}} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_e}\right)$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

7. Coefficiente di mutua induzione

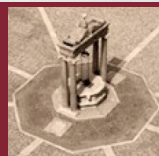
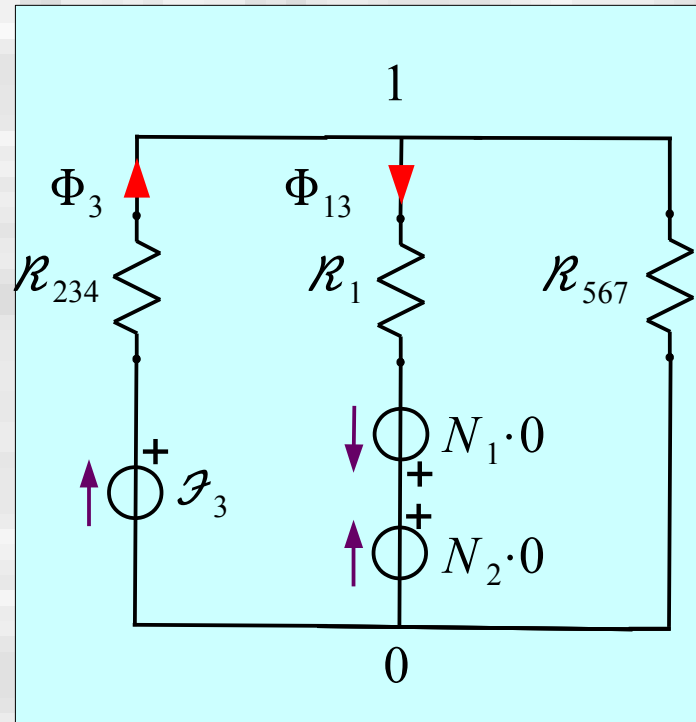
$$M_{13} = \frac{\Phi_{13c}}{I_3} = \frac{N_1 \Phi_{13}}{I_3} \quad (= M_{31})$$

$$\Phi_{13} = \frac{\mathcal{F}_3 - \mathcal{R}_{234} \Phi_3}{\mathcal{R}_1} =$$

$$= \frac{N_3 I_3}{\mathcal{R}_1} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_{234}}{\mathcal{R}'_e} \right)$$

$$M_{13} = \frac{N_1 N_3}{\mathcal{R}_1} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_{234}}{\mathcal{R}'_e} \right)$$

Verificare che si ha $M_{13} = M_{31}$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

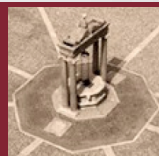
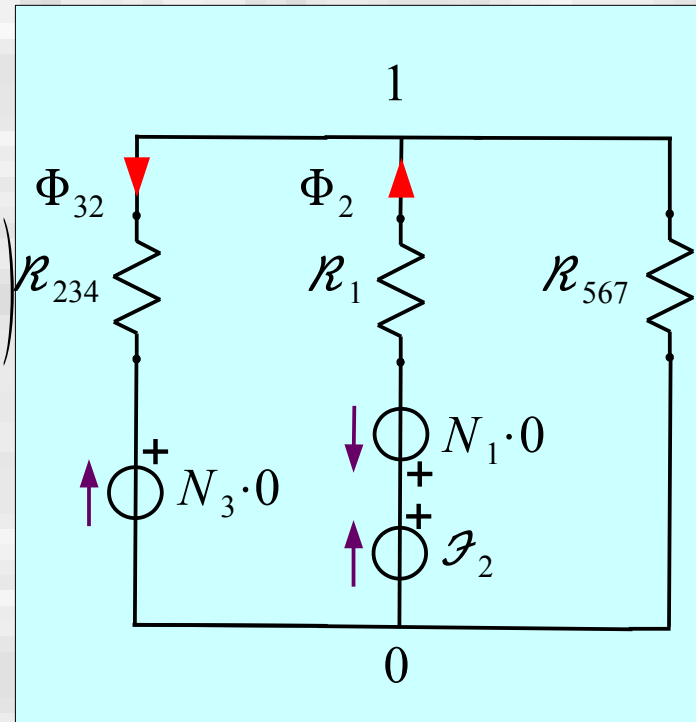
8. Coefficiente di mutua induzione

$$M_{32} = \frac{\Phi_{32c}}{I_2} = \frac{N_3 \Phi_{32}}{I_2} \quad (= M_{23})$$

$$\Phi_{32} = \frac{\mathcal{F}_2 - \mathcal{R}_1 \Phi_2}{\mathcal{R}_{234}} = \frac{N_2 I_2 \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_e}\right)}{\mathcal{R}_{234}}$$

$$M_{32} = -\frac{N_3 N_2 I_2 \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_e}\right)}{I_2 \mathcal{R}_{234}} =$$

$$= -\frac{N_3 N_2}{\mathcal{R}_{234}} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_e}\right)$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... un esempio di calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione

- Si consideri il circuito magnetico precedentemente studiato; si vogliono ora determinare i coefficienti di induzione:

9. Coefficiente di mutua induzione

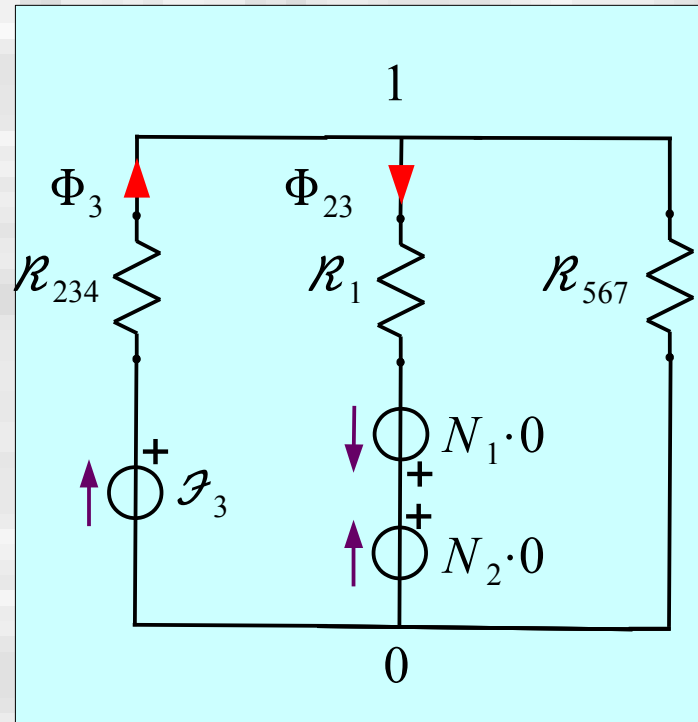
$$M_{23} = \frac{\Phi_{23c}}{I_3} = \frac{N_2 \Phi_{23}}{I_3} \quad (= M_{32})$$

$$\Phi_{23} = \frac{\mathcal{F}_3 - \mathcal{R}_{234} \Phi_3}{\mathcal{R}_1} =$$

$$= \frac{N_3 I_3}{\mathcal{R}_1} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_{234}}{\mathcal{R}'_e} \right)$$

$$M_{23} = - \frac{N_2 N_3}{\mathcal{R}_1} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_{234}}{\mathcal{R}'_e} \right)$$

Verificare che si ha $M_{23} = M_{32}$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... le formule di Neumann

- L'uguaglianza dei coefficienti di mutua induzione, M_{12} ed M_{21} , si può anche dimostrare analiticamente; infatti, esprimendo il flusso concatenato con un circuito elettrico elementare mediante il *potenziale vettore*

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

e ricordando che il potenziale vettore associato a ciascuno dei due circuiti elettrici elementari è rispettivamente dato da

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{\mathbf{t}}_1}{r} dl_1$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{\mathbf{t}}_2}{r} dl_2$$

i coefficienti di mutua induzione, M_{12} ed M_{21} , possono essere espressi come

...



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

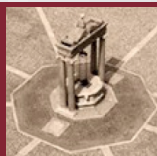
L'auto e la mutua induzione ... le formule di Neumann

$$\dots \left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{1}{I_2} \oint_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 dl_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2}{r} dl_2 dl_1 \\ M_{21} &= \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 dl_2 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1}{r} dl_1 dl_2 \end{aligned} \right\} M_{12} = M_{21}$$

- Le formule a cui si è pervenuti prendono nome di **formule di Neumann**; tali formule, oltre a dimostrare l'uguaglianza dei coefficienti di mutua induzione ed a consentirne la loro valutazione, consentono anche la determinazione dei coefficienti di autoinduzione

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \oint_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 dl_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1}{r} dl_1 dl_1$$

$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{1}{I_2} \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 dl_2 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2}{r} dl_2 dl_2$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... le formule di Neumann

Le formule di Neumann confermano ulteriormente come questi coefficienti non dipendano dalla corrente, ma unicamente dalla geometria del sistema e dalle caratteristiche magnetiche del mezzo.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2}{r} dl_2 dl_1 \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{t}_2 \cdot \hat{t}_1}{r} dl_1 dl_2 \end{aligned}$$

$$M_{12} = M_{21}$$

venuti prendono nome di **formule di Neumann** oltre a dimostrare l'uguaglianza dei coefficienti di mutua induzione ed a consentirne la loro valutazione, consentono anche la determinazione dei coefficienti di autoinduzione

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \oint_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot \hat{t}_1 dl_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{t}_1 \cdot \hat{t}_1}{r} dl_1 dl_1$$

$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{1}{I_2} \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_2 \cdot \hat{t}_2 dl_2 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{t}_2 \cdot \hat{t}_2}{r} dl_2 dl_2$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

L'auto e la mutua induzione ... le formule di Neumann

Le formule di Neumann non solo, confermano anche come questi coefficienti abbiano un segno: sempre positivo per le autoinduttanze, positivo o negativo per le mutue induttanze.

$$M > 0 \quad -\frac{\pi}{2} < \widehat{\hat{t}}_1 \widehat{\hat{t}}_2 < +\frac{\pi}{2}$$

$$M < 0 \quad +\frac{\pi}{2} < \widehat{\hat{t}}_1 \widehat{\hat{t}}_2 < +\frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2}{r} dl_2 dl_1$$

$$\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{t}_2 \cdot \hat{t}_1}{r} dl_1 dl_2$$

$$M_{12} = M_{21}$$

Le formule di Neumann prendono nome di **formule di Neumann**. Oltre a dimostrare l'uguaglianza dei coefficienti di mutua induzione ed a consentirne la loro determinazione anche la determinazione dei

$$\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{t}_1 \cdot \hat{t}_1}{r} dl_1 dl_1$$

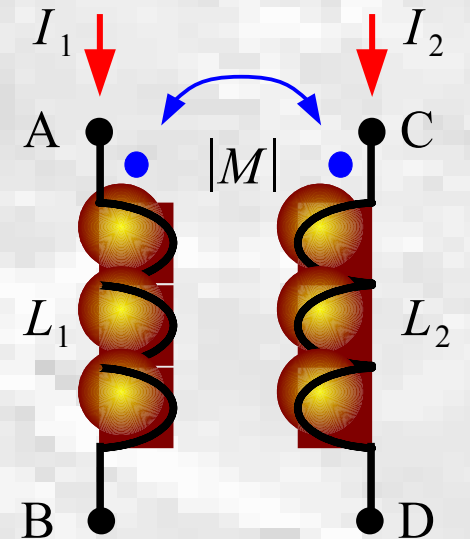
$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{1}{I_2} \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_2 \cdot \hat{t}_2 dl_2 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{t}_2 \cdot \hat{t}_2}{r} dl_2 dl_2$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

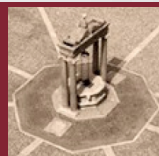
Il modello zero-dimensionale ... il bipolo induttivo

- Il comportamento magnetico descritto dai coefficienti di auto e di muta induzione è il modello sintetico di componenti fisici reali detti induttori e muti induttori.
- Attraverso questi modelli vengono anche descritti i comportamenti magnetici di sistemi fisici che non nascono specificamente per riprodurre queste proprietà ma che, per configurazione geometrica e proprietà elettromagnetiche, sono sede di trasformazioni energetiche che possono essere rappresentate da questi modelli.



