

## Corso di Laurea in Scienze dell’Architettura

### Corso di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva

Riccardo Migliari<sup>1</sup>,  
Leonardo Baglioni<sup>2</sup>, Jessica Romor<sup>3</sup>, Marta Salvatore<sup>4</sup>

1 Professore ordinario di Fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva – titolare del corso  
2, Ricercatore, 3 e 4 Dottori di ricerca in Rilievo e rappresentazione dell’architettura e dell’ambiente

Lezione 07 – 20 Ottobre 2014

#### Argomenti

**Le linee curve.** Linee luogo geometrico e linee grafiche. Rappresentazione di una linea grafica, piana o sghemba. Rappresentazione matematica di una linea grafica e di una linea luogo geometrico. Le NURBS. La curvatura in un punto di una curva continua. La continuità tra curve. Le NURBS: Relazione tra il numero dei poli, il numero degli archi, la continuità e il grado della equazione.

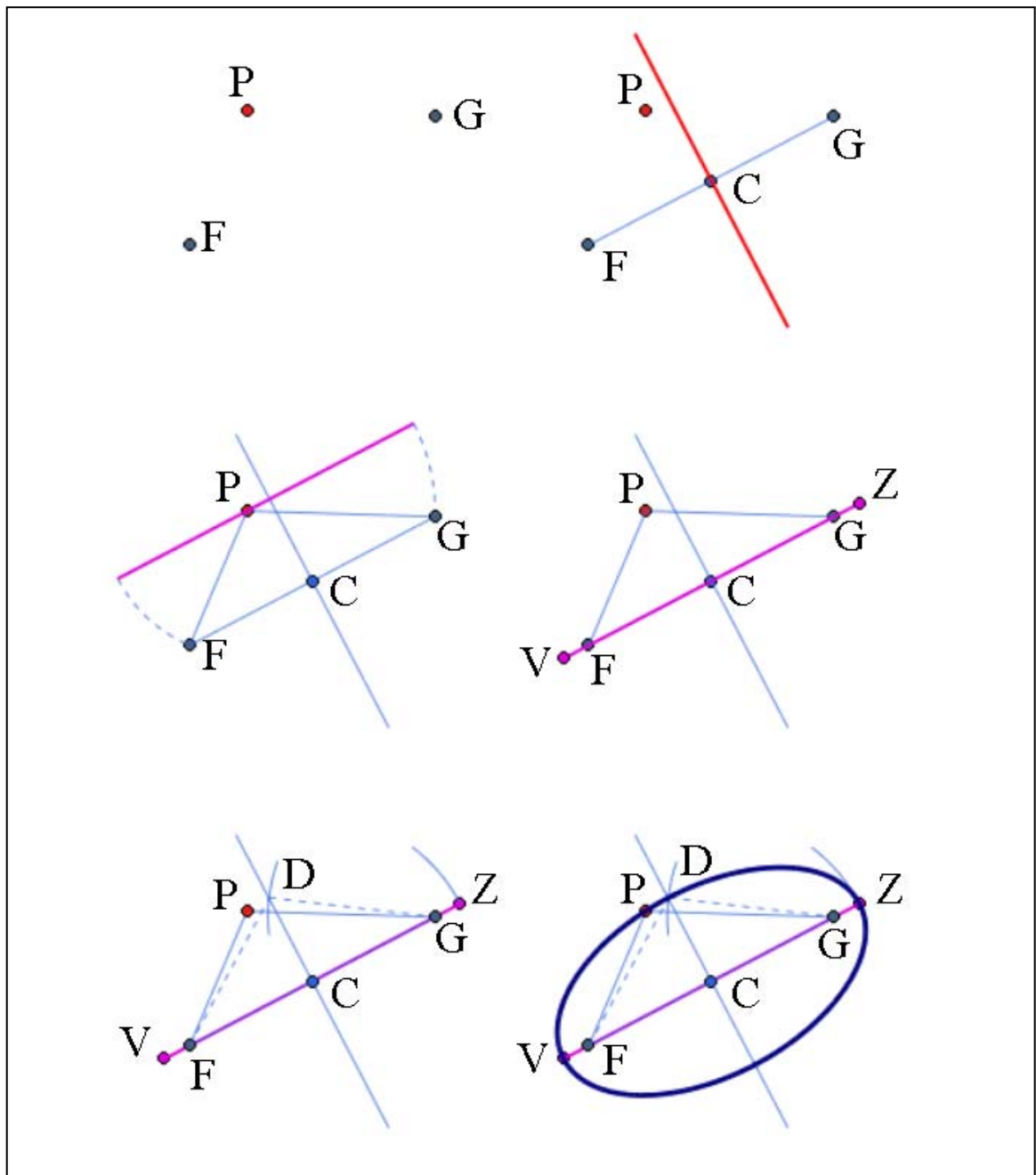
**Esercitazione in aula:** costruzione del cerchio osculatore; imposizione della continuità tra curve e verifica delle condizioni relative alla tangente e al cerchio osculatore nel punto di saldatura.

