

Corso di Laurea in Scienze dell’Architettura

Corso di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva

Riccardo Migliari¹,
Leonardo Baglioni², Jessica Romor³, Marta Salvatore⁴

1 Professore ordinario di Fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva – titolare del corso
2, Ricercatore, 3 e 4 Dottori di ricerca in Rilievo e rappresentazione dell’architettura e dell’ambiente

Lezione 07 – 20 Ottobre 2014

Argomenti

Le linee curve. Linee luogo geometrico e linee grafiche. Rappresentazione di una linea grafica, piana o sghemba. Rappresentazione matematica di una linea grafica e di una linea luogo geometrico. Le NURBS. La curvatura in un punto di una curva continua. La continuità tra curve. Le NURBS: Relazione tra il numero dei poli, il numero degli archi, la continuità e il grado della equazione.

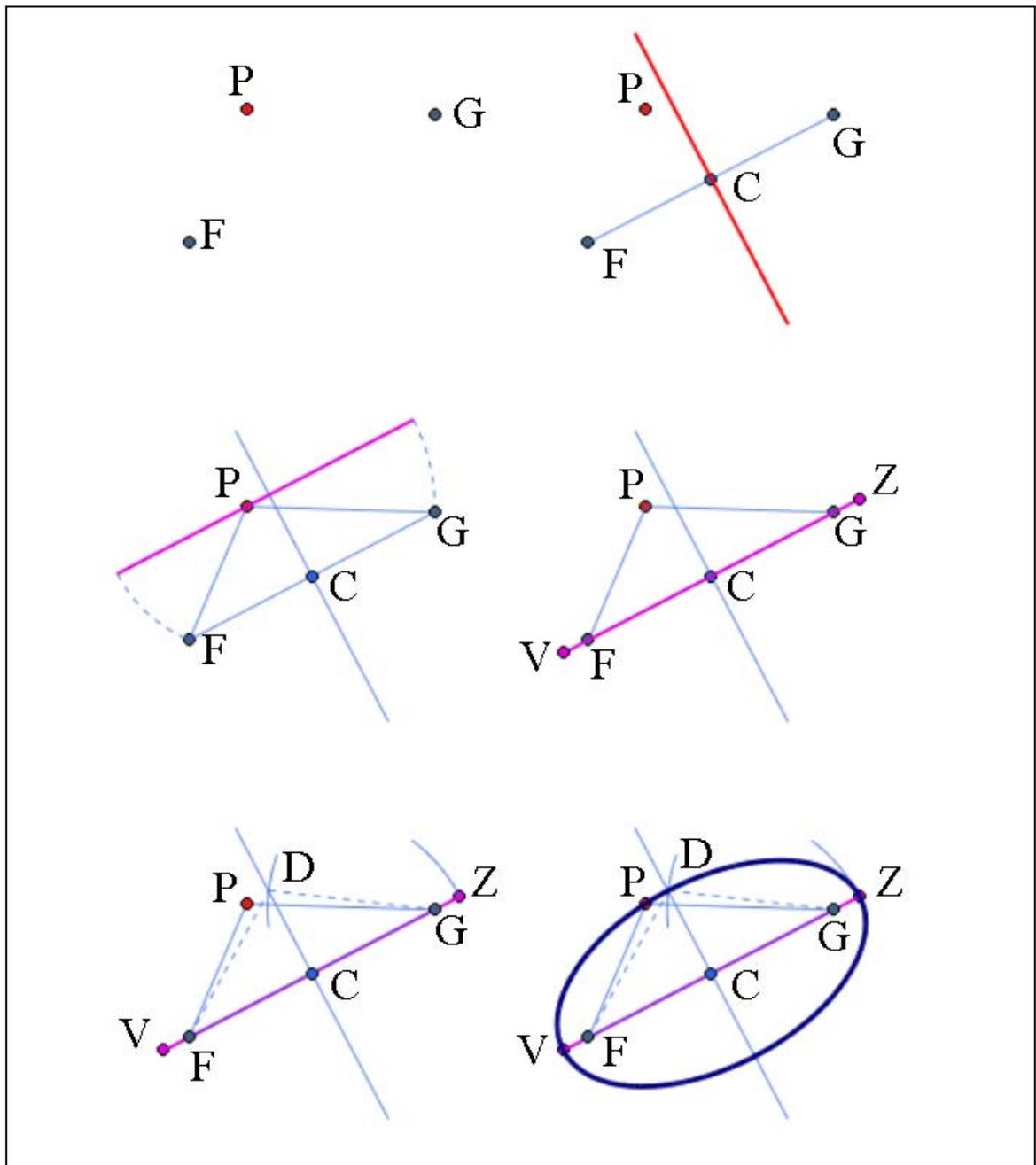
Esercitazione in aula: costruzione del cerchio osculatore; imposizione della continuità tra curve e verifica delle condizioni relative alla tangente e al cerchio osculatore nel punto di saldatura.