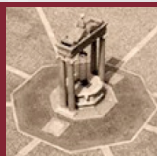
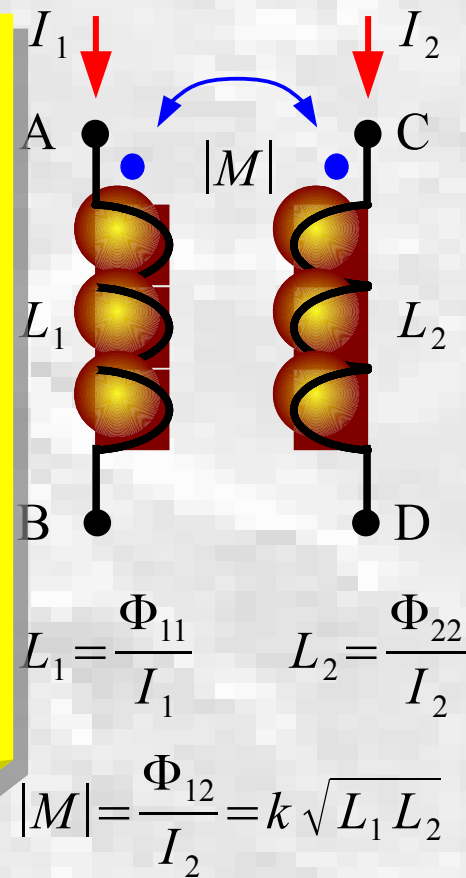
$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} \quad L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2}$$

$$|M| = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = k \sqrt{L_1 L_2}$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

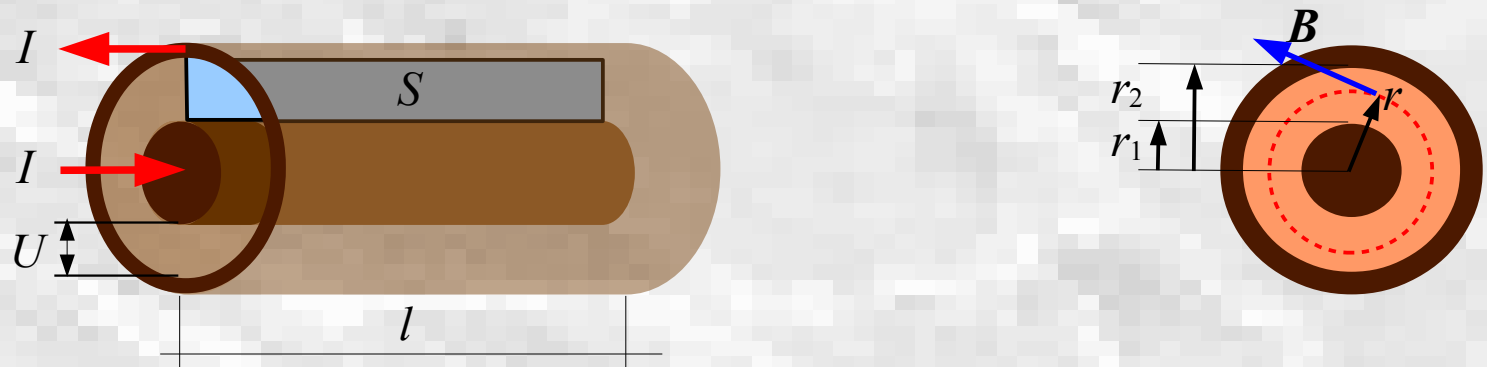
Il modello zero-dimensionale ... il bipolo induttivo



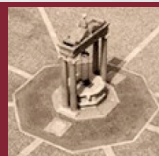
Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Il modello zero-dimensionale ... gli effetti induttivi nel cavo coassiale

- Si consideri cavo coassiale realizzato con un materiale isolante avente permeabilità magnetica μ compreso fra due conduttori cilindrici concentrici di lunghezza l , aventi rispettivamente raggi esterno r_1 ed interno r_2 e fra cui è imposta la tensione U ed in cui vi scorre la corrente totale I . Si vuole determinare l'induttanza del cavo coassiale.



La corrente totale I che scorre nel conduttore interno genera, nella regione di permeabilità μ compresa fra i due conduttori, un campo di



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Il modello zero-dimensionale ... gli effetti induttivi nel cavo coassiale

... induzione magnetica, in corrispondenza della generica distanza radiale r dall'asse del conduttore interno, espresso dalla

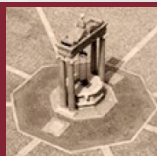
$$\mathbf{B} = \hat{\phi} \mu \frac{I}{2\pi r}$$

Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso la superficie piana S , compresa tra i due conduttori ed ortogonale alle linee di campo, è esprimibile come

$$\Phi = l \int_{r_1}^{r_2} B dr = l \int_{r_1}^{r_2} \mu \frac{I}{2\pi r} dr = \mu \frac{I l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

L'induttanza (e l'induttanza per unità di lunghezza) è quindi data da

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \text{p.u. di lunghezza} \quad L' = \frac{L}{l} = \mu \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Il modello zero-dimensionale ... gli effetti induttivi nel cavo coassiale

Risulta quindi confermato che l'induttanza dipende unicamente dalla geometria del sistema e dalle caratteristiche magnetiche entro cui si sviluppano le linee di forza del campo di induzione magnetica.

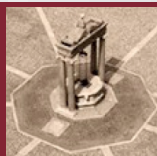
Si osservi che quella calcolata è l'induttanza (*esterna*) che prescinde dal contributo del flusso interno ai due conduttori cilindrici coassiali.

generica distanza
so dalla

$$\Phi = l \int_{r_1} B dr = l \int_{r_1} \mu \frac{I}{2\pi r} dr = \mu \frac{I l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

L'induttanza (e l'induttanza per unità di lunghezza) è quindi data da

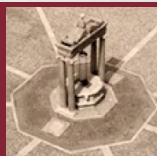
$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \text{p.u. di lunghezza} \quad L' = \frac{L}{l} = \mu \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Il modello zero-dimensionale ... gli effetti induttivi nel cavo coassiale

- L'energia magnetica immagazzinata in una regione di spazio perturbata dall'azione di un campo magnetico è determinabile osservando che se si aumenta il campo magnetico H di una quantità infinitesima dH la variazione infinitesima dB del campo di induzione magnetica B produce nel volume infinitesimo dv una variazione infinitesima di energia espressa da $dW_m = H dB dv$ e nell'unità di volume diventa $dW'_m = H dB$ prescindendo dagli infinitesimi di ordine superiore dovuti agli effetti della corrispondente variazione infinitesima dH .
- Quando il campo magnetico H varia in modo tale da produrre un incremento dell'induzione magnetica da 0 al valore B l'energia specifica W' immagazzinata nello spazio perturbato dal campo è data da



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

Il modello zero-dimensionale ... gli effetti induttivi nel cavo coassiale

$$W'_m = \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \int_0^B B dB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \mu H^2$$

nei mezzi magnetici lineari (i.e., con μ costante).

- L'energia magnetica totale W_m immagazzinata in un regione dello spazio (e.g., a comportamento magnetico lineare) si ottiene integrando nel volume V l'energia specifica W'_m

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dv = \frac{1}{2} \iiint_V B H dv = \frac{1}{2} \mu \iiint_V H^2 dv$$

- Con riferimento al cavo coassiale studiato in precedenza l'energia magnetica totale immagazzinata nel volume compreso fra i due conduttori cilindrici quando il campo di induzione magnetica passa da 0 a B è esprimibile come



Modellazione di componenti ed effetti induttivi

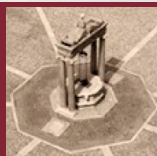
Il modello zero-dimensionale ... gli effetti induttivi nel cavo coassiale

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \iiint_V H^2 dv$$

ricordando che $H = \frac{B}{\mu} = \frac{I}{2\pi r}$ l'espressione dell'energia diventa

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \iiint_V H^2 dv = \frac{1}{2} \mu \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r l dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{1}{2} L I^2$$

- Si noti la stretta analogia fra l'espressione dell'energia magnetica e dell'energia elettrostatica sia nella sua formulazione generale che in quella relativa ai condensatori ed agli induttori, nonché a quella ancora più specifica relativa al cavo coassiale.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

L'analogia tra i campi statici

- Da quanto fin qui esposto è emersa una stretta **analogia** fra il *campo elettrostatico* ed il *campo statico di conduzione* nelle regioni dello spazio ove non siano presenti campi impressi

ELETTROSTATICO

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

Capacità

$$C_{AB} = \frac{\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl} = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{1}{B_{AB}}$$

$$Q = C_{AB} U_{AB} \quad (U_{AB} = B_{AB} Q)$$

STATICO DI CONDUZIONE

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Conduttanza

$$G_{AB} = \frac{\iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl} = \frac{I}{U_{AB}} = \frac{1}{R_{AB}}$$

Legge di Ohm

$$I = G_{AB} U_{AB} \quad (U_{AB} = R_{AB} I)$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

L'analogia tra i campi statici

Dalla stretta analogia evidenziata discende anche che, per una stessa configurazione geometrica, le espressioni della capacità del tronco di tubo di flusso di \mathbf{D} e quella della conduttanza (ovvero della resistenza) del tronco di tubo di flusso di \mathbf{J} sono identiche, a meno delle caratteristiche del mezzo, quindi

$$R_{AB} C_{AB} = \left(\frac{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} \right) \left(\frac{\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl} \right) = \frac{\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \frac{\epsilon \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{\sigma \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = Q \epsilon$$

e cioè $R C = Q \epsilon = \frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{C}{G}$

$$Q = C_{AB} U_{AB} \quad (U_{AB} = B_{AB} Q)$$

Legge di Ohm

$$I = G_{AB} U_{AB} \quad (U_{AB} = R_{AB} I)$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

L'analogia tra i campi statici

...