#### Linee luogo e linee grafiche

Concetti essenziali.

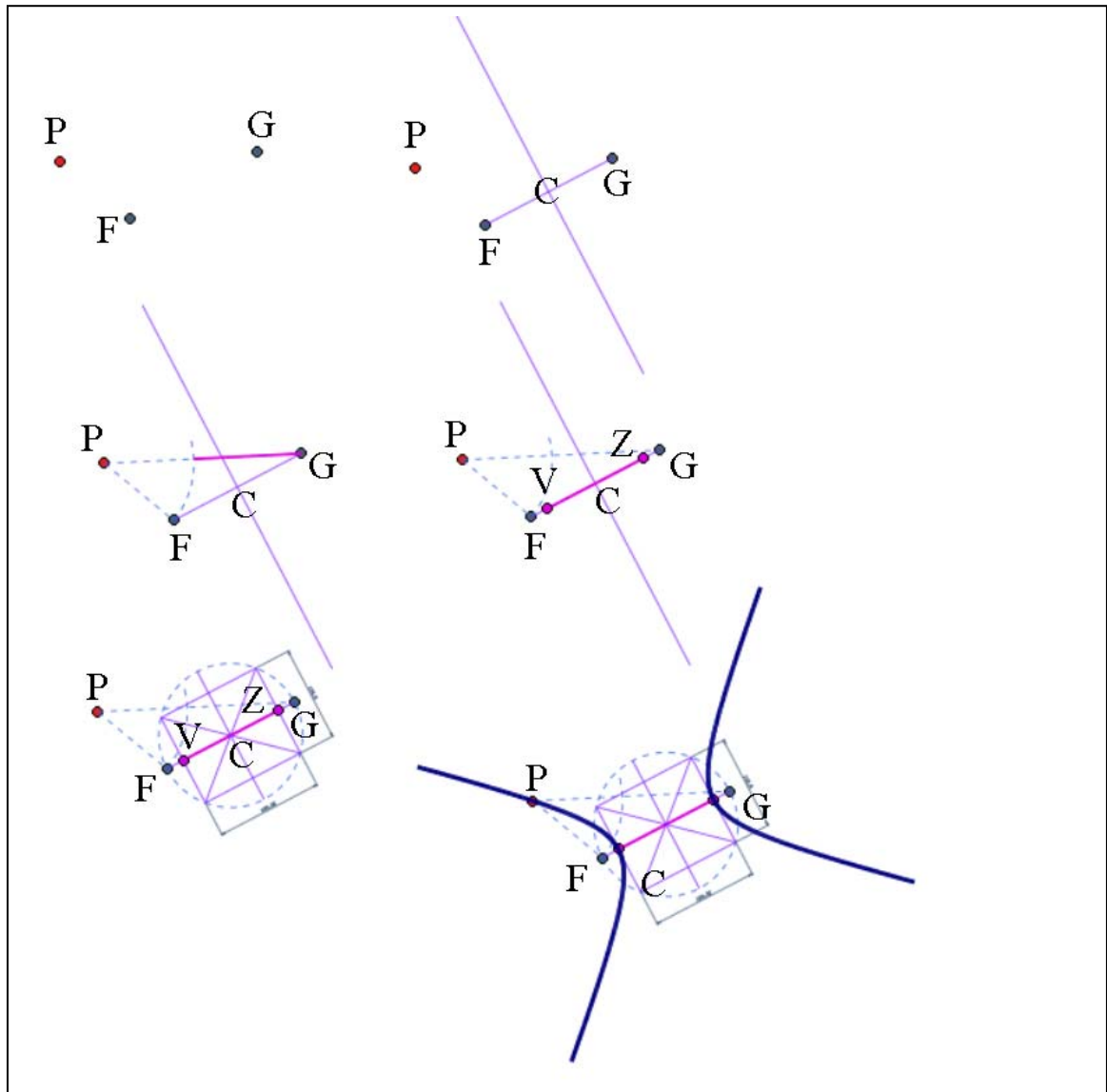
- 1) Le linee luogo geometrico (dette anche linee luogo) sono quelle formate dai punti del piano, o dello spazio, che soddisfano date condizioni. Ad esempio:
  - il luogo dei punti equidistanti da un punto (detto centro) è un cerchio;
  - il luogo dei punti la somma delle cui distanze da due punti (detti fuochi) è costante, è un’ellisse;
  - il luogo dei punti la differenza delle cui distanze da due punti (detti fuochi) è costante, è un’iperbole;
  - il luogo dei punti equidistanti da un punto (detto fuoco) e da una direttrice (detta retta) è costante, è una parabola;
  - il luogo descritto dal movimento di un punto che, in un piano, ruota intorno a un centro e contemporaneamente trasla lungo a una retta, è una cicloide;
  - etc. (vedi Geometria Descrittiva, Vol. II, pagg. 113-143).Nella pratica dei metodi di rappresentazione tradizionali (cioè nel disegno manuale e non digitale), le linee luogo geometrico possono essere disegnate per mezzo di dispositivi che riproducono meccanicamente le condizioni che le determinano. Il più comune di questi dispositivi è il compasso.

