ELETTROTECNICA
Principi ed applicazioni di Ingegneria Elettrica

Corso di Laurea in Ingegneria Civile (6 CFU)

Lezione 04 – ***Circuiti elettrici elementari in condi-zioni stazionarie***

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Prof. Alberto Geri
Dipartimento di Ingegneria Astronautica, Elettrica ed Energetica
Area Ingegneria Elettrica - Via delle Sette Sale n° 12/b, Roma
T 06 44585.534/540 F 06 4883235 alberto.geri@uniroma1.it

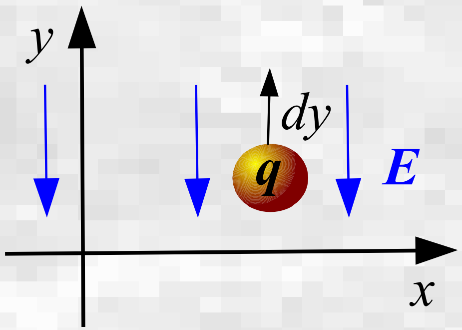
Indice dei contenuti

Circuiti elettrici elementari in condizioni stazionarie

La tensione e la corrente … il potenziale elettrico

- Si consideri una carica positiva, q, immersa in un campo elettrico uniforme, $\boldsymbol{E}$. Poiché il campo elettrico esercita sulla carica una *forza elettrica*, $\boldsymbol{F}_e$, per muovere la carica di dy, a velocità costante v, dovrebbe essere applicata una *forza esterna*, $\boldsymbol{F}_{ext}$, uguale ed opposta. Il lavoro elementare, dW, compiuto dalla forza esterna (ovvero, l'energia infinitesima spesa, dW) per spostare di dy l'***unità di carica***, è detto ***potenziale elettrico differenziale***, dV, ed è espresso in volt

$$1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{V}$$



$$\boldsymbol{F}_e = q\,\boldsymbol{E} = q\left(-\hat{\boldsymbol{y}}\,E\right)$$
$$\boldsymbol{F}_{ext} + \boldsymbol{F}_e = 0 \quad \left(v = cost.\right)$$
$$\boldsymbol{F}_{ext} = -\boldsymbol{F}_e = -q\,\boldsymbol{E}$$
$$dW = \boldsymbol{F}_{ext}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\,dy \qquad (\mathrm{J})$$
$$dW = -q\left(-\hat{\boldsymbol{y}}\,E\right)\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\,dy = $$
$$= q\,E\,dy$$
$$dV := \frac{dW}{q} = -\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\,dy\,(\mathrm{V})$$

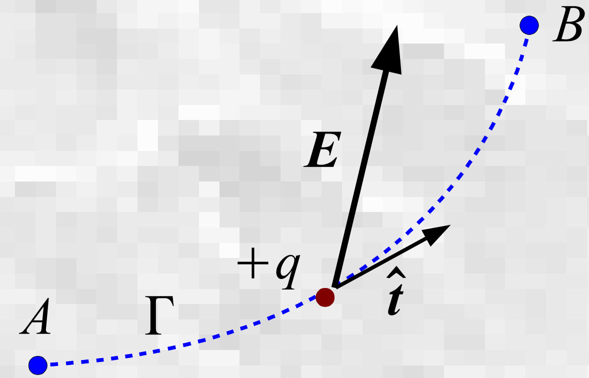
La tensione e la corrente … la differenza di potenziale

- Osservando che in generale vale la $dV := \dfrac{dW}{q} = -\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl$,

  si definisce **differenza di potenziale** V_{AB}, tra due punti A e B, l'integrale del campo elettrico, $\boldsymbol{E}$, lungo una linea arbitraria Γ da A a B, e cioè

$$V_{AB} := \int_{A,\Gamma}^{B} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl = -\int_{A,\Gamma}^{B} dV = \int_{B,\Gamma}^{A} dV = V_A - V_B \qquad \text{(espresso in volt)}$$

La ***differenza di potenziale*** (d.d.p.) V_{AB} rappresenta quindi ***il lavoro che eseguirebbe il campo elettrico per spostare una carica positiva unitaria lungo una linea arbitraria*** Γ ***da*** A ***a*** B.



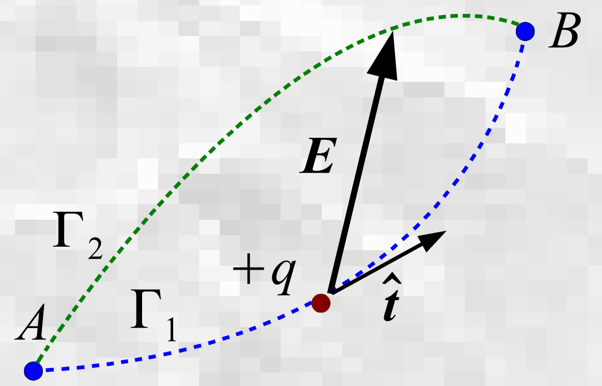
Principali grandezze e loro definizione

La tensione e la corrente … la differenza di potenziale

- Dalla irrotazionalità del campo elettrostatico, i.e. $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$, discende il **carattere conservativo del campo elettrico coulombiano**

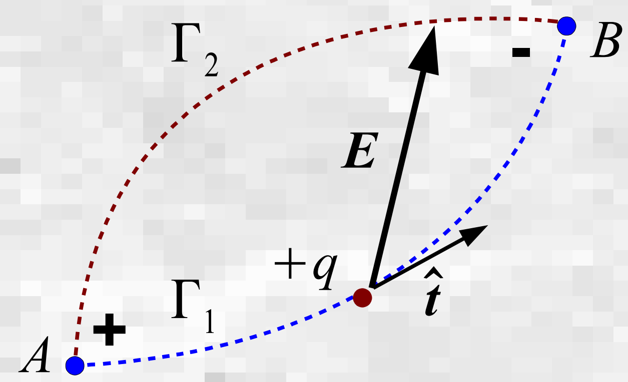
$$\oint_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl = \int_{A,\Gamma_1}^{B} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl + \int_{B,\Gamma_2}^{A} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl = \int_{A,\Gamma_1}^{B} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl - \int_{A,\Gamma_2}^{B} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl = 0$$

che rende la differenza di potenziale V_{AB} dipendente unicamente dai punti A a B, e non dal percorso di integrazione (e.g., le linee di integrazione Γ_1 e Γ_2); cioè, è funzione delle sole posizioni assunte dai punti A a B.



La tensione e la corrente … la tensione

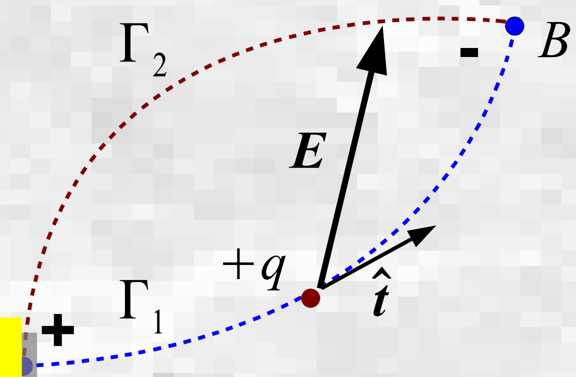
- In generale, si definisce **tensione** fra due punti A e B l'integrale di linea del campo elettrico lungo una curva arbitraria Γ, se il campo è irrotazionale (condizioni stazionarie) essa è un sinonimo di d.d.p.

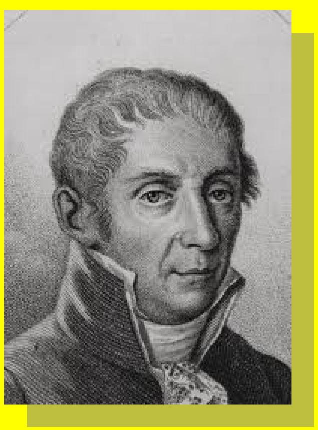


$$U_{AB,\Gamma} = \int_{A,\Gamma}^{B} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl \quad \begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}=0 \quad \Rightarrow \quad U_{AB,\Gamma_1}=U_{AB,\Gamma_2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; U_{AB}=V_A-V_B=V_{AB} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; \textit{Non dipende da } \Gamma \\ \nabla\times\boldsymbol{E}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad U_{AB,\Gamma_1}\neq U_{AB,\Gamma_2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; \textit{Dipende da } \Gamma \end{cases}$$

La tensione e la corrente … la tensione

- In generale, si definisce **tensione** fra due punti A e B l'integrale di linea del campo elettrico lungo una curva arbitraria Γ, se il campo è irrotazionale (condizioni stazio-





*Il **volt**, V, è l'unità di misura sia del **potenziale** che della **tensione**, è stata così chiamata in onore del fisco italiano **Alessandro Volta** (1745-1827).*

$$U_{AB,\Gamma_1} = U_{AB,\Gamma_2}$$
$$U_{AB} = V_A - V_B = V_{AB}$$

Non dipende da Γ

$$U_{AB,\Gamma_1} \neq U_{AB,\Gamma_2}$$

Dipende da Γ

La tensione e la corrente … il potenziale scalare

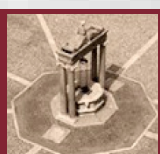
- Si definisce **potenziale elettrico scalare** in un generico punto P dello spazio la d.d.p. fra il punto P ed un punto R assunto come ***riferimento unico*** per i potenziali scalari (tipicamente il punto all'infinito, ∞) ed a cui si attribuisce convenzionalmente il valore di potenziale scalare nullo, i.e. $\boxed{V_R = 0}$, da cui

$$\boxed{V_P := \int_{P,\Gamma}^{R} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl = -\int_{P,\Gamma}^{R} dV = \int_{R,\Gamma}^{P} dV = V_P - V_R = V_P - 0 = V_P}$$

- La relazione inversa che lega il potenziale elettrico scalare V al campo elettrico $\boldsymbol{E}$ si può dedurre osservando quanto segue

$dV = -\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl$ ricordando poi che $dV = \nabla V\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl$ si ha

$\nabla V\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl = -\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl$ da cui $\nabla V = -\boldsymbol{E}$ ed inf ne $\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V}$



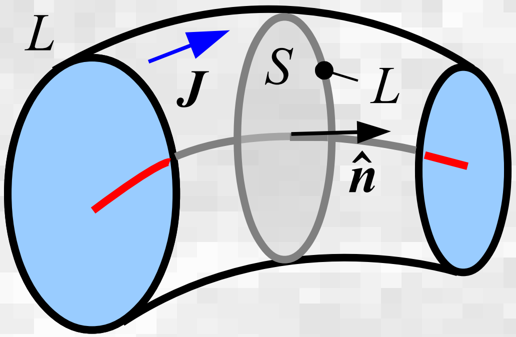
La tensione e la corrente … la corrente in tronco di tubo di flusso

- Dalla solenoidalità del vettore $\boldsymbol{J}$ discende che le linee di forza del campo di corrente sono chiuse.

- Sono conseguentemente chiusi anche i tubi di flusso definiti dalle linee di forza del campo di corrente.

- Il flusso di $\boldsymbol{J}$ attraverso qualunque sezione trasversale S del tubo di flusso rappresenta la **corrente** associata al tronco di tubo di flusso

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds$$



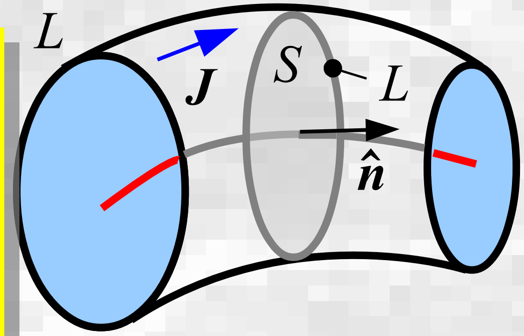
Si definisce tubo di flusso lo spazio tubolare delimitato dalle linee di forza passanti per ogni punto di una curva chiusa L che non sia essa stessa una linea di forza.

…

La tensione e la corrente … la corrente in tronco di tubo di flusso

- Dalla solenoidalità del vettore $\boldsymbol{J}$

*L'**ampere**, A, è l'unità di misura della **corrente elettrica** così chiamata in onore del fisco francese **André-Marie Ampère** (1775-1836).*



Si definisce tubo di flusso lo spazio tubolare delimitato dalle linee di forza passanti per ogni punto di una curva chiusa L che non sia essa stessa una linea di forza.

- Il flusso di $\boldsymbol{J}$ attraverso qualunque sezione trasversale S del tubo di flusso rappresenta la **corrente** associata al tronco di tubo di flusso

$$I=\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds$$

…

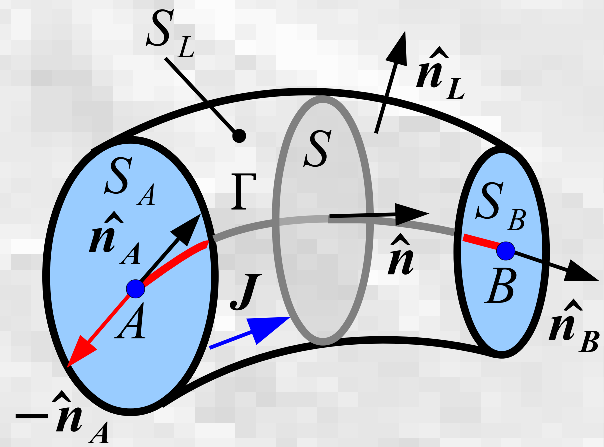
La tensione e la corrente … la corrente in tronco di tubo di flusso

- Si consideri infatti un tronco di tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$ delimitato da due superfici trasversali S_A ed S_B e dalla superficie laterale S_L; dalla natura solenoidale di $\boldsymbol{J}$ discende che è nullo il flusso attraverso la superficie totale del tronco ($S_T = S_A + S_B + S_L$)

$$\oiint_{S_T} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds = \iint_{S_A} \boldsymbol{J}\cdot(-\hat{\boldsymbol{n}}_A)\,ds + \iint_{S_B} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_B\,ds + \iint_{S_L} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_L\,ds = 0$$

- Essendo il flusso attraverso S_L nullo, poiché le linee di $\boldsymbol{J}$ sono parallele alla superficie laterale per definizione, segue che sono uguali i flussi attraverso le sezioni trasversali S_A ed S_B, e cioè

$$\iint_{S_A} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_A\,ds = \iint_{S_B} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_B\,ds = I$$



Principali grandezze e loro definizione

La tensione e la corrente … la corrente in tronco di tubo di flusso

- Si consideri infatti un tronco di tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$ delimitato da … a superficie laterale S_L; … e che è nullo il flusso … ($S_T = S_A + S_B + S_L$)