- Inoltre, è emersa altresì anche una stretta **analogia** fra il *campo magnetostatico* ed il *campo statico di conduzione* nelle regioni dello spazio ove non siano presenti campi impressi

MAGNETOSTATICO

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

Riluttanza

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\int_A^B \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \frac{\varphi_{mAB}}{\Phi}$$

Legge di Hopkinson

$$\varphi_{mAB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi$$

STATICO DI CONDUZIONE

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Resistenza

$$R_{AB} = \frac{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \frac{U_{AB}}{I}$$

Legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

L'analogia tra i campi statici

- Inoltre, è emerso, altresì, anche una stretta analogia fra il
nel-
ssi
ONE
- Confrontando le espressioni della **resistenza d'isolamento** e della **capacità** del cavo coassiale ottenute in precedenza con quella dell'**induttanza (esterna)** si può osservare che sussistono le seguenti relazioni (dovute alla stretta analogia esistente fra i campi statici di conduzioni, i campi elettrostatici ed i campi magnetostatici)

$$R_i' = \rho \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad L' = \mu \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$R_i' C' = \rho \epsilon$$

$$G_i' L' = \sigma \mu$$

$$L' C' = \mu \epsilon$$

$$\Phi_{mAB} = \mathcal{R}_{AB} \Psi$$

$$U_{AB} = R_{AB} I$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

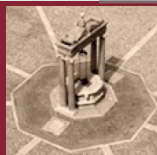
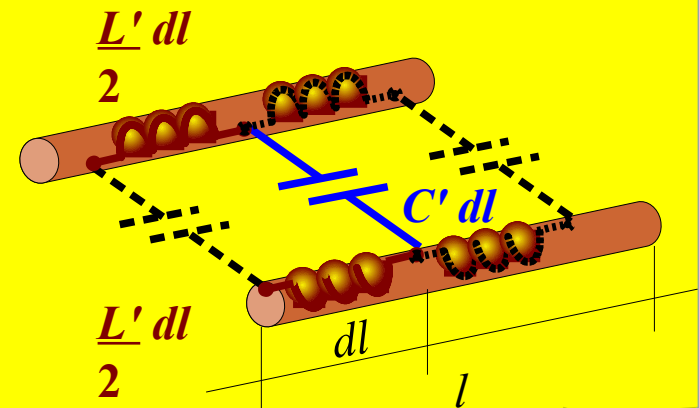
L'analogia tra i campi statici

- Inoltre, è emerso, altresì, anche una stretta analogia fra il
Confrontando le espressioni della resistenza d'isolamento e

In base a quanto visto, ed a titolo di esempio, avendo determinato l'espressione della capacità per unità di lunghezza della linea bifilare (cfr capitolo precedente) si può facilmente dedurre l'espressione della sua induttanza per unità di lunghezza

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)} \quad L' C' = \mu \epsilon$$

$$L' = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{C'} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

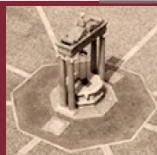
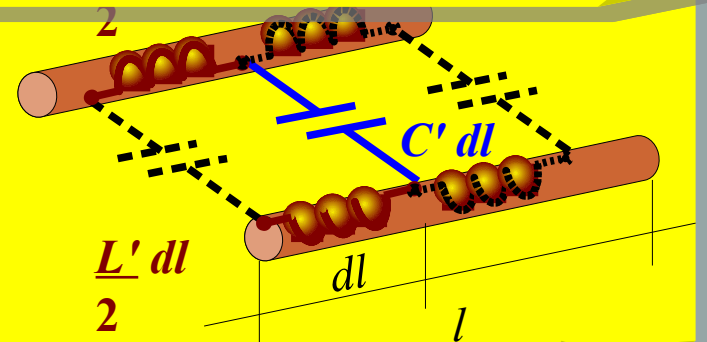


I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

L'analogia tra i campi statici

- Inoltre, è emerso, altresì, anche una stretta analogia fra il
Confrontando le espressioni della resistenza d'isolamento e
In base a quanto visto, ed a titolo di esempio, avendo determi-
Risulta infine ulteriormente confermato che la resistenza, la
li capacità e l'induttanza di un tronco di tubo di flusso **non**
e l' **dipendono dalle grandezze di campo ma solo dalla**
e **geometria del tubo di flusso e dalle proprietà del mezzo.**

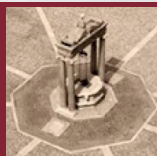
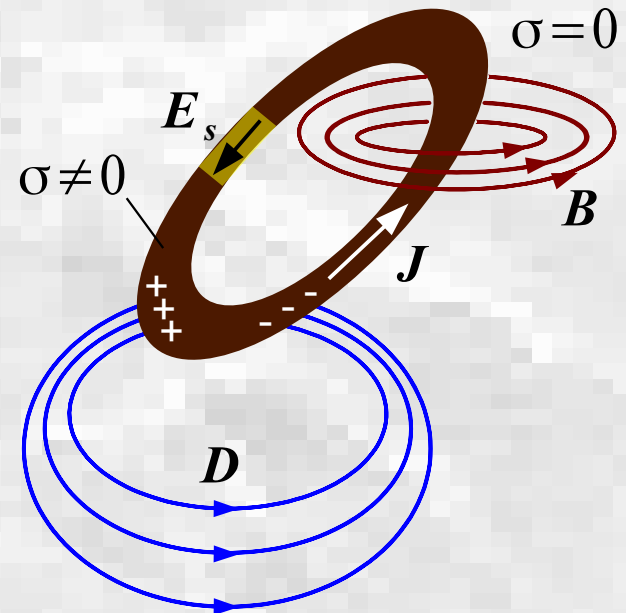
$$L' = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{C'} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

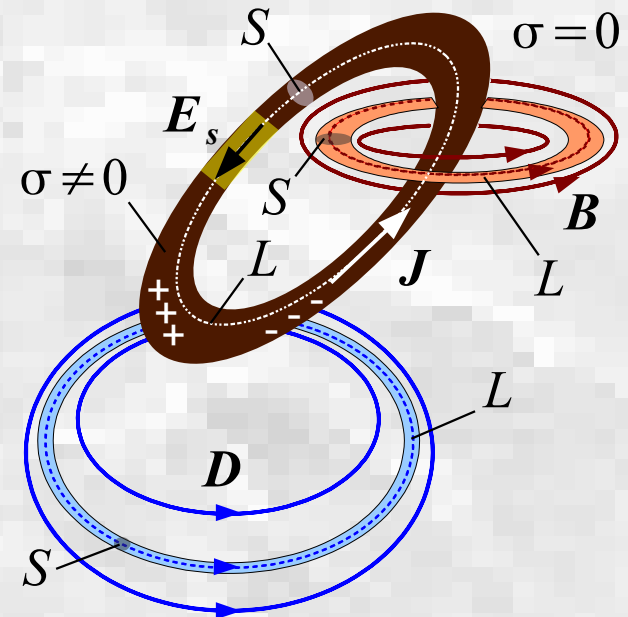
- Quando in un circuito elettrico elementare (tubo di flusso filiforme) in condizioni stazionarie, per azione di un campo elettrico non conservativo E_s , scorre una densità di corrente, J ,
 - in corrispondenza della superficie laterale del conduttore è presente una distribuzione superficiale di carica elettrica da cui hanno origine le linee di forza dell'induzione elettrica D ;
 - mentre, nella regione circostante il conduttore, è presente una induzione magnetica B le cui linee di forza chiuse si concatenano con il circuito elettrico.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- Alle linee di forza del campo elettrostatico e di quello magnetostatico, possono essere associati tubi di flussi filiformi così definiti:
 - alla superficie del conduttore si appoggiano dei tubi di flusso di \mathbf{D} sulle cui sezioni terminali si localizzano cariche uguali e opposte, e questi tubi di flusso costituiscono dei condensatori elementari;
 - le linee di forza di \mathbf{B} delimitano dei tubi di flusso chiusi che si concatenano sempre con il circuito elettrico elementare.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

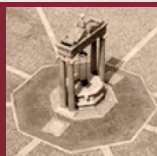
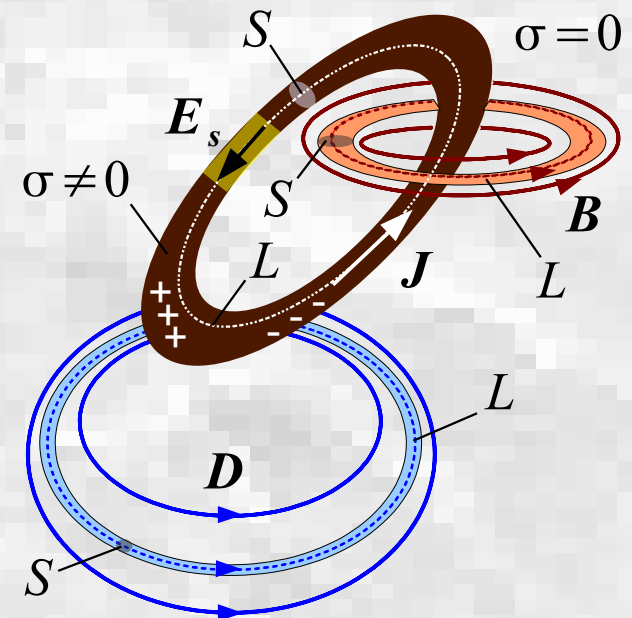
I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- I tubi di flusso filiformi associati al campo statico di conduzione, a quello elettrostatico ed al campo magnetostatico, sono caratterizzati dalle seguenti leggi ed equazioni

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Legge di} \\ \text{Ohm} \\ e = R I \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Equazione del} \\ \text{condensatore} \\ Q = C V \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Legge di} \\ \text{Hopkinson} \\ \mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi \end{array} \right.$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- Le costanti di proporzionalità, rappresentative del legame causa effetto all'interno dei tubi di flusso, sono così definite:

— Resistenza

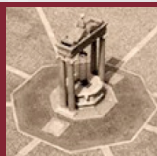
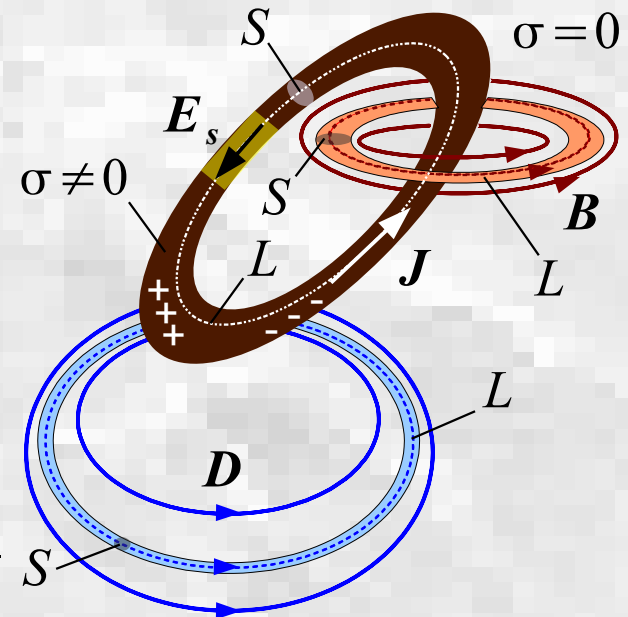
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x) A(x)}$$

— Capacità

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \int_0^l \frac{dx}{\varepsilon(x) A(x)}$$

— Riluttanza

$$\mathcal{R} = \frac{\Phi_m}{\Phi} = \frac{\int_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x) A(x)}$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- Le costanti di proporzionalità rappresentative del legame causa effetto al caso di tubi di flusso uniformi. Queste relazioni valgono nel caso di tubi di flusso uniformi.

— Resistenza

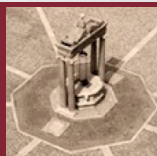
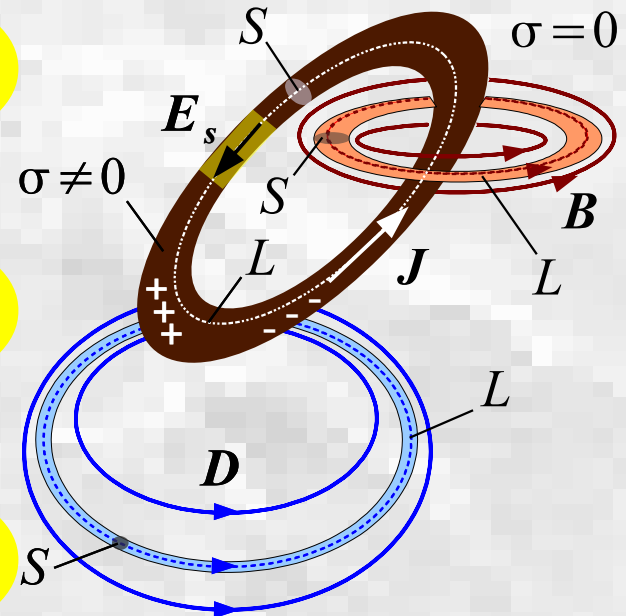
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x) A(x)}$$

— Capacità

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \int_0^l \frac{dx}{\varepsilon(x) A(x)}$$

— Riluttanza

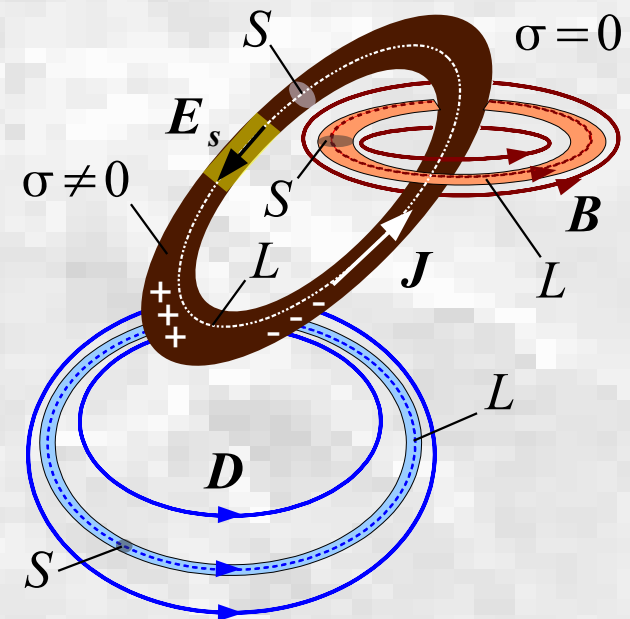
$$\mathcal{R} = \frac{\Phi_m}{\Phi} = \frac{\int_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x) A(x)}$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

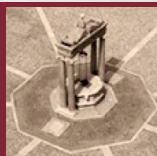
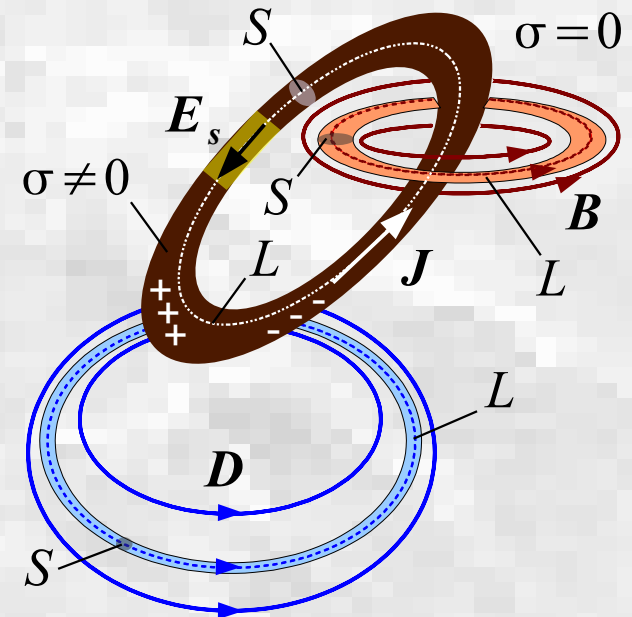
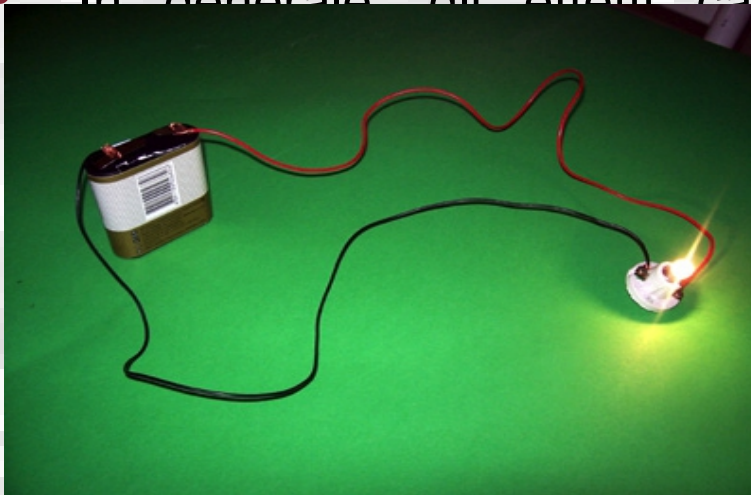
- In generale, gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono distribuiti sull'intero circuito elettrico. Tuttavia, ai fini della rappresentazione di questi effetti per la valutazione della risposta del sistema fisico attraverso il suo equivalente circuitale, possono essere rappresentati mediante bipoli capacitivi ed induttivi, analogamente alle sorgenti ed agli effetti dissipativi (o ai carichi), che sono normalmente rappresentati mediante i bipoli generatori di f.e.m. ed i bipoli resistivi.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

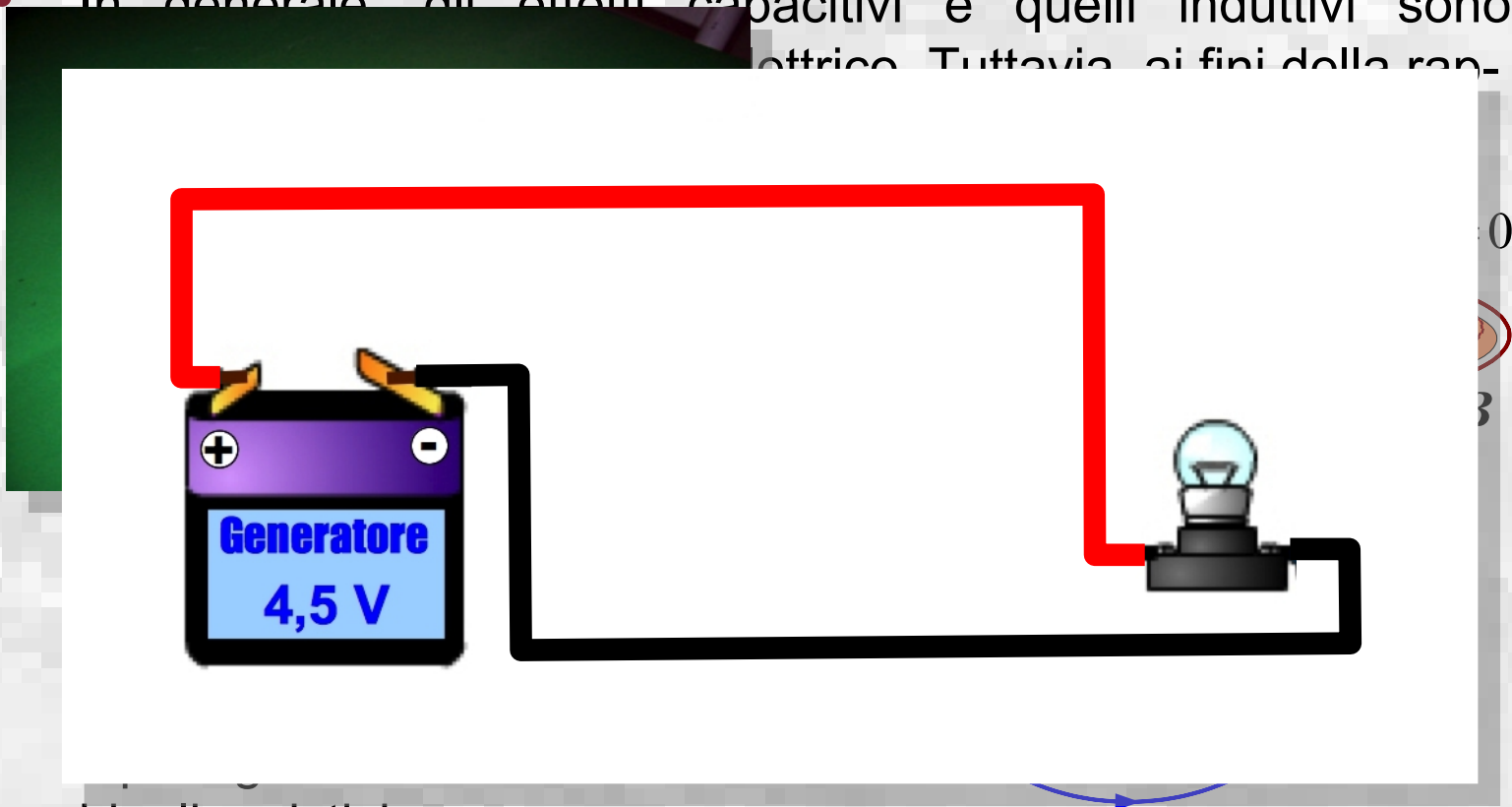
- In generale, gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono effetti secondari rispetto all'effetto elettrico. Tuttavia, ai fini della rappresentazione, gli effetti capacitivi ed induttivi sono considerati come effetti primari, analogamente alle sorgenti ed agli effetti dissipativi (o ai carichi), che sono normalmente rappresentati mediante i bipoli generatori di f.e.m. ed i bipoli resistivi.



