Trovare il volume della parte T del solido di rotazione

$$D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$$

esterna al cilindro $y^2+z^2=1$.

Il solido di rotazione D è ottenuto facendo ruotare intorno all'asse z il dominio

$$E = \{(x,z) : \quad 0 \leq x \leq 2, \quad x \leq z \leq 6 - x^2\}$$

rappresentato in figura 1.

Per il teorema di Guldino, si ha:

$$\text{Vol } D = 2\pi \iint_E x \, dx\, dz = 2\pi \int_0^2 dx \; x \int_x^{6-x^2} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 dx \left(6x - x^3 - x^2\right) = 2\pi \left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi$$

Il solido D è rappresentato in figura 2.

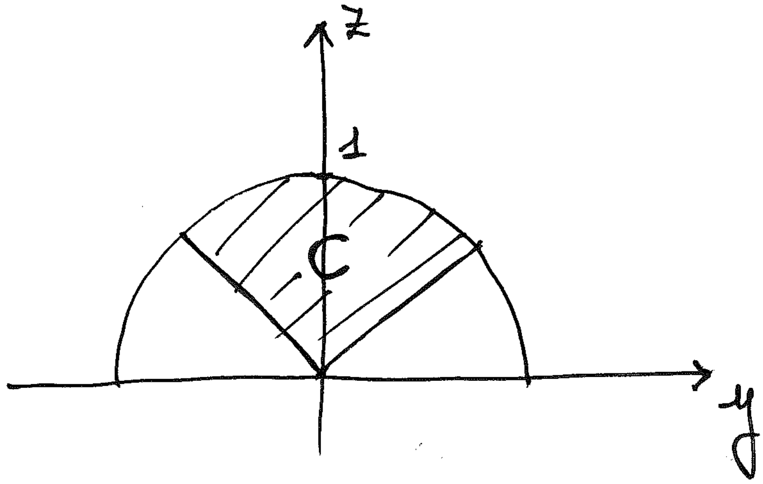
Tuttavia noi dobbiamo calcolare il volume della parte esterna al cilindro $y^2+z^2=1$ (figura 3).

Pertanto bisogna sottrarre al volume di D il volume del solido T intersezione del cono $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ e del cilindro $y^2+z^2 \leq 1$.

Tale solido T si può scrivere così:

$$T = \{(x,y,z) : (y,z) \in C,\ -\sqrt{z^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2-y^2}\}$$

dove C è il settore circolare qui disegnato:



e quindi

$$\text{vol } T = 2 \iint_C \sqrt{z^2-y^2}\, dz\, dy$$

passando a coord. polari $\begin{cases} z = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 d\rho\, \rho \sqrt{\rho^2\cos^2\theta - \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} d\theta \sqrt{\cos(2\theta)} \int_0^1 \rho^2\, d\rho = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} d\theta \sqrt{\cos(2\theta)}$$

Quest'ultimo è un integrale ellittico non calcolabile elementarmente. Un'approssimazione numerica fornisce

$$\operatorname{vol} T \approx 0{,}79876 .$$

Pertanto il volume cercato è

$$\operatorname{vol} D - \operatorname{vol} T = \frac{32}{3}\pi - \operatorname{vol} T \approx 32{,}71156$$