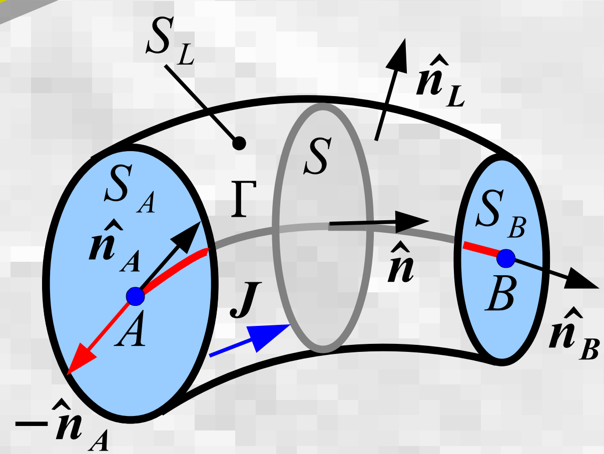
$$\ldots ds + \iint_{S_L} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_L \, ds = 0$$

Data l'arbitrarietà della scelta delle superfici S_A ed S_B, si può affermare che il flusso di $\boldsymbol{J}$ ha lo stesso valore su tutte le superfici trasversali S del tronco, e cioè:

$$\iint_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_A \, ds = \iint_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_B \, ds = \iint_{S} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, ds = I$$

- … poiché le linee di $\boldsymbol{J}$ sono parallele alla superficie laterale per definizione, segue che sono uguali i flussi attraverso le sezioni trasversali S_A ed S_B, e cioè

$$\iint_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_A \, ds = \iint_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_B \, ds = I$$



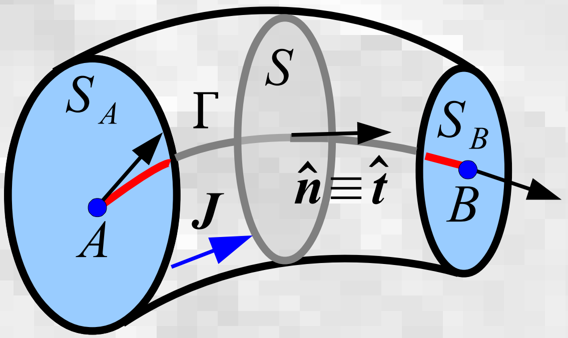
La tensione e la corrente … la tensione di tronco di tubo di flusso

- Si consideri un tronco di tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$ delimitato da due superfici trasversali S_A ed S_B ortogonali alle linee di corrente, essendo $\boldsymbol{J}=\sigma\,\boldsymbol{E}$, le superficie saranno ortogonali anche alle linee di forza del campo elettrico $\boldsymbol{E}$, e quindi **trattasi di due superfici equipotenziali**.

- La **tensione** fra le due superfici è data da

$$\boxed{U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl=V_A-V_B=V_{AB}}$$

dove A e B sono due generici punti rispettivamente di S_A ed S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ che collega A e B



La resistenza e la forza elettromotrice … la resistenza di tronco di tubo di flusso

- Si definisce **resistenza** del tronco del tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$, delimitato dalle due superfici equipotenziali S_A ed S_B, il rapporto

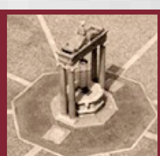
$$R_{AB} = \frac{\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl}{\iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds} = \frac{\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl}{\iint_S \sigma\, \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{V_A - V_B}{I} \qquad (\Omega)$$

e quindi fra la tensione U_{AB} e la corrente I (**legge di Ohm**).

- Il reciproco della resistenza è detta **conduttanza**

$$G_{AB} = \frac{\iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds}{\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl} = \frac{\iint_S \sigma\, \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds}{\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{I}{U_{AB}} = \frac{I}{V_A - V_B} \qquad (\Omega^{-1})$$

La R_{AB} e la G_{AB} non dipendono da $\boldsymbol{E}$ e da $\boldsymbol{J}$, ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla conducibilità del mezzo.



La resistenza e la forza elettromotrice … la resistenza di tronco di tubo di flusso

- Si definisce **resistenza** del tronco del tubo di flusso di ***J***, delimitato dalle due superfici equipotenziali S_A ed S_B, il rapporto

$$R_{AB}=\frac{\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl}{\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}=\frac{\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl}{\iint_S \sigma\,\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{V_A-V_B}{I}\qquad(\Omega)$$

e quindi fra la tensione U_{AB} e la corrente I (**legge di Ohm**).

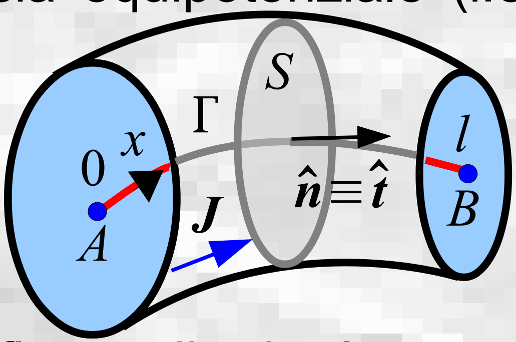
*L'**ohm**, Ω, è l'unità di misura della **resistenza elettrica**, così chiamata in onore del fisco tedesco **Georg Simon Ohm** (1789-1854).*

$$\frac{I}{U_{AB}}=\frac{I}{V_A-V_B}$$

La resistenza e la forza elettromotrice … la resistenza di tronco di tubo di flusso

- Per un calcolo agevole della R_{AB} si ipotizzi che
  - la linea di integrazione Γ coincida con una linea di campo
  - la sezione generica sezione S sia equipotenziale (i.e., normale alle linee di campo)

  da ciò segue che
  - $\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \hat{\boldsymbol{t}}$
  - $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{J}$ risultano paralleli a $\hat{\boldsymbol{t}}$



- Quindi, tenendo conto del fatto che il flusso di $\boldsymbol{J}$ ha lo stesso valore su tutte le sezioni trasversali, si ottiene

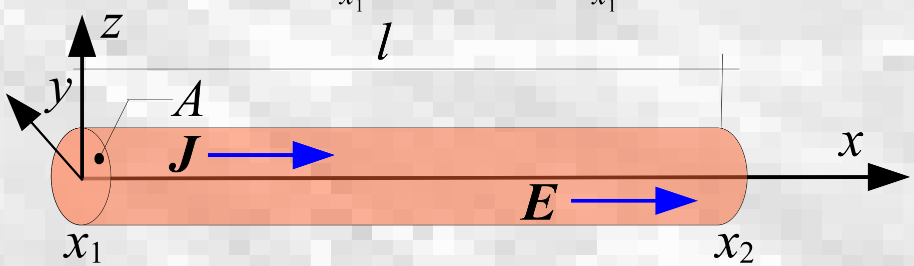
$$R_{AB} = \frac{\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl}{\iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds} = \frac{\int_0^l E(x)\, dx}{\iint_S J\, ds} = \int_0^l \frac{E(x)}{\iint_{S(x)} J(x)\, ds} dx$$

La resistenza e la forza elettromotrice … la resistenza di tronco di tubo di flusso

- Applicando il risultato ottenuto ad un **un tubo di flusso filiforme**, ovvero ad un tubo di flusso la cui dimensione trasversale, rappresentate dall'area A della sua sezione trasversale, rimane costante per tutta la sua lunghezza, l, ed è altresì trascurabile rispetto a quest'ultima, si ottiene

$$\boxed{R_{AB}=\int_0^l \frac{E(x)}{\iint_{S(x)} J(x)\,ds}\,dx=\int_0^l \frac{E(x)}{\sigma \iint_{S(x)} E(x)\,ds}\,dx=\int_0^l \frac{dx}{\sigma\, A(x)}=\varrho\,\frac{l}{A}}$$

$$U=V_1-V_2=\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl=\int_{x_1}^{x_2} \hat{\boldsymbol{i}}\,E_x\cdot\hat{\boldsymbol{i}}\,dl=E_x\,l$$



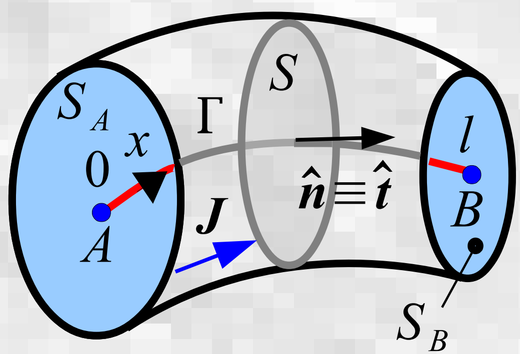
$$I=\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=$$
$$=\iint_S \sigma\,\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=\sigma\,E_x\,A$$

$$R=\frac{U}{I}=\varrho\,\frac{l}{A}$$

La resistenza e la forza elettromotrice … la forza elettromotrice (f.e.m.)

- Si consideri ora un tronco di un tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$ in cui sia presente un campo elettrico impresso $\boldsymbol{E}_s$ (*forza elettrica specifica di origine non elettromagnetica*); senza scapito di generalità ipotizziamo ($\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_s$) irrotazionale, i.e. $\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_s)=0$.
- Dalla irrotazionalità del campo elettrico totale discende l'arbitrarietà della scelta dei punti A e B nonché della linea di integrazione Γ fra A e B ai fini della valutazione della tensione fra le superfici S_A ed S_B.
- Si definisce **forza elettromotrice** (**f.e.m.**) agente nel tubo di flusso tra le superfici S_A e S_B la quantità

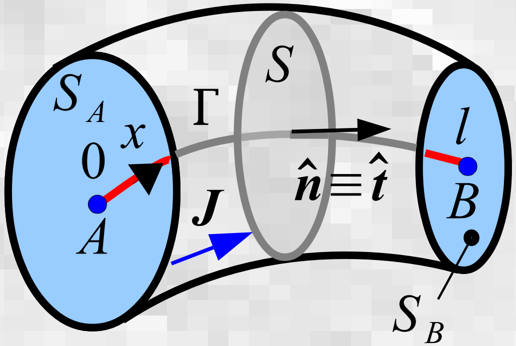
$$E_{AB}=\int_\Gamma \boldsymbol{E}_s\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl \;\;(\mathrm{V})$$



La resistenza e la forza elettromotrice … la forza elettromotrice (f.e.m.)

- Si consideri ora un tronco di un tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$ in cui sia … presso $\boldsymbol{E}_s$ (*forza elettrica* … *gnetica*); senza scapito di … zionale, i.e. $\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_s)=0$.
- … elettrico totale discende … A e B nonché della linea di … la valutazione della tensio-
- … e … a

Nei tronchi di tubo di flusso sedi di f.e.m. si hanno fenomeni di conversione dell'energia da altre forme (chimica, termica, potenziale idraulica, solare, ecc.) in energia elettrica. In tali tronchi, che tipicamente individuano definite regioni dello spazio, agiscono quindi forze elettriche specifiche non conservative, $\boldsymbol{E}_s$, di natura non elettromagnetica (da non confondere quindi con la forza di Coulomb, la forza di Lorentz, ecc., le quali agiscono anche nel vuoto).

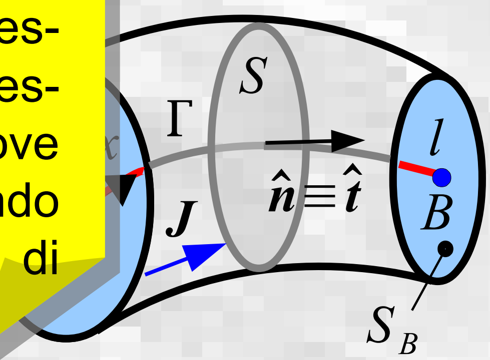


La resistenza e la forza elettromotrice … la forza elettromotrice (f.e.m.)

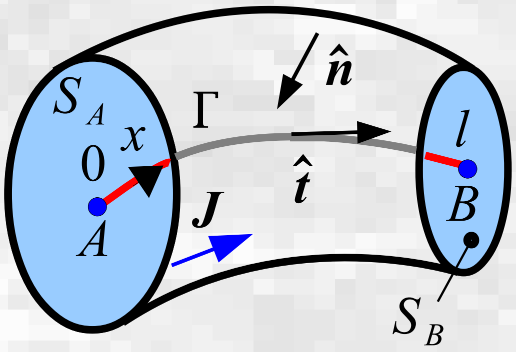
- Si consideri ora un tronco di un tubo di flusso di $\boldsymbol{J}$ in cui sia … (*forza elettrica* … senza scapito di … $\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_s)=0$.
- … totale discende … ché della linea di … one della tensio-
- …

Nei tronchi di tubo di flusso sedi di …

È opportuno osservare che la condizione $\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_s)=0$ non contrasta con la proprietà di $\boldsymbol{E}_s$ di essere non conservativa, perché la condizione $\nabla\times\boldsymbol{E}_s=0$ vale solo dentro il tronco di tubo di flusso e comporta che $\boldsymbol{E}_s$ abbia circuitazione nulla solo in tale volume, che costituisce un domino a connessione lineare semplice; al di fuori del tronco, $\boldsymbol{E}_s$ si estende in una regione generalmente a connessione lineare multipla (e.g. un toroide) dove può avere circuitazione non nulla pur essendo irrotazionale all'interno del tronco di tubo di flusso (cfr *Il circuito elettrico elementare*).



La potenza e l'energia … la potenza



- La **potenza scambiata** da singoli tronchi di tubi di flusso è anche esprimibile come **prodotto fra la tensione, U_{AB}, e la corrente, I**. Ciò può essere dimostrato valutando il **flusso del vettore di Poynting** attraverso la superficie totale di un generico tronco di tubo di flusso.