Linee luogo e linee grafiche

Concetti essenziali.

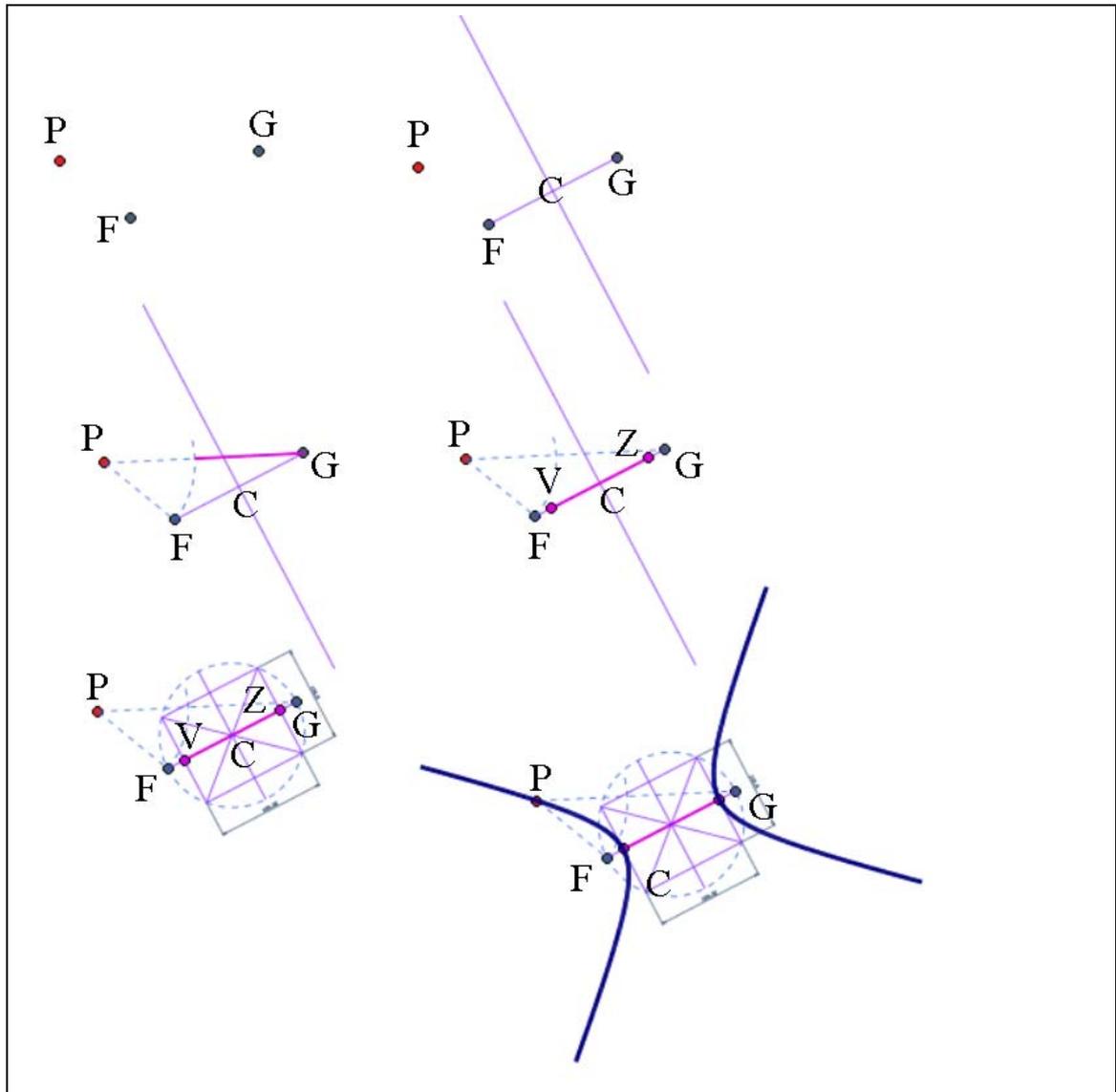
- 1) Le linee luogo geometrico (dette anche linee luogo) sono quelle formate dai punti del piano, o dello spazio, che soddisfano date condizioni. Ad esempio:
 - il luogo dei punti equidistanti da un punto (detto centro) è un cerchio;
 - il luogo dei punti la somma delle cui distanze da due punti (detti fuochi) è costante, è un’ellisse;
 - il luogo dei punti la differenza delle cui distanze da due punti (detti fuochi) è costante, è un’iperbole;
 - il luogo dei punti equidistanti da un punto (detto fuoco) e da una direttrice (detta retta) è costante, è una parabola;
 - il luogo descritto dal movimento di un punto che, in un piano, ruota intorno a un centro e contemporaneamente trasla lungo a una retta, è una cicloide;
 - etc. (vedi Geometria Descrittiva , Vol. II, pagg. 113-143).Nella pratica dei metodi di rappresentazione tradizionali (cioè nel disegno manuale e non digitale), le linee luogo geometrico possono essere disegnate per mezzo di dispositivi che riproducono meccanicamente le condizioni che le determinano. Il più comune di questi dispositivi è il compasso.

