Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale piano (1)

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{2xy}{y-\alpha} \, , \; 2 - \frac{4x^2}{(y-\alpha)^2} \right)$$

è conservativo nell'aperto $y > \alpha$ e, per tale valore di α, calcolarne il lavoro compiuto lungo la curva di equazione polare $\rho = \frac{\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Il semipiano $\{y > \alpha\}$ è semplicemente connesso, quindi il campo vettoriale risulta conservativo se e solo se è irrotazionale, cioè se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{y-\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 - \frac{4x^2}{(y-\alpha)^2}\right)$$

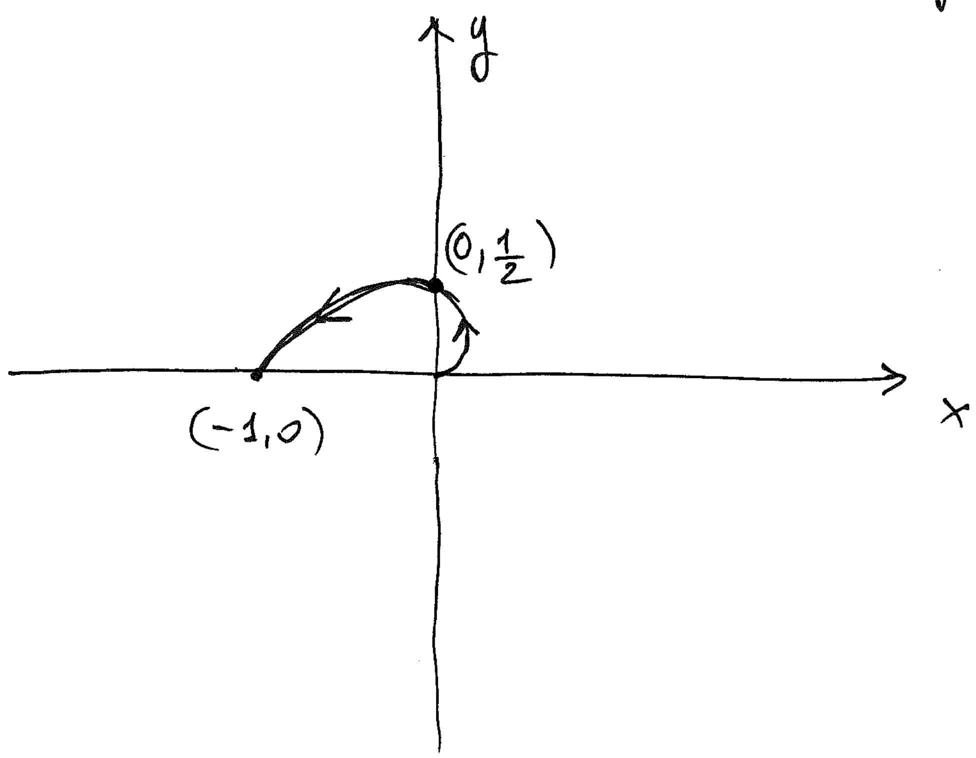
identicamente in $\{y > \alpha\}$, ossia

$$\frac{-2\alpha x}{(y-\alpha)^2} \equiv -\frac{8x}{(y-\alpha)^2}$$

Questo è vero se e solo se $\alpha = 4$.

Per $\alpha = 4$ il campo è conservativo nel semipiano $\{y > 4\}$. Anche se non era richiesto, si osservi che per tale valore il campo è conservativo su TUTTO IL SUO DOMINIO $\{y \neq 4\}$, essendo quest'ultimo unione <u>disgiunta</u> di due aperti semplicemente connessi.

Quanto alla curva, questa è un arco di spirale di Archimede, e ha la seguente forma:



ed è tutta contenuta nel semipiano $\{y > 4\}$.

Per calcolare il lavoro, il calcolo diretto non sembra conveniente. Ma, poiché il campo è conservativo, posso calcolare il lavoro lungo una differente curva che abbia gli stessi estremi, ad esempio lungo il segmento di estremi $(0,0)$ e $(-1,0)$.

Ma poiché su tale segmento la prima componente (l'unica che entra in gioco nel calcolo dell'integrale curvilineo) è identicamente nulla, il lavoro è nullo.

In alternativa, era possibile calcolare il potenziale, e si trova

$$V(x,y) = \frac{x^2 y}{y-4} \ (+\,c),$$

da cui il lavoro vale

$$L = V(-1,0) - V(0,0) = 0.$$