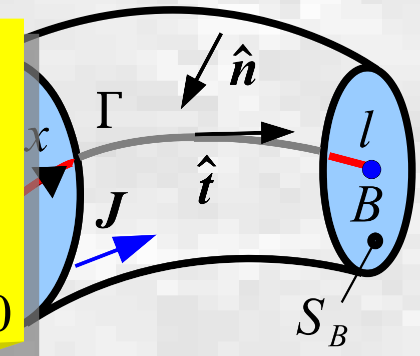
$$P_a = \oiint_S \boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds = \oiint_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds = -\oiint_S \nabla V\times\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds =$$

$$= \underbrace{-\oiint_S \nabla\times\left(V\,\boldsymbol{H}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}_{=0} + \oiint_S V\,\nabla\times\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds = \qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$

$$= \oiint_S V\,\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds = V_A \oiint_{S_A} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds - V_B \oiint_{S_B} \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds = \left(V_A - V_B\right) I = \boxed{U_{AB}\,I}$$

La potenza e l'energia … la potenza

- La **potenza scambiata** da singoli



Dalle proprietà degli operatori vettoriali discende che:

$$\nabla V \times \boldsymbol{H} = \nabla \times (V\,\boldsymbol{H}) - V\,\nabla \times \boldsymbol{H}$$

$$\oint\!\!\oint_S [\nabla \times (V\,\boldsymbol{H})] \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = \oint\!\!\oint\!\!\oint_V \nabla \cdot [\nabla \times (V\,\boldsymbol{H})]\, dv = 0$$

superficie totale di un generico tronco di tubo di flusso.

$$P_a = \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = -\oint\!\!\oint_S \nabla V \times \boldsymbol{H} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds =$$

$$= \underbrace{-\oint\!\!\oint_S \nabla \times (V\,\boldsymbol{H}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds}_{=0} + \oint\!\!\oint_S V\,\nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds =$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

$$= \oint\!\!\oint_S V\,\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = V_A \oint\!\!\oint_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds - V_B \oint\!\!\oint_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = (V_A - V_B)\, I = \boxed{U_{AB}\, I}$$

La potenza e l'energia … la potenza

- La **potenza scambiata** da singoli

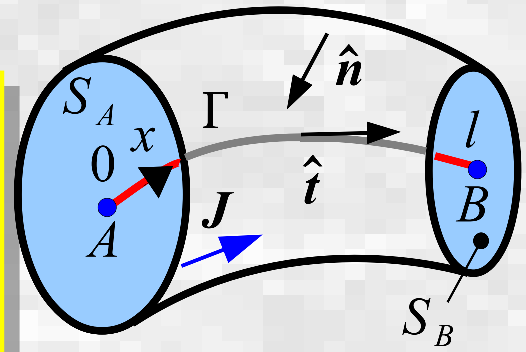
Dalle proprietà degli operatori vettoriali

d

Si osservi che:

- la densità di corrente sulla superficie è diversa da zero solo in corrispondenza delle sezioni terminali;
- su ciascuna superficie terminale il potenziale è costante.

tubo di flusso.



$$\oiint_S \nabla V \times \boldsymbol{H} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds =$$

$$= \underbrace{-\oiint_S \nabla \times (V\, \boldsymbol{H}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds}_{=0} + \oiint_S V\, \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds =$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

$$= \oiint_S V\, \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = V_A \oiint_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds - V_B \oiint_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = (V_A - V_B)\, I = \boxed{U_{AB}\, I}$$

Principali grandezze e loro definizione

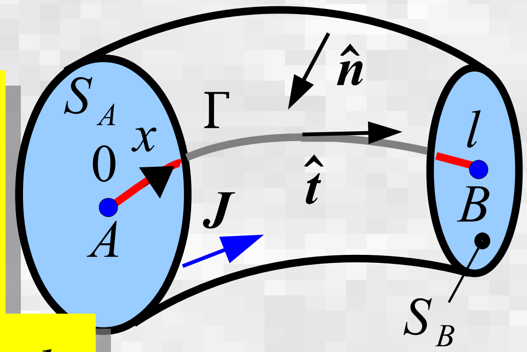
La potenza e l'energia … la potenza

- La **potenza scambiata** da singoli

Dalle proprietà degli operatori vettoriali d

Si osservi che:

- la densità di corrente sulla superficie è diversa da zero solo in corrispondenza delle sezioni terminali;



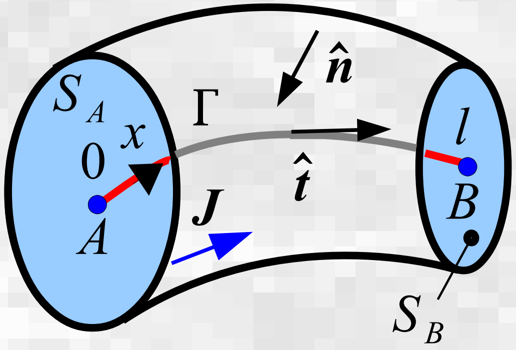
*Il watt, W, è l'unità di misura della **potenza elettrica**, così chiamata in onore del fisco scozzese **James Watt** (1736-1819).*

… di flusso.

$$\ldots \times \boldsymbol{H} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds =$$

$$= \oiint_S V\, \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = V_A \oiint_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds - V_B \oiint_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = (V_A - V_B) I = \boxed{U_{AB} I}$$

La potenza e l'energia … l'energia



- L'**energia scambiata** da singoli tronchi di tubi di flusso in un determinato intervallo di tempo, Δt, è esprimibile come **prodotto fra la potenza *P* scambiata e l'intervallo di tempo Δt**. Infatti, ricordando che

$$dV := \frac{dW}{q} \quad \text{da cui} \quad dW = q\,dV \quad \text{e cioè} \quad W = q\int_{B,\Gamma}^{A} dV = q\left(V_A - V_B\right)$$

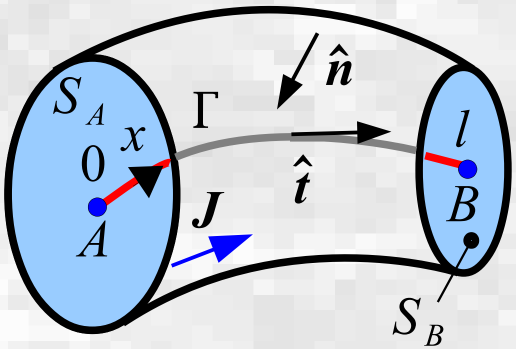
indicando con $Q = I\,\Delta t$ la quantità totale di carica elettrica che nell'intervallo di tempo Δt attraversa, a velocità costante (i.e. in condizioni stazionarie), il tronco di tubo di flusso si avrà

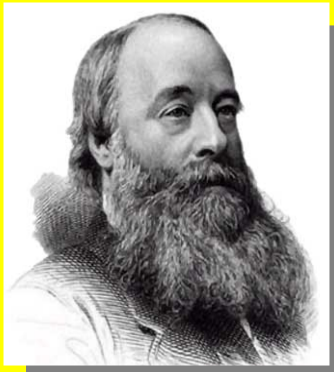
$$\boxed{W = Q\left(V_A - V_B\right) = \left(I\,\Delta t\right)U_{AB} = \left(U_{AB}\,I\right)\Delta t = P\,\Delta t \quad \mathrm{Wh} \quad \text{(wattora)}}$$

essendo $1\ \mathrm{Wh} = 1\ \mathrm{W} \times 1\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{W} \times 3600\ \mathrm{s} = 3.6 \times 10^3\ \mathrm{J}$

La potenza e l'energia … l'energia

- L'**energia scambiata** da singoli tronchi di tubi di flusso in un determinato intervallo di tempo, Δt, è esprimibile come **prodotto fra la potenza** P … t.





*Il joule, J, è l'unità di misura dell'**energia**, così chiamata in onore del fisco britannico **James Prescott Joule** (1818-1889).*

$$= q\int_{B,\Gamma}^{A} dV = q\left(V_A - V_B\right)$$

… le di carica elettrica che … a velocità costante (i.e. in condizioni stazionarie), il tronco di tubo di flusso si avrà

$$W = Q\left(V_A - V_B\right) = \left(I\,\Delta t\right)U_{AB} = \left(U_{AB}\,I\right)\Delta t = P\,\Delta t \quad \mathrm{Wh} \quad \text{(wattora)}$$

essendo $1\ \mathrm{Wh} = 1\ \mathrm{W} \times 1\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{W} \times 3600\ \mathrm{s} = 3.6 \times 10^3\ \mathrm{J}$

La potenza e l'energia … la legge di Joule

- La **legge di Joule** esprime la potenza totale dissipata in un tronco del tubo di flusso, le cui superfici delimitano il volume V di un mezzo materiale conduttore avente conducibilità σ,

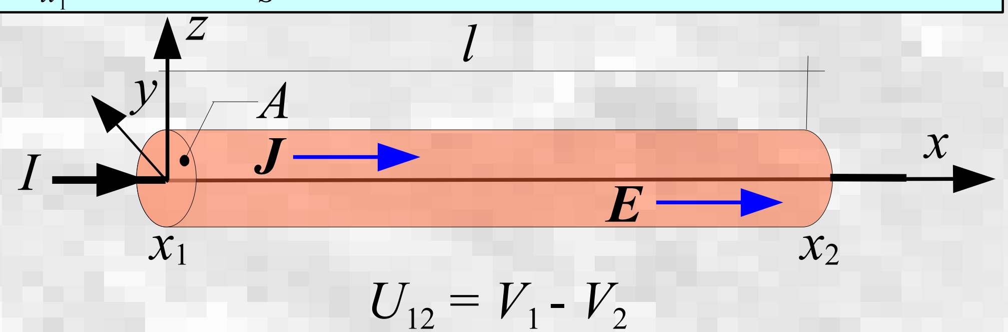
$$P_d = \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, dv = \iiint_V \varrho \left|\boldsymbol{J}^2\right| dv = \iiint_V \sigma \left|\boldsymbol{E}\right|^2 dv$$

- **Esempio**. Senza scapito di generalità, facendo riferimento ad un tubo di flusso filiforme, la *legge di Joule* può essere scritta come

$$P_d = \iiint_V \sigma \left|\boldsymbol{E}\right|^2 dv = \int_{x_1}^{x_2} E_x\, dx \iint_S \sigma E_x\, ds = \left(E_x l\right)\left(\sigma E_x A\right) = U_{12} I$$

ed introducendo la **legge di Ohm**

$$P_d = U_{12} I = \\ = R I^2 = \frac{U_{12}^2}{R}$$



Prof. Alberto Geri *<alberto.geri@uniroma1.it>*

La potenza e l'energia … la legge di Joule

- La **legge di Joule** esprime la potenza totale dissipata in un … superfici delimitano il volume … tore avente conducibilità σ,

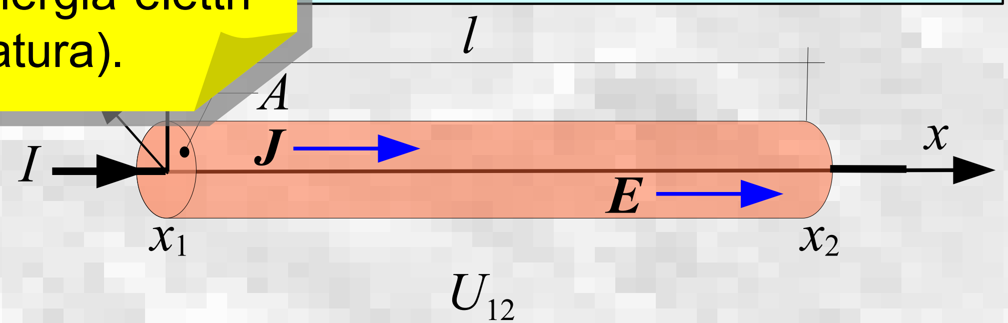
$$\ldots = \oiiint_V \sigma |\boldsymbol{E}|^2 dv$$

- … alità, facendo riferimento ad un … *oule* può essere scritta come

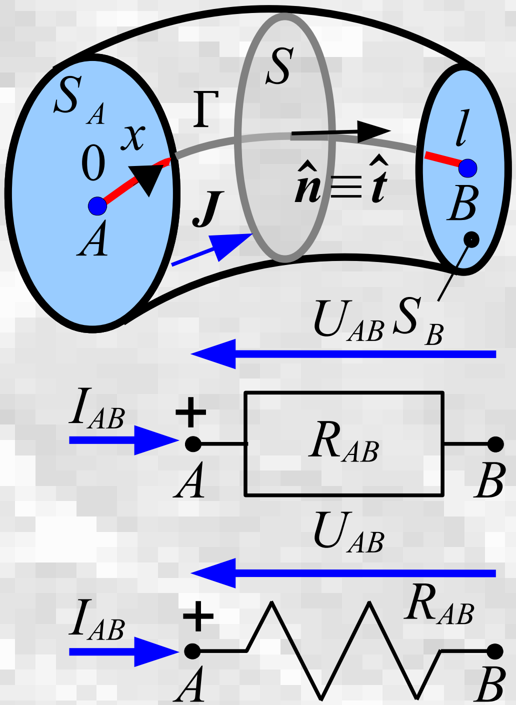
$$\ldots \sigma E_x ds = (E_x l)(\sigma E_x A) = U_{12} I$$

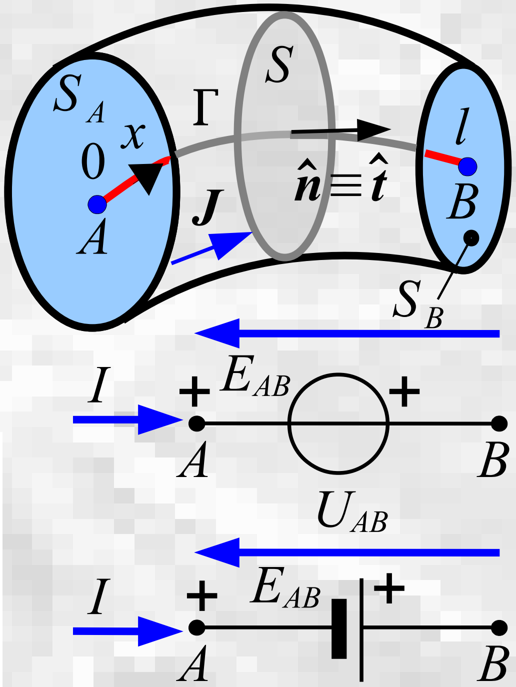
Le regioni del circuito elettrico elementare in cui si dissipa energia per effetto Joule vengono tipicamente associate a componenti elettrici detti **linee elettriche** (i.e., i conduttori mediante i quali viene trasmessa l'energia elettrica) e/o **utilizzatori elettrici** (i.e., i dispositivi che convertono l'energia elettrica in energia di altra natura).

$$P_d = U_{12} I = = R I^2 = \frac{U_{12}^2}{R}$$



Modelli zero-dimensionali





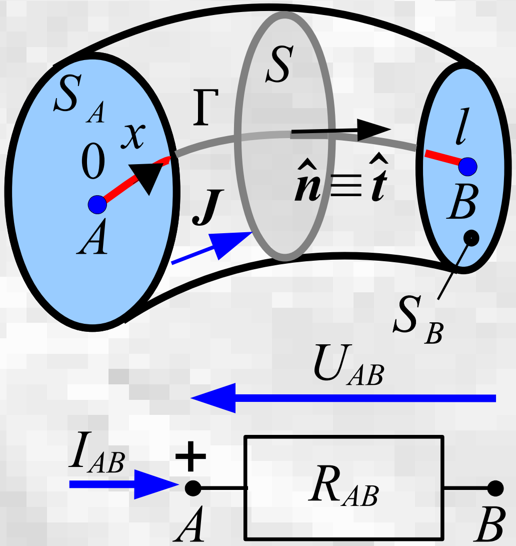
RESITORE

$$U_{AB} = R_{AB} I_{AB}$$

GENERATORE

$$E_{AB} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl \quad (\mathrm{V})$$

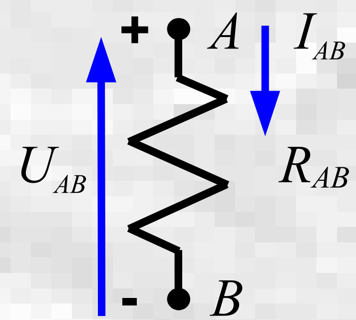
Il resistore ideale … introduzione



- In condizioni statiche i tronchi dei tubi di flusso **meramente conduttivi** rappresentano un modello sintetico di sistemi elettromagnetici, ed il loro comportamento risulta compiutamente descritto attraverso grandezze integrali (e.g., la tensione U tra le due sezioni terminali A e B, la corrente I che le attraversa e la resistenza R del mezzo conduttivo), ovvero attraverso la relazione che le lega (i.e. $U=RI$).
- Pertanto, essi rappresentano un **modello zero-dimensionale**, detto **resistore**, di questi sistemi elettromagnetici (*poiché prescinde dalla effettiva distribuzione dei campi al loro interno*); e questo modello consentirà altresì di rappresentare anche le interrelazioni tra diversi tronchi di tubo di flusso (e.g., collegamenti in serie e/o parallelo).