Esercizio_1a: disegnare un'ellisse dati i fuochi **F** e **G** ed un punto **P** della curva.



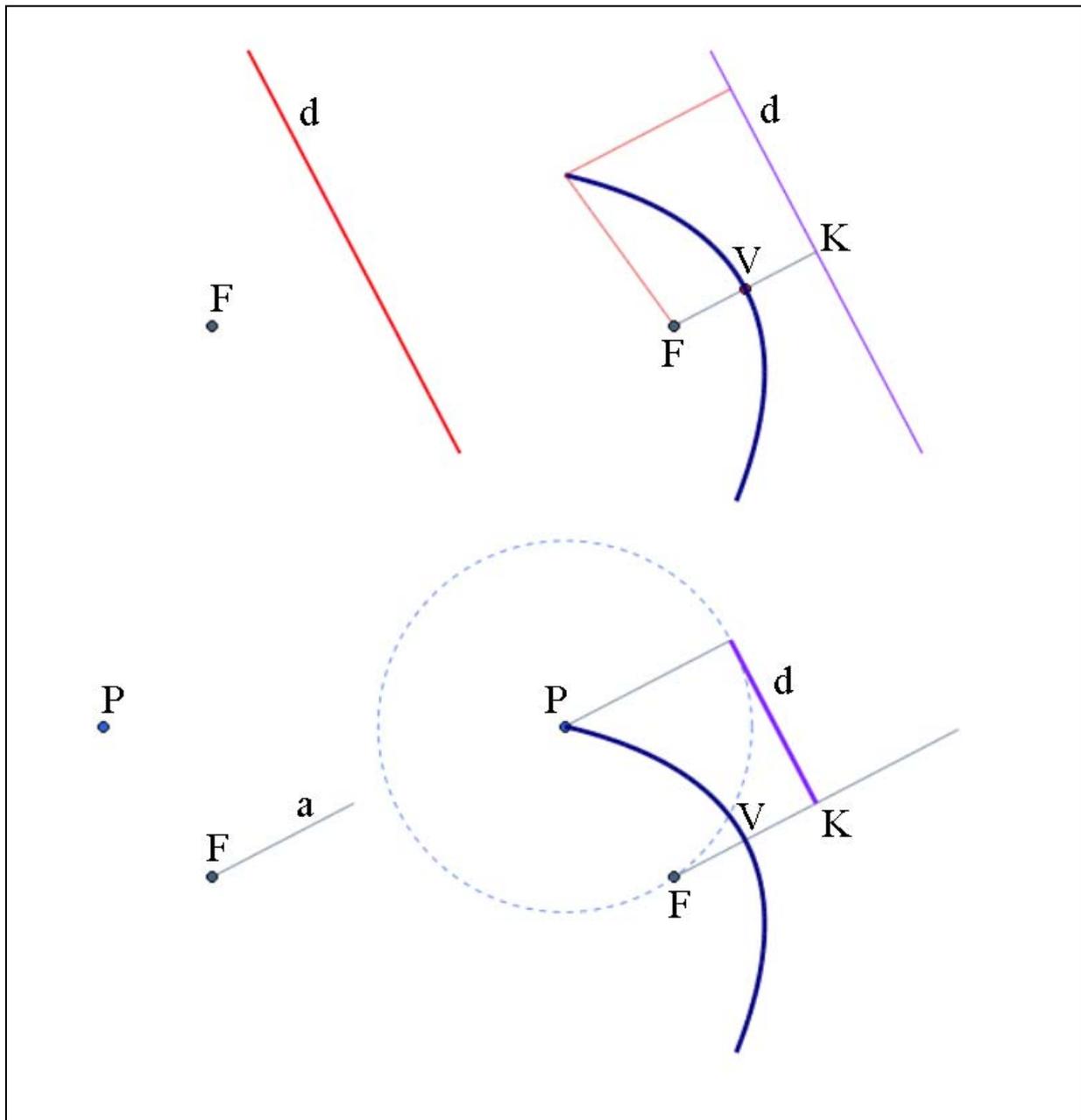
- 1) In alto a sinistra sono posti i dati del problema: i fuochi **F** e **G** e il punto **P**.
- 2) Nella prima fase (in alto a destra): si costruisce la retta **FG** cui appartiene l'asse maggiore della curva, il centro **C** (medio di **FG**) e si traccia la retta cui appartiene l'asse minore (perpendicolare a **FG**).
- 3) Nella seconda fase (al centro a sinistra) si costruisce un segmento **VZ** lungo quanto **FP+PG** (somma delle distanze di **P** dai fuochi).
- 4) Nella terza fase (al centro a destra) si riporta **VZ** su **FG** con il punto medio in **C**. **VZ** è l'asse maggiore dell'ellisse. **V** e **Z** sono i vertici della curva.
- 5) Nella quarta (in basso a sinistra) si centra il compasso in **G**, con raggio **CZ** e si taglia l'asse minore nel punto **D**. **CD** è il semiasse minore dell'ellisse.
- 6) Nella quinta fase (in basso a destra) si traccia l'ellisse:
thinkdesign: Inserisci/Curve/Coniche/Ellisse ;
Rhinoceros: Curve/Ellisse/Centro

Esercizio_1b: disegnare un'iperbole dati i fuochi **F** e **G** ed un punto **P** della curva.