**Esercizio\_1a:** disegnare un'ellisse dati i fuochi **F** e **G** ed un punto **P** della curva.



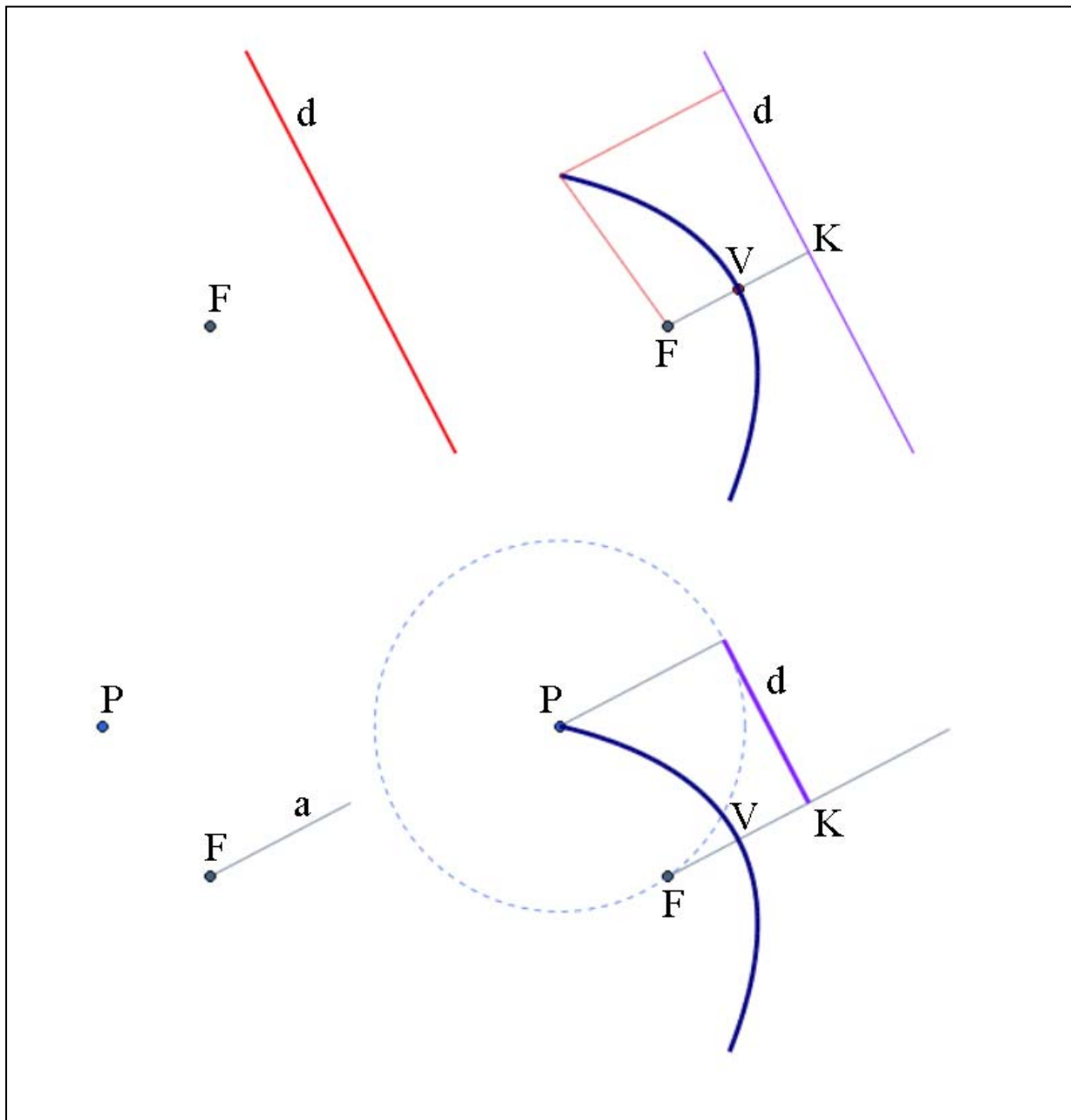
- 1) In alto a sinistra sono posti i dati del problema: i fuochi **F** e **G** e il punto **P**.
- 2) Nella prima fase (in alto a destra): si costruisce la retta **FG** cui appartiene l'asse maggiore della curva, il centro **C** (medio di **FG**) e si traccia la retta cui appartiene l'asse minore (perpendicolare a **FG**).
- 3) Nella seconda fase (al centro a sinistra) si costruisce un segmento **VZ** lungo quanto **FP+PG** (somma delle distanze di **P** dai fuochi).
- 4) Nella terza fase (al centro a destra) si riporta **VZ** su **FG** con il punto medio in **C**. **VZ** è l'asse maggiore dell'ellisse. **V** e **Z** sono i vertici delle curve.
- 5) Nella quarta (in basso a sinistra) si centra il compasso in **G**, con raggio **CZ** e si taglia l'asse minore nel punto **D**. **CD** è il semiasse minore dell'ellisse.
- 6) Nella quinta fase (in basso a destra) si traccia l'ellisse:  
**thinkdesign:** Inserisci/Curve/Coniche/Ellisse ;  
**Rhinoceros:** Curve/Ellisse/Centro

**Esercizio\_1b:** disegnare un'iperbole dati i fuochi **F** e **G** ed un punto **P** della curva.



- 1) In alto a sinistra sono posti i dati del problema: i fuochi **F** e **G** e il punto **P**.