Il resistore ideale … relazione costitutiva

- Ogni tronco di tubo di flusso può quindi essere schematizzato mediante un modello matematico, graficamente rappresentato dal simbolo in figura, e detto **bipolo resistivo** (o **resistore**), in cui si “perdono” le informazioni sulla geometria e sulle dimensioni del sistema elettromagnetico originario e che, tralasciando il dettaglio dei fenomeni fisici presenti all'interno del tronco, si limita a considerare le due superfici terminali chiamate **poli** o **morsetti** (i.e., A e B), ciascuna caratterizzata da un potenziale elettrico V, ed alle quali è riferita la tensione U_{AB} a cui sono sottoposte e la corrente I_{AB} che le attraversa.
  Il bipolo è caratterizzato con la resistenza R (o dal suo inverso, la conduttanza, $G = R^{-1}$) del tronco di tubo di flusso di cui è modello.



RESISTORE

$$U_{AB} = R_{AB} I_{AB}$$

$$I_{AB} = G_{AB} U_{AB}$$

Il resistore ideale … riferimento di segno

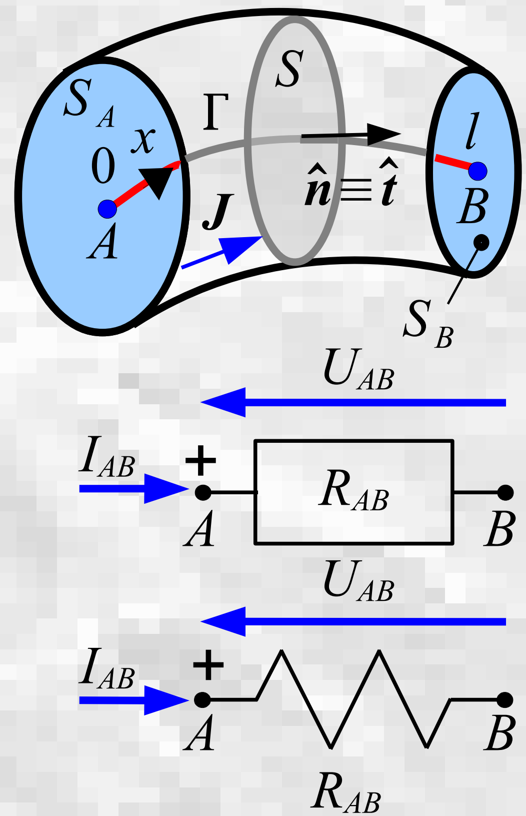
- Si osservi che la **legge di Ohm**, attraverso la quale viene descritto il comportamento elettromagnetico del tronco di tubo di flusso, dovrebbe essere più propriamente scritta come

  $$U = \pm R\, I$$

  dove si dovrà rispettivamente attribuire il segno **+** o il segno **–** a seconda che la corrente I sia o meno concorde con il verso di integrazione scelto, e cioè:

  – $U_{AB} = +R_{AB} I_{AB}$ *se la corrente va da A a B (i.e., questo caso)*

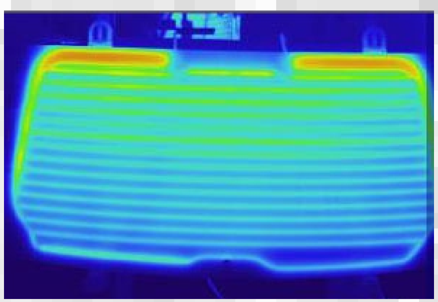
  – $U_{AB} = -R_{AB} I_{BA}$ *se la corrente va da B a A*



$$\boxed{U_{AB} = R_{AB} I_{AB}}$$

Modelli zero-dimensionali

Il resistore ideale … il modello di componenti ed effetti

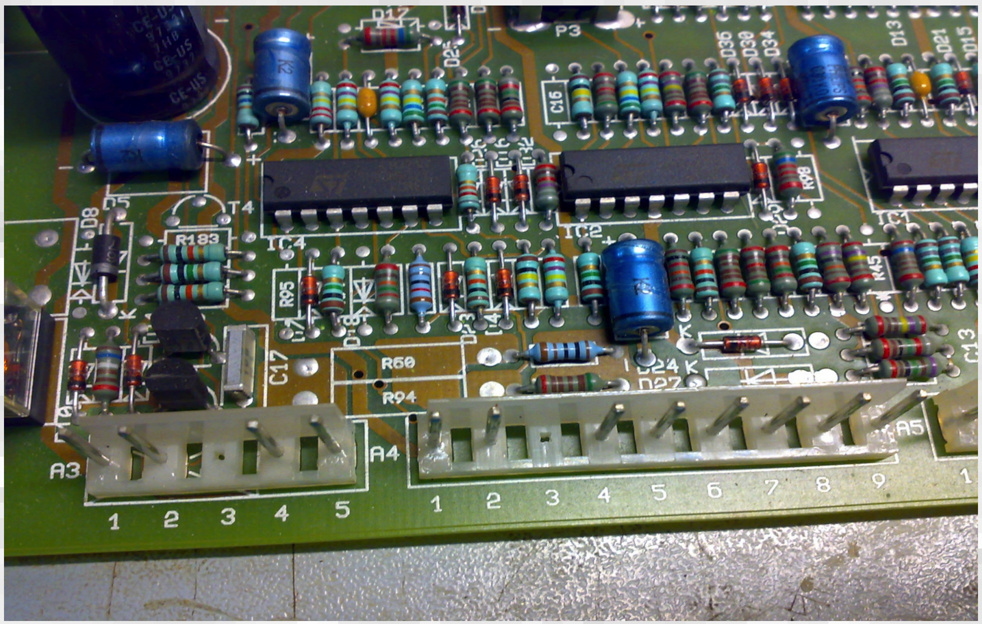


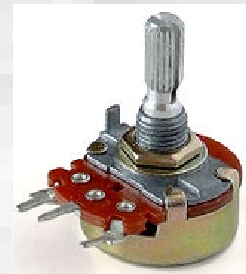
Il resistore ideale … la modellazione di componenti resistivi

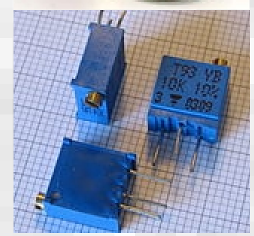
- Nelle applicazioni ingegneristiche vengono impiegati dei componenti, detti **resistori**, che con ottima approssimazione godono delle stesse proprietà del modello zero-dimensionale precedentemente studiato (detto anche esso **resistore**).
- Questi ***resistori*** sono costruiti in modo tale da sviluppare ed esaltare al proprio interno quei fenomeni conduttivi che sono funzionali al corretto funzionamento del sistema.
- Sono ricompresi nella categoria di resistori componenti profondamente diversi per forma, dimensione e valori di resistenza e di potenza. E nelle loro diverse realizzazioni trovano largo impiego dalle schede dei circuiti stampati, dagli elettrodomestici fino alle installazioni di potenza (e.g., nei forni elettrici, nelle cabine di trasformazione, nei sistemi di frenatura).

Il resistore ideale … la modellazione di componenti resistivi

- I resistori vengono largamente impiegati, e.g., nelle schede elettroniche realizzate su circuiti stampati







Il resistore ideale … la modellazione di componenti resistivi

- I resistori vengono normalmente installati all'interno degli elettrodomestici di suo più comune come
  - asciugacapelli
  - ferro da stiro
  - forno elettrico
  - lavastoviglie
  - lavatrice
  - lampade tipo Edison

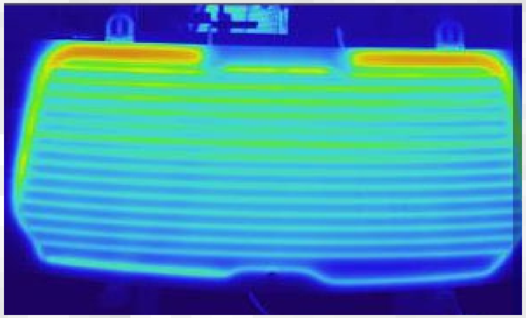


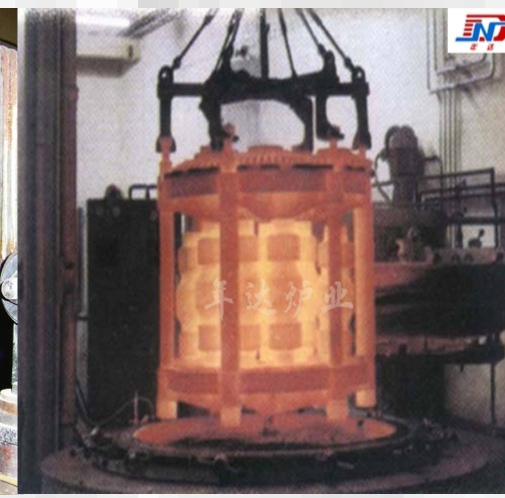
Immagine termica di un lunotto di un'autovettura





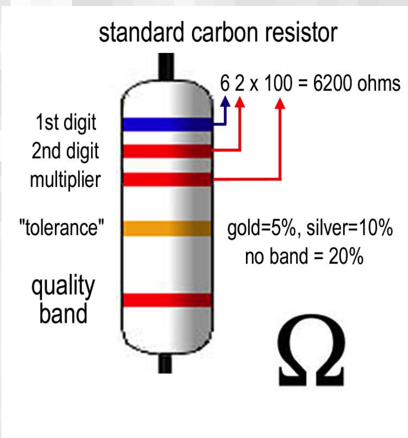
Il resistore ideale … la modellazione di componenti resistivi

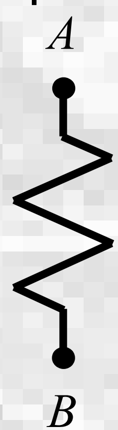
- I resistori vengono impiegati in applicazioni di potenza come
  - sistemi di messa a terra del centro stella del trasformatore nelle cabine di trasformazione
  - sistemi dissipativi per la frenatura elettrica nella trazione ferroviaria
  - sistemi riscaldanti nei forni elettrici



Il resistore ideale … la modellazione di componenti resistivi

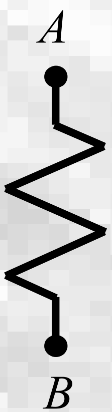
- Indipendentemente dalla forma, delle dimensioni, dai valori di resistenza, di tensione e di potenza, tutti i componenti resistivi, in condizioni stazionorie o quasi-stazionarie, sono rappresentabili con un bipolo resistivo il cui valore di resistenza è assunto uguale a quello dichiarato per il componente, o a quello deducibile dai valori di targa dichiarati dal costruttore (e.g., tensione e potenza nominali di funzionamento).





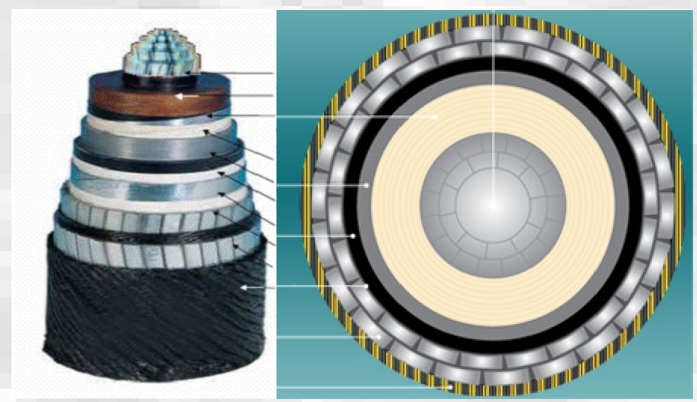
$R_{AB} = 6.2\ \mathrm{k}\Omega$

4.5 V – 3 W



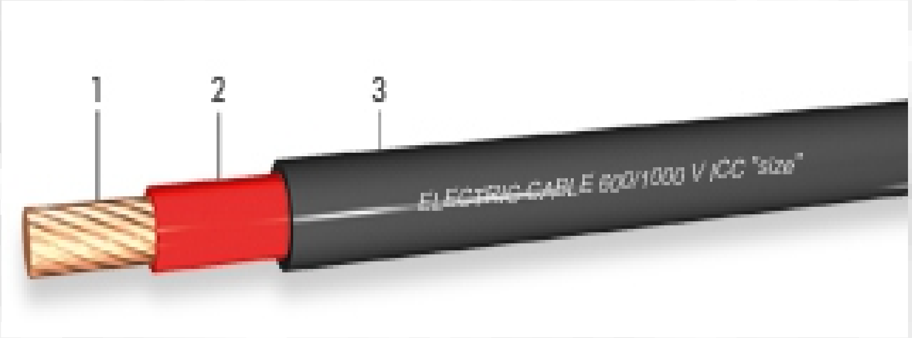
$R_{AB} = 6.75\ \Omega$

Il resistore ideale … la modellazione di effetti resistivi



Il resistore ideale … la modellazione di effetti resistivi

- **Esempio**. *Determinare la resistenza per unità di lunghezza* $(1\ \mathrm{km})$ *del cavo unipolare rigido in rame* ($\varrho_{Cu} = 0.0171\ \Omega\ \mathrm{mm}^2\ \mathrm{m}^{-1}$, $\varnothing \approx 8\ \mathrm{mm}$) *ed isolato con polietilene reticolato sotto guaina di PVC*.



