

$$2) \log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \quad \forall x, y > 0 \\ \forall b > 0, b \neq 1$$

$$3) \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \underbrace{\log_b x - \log_b y}_t \quad \begin{matrix} // & // \\ & // \end{matrix}$$

dm

$$b^t \stackrel{?}{=} \frac{x}{y} \Leftrightarrow b^{\log_b x - \log_b y} \stackrel{?}{=} \frac{x}{y}$$

$$\frac{b^{\log_b x}}{b^{\log_b y}} = \frac{x}{y} \quad \text{OK}$$

$$4) \log_b(x^r) = r \underbrace{\log_b x}_t \quad \begin{matrix} \forall x > 0, \forall r \in \mathbb{R} \\ \forall b > 0, b \neq 1 \end{matrix}$$

dm

tesi $\Leftrightarrow b^t \stackrel{?}{=} x^r \Leftrightarrow b^{r \log_b x} \stackrel{?}{=} x^r$

$$(b^{\log_b x})^r$$

$$\Leftrightarrow x^r \stackrel{?}{=} x^r \quad \text{OK!}$$

oss $\log(x^2) = 2 \log x \quad \text{se } \underline{\underline{x > 0}}$

md $\log(x^2) = 2 \log|x| \quad \text{se } x \neq 0$

5) Cambio di base nei logaritmi.

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \begin{array}{l} \forall x > 0 \\ \forall a, b > 0; a, b \neq 1 \end{array}$$

Dm $\log_b x \stackrel{?}{=} \frac{\log_a x}{\log_a b} \Leftrightarrow \underbrace{\log_b x \log_a b}_{+} \stackrel{?}{=} \log_a x$

$$\Leftrightarrow a^t \stackrel{?}{=} x \Leftrightarrow \underbrace{a^{\log_a b \log_b x}}_{\substack{\text{"} \\ (a^{\log_a b})^{\log_b x}}} \stackrel{?}{=} x$$

$$\Leftrightarrow b^{\log_b x} \stackrel{?}{=} x \quad \text{vero!} \quad \square$$

Conseguenza della (5).

Tutte le funzioni $\log_b x$ sono ottenute l'una dall'altra moltiplicando per una costante (positiva o negativa!)

Per es $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}$

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log x}{\log \frac{1}{e}} = -\log x$$

-1

Più in generale

$$\log_{\frac{1}{b}} x = -\log_b x$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\forall a, b > 0; a, b \neq 1$$

Trovare il dominio naturale di $f(x) = (\log_3(\log_4(x^2-5)))^{-1/4}$

Consiglio: per capire il dominio di una funzione composta il consiglio è di partire "dall'esterno".

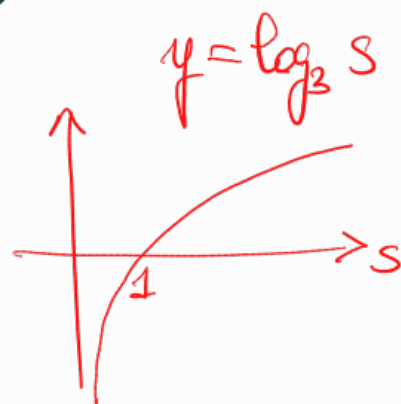
oss $t^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$
è definito per $t > 0$

dom $f = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(\log_4(x^2-5)) > 0\} =$

esiste ed è > 0

||
s

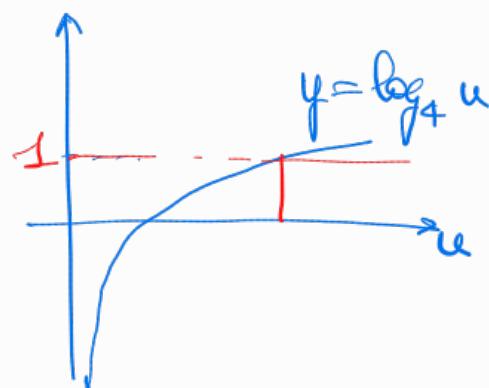
oss $\log_3 s > 0 \Leftrightarrow s > 1$



$= \{x \in \mathbb{R} : \log_4(x^2-5) > 1\} =$

u

$[\log_4 u > 1 \Leftrightarrow u > 4^1 = 4]$



$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 > 4\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 9\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Dominio di $f(x) = \log_{1/2} x + \log_{1/2} (|x|-1)$

Bisogna imporre: $\begin{cases} x > 0 & (1^\circ \text{ log}) \\ |x|-1 > 0 & (2^\circ \text{ log}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x < -1) \vee (x > 1)$

dominio di $f = (1, +\infty)$

Attenzione: il dominio va calcolato nella forma originale di f :

Se avessi detto $f(x) = \log_{1/2} x + \log_{1/2} (|x|-1) =$
 $= \log_{1/2} (x(|x|-1))$

se calcolassi ora il dominio di f in questa forma, otterrei.

$$x(|x|-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x|-1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ |x|-1 < 0 \end{cases}$$

↑
quello di prima
 $(x > 1)$

↕
 $-1 < x < 1$
↕
 $(-1 < x < 0)$

dom $f = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ errato

dom $f(x)$
 $\equiv$

dove $f(x) = \frac{x^2}{x}$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{dom } \frac{x^2}{x} \neq \text{dom } x$$

Risolvere la diseq.

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (|x|-1) > 0$$

1° dominio $\Rightarrow$ $x > 1$ (visto prima)

adesso posso mettere insieme i log

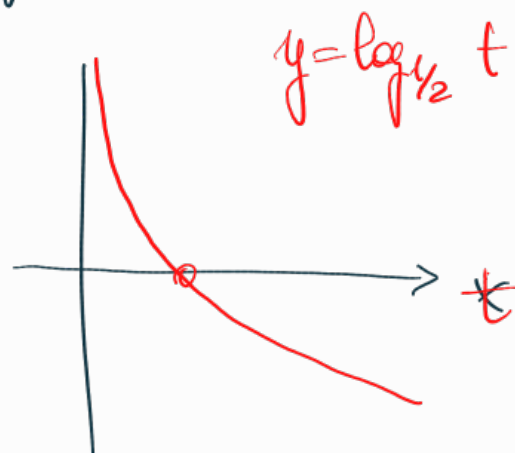
$$\log_{\frac{1}{2}} (\underbrace{x(|x|-1)}_t) > 0$$

t
↕

$$0 < t < 1$$

$$0 < x(|x|-1) < 1$$

↑
sempre vero per $x > 1$



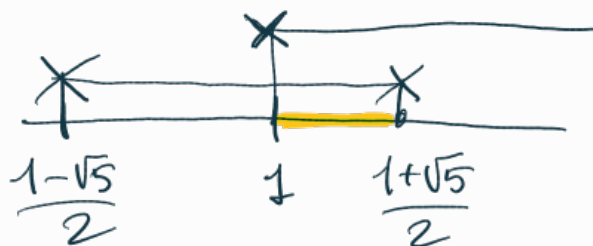
$$\begin{cases} x > 1 \\ x(|x|-1) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



Soluz. della diseq.

$$-1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$