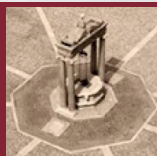
I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- In generale gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono elettrici. Tuttavia ai fini della rap-



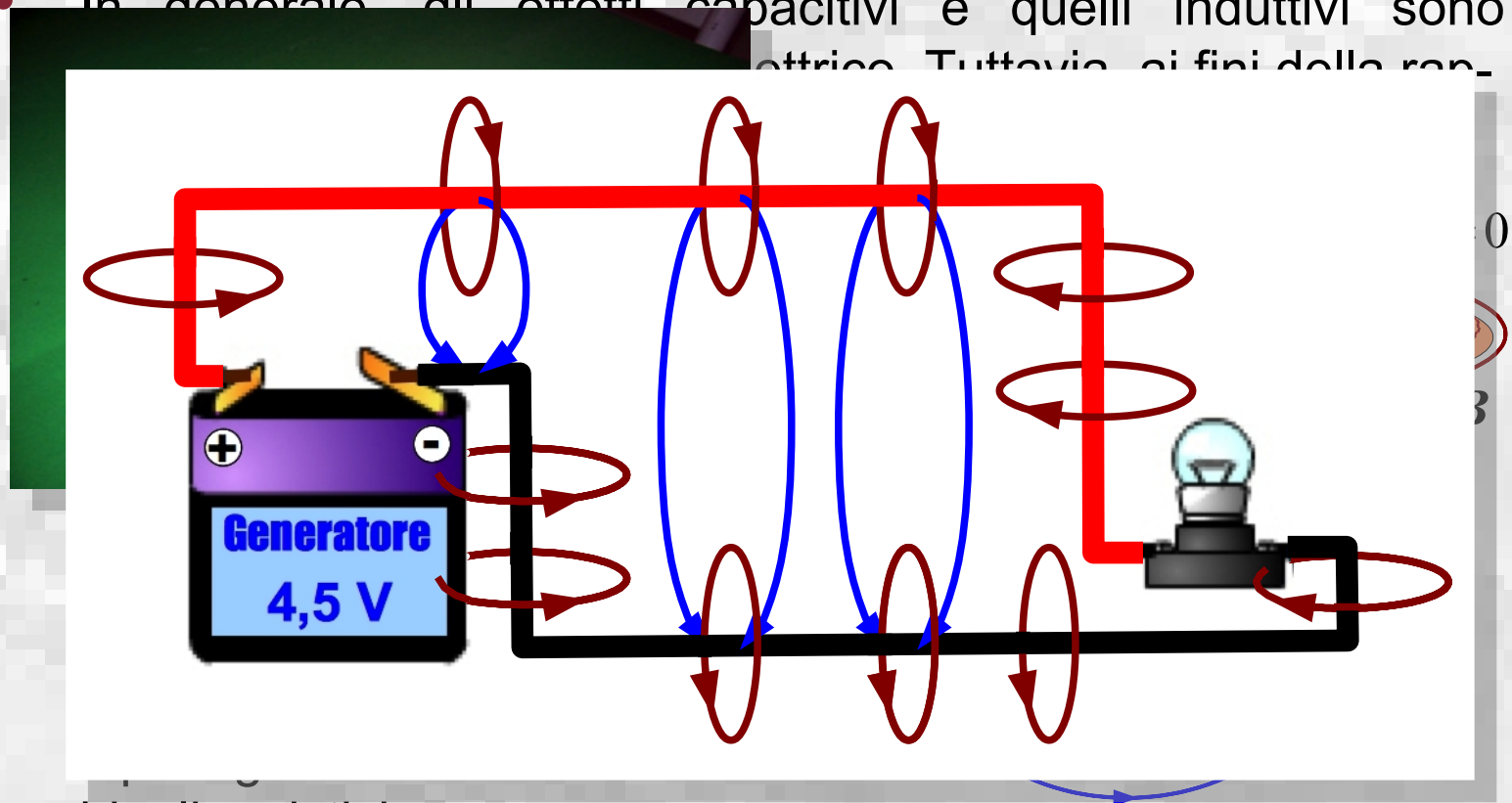
bipoli resistivi.



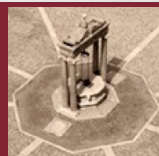
I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- In generale, gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono trascurabili nei circuiti stazionari. Tuttavia, ai fini della rappresentazione grafica, si possono considerare i circuiti come se fossero costituiti da bipoli resistivi.



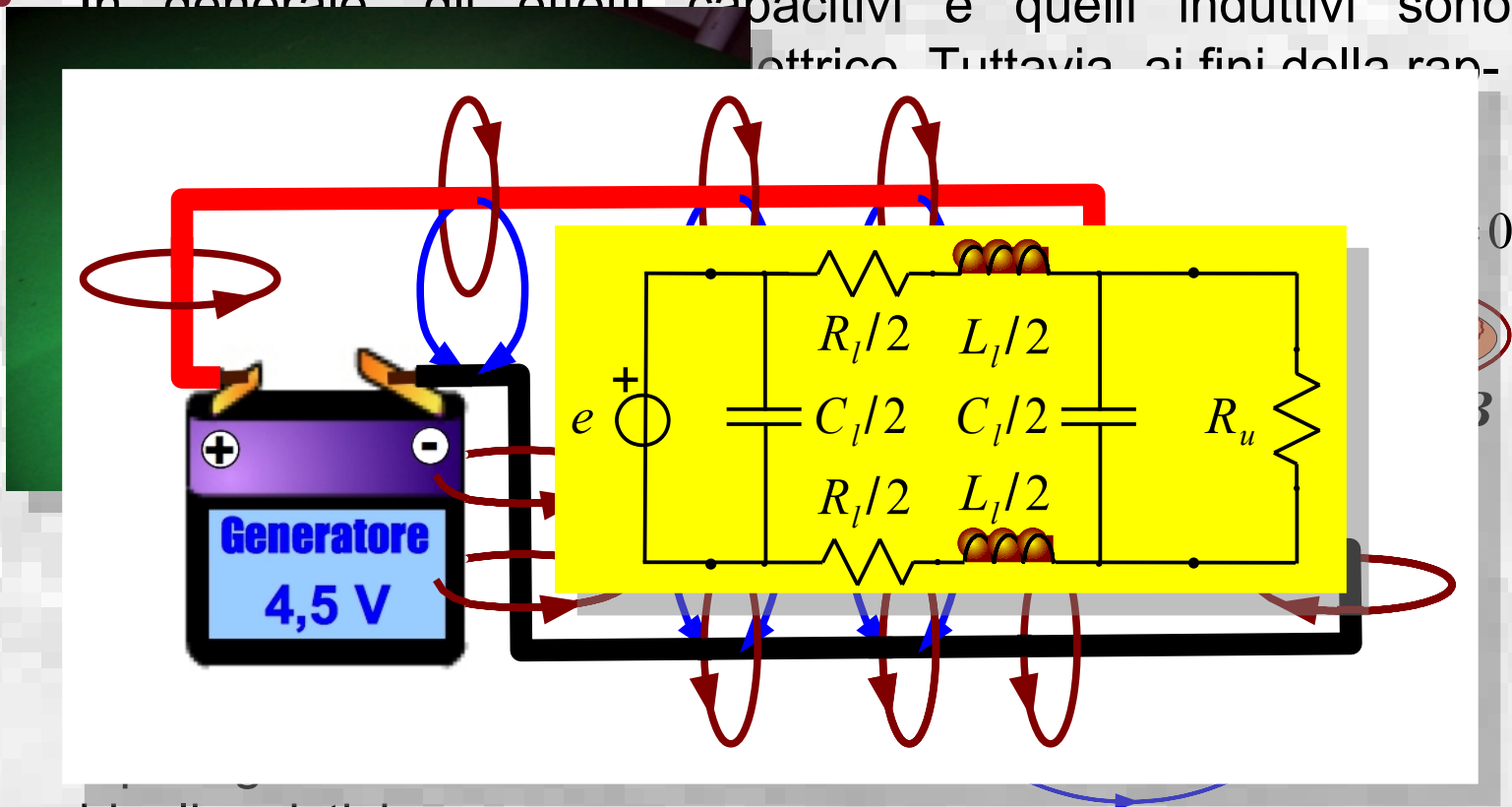
bipoli resistivi.



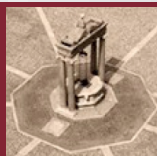
I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- In generale gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono ...