1 - Corda rigida di rame Classe 2 CEI EN 60228
2 - Polietilene reticolato (XLPE)
3 - PVC

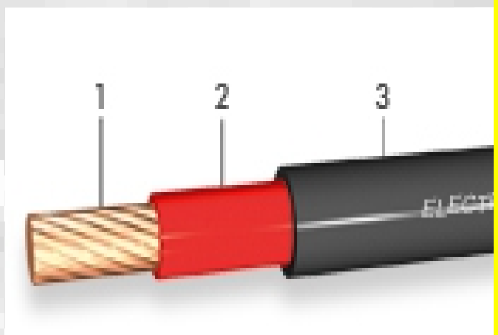
$$R = \varrho_{Cu}\frac{l}{A} = 0.0171\cdot 10^3\,\frac{1}{\pi\,4^2} = 0.0171\cdot 10^3\,\frac{1}{50.265} = 0.340 \qquad (\Omega\ \mathrm{km}^{-1})$$

…

Il resistore ideale … la modellazione di effetti resistivi

- **Esempio**. *Determinare …*
  del cavo unipolare rigi…
  ed isolato con polietile…

Si osservi che nella guaina isolante (essendo $\sigma = 0$) è nulla la corrente $\boldsymbol{J} = 0$; quindi, in corrispondenza della superficie cilindrica di separazione fra conduttore e guaina, sarà nulla anche componente normale, $\boldsymbol{J}_n = 0$. Pertanto, il conduttore costituisce a tutti gli effetti la "***materializzazione***" del tubo di flusso delle linee di corrente: sulla sua superficie laterale è infatti presente la sola componente tangenziale, $\boldsymbol{J}_t$.



$$R = \varrho_{Cu}\frac{l}{A} = 0.0171 \cdot 10^3 \frac{1}{\pi\, 4^2} = 0.0171 \cdot 10^3 \frac{1}{50.265} = 0.340 \qquad (\Omega\ \mathrm{km}^{-1})$$

…

NORME

CONFEZIONAMENTO

IEC 502 (**)
BS 7889 (***)

RoHS compliant

CE

ro-dimensionali

effetti resistivi

CARATTERISTICHE

Temperatura di esercizio: **+5°C ÷ +90° C sul conduttore**
Tensione nominale Uo/U: **0,6/1 kV**
Raggio min di curvatura: **4 x diam esterno**

APPLICAZIONI

à di lunghezza (1 km)

Assumendo come temperatura di normale funzionamento del cavo 80 °C, la su resistenza chilometrica diventa

$$\varrho_{Cu,80^\circ} = \varrho_{Cu,20^\circ}\left(1+\alpha\left(T-20\right)\right) =$$
$$= 0.0171\left(1+3.9\cdot 10^{-3}\left(80-20\right)\right) =$$
$$= 0.0211 \;\left(\Omega\,\mathrm{mm}^2\,\mathrm{m}^{-1}\right)$$

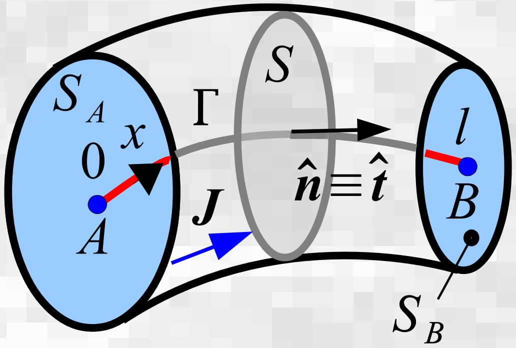
$$R_{80^\circ} = \varrho_{Cu,80^\circ}\cdot 10^3\,\frac{1}{S} = 0.420 \;\left(\Omega\,\mathrm{km}^{-1}\right)$$

Sezione mm²	Classe conduttore	Spessore isolante* mm	Spessore guaina* mm	Dia... es...		
1X1,5	2	0,7	1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X2,5	2	0,7	1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X4	2	0,7	1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X6	2	0,7	1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X10	2	0,7	1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X16	2	0,7	1,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X25	2	0,9	1,4	11,30	0,727	320
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1X50	**2**	**1,0**	**1,4**	**13,60**	**0,387**	**550**
1X70	2	1,1	1,4	15,40	0,268	770
1X95	2	1,1	1,5	17,40	0,193	1030
1X120	2	1,2	1,5	19,10	0,153	1250
1X150	2	1,4	1,6	21,10	0,124	1550
1X185	2	1,6	1,6	23,30	0,0991	1900
1X240	2	1,7	1,7	25,90	0,0754	2500
1X300	2	1,8	1,8	29,10	0,0601	3150

- PVC

40 $(\Omega\,\mathrm{km}^{-1})$

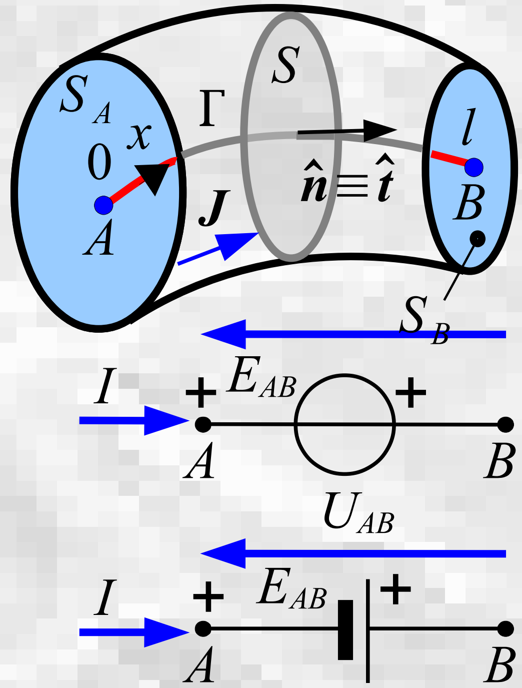
Il generatore ideale … introduzione



- In condizioni statiche di conduzione i tronchi dei tubi di flusso presi in esame rappresentano un modello sintetico di sistemi elettromagnetici sedi di forze elettriche specifiche di natura non conservativa; il loro comportamento risulta compiutamente descritto facendo esclusivamente riferimento a grandezze integrali (i.e., la tensione U tra le due sezioni terminali A e B e la forza elettromotrice E in essi generata), ovvero attraverso la relazione che le lega (i.e., $U = \pm E$).
- Pertanto, essi rappresentano un **modello zero-dimensionale**, detto **generatore di f.e.m.**, dei sistemi elettromagnetici (*poiché prescinde dalla effettiva distribuzione dei campi al loro interno*); e questo modello consentirà altresì di rappresentare anche le interrelazioni tra diversi tronchi (e.g., collegamenti serie e/o parallelo).

Il generatore ideale … relazione costitutiva

- Ogni tronco di tubo di flusso può quindi essere schematizzato mediante un modello matematico, graficamente rappresentato dai simboli in figura, e detto **bipolo generatore** (o **generatore**), in cui si "perdono" le informazioni sulla geometria e sulle dimensioni del sistema elettromagnetico originario e che, tralasciando il dettaglio dei fenomeni fisici presenti all'interno del tronco, si limita a considerare le due superfici terminali chiamate **poli** o **morsetti** (i.e., A e B), alle quali è riferita la tensione U_{AB}. Il bipolo è caratterizzato con la f.e.m. E generata nel tronco di tubo di flusso di cui è modello.



GENERATORE

$$E_{AB} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl \;(\mathrm{V})$$

Modelli zero-dimensionali

Il generatore reale … la legge di Ohm generalizzata

- Nel tronco di tubo di flusso precedentemente considerato, che è sede di una f.e.m., la resistenza si definisce come

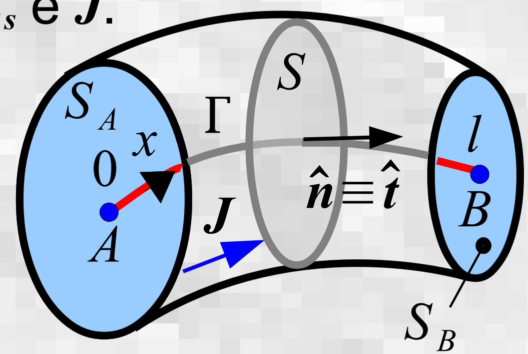
$$R_{AB}=\frac{\int_A^B (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_s)\cdot\hat{\boldsymbol{t}}\,dl}{\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}=\frac{\int_0^l (E(x)+E_s(x))\,dx}{\iint_S J\,ds}=\int_0^l \frac{(E(x)+E_s(x))}{\iint_{S(x)} J(x)\,ds}dx=$$
$$=\frac{U_{AB}+E_{AB}}{I}$$

che risulta ancora indipendente da $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_s$ e $\boldsymbol{J}$.

- La relazione a cui si è pervenuti

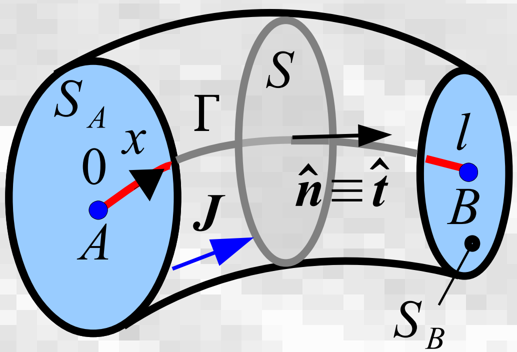
$$U_{AB}+E_{AB}=R_{AB}I$$

prende nome di **legge di Ohm generalizzata**.

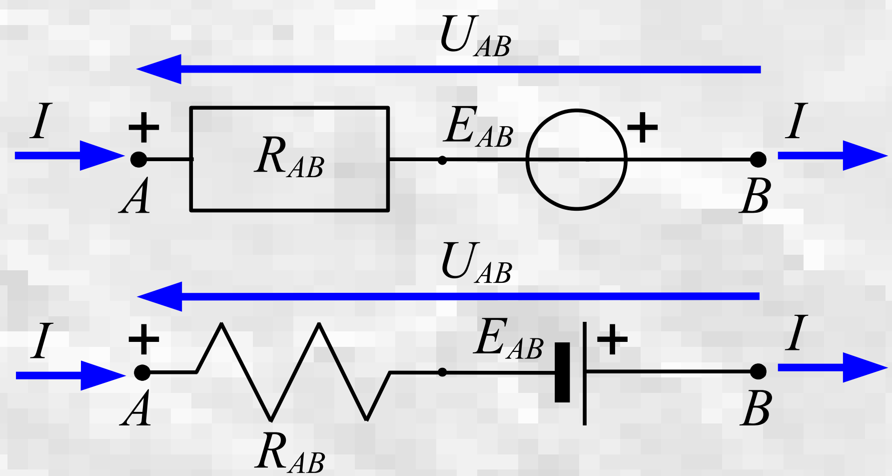


Il generatore reale … la legge di Ohm generalizzata

- I segni scaturiscono dal confronto fra il verso positivo di riferimento scelto per l'integrazione (i.e., da A a B) rispetto ai versi dei campi: si è assunta la densità di corrente $\boldsymbol{J}$ (e conseguentemente il campo elettrico $\boldsymbol{E}$) concorde con il versore $\hat{\boldsymbol{t}}$, si è ipotizzato inoltre $\boldsymbol{E}_s$ anch'esso concorde con $\hat{\boldsymbol{t}}$.



$$E_{AB} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl \ \ (\mathrm{V})$$



$$U_{AB} + E_{AB} = R_{AB}\, I$$

Il generatore reale … la legge di Ohm generalizzata

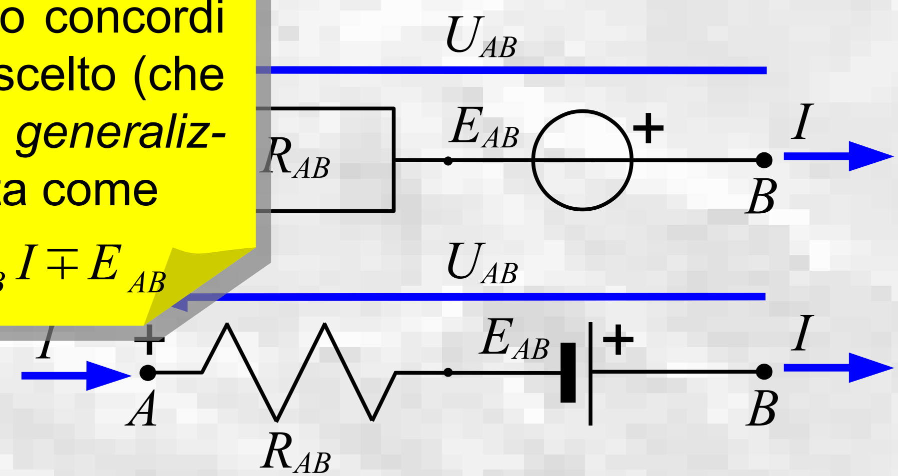
- I segni scaturiscono dal confronto fra il verso positivo di … (i.e., da A a B) rispetto ai … densità di corrente $\boldsymbol{J}$ (e … trico $\boldsymbol{E}$) concorde con il … anch'esso concorde con $\hat{\boldsymbol{t}}$.