- 2) Nella prima fase (in alto a destra): si costruisce la retta **FG** cui appartiene l'asse trasverso della curva, il centro **C** (medio di **FG**) e si traccia la retta cui appartiene l'asse coniugato (perpendicolare a **FG**).
- 3) Nella seconda fase (al centro a sinistra) si costruiscono i segmenti **PF** e **PG** e si sottrae il minore al maggiore, ottenendo così un segmento di lunghezza **VF** = **PG** - **PF** (differenza delle distanze di **P** dai fuochi).
- 4) Nella terza fase (al centro a destra) si riporta **VZ** su **FG** con il punto medio in **C**. **V** e **Z** sono i vertici della curva.
- 5) Nella quarta (in basso a sinistra) si traccia il cerchio di centro **C** e raggio **CF**. Si costruisce poi il rettangolo che ha i lati paralleli agli assi e i vertici su cerchio suddetto. I lati di questo rettangolo forniscono le misure dell'asse trasverso e del coniugato. Le diagonali di questo rettangolo sono gli asintoti della curva.
- 6) Nella quinta fase (in basso a destra) si traccia l'iperbole:  
**thinkdesign:** Inserisci/Curve/Coniche/Iperbole ;  
**Rhinoceros:** Curve/Iperbole ... (varie opzioni).