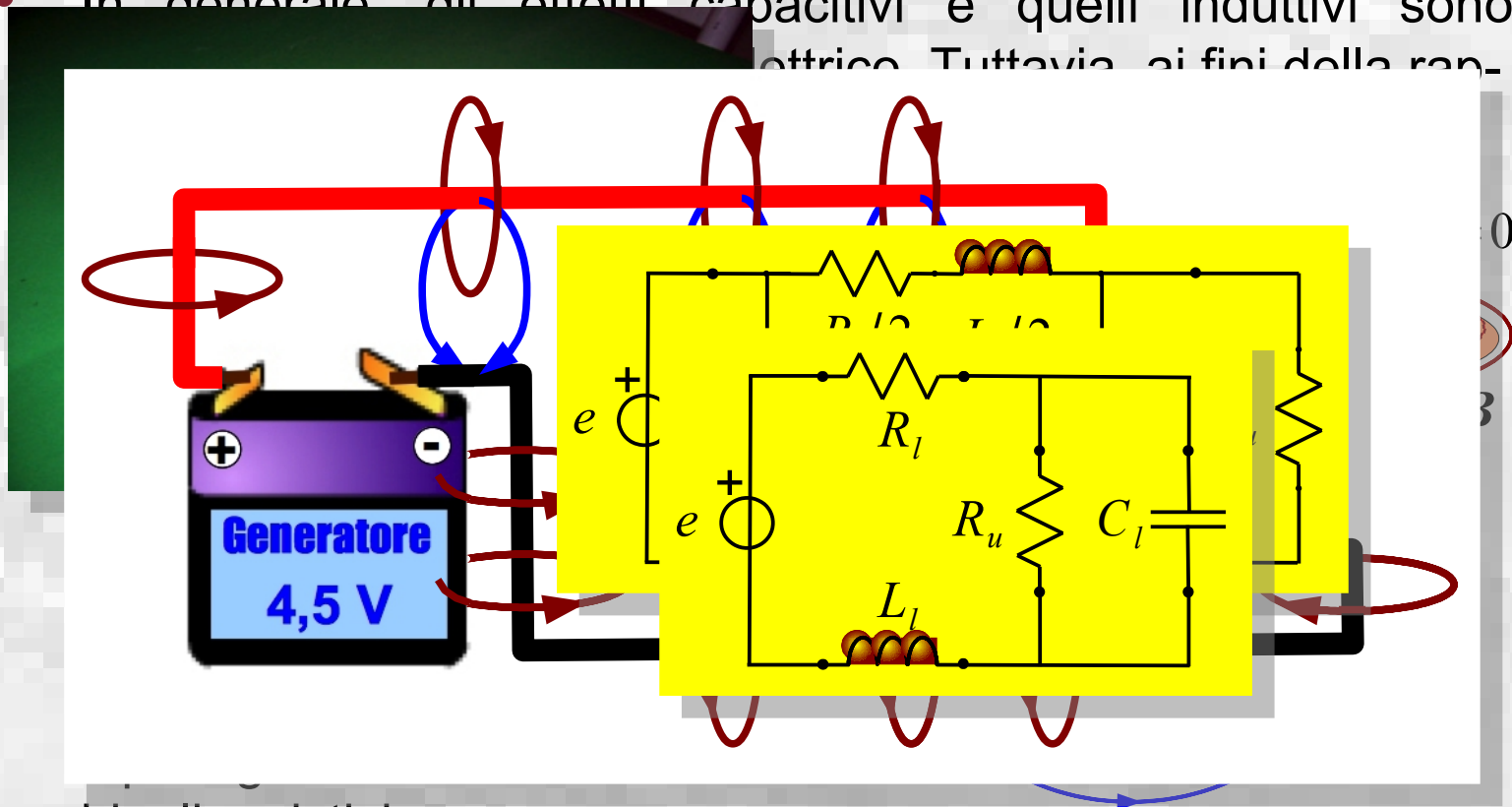
bipoli resistivi.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... gli effetti capacitivi ed induttivi

- In generale gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono



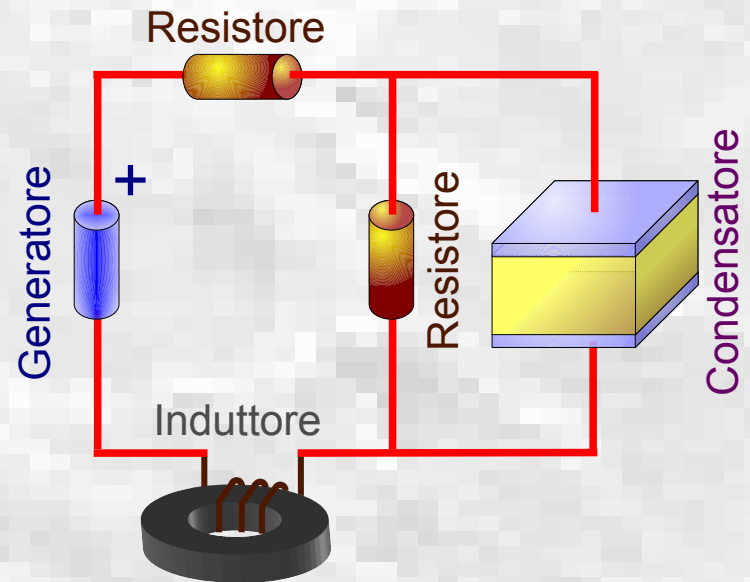
bipoli resistivi.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... i componenti circuitali

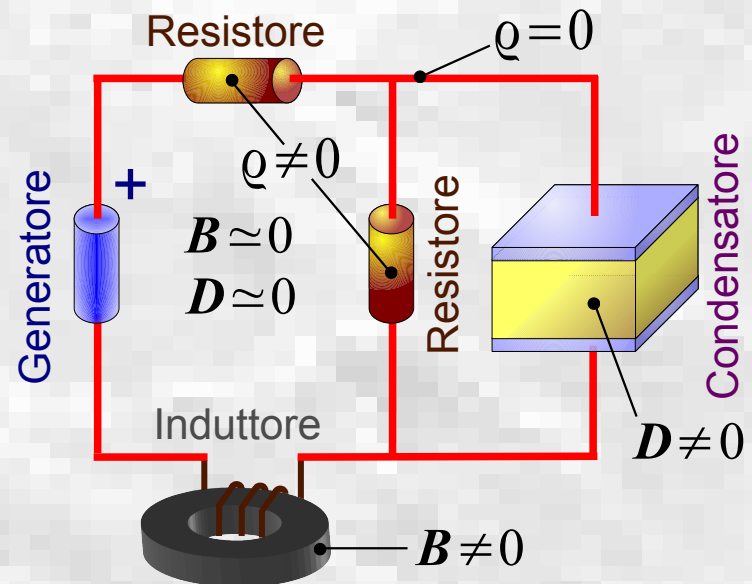
- Nel circuito possono anche esistere delle regioni (i.e., dei componenti reali detti condensatori e/o induttori) in cui gli effetti capacitivi e quelli induttivi sono di gran lunga più significativi rispetto a quelli distribuiti lungo tutto il circuito così come avviene per le sorgenti e per gli effetti dissipativi (nei cavi e nei carichi, quest'ultimi trasformano energia elettrica in energia di altra natura) normalmente concentrati in quei componenti reali detti generatori e resistori (e.g., la pila, i cavi e la lampadina).



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

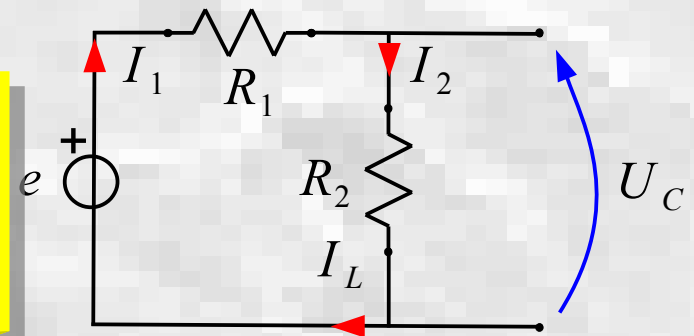
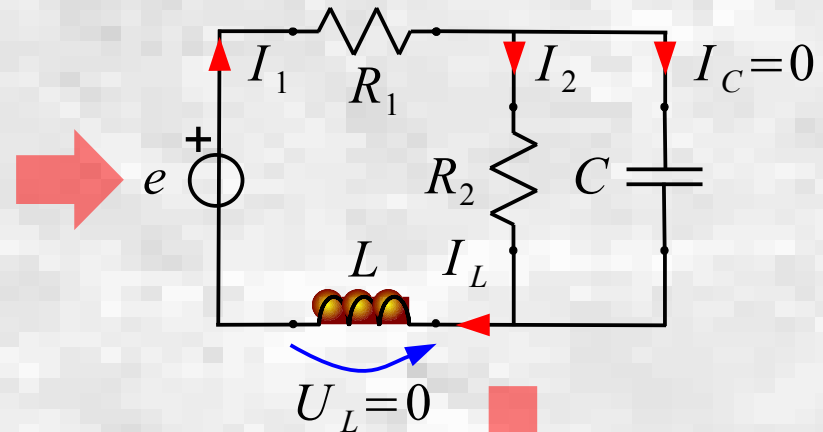
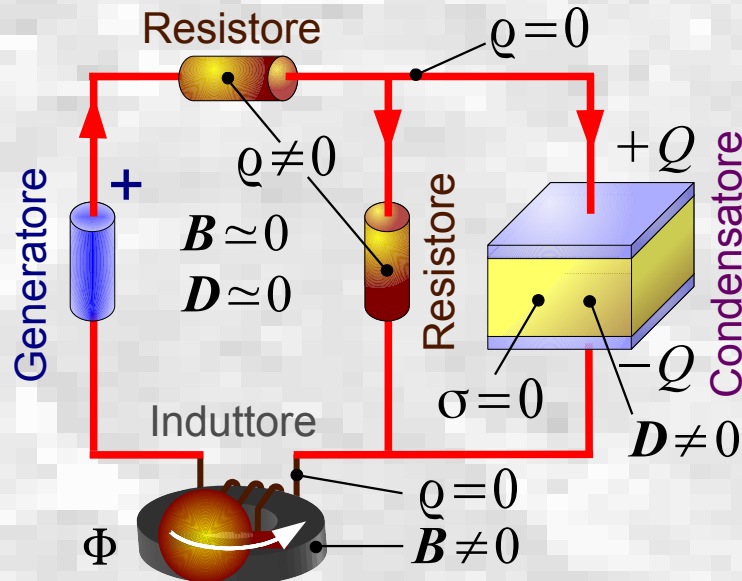
I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... i componenti circuitali

- All'interno di un condensatore i valori di D sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno, tanto che la densità di carica sulla superficie del conduttore si può confondere con quella presente sulle armature dei componenti capacitivi.
- Analogamente, all'interno di un induttore i valori di B sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno, tanto che il flusso complessivamente concatenato con l'intero circuito si può confondere con quello localizzato nei componenti induttivi.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... i componenti circuitali