In generale, la **legge di Ohm generalizzata** può essere scritta come

$$U_{AB} \pm E_{AB} = \pm R_{AB} I$$

Il segni **+** o **-** andranno scelti a seconda che e od I siano o meno concordi con il verso di integrazione scelto (che va da A a B). La *legge Ohm generalizzata* può anche essere scritta come

$$V(A)^{+} - V(B)^{-} = U_{AB} = \pm R_{AB} I \mp E_{AB}$$

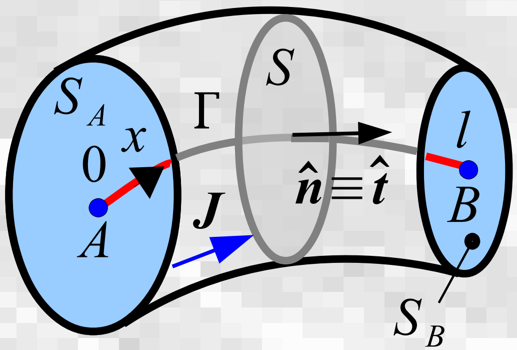


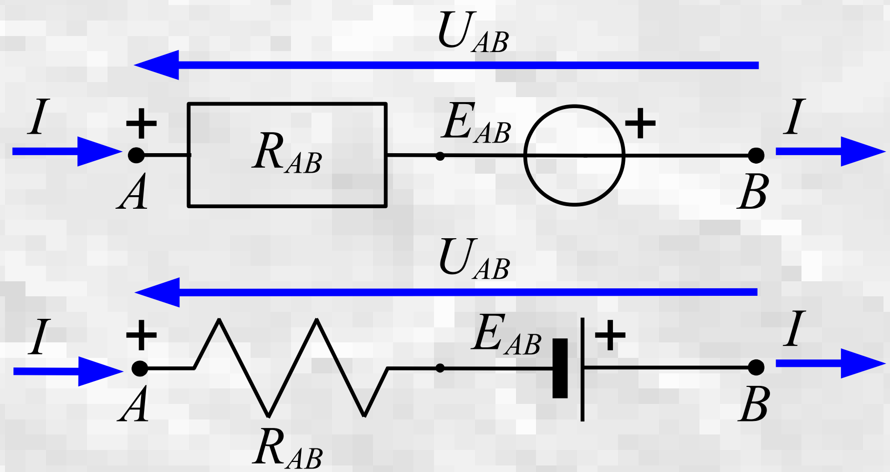
$$E_{AB} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, dl \quad (\mathrm{V})$$

$$U_{AB} + E_{AB} = R_{AB} I$$

Il generatore reale … il bilancio delle potenze

- Con riferimento al tronco di tubo di flusso con f.e.m. impressa, il bilancio delle potenze si può anche scrivere direttamente moltiplicando per la corrente I il primo ed il secondo membro della legge di Ohm generalizzata (che ne descrive il comportamento elettromagnetico attraverso grandezze integrali)

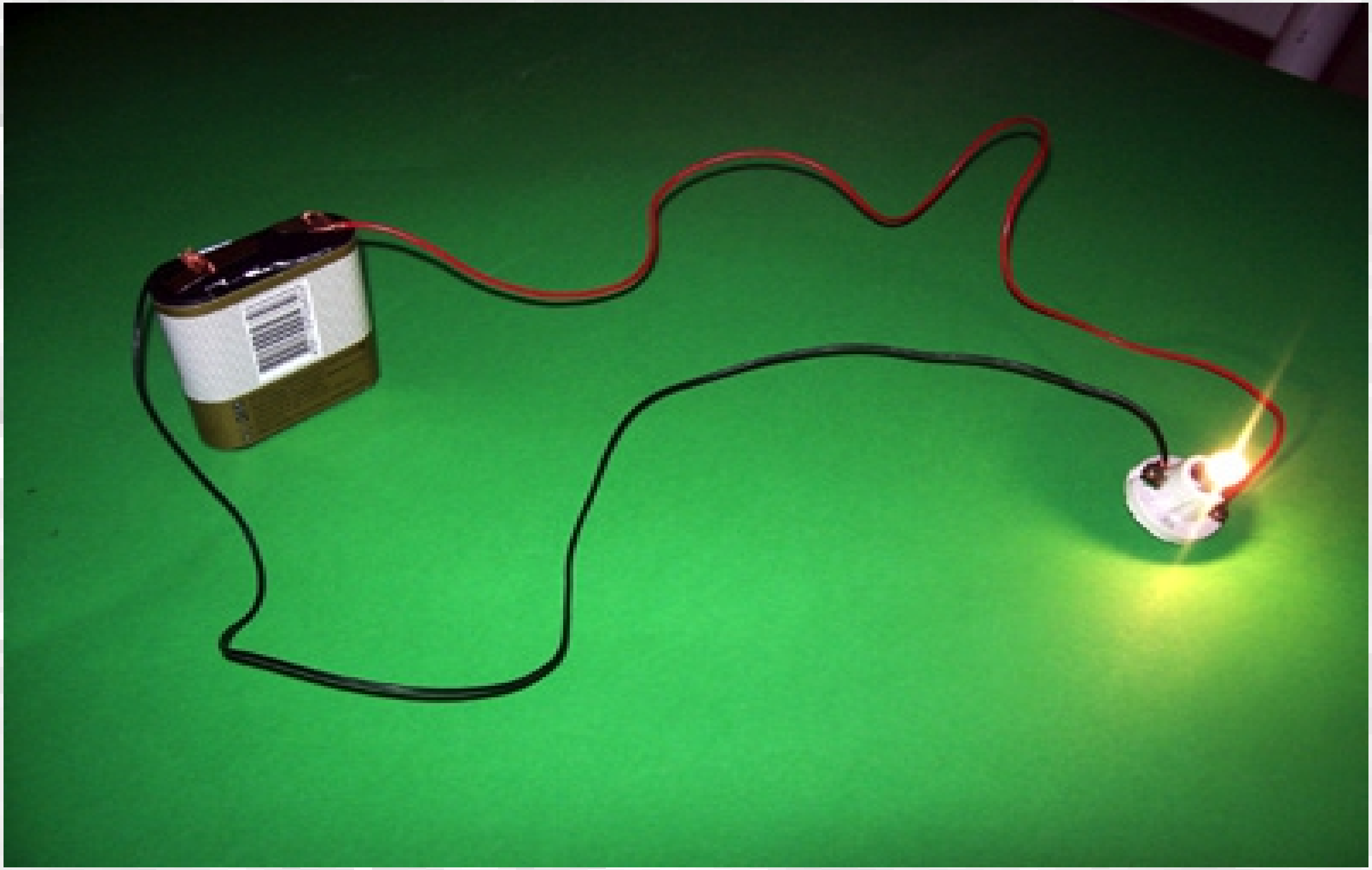




$$U_{AB}+E_{AB}=R_{AB}\,I$$

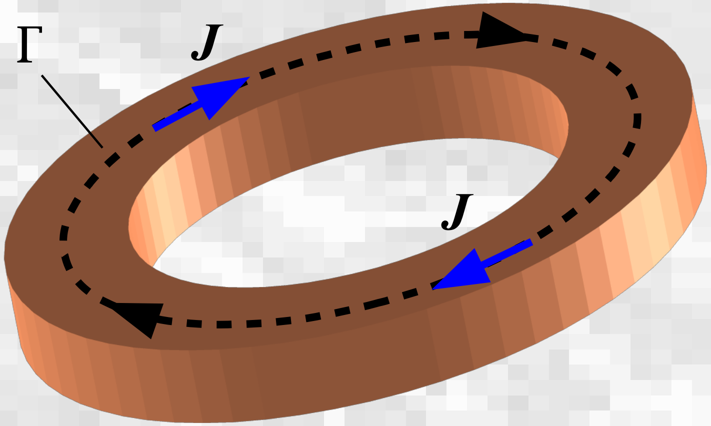
$$\boxed{U_{AB}\,I+E_{AB}\,I=R_{AB}\,I^2 \qquad P_a+P_g=P_d \qquad P_g-P_d=-P_a\left(=P_e\right)}$$

Circuiti elettrici elementari



I tubi di flusso chiusi … il circuito elementare

- Si definisce **circuito elementare** qualsiasi tubo di flusso chiuso (per il quale vale ovviamente $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$); con riferimento a quanto in precedenza visto, ciò equivale a considerare le superfici S_A e S_B del tronco del tubo di flusso coincidenti.
- La tensione U e la f.e.m. e coincidono rispettivamente con la circuitazione del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e del campo impresso $\boldsymbol{E}_s$ lungo una qualsiasi linea chiusa Γ .



- Il campo $\boldsymbol{E}$ è ovunque irrotazionale, e quindi è conservativo, cioè

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl = 0$$

…

I tubi di flusso chiusi … la legge di Ohm

…

- Per contro, dalla irrotazionalità del campo impresso E non

Si ricordi che valgono le seguenti proprietà:

- un campo si dice conservativo nel dominio Ω se è nulla la sua circuitazione su qualsiasi linea chiusa appartenente a Ω;
- un campo si dice irrotazione nel dominio Ω se ha rotore ovunque nullo in Ω;
- un campo conservativo è sempre irrotazionale;
- un campo irrotazionale è conservativo solo se il suo dominio Ω è a connessione lineare semplice (i.e., data una qualsiasi curva chiusa appartenente al dominio, esiste sempre almeno una superficie avente come contorno tale curva che sia interamente contenuta nel dominio stesso, ovvero quando ogni linea chiusa può essere ricondotta ad un punto con trasformazione continua senza mai uscire dal dominio);
- un campo irrotazionale in tutto lo spazio è conservativo.

…

I tubi di flusso chiusi … la legge di Ohm

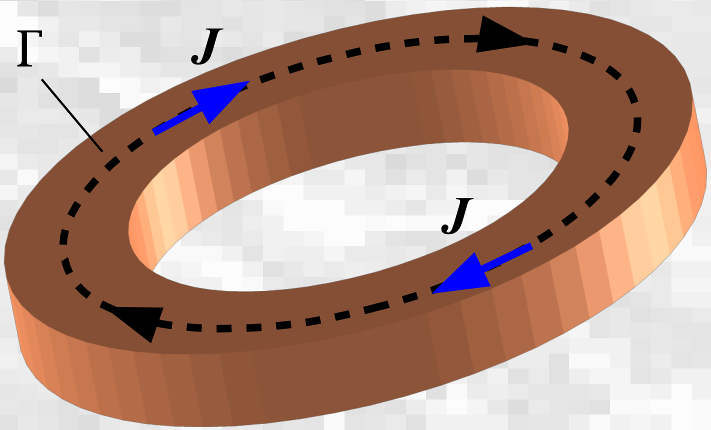
…

- Per contro, dalla irrotazionalità del campo impresso, $\boldsymbol{E}_s$, non discende che lo stesso sia conservativo, dato che la regione interna al tubo di flusso chiuso può essere a connessione multipla, quindi in generale si avrà che

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl \neq 0$$

- L'espressione della resistenza del tubo di flusso chiuso è

$$R = \frac{\oint_\Gamma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_s) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl}{\iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds} = \frac{E}{I}$$



- La legge di Ohm per un tubo di flusso chiuso diventa quindi

$$E = R\, I$$

…

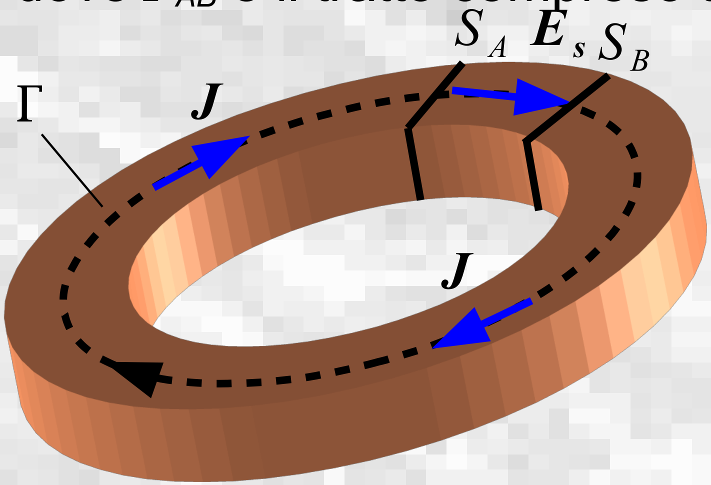
I tubi di flusso chiusi … i generatori elettrici

…

- Il campo elettrico impresso, $\boldsymbol{E}_s$, è tipicamente diverso da zero solo in alcune regioni del circuito, e.g. nel tratto di tubo di flusso compreso fra le sezioni S_A e S_B , da cui segue che

$$E = \oint_{\Gamma} \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl = \int_{\Gamma_{AB}} \boldsymbol{E}_s \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, dl$$

dove Γ_{AB} è il tratto compreso tra le due sezioni considerate.



Le regioni in cui agiscono i campi impressi, tipicamente, si associano a componenti elettrici detti **generatori elettrici** (i.e., dispositivi che convertono energia di altra natura in energia elettrica).

…

I tubi di flusso chiusi … i generatori elettrici

…

- Si osservi che in assenza di campi elettrici impressi, $\boldsymbol{E}_s = 0$, dalla **legge di Ohm** per un tubo di flusso chiuso

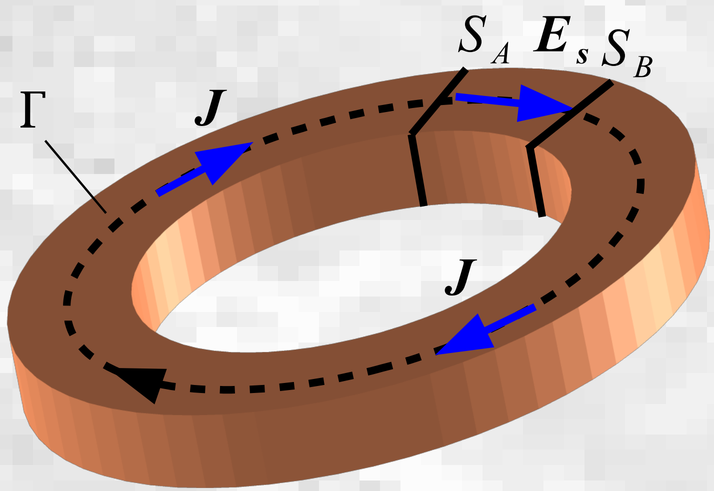
$$0 = R\,I$$

si deduce che la presenza del solo campo elettrico conservativo, $\boldsymbol{E}$, **non permette la circolazione di una corrente elettrica di conduzione**, i.e. $\boldsymbol{J} = 0$, infatti:

  - se le cariche percorrono traiettorie chiuse il lavoro compiuto dal campo elettrico, $\boldsymbol{E}$, è identicamente nullo;
  - se il lavoro è nullo, dovrà essere nulla anche la potenza dissipata all'interno del circuito elementare (con $\varrho \neq 0$), e quindi, la corrente elettrica di conduzione, $\boldsymbol{J}$, non potrà che essere parimenti nulla.