**Esercizio\_1c:** disegnare una parabola dato il fuoco **F** e la direttrice **d**.



- 1) In alto a sinistra sono posti i dati del problema: il fuoco **F** e la direttrice **d**.
- 2) Dal fuoco **F** si conduce la perpendicolare **FK** alla direttrice, che è l'asse **a** della curva. Il punto medio del segmento **FK** è il vertice **V** della parabola. Il disegno della curva (in alto a destra) non richiede altre costruzioni.

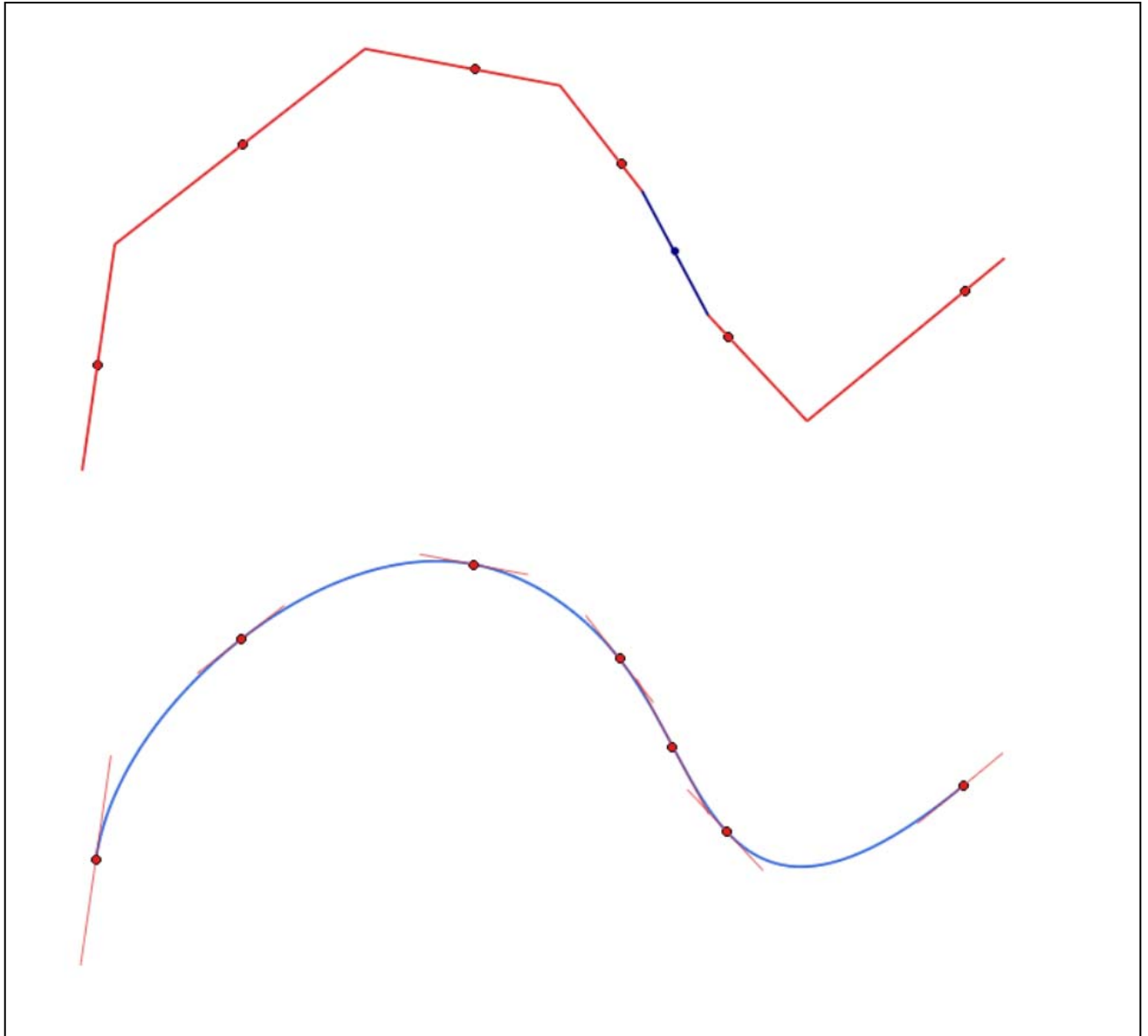
**thinkdesign:** Inserisci/Curve/Coniche/Parabola ;