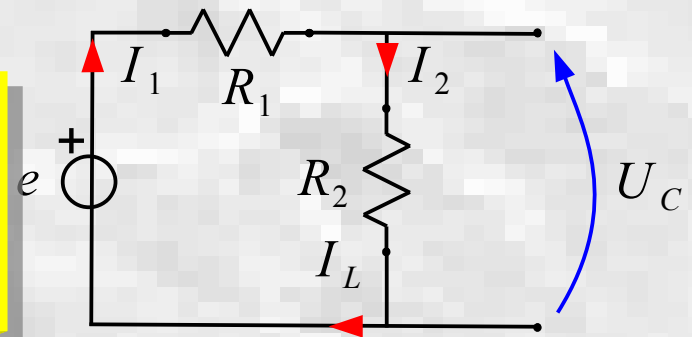
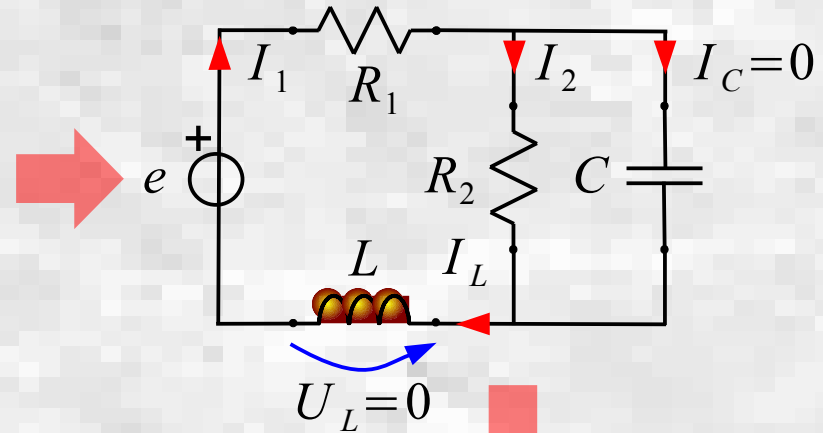
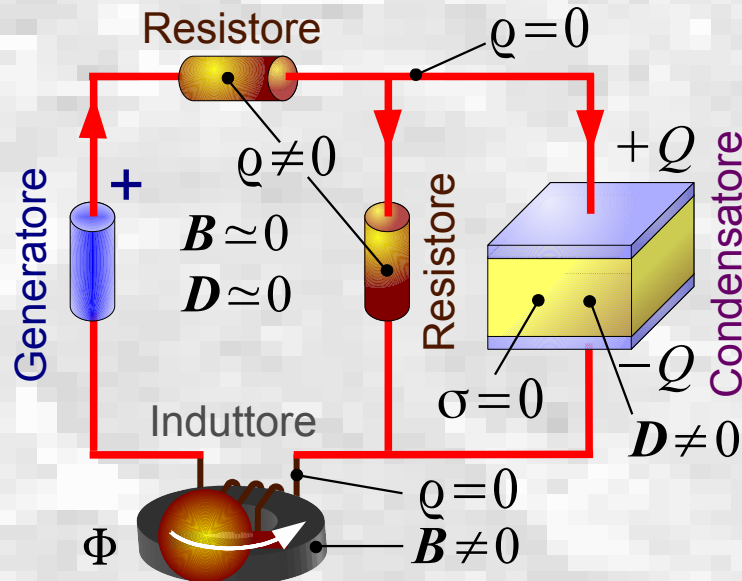


Poiché le armature di un condensatore sono separate da un dielettrico, la corrente che in esso scorre è nulla; quindi in regime stazionario il condensatore equivale ad un circuito aperto.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... i componenti circuitali

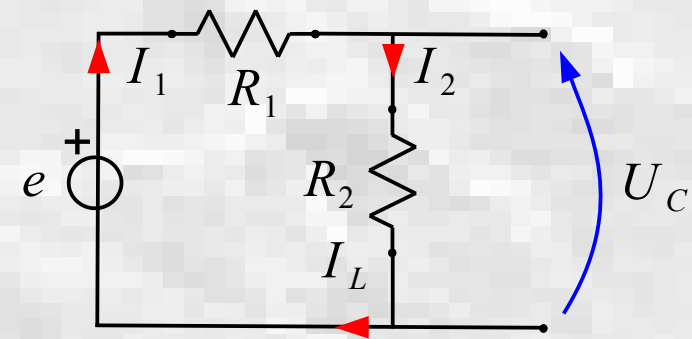
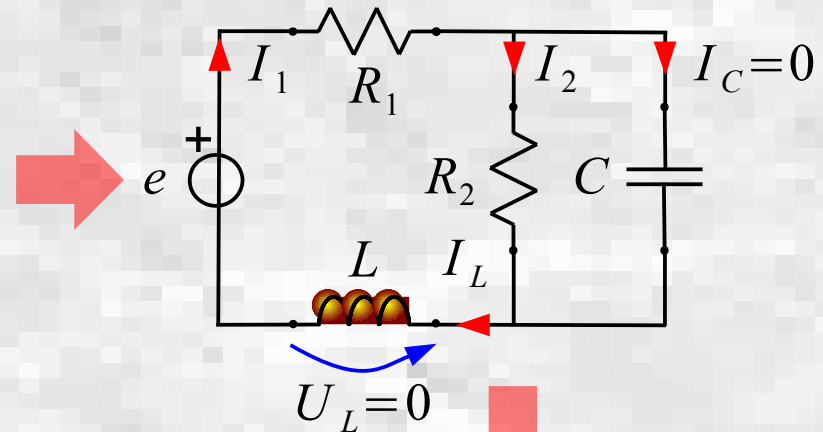
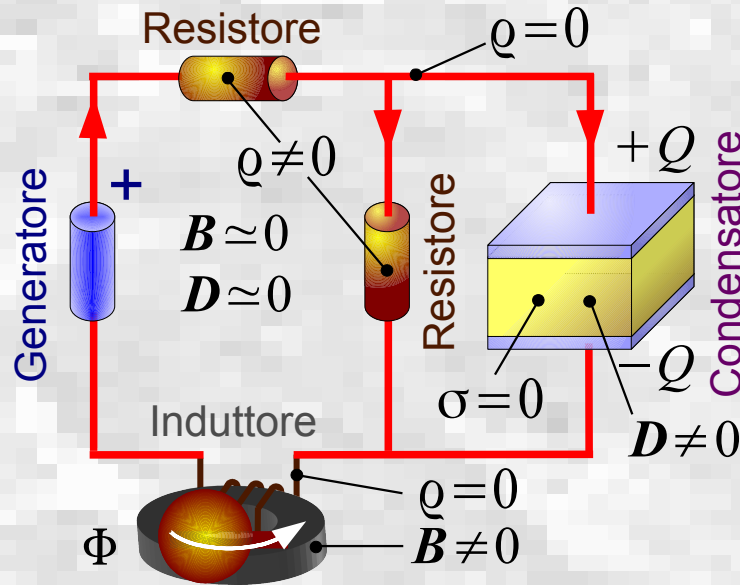


Se il conduttore dell'induttore può essere considerato ideale la tensione ai suoi morsetti è nulla; quindi in regime stazionario l'induttore equivale ad un cortocircuito.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... i componenti circuitali

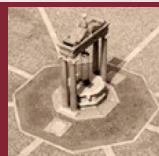


$$\Phi = LI$$

$$Q = CU_C$$

$$I_L = \frac{e}{R_1 + R_2}$$

$$U_C = e \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

I circuiti elettrici in condizioni stazionarie ... i componenti circuitali

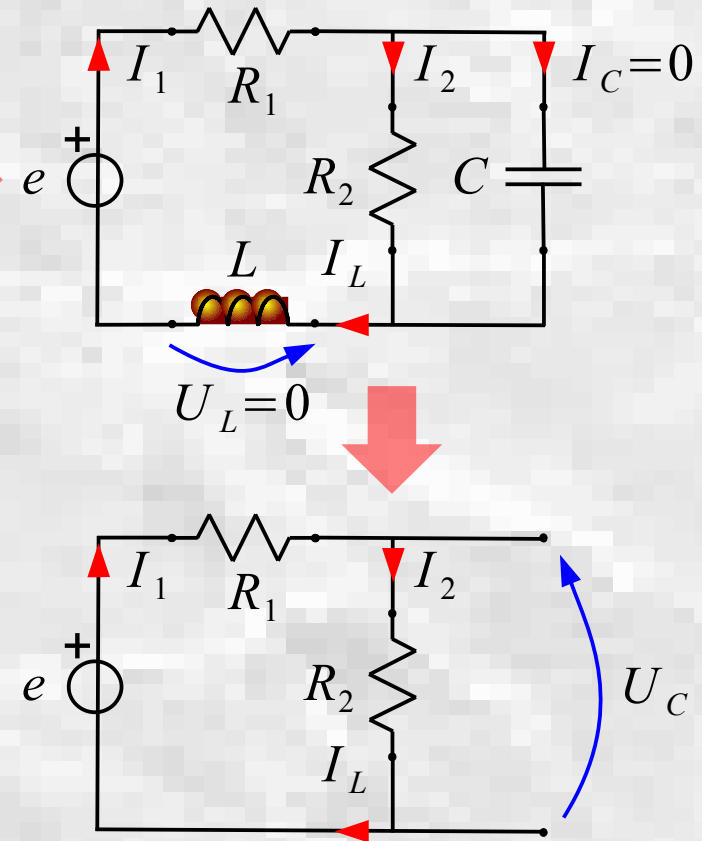
Generatore

Resistore $\rho = 0$

Si osservi che, in condizioni stazionarie, nel circuito elettrico sono immagazzinate energie (distribuite nel campo elettrico ed in quello magnetico, ovvero concentrate nei condensatori e negli induttori reali) pari a

$$W_e = \frac{1}{2} C U_c^2 \quad W_m = \frac{1}{2} L I_L^2$$

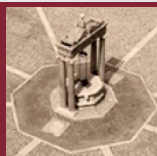
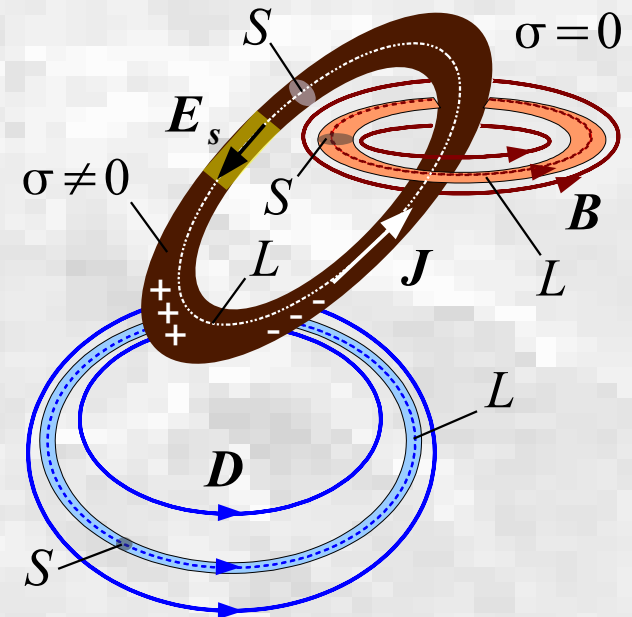
Queste energie sono state originariamente erogate dal generatore che le ha dovute inizialmente fornire per stabilire il regime di funzionamento.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- In **condizioni stazionarie** è quindi possibile studiare il campo statico di conduzione prescindendo dalla presenza del campo elettrostatico e del campo magnetostatico all'esterno del conduttore.
- In **condizioni non stazionarie** le equazioni che governano i campi elettrici e magnetici all'esterno del conduttore sono accoppiate con le equazioni del campo di corrente: *la risposta del circuito elettrico dipende quindi anche dalla presenza degli effetti induttivi e capacitivi.*