- 1) In alto a sinistra sono posti i dati del problema: i fuochi **F** e **G** e il punto **P**.
- 2) Nella prima fase (in alto a destra): si costruisce la retta **FG** cui appartiene l'asse trasverso della curva, il centro **C** (medio di **FG**) e si traccia la retta cui appartiene l'asse coniugato (perpendicolare a **FG**).
- 3) Nella seconda fase (al centro a sinistra) si costruiscono i segmenti **PF** e **PG** e si sottrae il minore al maggiore, ottenendo così un segmento di lunghezza **VF** = **PG** - **PF** (differenza delle distanze di **P** dai fuochi).
- 4) Nella terza fase (al centro a destra) si riporta **VZ** su **FG** con il punto medio in **C**. **V** e **Z** sono i vertici delle curve.
- 5) Nella quarta (in basso a sinistra) si traccia il cerchio di centro **C** e raggio **CF**. Si costruisce poi il rettangolo che ha i lati paralleli agli assi e i vertici su cerchio suddetto. I lati di questo rettangolo forniscono le misure dell'asse trasverso e del coniugato. Le diagonali di questo rettangolo sono gli asintoti della curva.
- 6) Nella quinta fase (in basso a destra) si traccia l'iperbole:
thinkdesign: Inserisci/Curve/Coniche/Iperbole ;
Rhinoceros: Curve/Iperbole ... (varie opzioni).

Esercizio_1c: disegnare una parabola dato il fuoco **F** e la direttrice **d**.