Il bilancio energetico … l'applicazione del teorema di Poynting

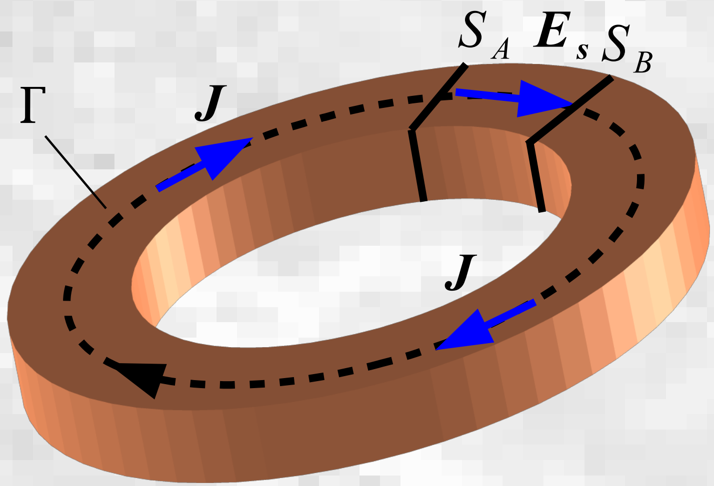
- Si consideri inizialmente un circuito elementare costituito da un tubo di flusso a sezione trasversale costante S_T. Sia V il suo volume ed S la superficie laterale che lo delimita. Siano inoltre S_A ed S_B due sezioni trasversali del tubo di flusso fra le quali agisca una f.e.m. e dovuta al campo imposto E_S. Applicando il teorema di Poynting al circuito elementare si avrà



$$\oiiint_V \boldsymbol{E}_s \cdot \boldsymbol{J}\, dv = \oiiint_V \varrho\, J^2\, dv + \oiiint_V \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) dv + \oiint_S \boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds$$

Il bilancio energetico … l'applicazione del teorema di Poynting

- Il termine che è relativo alla variazione di energia elettromagnetica nel volume V non può che essere nullo essendo in condizioni stazionarie. Si può facilmente verificare che è nullo anche il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del conduttore; si ha pertanto



$$\underbrace{\oiiint_V \boldsymbol{E}_s\cdot\boldsymbol{J}\,dv}_{\neq\ 0}=\underbrace{\oiiint_V \varrho J^2\,dv}_{\neq\ 0}+\underbrace{\oiiint_V\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)dv}_{=\ 0}+\underbrace{\oiint_S \boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}_{=\ 0}$$

Il bilancio energetico … l'applicazione del teorema di Poynting

- Il termine che è relativo alla

$$\oiint_S \boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=\oiint_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=-\oiint_S \nabla V\times\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=$$

ricordando che $\nabla V\times\boldsymbol{H}=\nabla\times(V\,\boldsymbol{H})-V\,\nabla\times\boldsymbol{H}$

$$\oiint_S \boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=-\oiint_S \nabla\times(V\,\boldsymbol{H})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds+\oiint_S V\,\nabla\times\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds$$

ricordando che $\oiint_S \nabla\times(V\,\boldsymbol{H})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=\iiint_V \underbrace{\nabla\cdot[\nabla\times(V\,\boldsymbol{H})]}_{=0}\,dv=0$

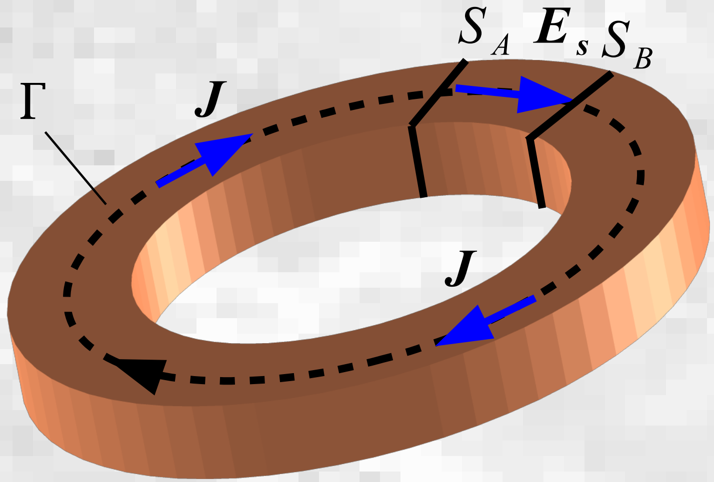
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds=\underbrace{-\oiint_S \nabla\times(V\,\boldsymbol{H})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}_{=0}+\underbrace{\oiint_S V\,\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}_{=0}=0$$

$$\underbrace{\iiint_V \boldsymbol{E}_s\cdot\boldsymbol{J}\,dv}_{\neq 0}=\underbrace{\iiint_V \varrho\,J^2\,dv}_{\neq 0}+\underbrace{\iiint_V\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\cdots}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\cdots}{\partial t}\right)dv}_{=0}+\underbrace{\oiint_S \boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds}_{=0}$$

Il bilancio energetico … l'applicazione del teorema di Poynting

- Adottando, senza scapito di generalità, l'ipotesi di tubo di flusso filiforme, gli integrali che compaiono nell'espressione del teorema di Poynting si semplificano in modo suscettibile di una interessante interpretazione



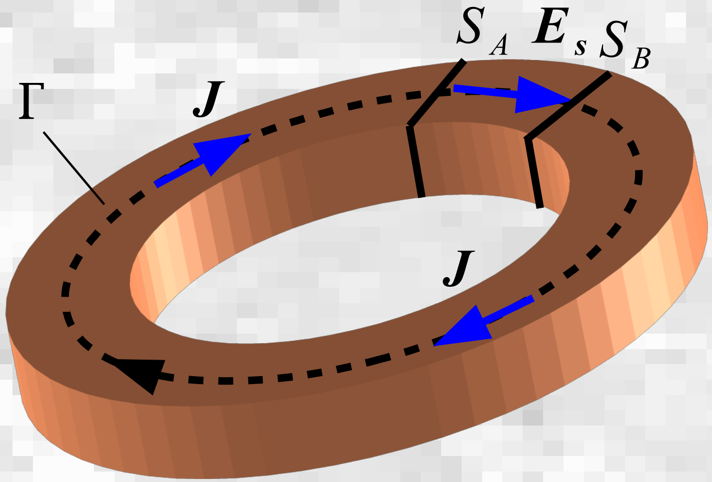
$$\iiint_V \boldsymbol{E}_s \cdot \boldsymbol{J}\, dv = \int_{\Gamma_{AB}} \iint_{S_T} E_s J\, dl\, ds = \int_{\Gamma_{AB}} E_s\, dl \iint_{S_T} J\, ds = E_{AB} I$$

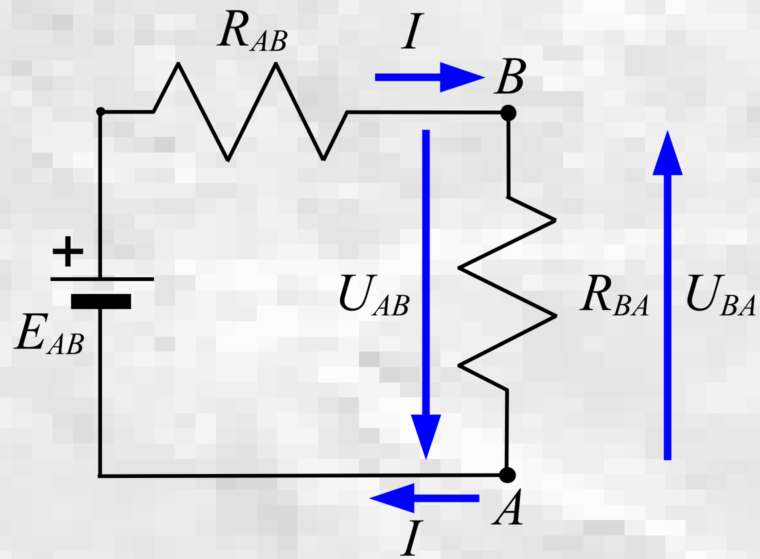
$$\iiint_V \varrho J^2 dv = \int_{\Gamma_{AB}} \iint_{S_T} \varrho J^2 dl\, ds + \int_{\Gamma_{BA}} \iint_{S_T} \varrho J^2 dl\, ds = R_{AB} I^2 + R_{BA} I^2$$

da cui si deduce che

$E_{AB} I = R_{AB} I^2 + R_{BA} I^2$ (tutte le potenze sono espresse in W)

Il modello circuitale … Il bilancio delle potenze

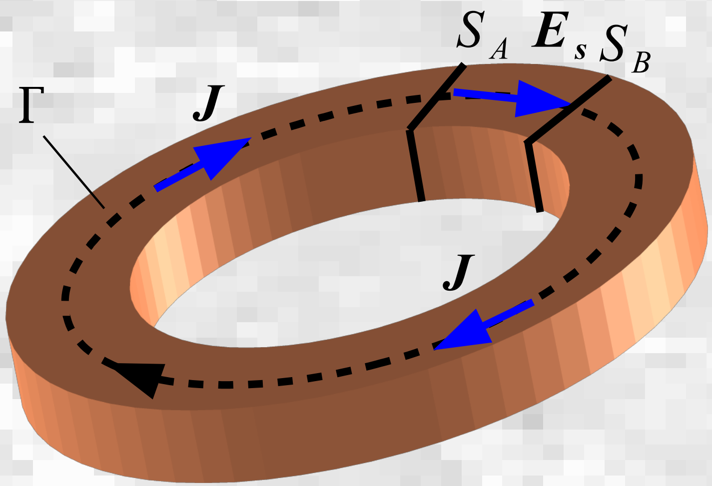


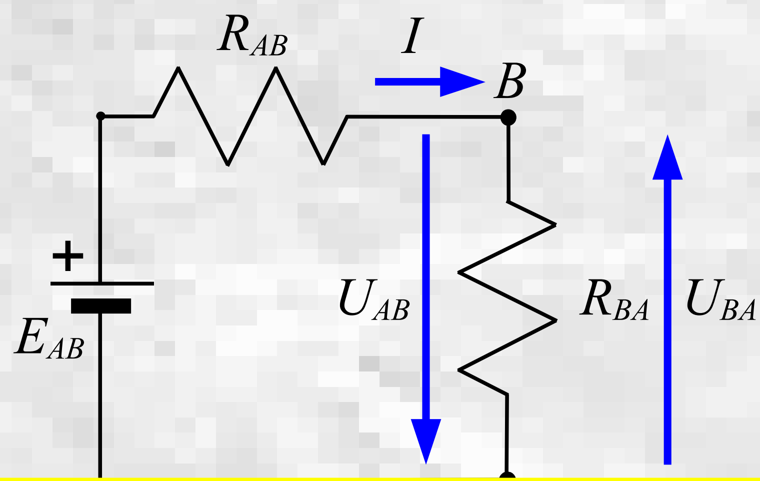


$$E_{AB} I = R_{AB} I^2 + R_{BA} I^2$$
$$E_{AB} I - R_{AB} I^2 = R_{BA} I^2$$
$$(E_{AB} - R_{AB} I) I = (R_{BA} I) I$$
$$-U_{AB} I = U_{BA} I$$
$$U_{BA} I = U_{BA} I$$

Del circuito elementare si può dare una rappresentazione grafica in cui appaiono solo i legami fra le grandezze integrali che descrivono il comportamento elettromagnetico del sistema.

Il modello circuitale … Il bilancio delle potenze





$$\boxed{E_{AB} I = R_{AB} I^2 + R_{BA} I^2}$$

$$E_{AB} I - R_{AB} I^2 = R_{BA} I^2$$

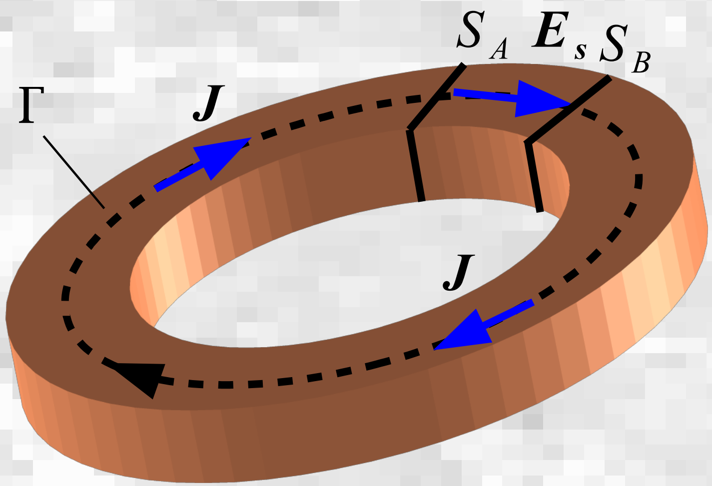
$$(E_{AB} - R_{AB} I) I = (R_{BA} I) I$$

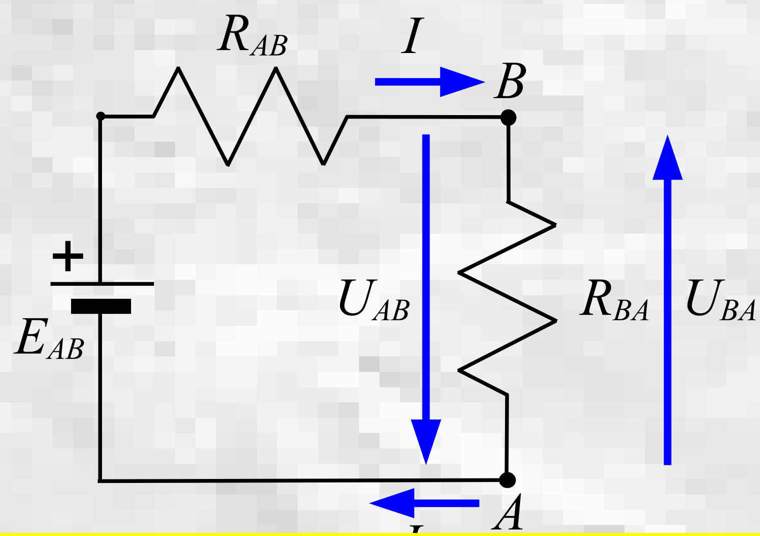
$$-U_{AB} I = U_{BA} I$$

$$U_{BA} I = U_{BA} I$$

La potenza generata, P_g, dal generatore, $E_{AB}\ I$, bilancia la somma della potenza dissipata, $P_{d'}$, all'interno del generatore, $R_{AB}\ I^2$, e di quella dissipata, $P_{d''}$, nel resistore collegato tra il tronco S_B ed S_A, $R_{BA}\, I^2 = U_{BA}\, I$.