**Rhinoceros:** Curve/Iperbole ... (varie opzioni).

- 3) Ove sia dato, invece, il fuoco **F**, un punto **P** e la direzione dell'asse **a** (in basso a sinistra) si procede come segue.
- 4) Con centro in **P** e raggio **PF** si traccia una circonferenza. Quindi si conduce per **P** una parallela all'asse e dal punto in cui questa retta incontra la circonferenza si conduce la perpendicolare all'asse, che è la direttrice **d**. In questo modo ci si riconduce al caso precedente.

- 2) Le linee grafiche sono quelle linee curve che non rientrano nella prima definizione.  
Nella pratica dei metodi di rappresentazione tradizionali (cioè nel disegno manuale e non digitale), le linee grafiche possono essere disegnate per approssimazione, interpolando punti e tangenti che loro appartengono.

**Esercizio\_2a** – disegnare la linea grafica che passa per i punti dati e ammette, in quei punti, le relative tangenti.



- 1) In alto sono rappresentati i punti dati con le relative tangenti, che la curva deve rispettare.
- 2) In basso è stata tracciata la curva. Se si esegue il disegno a mano, occorre procedere a intuito.  
**thinkdesign** : Inserisci/Curve/Punti di interpolazione  
**Rhinoceros**: Curve/Forme libere/Per interpolazione di punti

### *Le NURBS (Non Uniform Rational B-Splines)*

Concetti essenziali.

3) Una NURBS è una linea descritta da una complessa equazione parametrica.

Il parametro (**u**) della curva varia tra **0** e **1**.

L'equazione della NURBS ha un grado (**Deg**) che può variare da **1** a **n**.

Quando il grado è **1** la linea è una retta.

Quando il grado è **2** la linea è una conica.

La NURBS è divisa in un certo numero (**Na**) di archi o *span*.

La transizione da un tratto e l'altro è regolata da un valore di continuità (**Con**).

Il valore della continuità può variare tra **0** (continuità di posizione) e **n**, ma generalmente varia tra **1** (tangenza) e **2** (curvatura).

La curva è controllata da un certo numero (**Np**) di poli o punti di controllo i quali agiscono come attrattori.

La forza di attrazione di un polo può essere calibrata variando, tra **0** e **1**, il peso del medesimo, ma, salvo casi particolari, tutti i poli hanno peso eguale a **1**.

La curva passa sempre per il primo e l'ultimo polo, mentre in genere non attraversa i poli intermedi.

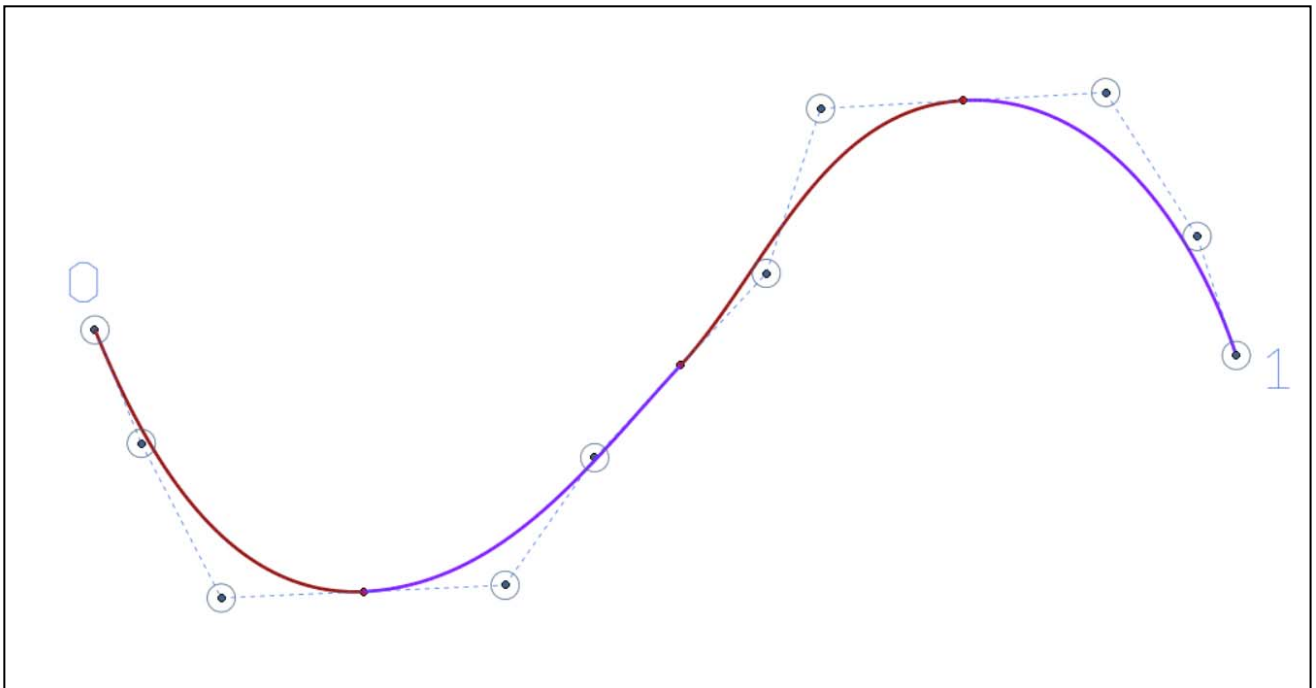
Il numero dei poli che controllano la curva è legato agli altri suoi caratteri dalla seguente relazione:

$$NP = (Deg - Con) Na + Con + 1$$

Ad esempio, una curva di grado **3**, continuità **1**, formata da **4** archi, sarà controllata da:

$$(3-1) 4 + 1 + 1 = 10 \text{ poli.}$$

Variando il peso dei poli una NURBS può descrivere con esattezza qualsiasi curva perciò anche un cerchio.



**Esercizio\_3a** – Studiare le variazioni di una NURBS al variare del grado dell'equazione

**Esercizio\_3b** – Approssimare una curva qualsiasi con una NURBS in modo da minimizzare il numero di poli, valutando gli scarti nelle varie possibili soluzioni.

***La curvatura in un punto di una curva continua. La continuità tra curve.***

Concetti essenziali

- 4) Il cerchio osculatore di una curva continua in un suo punto **P** è il cerchio tangente la curva nel punto **P**.
- 5) La curva e il cerchio osculatore ammettono in **P** la medesima tangente.
- 6) La retta perpendicolare alla tangente in **P** è la normale **n** alla curva.
- 7) Il centro **C** del cerchio osculatore si trova su **n**.
- 8) La curvatura in **P** è l'inverso del raggio del cerchio osculatore  $k = 1/r$ .

**thinkdesign:** Strumenti/Info/Analisi/Locale – Inserisci dati geometrici - Curvatura

**Rhinoceros:** Analizza/Cerchio di curvatura – SegnaCurvatura=Si

- 9) Le variazioni della curvatura possono essere descritte per mezzo di grafici.

**thinkdesign:** Strumenti/Info/Curvatura

**Rhinoceros:** Analizza/Curve/Attiva grafico di curvatura

- 10) Come abbiamo già detto trattando della continuità tra gli archi che compongono una NURBS, la continuità tra curve può essere di grado:  
0 = continuità di posizione  
1 = continuità tangenziale (le curve ammettono nel punto di saldatura la stessa tangente)  
2 = continuità di curvatura (le curve ammettono nel punto di saldatura la stessa tangente e la stessa curvatura)  
3 = continuità di torsione
- 11) È possibile imporre a due curve contigue la continuità desiderata

**thinkdesign:** Cambia/Curve/Continuità

**Rhinoceros:** Curve/Modifica curve/Combina

**Esercizio\_8a** - costruire il cerchio osculatore in un punto **P** di una NURBS data

**Esercizio\_9a** – tracciare il grafico di curvatura di una NURBS data e verificare se vi sono punti di flesso

**Esercizio\_9b** – verificare, tramite il grafico di curvatura, il grado di continuità tra gli archi che formano la curva

**Esercizio\_11a** - imporre a due NURBS distinte la continuità posizionale

**Esercizio\_11b** - imporre a due NURBS contigue la continuità tangenziale

**Esercizio\_11c** - imporre a due NURBS contigue la continuità di curvatura