- 1) In alto a sinistra sono posti i dati del problema: il fuoco **F** e la direttrice **d**.
- 2) Dal fuoco **F** si conduce la perpendicolare **FK** alla direttrice, che è l'asse **a** della curva. Il punto medio del segmento **FK** è il vertice **V** della parabola. Il disegno della curva (in alto a destra) non richiede altre costruzioni.

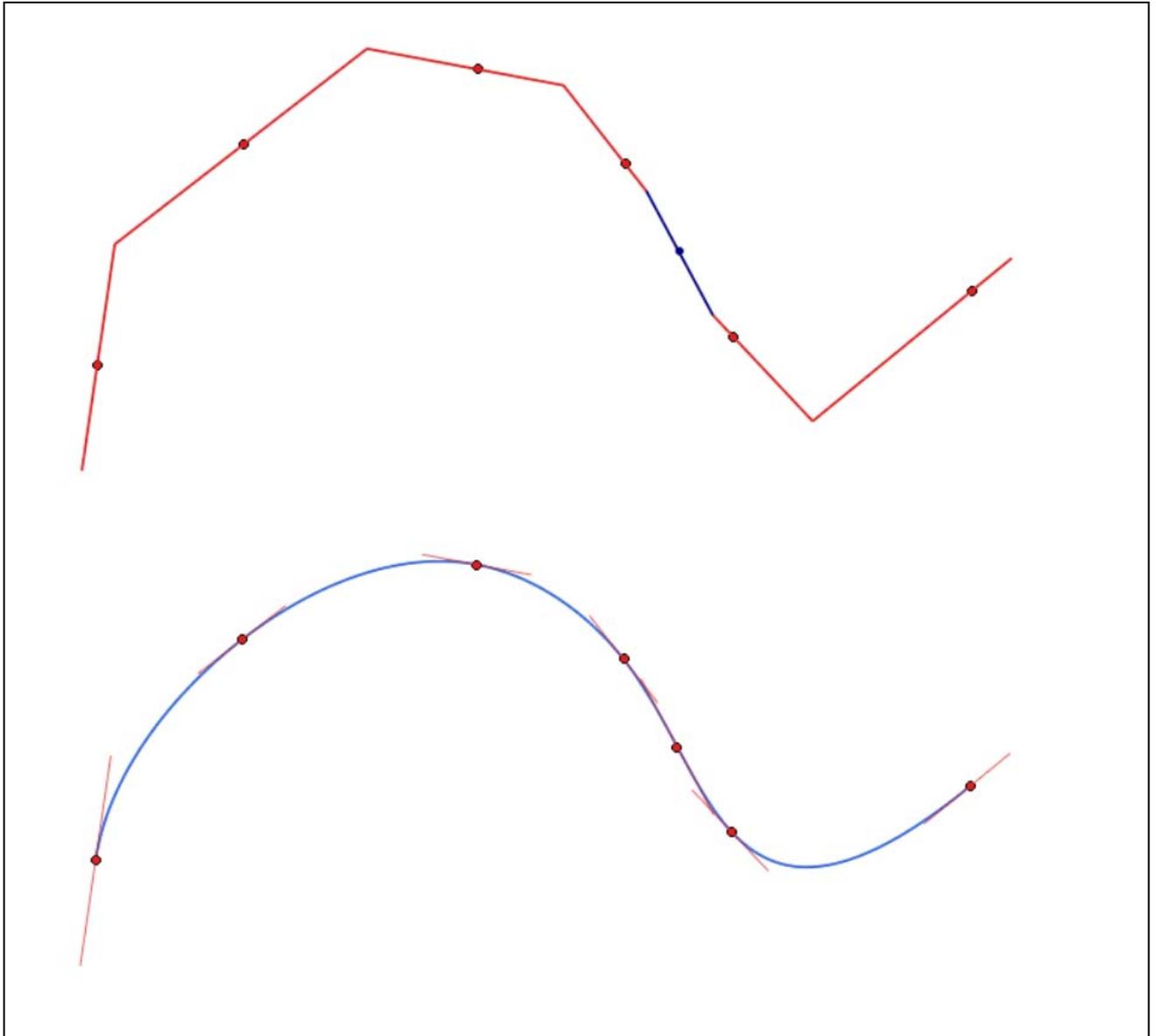
thinkdesign: Inserisci/Curve/Coniche/Parabola ;

Rhinoceros: Curve/Iperbole ... (varie opzioni).