Il modello circuitale … Il bilancio delle potenze





$$E_{AB}I = R_{AB}I^2 + R_{BA}I^2$$

$$\boxed{E_{AB}I - R_{AB}I^2 = R_{BA}I^2}$$

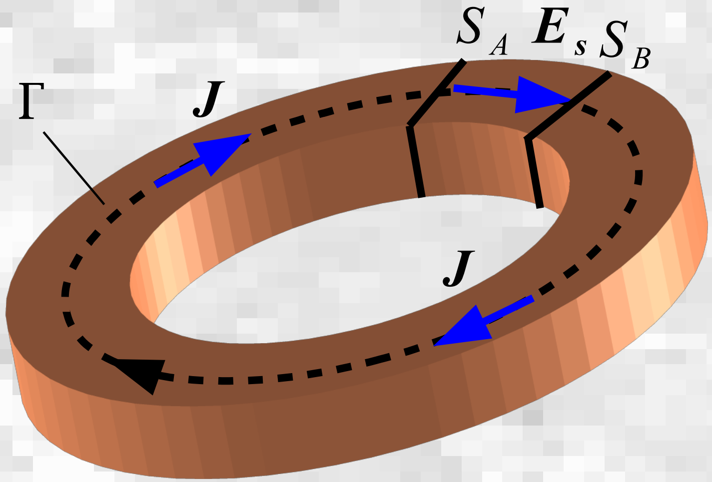
$$(E_{AB} - R_{AB}I)I = (R_{BA}I)I$$

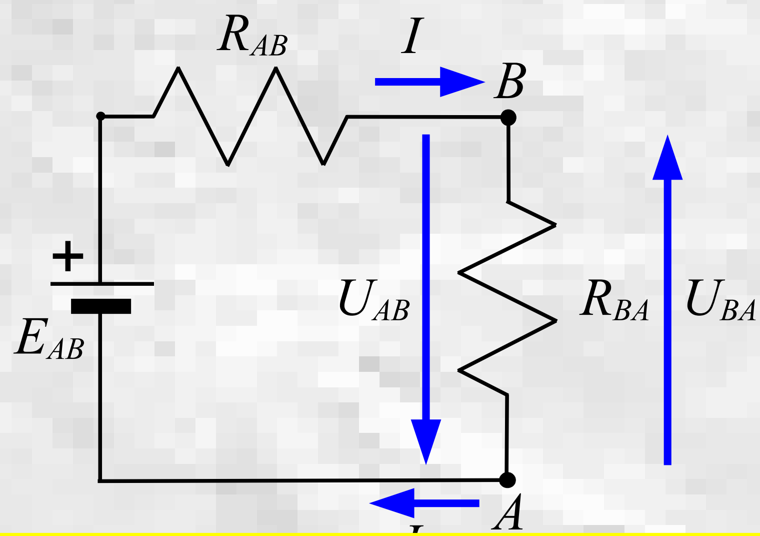
$$-U_{AB}I = U_{BA}I$$

$$U_{BA}I = U_{BA}I$$

La potenza erogata, $P_e=P_g-P_{d'}$, dal tronco compreso fra S_A ed S_B (quello con la sorgente di campo), $E_{AB}\, I$ - $R_{AB}\, I^2$, bilancia quella assorbita, $P_a=P_{d''}$, dal tronco compreso tra S_B ed S_A, $R_{BA}\, I^2$.

Il modello circuitale … Il bilancio delle potenze





$$E_{AB} I = R_{AB} I^2 + R_{BA} I^2$$

$$E_{AB} I - R_{AB} I^2 = R_{BA} I^2$$

$$\left(E_{AB} - R_{AB} I\right) I = \left(R_{BA} I\right) I$$

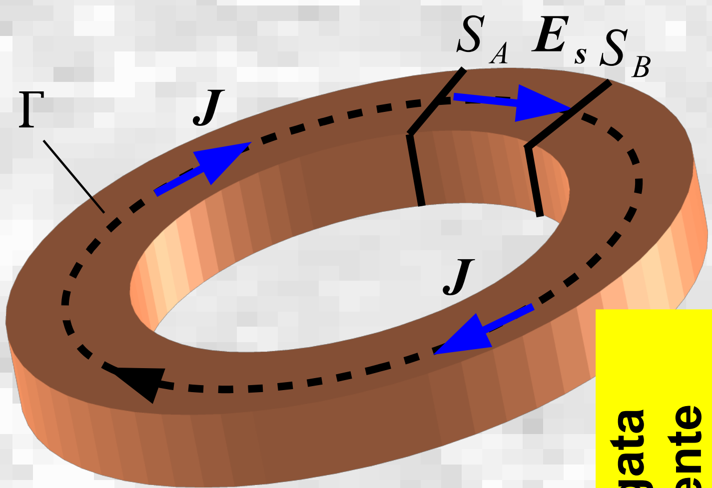
$$-U_{AB} I = U_{BA} I$$

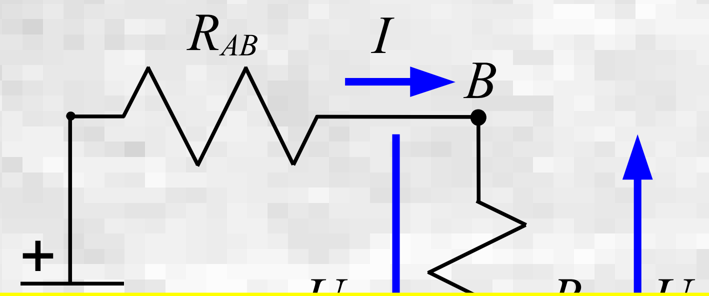
$$\boxed{U_{BA} I = U_{BA} I}$$

La potenza uscente, P_e , dal tronco compreso fra S_A ed S_B, $U_{BA}\ I$, bilancia quella entrante, P_a , nel tronco compreso fra S_B ed S_A, $U_{BA}\ I$.

$-U_{AB} = -(\ V(A)-V(B)\ ) = V(B)-V(A) = U_{BA}$

Il modello circuitale … Il bilancio delle potenze





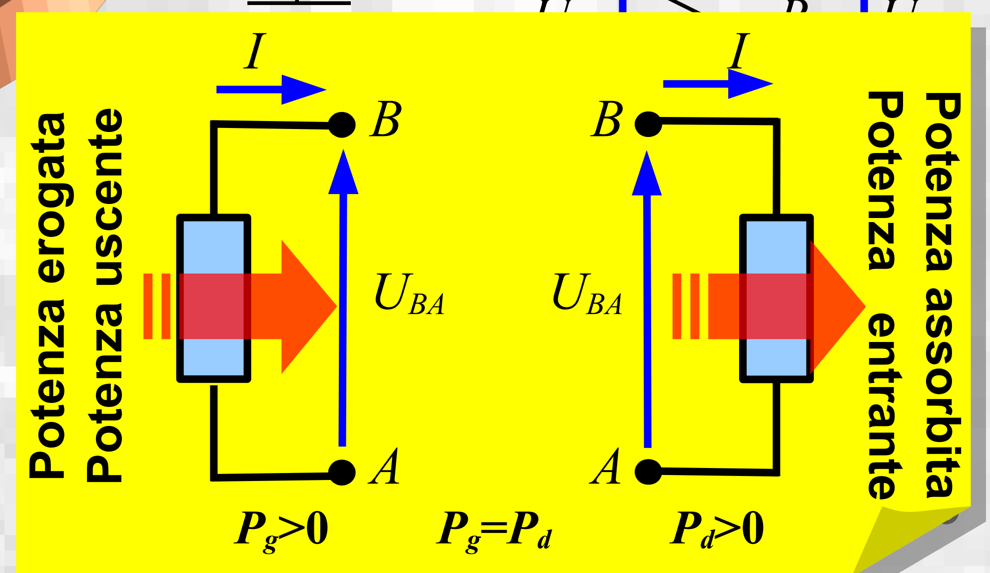
$$E_{AB} I = R_{AB} I^2 + R_{BA} I^2$$

$$E_{AB} I - R_{AB} I^2 = R_{BA} I^2$$

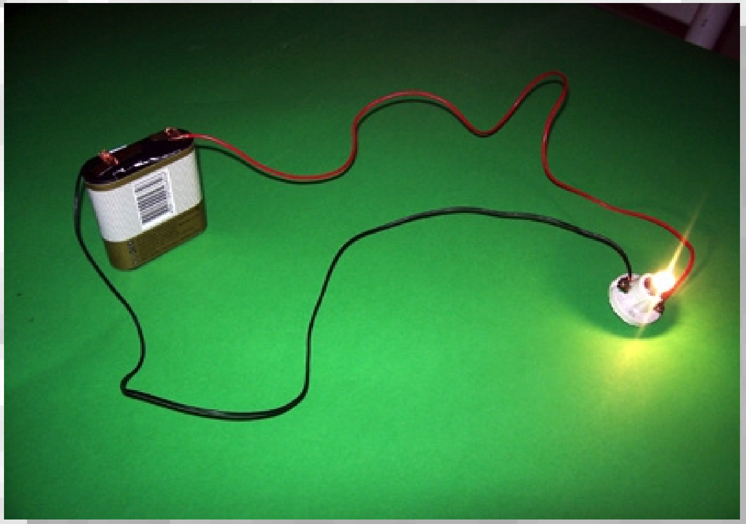
$$\left(E_{AB} - R_{AB} I\right) I = \left(R_{BA} I\right) I$$

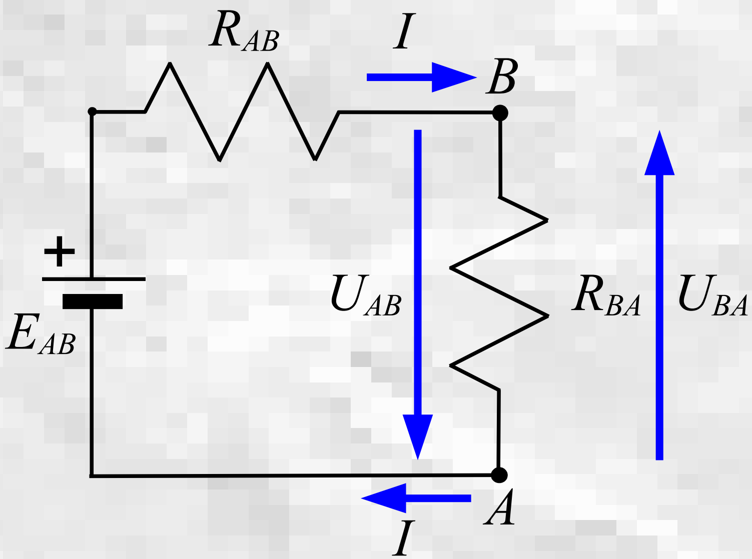
$$-U_{AB} I = U_{BA} I$$

$$\boxed{U_{BA} I = U_{BA} I}$$



Il modello circuitale … una semplice applicazione



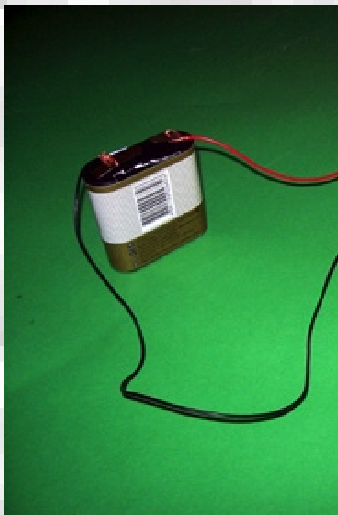


Pila	4.5 V
Conduttori (Cu)	$l = 30$ cm
	$A = 1.5\ \text{mm}^2$
Lampadina	4.5 V – 3 W

$$E_{AB} = 4.5\ \text{V}$$

$$R_{AB} = \varrho_{Cu_{20^\circ}} \frac{2\,l}{A} = 0.017\,\frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2}}{1.5} =$$
$$= 6.8\ \text{m}\Omega$$

Il modello circuitale … una semplice applicazione



L'utilizzatore (i.e., la lampadina) è assegnato non già attraverso il valore della sua resistenza (i.e., R_n) bensì attraverso i suoi "dati di targa", ovvero tensione, U_n, e potenza, P_n, nominali (che sono stampigliati anche sul suo involucro). Il valore della sua resistenza equivalente, R_n, deve pertanto essere ***stimato*** in funzione di questi valori.
Per ogni tratto, o componente, di un circuito elettrico si ha

$P_n = U_n I_n$ ed anche $P_n = R_n I_n^2$

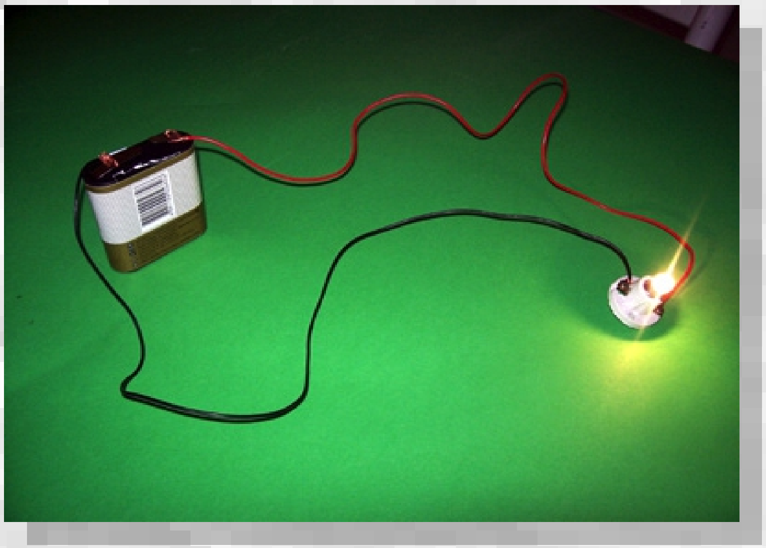
eliminando la corrente e risolvendo rispetto alla resistenza si ottiene

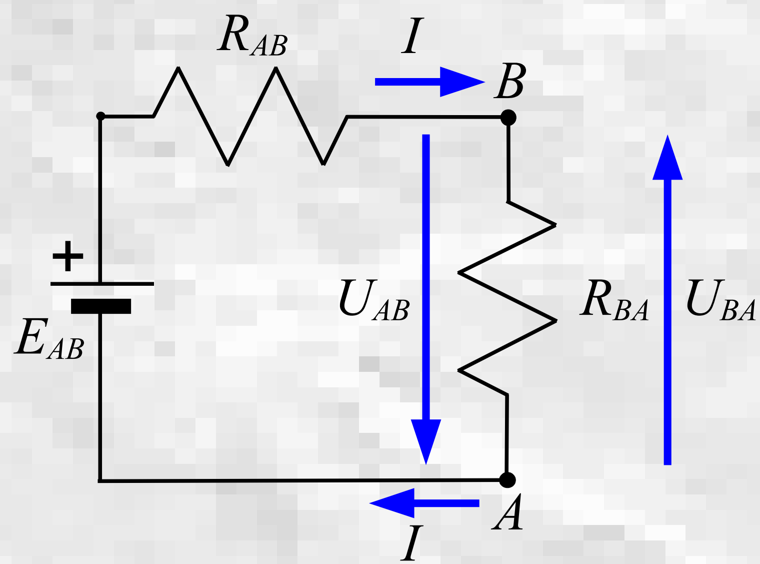
$$R_n = \frac{U_n^2}{P_n} = \frac{4.5^2}{3} = 6.75\ \Omega \qquad R_{BA} = R_n = 6.75\ \Omega$$

Pila
Conduttori (Cu

Lampadina $4.5\ \text{V} - 3\ \text{W}$ $= 6.8\ \text{m}\Omega$

Il modello circuitale … una semplice applicazione





$$E_{AB} = R_{AB} I + R_{BA} I = \left(R_{AB} + R_{BA}\right) I$$

$$\boxed{I = \frac{E_{AB}}{R_{AB} + R_{BA}} = \frac{4.5}{6.7568} = 666\,\text{mA}}$$

$$U_{BA} = R_{BA} I = 4.4955\ \text{V}$$

$$P_g = E_{AB} I = 2.997\ \text{W}$$

$$P_d = R_{AB} I^2 = 3.016\ \text{mW}$$

$$P_a = R_{BA} I^2 = 2.994\ \text{W}$$

$$P_e = P_g - P_d = P_a$$