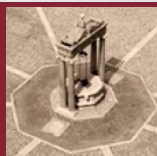
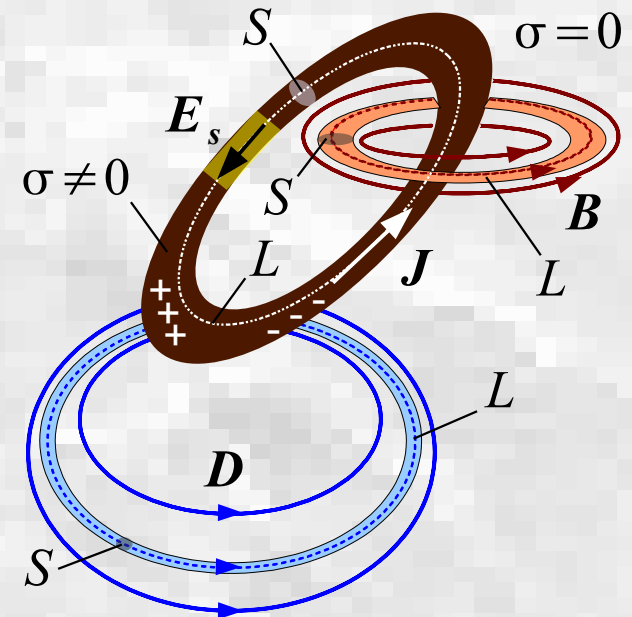
I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- In **condizioni stazionarie** è quindi possibile studiare il campo statico di conduzione prescindendo dalla presenza del campo elettrostatico e del campo magnetostatico all'esterno del conduttore.

- In **condizioni non stazionarie**

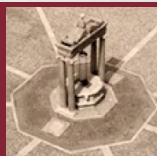
Si osservi che, in condizioni stazionarie, noto il potenziale e la corrente nel conduttore si possono comunque agevolmente determinare il campo magnetostatico e la distribuzione della carica superficiale da cui dipende il campo elettrostatico.



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- I **campi dinamici** (o non stazionari) sono definiti da grandezze che possono essere tutte o in parte dipendenti dal tempo.
- Dalle equazioni di Maxwell discende come i **campi elettrici e magnetici tempo-varianti** siano sempre *mutuamente accoppiati*, pertanto sono normalmente indicati come **campi elettromagnetici**.
- Il loro grado di accoppiamento dipende unicamente dalla **rapidità di variazione** nel tempo delle corrispondenti grandezze: *tanto più rapido è il fenomeno tanto maggiore è l'accoppiamento*.
- I **campi tempo-varianti** possono pertanto essere caratterizzati in funzione del tipo di variazioni nel tempo: **lente** (*ridotto accoppiamento*) o **rapide** (*elevato accoppiamento*).



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

Quadro riepilogativo delle equazioni fondamentali

Nel dominio ... del tempo ... della frequenza

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega \tilde{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + j\omega \tilde{\mathbf{D}}$$

Equazioni di legame

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu_r \tilde{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_s)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}_s)$$

Equazione di continuità

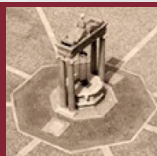
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} = -j\omega \tilde{\rho}$$

Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

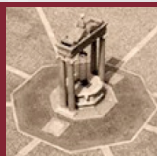
$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{q}(\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}})$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

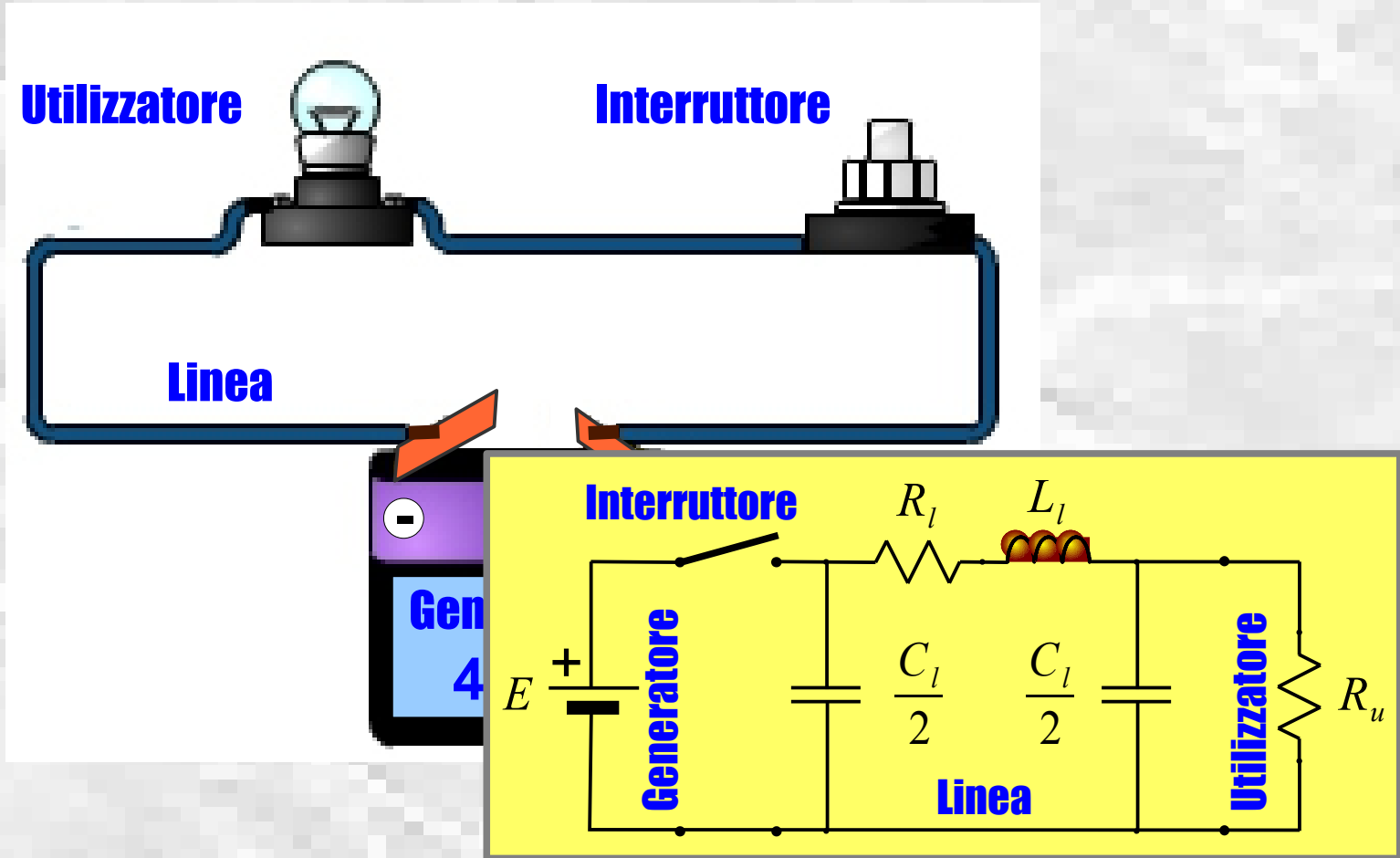
Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- La variabilità nel tempo delle grandezze di campo ha come diretta conseguenza che, in generale,
 - il campo elettrico E non è più conservativo;
 - Il campo di corrente J non è più solenoidale;
 - le interazioni tra i diversi componenti del sistema non possono quindi essere espresse in termini tensioni e correnti;
 - né è più possibile esprimere la potenza scambiata da un componente mediante la tensione e la corrente alla sue estremità;
 - **pertanto, in condizioni non-stazionarie il modello circuitale, a rigore, non è più valido.**



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

*Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche ...
simulazione matlab*

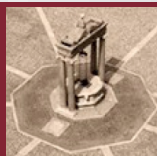
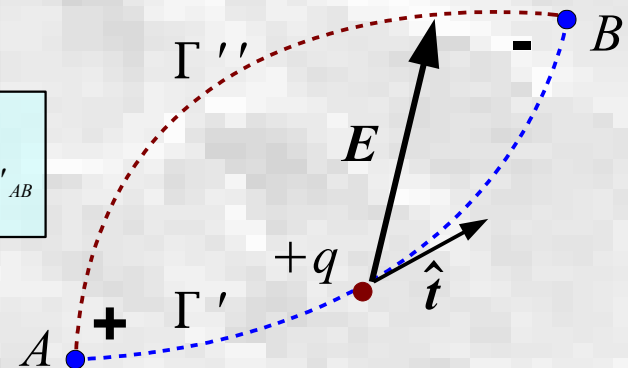


I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- Dalla natura non conservativa del campo elettrico E discende che:
 - non si può definire in modo univoco la **d.d.p.** fra due punti (l'integrale di linea del campo elettrico - i.e. la *tensione* - tra due punti A e B dipende dal percorso, e quindi non è più esprimibile come differenza di potenziale);
 - non vale più la legge di Kirchhoff per le tensioni.

$$U_{\Gamma'_{AB}} = \int_{\Gamma'_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \neq \int_{\Gamma''_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = U_{\Gamma''_{AB}}$$



I circuiti elettrici in condizioni dinamiche

Dalle condizioni stazionarie a quelle dinamiche

- Dalla natura non solenoidale della densità di corrente \mathbf{J} discende che:
 - la corrente attraverso la sezione trasversale di un tubo di flusso di \mathbf{J} non è più, in generale, costante;
 - non vale più la legge di Kirchhoff per le correnti.
- Si osservi che rimane tuttavia solenoidale la densità di corrente totale, \mathbf{J}_t , costituita dalla somma della densità di corrente di conduzione e quella di spostamento, infatti:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array} \right\} \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$$
$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$$