- 3) Ove sia dato, invece, il fuoco **F**, un punto **P** e la direzione dell'asse **a** (in basso a sinistra) si procede come segue.
- 4) Con centro in **P** e raggio **PF** si traccia una circonferenza. Quindi si conduce per **P** una parallela all'asse e dal punto in cui questa retta incontra la circonferenza si conduce la perpendicolare all'asse, che è la direttrice **d**. In questo modo ci si riconduce al caso precedente.

- 2) Le linee grafiche sono quelle linee curve che non rientrano nella prima definizione.
Nella pratica dei metodi di rappresentazione tradizionali (cioè nel disegno manuale e non digitale), le linee grafiche possono essere disegnate per approssimazione, interpolando punti e tangenti che loro appartengono.

Esercizio_2a – disegnare la linea grafica che passa per i punti dati e ammette, in quei punti, le relative tangenti.



- 1) In alto sono rappresentati i punti dati con le relative tangenti, che la curva deve rispettare.
- 2) In basso è stata tracciata la curva. Se si esegue il disegno a mano, occorre procedere a intuito.

thinkdesign : Inserisci/Curve/Punti di interpolazione

Rhinoceros: Curve/Forme libere/Per interpolazione di punti

Le NURBS (Non Uniform Rational B-Splines)

Concetti essenziali.

3) Una NURBS è una linea descritta da una complessa equazione parametrica.

Il parametro (**u**) della curva varia tra **0** e **1**.

L'equazione della NURBS ha un grado (**Deg**) che può variare da **1** a **n**.

Quando il grado è **1** la linea è una retta.

Quando il grado è **2** la linea è una conica.

La NURBS è divisa in un certo numero (**Na**) di archi o *span*.

La transizione da un tratto e l'altro è regolata da un valore di continuità (**Con**).

Il valore della continuità può variare tra **0** (continuità di posizione) e **n**, ma generalmente varia tra **1** (tangenza) e **2** (curvatura).

La curva è controllata da un certo numero (**Np**) di poli o punti di controllo i quali agiscono come attrattori.

La forza di attrazione di un polo può essere calibrata variando, tra **0** e **1**, il peso del medesimo, ma, salvo casi particolari, tutti i poli hanno peso eguale a **1**.

La curva passa sempre per il primo e l'ultimo polo, mentre in genere non attraversa i poli intermedi.

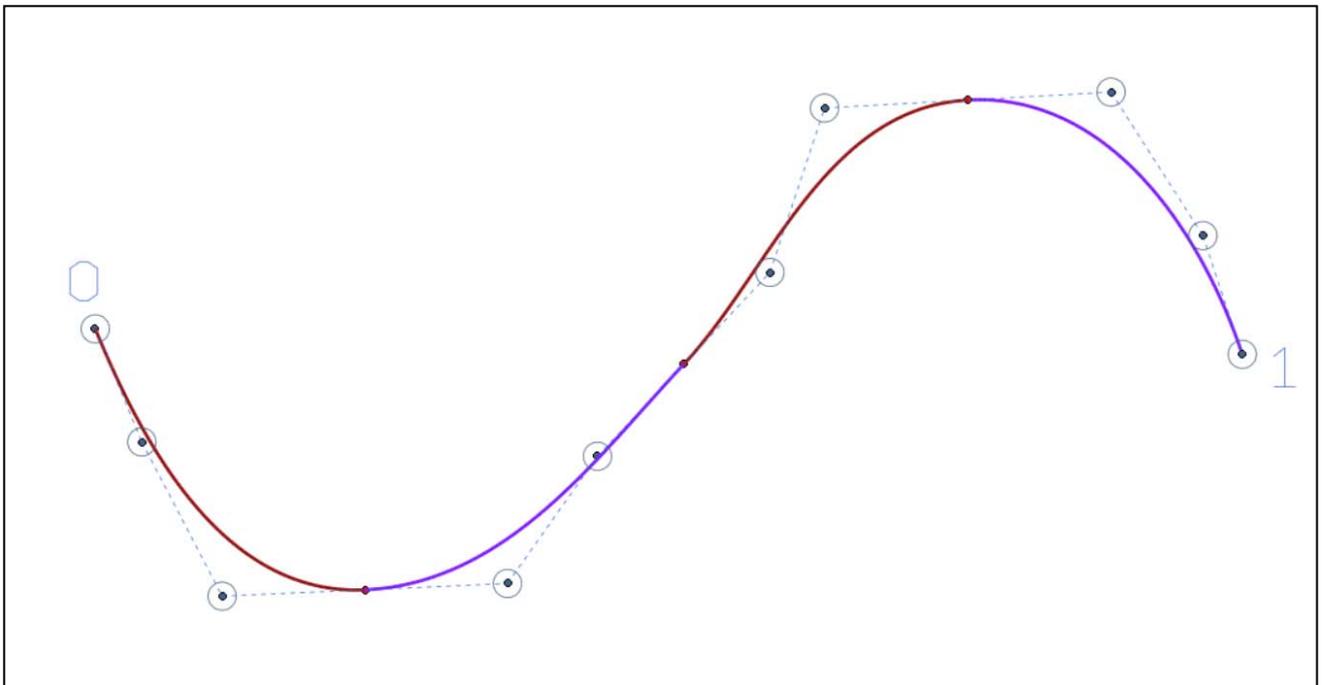
Il numero dei poli che controllano la curva è legato agli altri suoi caratteri dalla seguente relazione:

$$NP = (Deg - Con) Na + Con + 1$$

Ad esempio, una curva di grado **3**, continuità **1**, formata da **4** archi, sarà controllata da:

$$(3-1) 4 + 1 + 1 = 10 \text{ poli.}$$

Variando il peso dei poli una NURBS può descrivere con esattezza qualsiasi curva perciò anche un cerchio.



Esercizio_3a – Studiare le variazioni di una NURBS al variare del grado dell'equazione

Esercizio_3b – Approssimare una curva qualsiasi con una NURBS in modo da minimizzare il numero di poli, valutando gli scarti nelle varie possibili soluzioni.

La curvatura in un punto di una curva continua. La continuità tra curve.

Concetti essenziali

- 4) Il cerchio osculatore di una curva continua in un suo punto **P** è il cerchio tangente la curva nel punto **P**.
- 5) La curva e il cerchio osculatore ammettono in **P** la medesima tangente.
- 6) La retta perpendicolare alla tangente in **P** è la normale **n** alla curva.
- 7) Il centro **C** del cerchio osculatore si trova su **n**.
- 8) La curvatura in **P** è l'inverso del raggio del cerchio osculatore $k = 1/r$.

thinkdesign: Strumenti/Info/Analisi/Locale – Inserisci dati geometrici - Curvatura

Rhinoceros: Analizza/Cerchio di curvatura – SegnaCurvatura=Si

- 9) Le variazioni della curvatura possono essere descritte per mezzo di grafici.

thinkdesign: Strumenti/Info/Curvatura

Rhinoceros: Analizza/Curve/Attiva grafico di curvatura

- 10) Come abbiamo già detto trattando della continuità tra gli archi che compongono una NURBS, la continuità tra curve può essere di grado:
0 = continuità di posizione
1 = continuità tangenziale (le curve ammettono nel punto di saldatura la stessa tangente)
2 = continuità di curvatura (le curve ammettono nel punto di saldatura la stessa tangente e la stessa curvatura)
3 = continuità di torsione
- 11) È possibile imporre a due curve contigue la continuità desiderata

thinkdesign: Cambia/Curve/Continuità

Rhinoceros: Curve/Modifica curve/Combina

Esercizio_8a - costruire il cerchio osculatore in un punto **P** di una NURBS data

Esercizio_9a – tracciare il grafico di curvatura di una NURBS data e verificare se vi sono punti di flesso

Esercizio_9b – verificare, tramite il grafico di curvatura, il grado di continuità tra gli archi che formano la curva

Esercizio_11a - imporre a due NURBS distinte la continuità posizionale

Esercizio_11b - imporre a due NURBS contigue la continuità tangenziale

Esercizio_11c - imporre a due NURBS contigue la continuità di curvatura