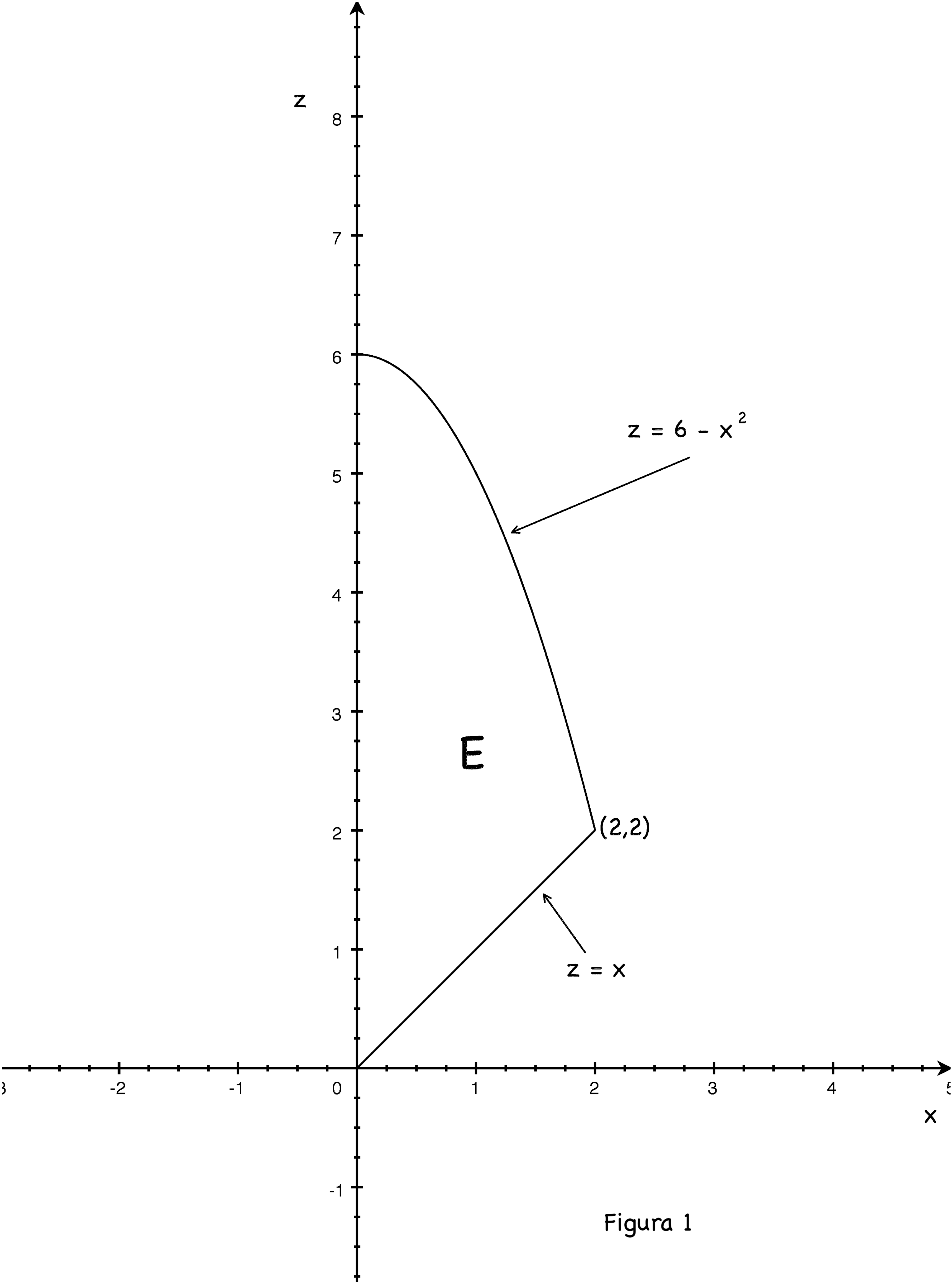


Figura 1

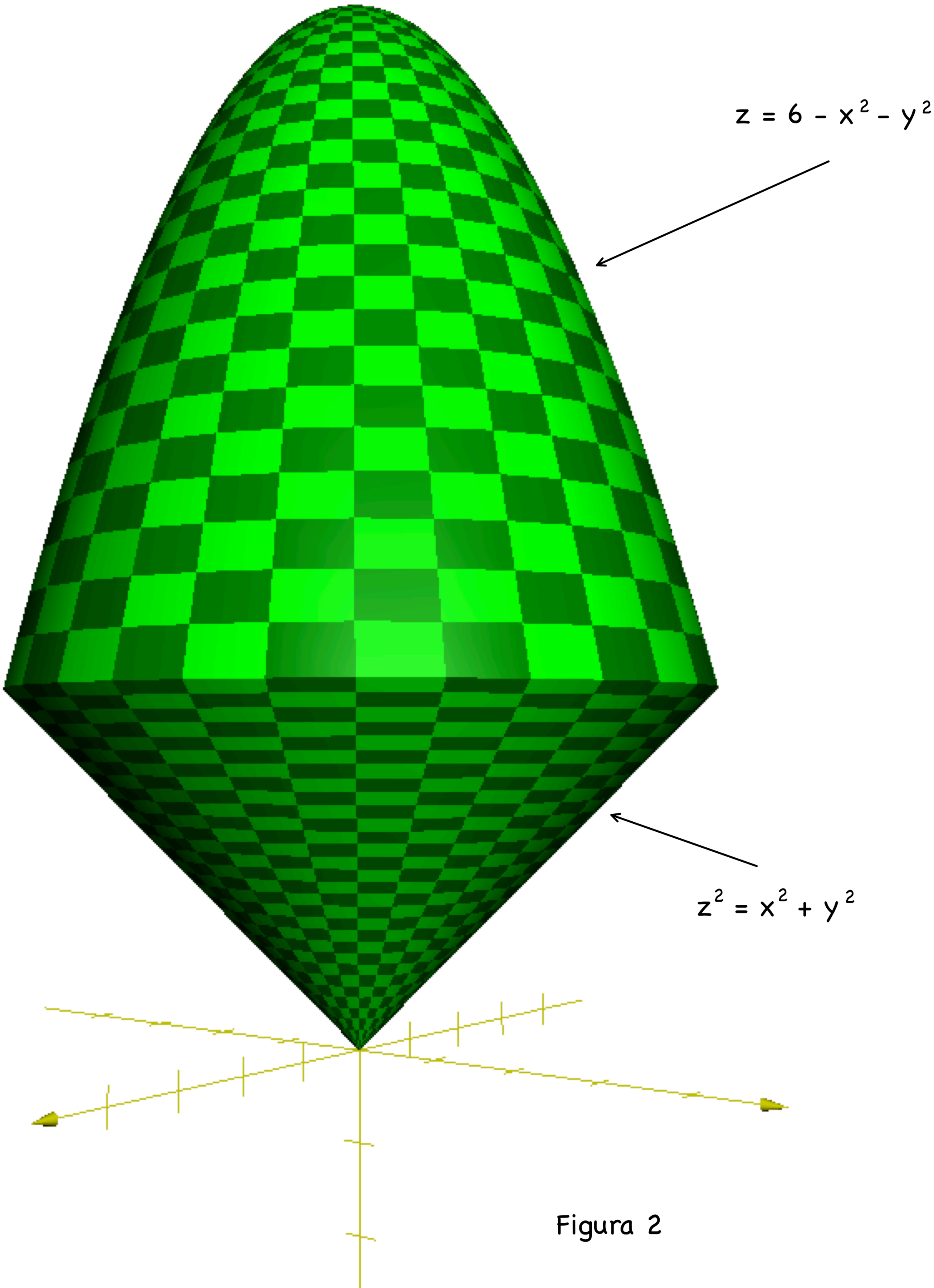


Figura 2

Figura 3

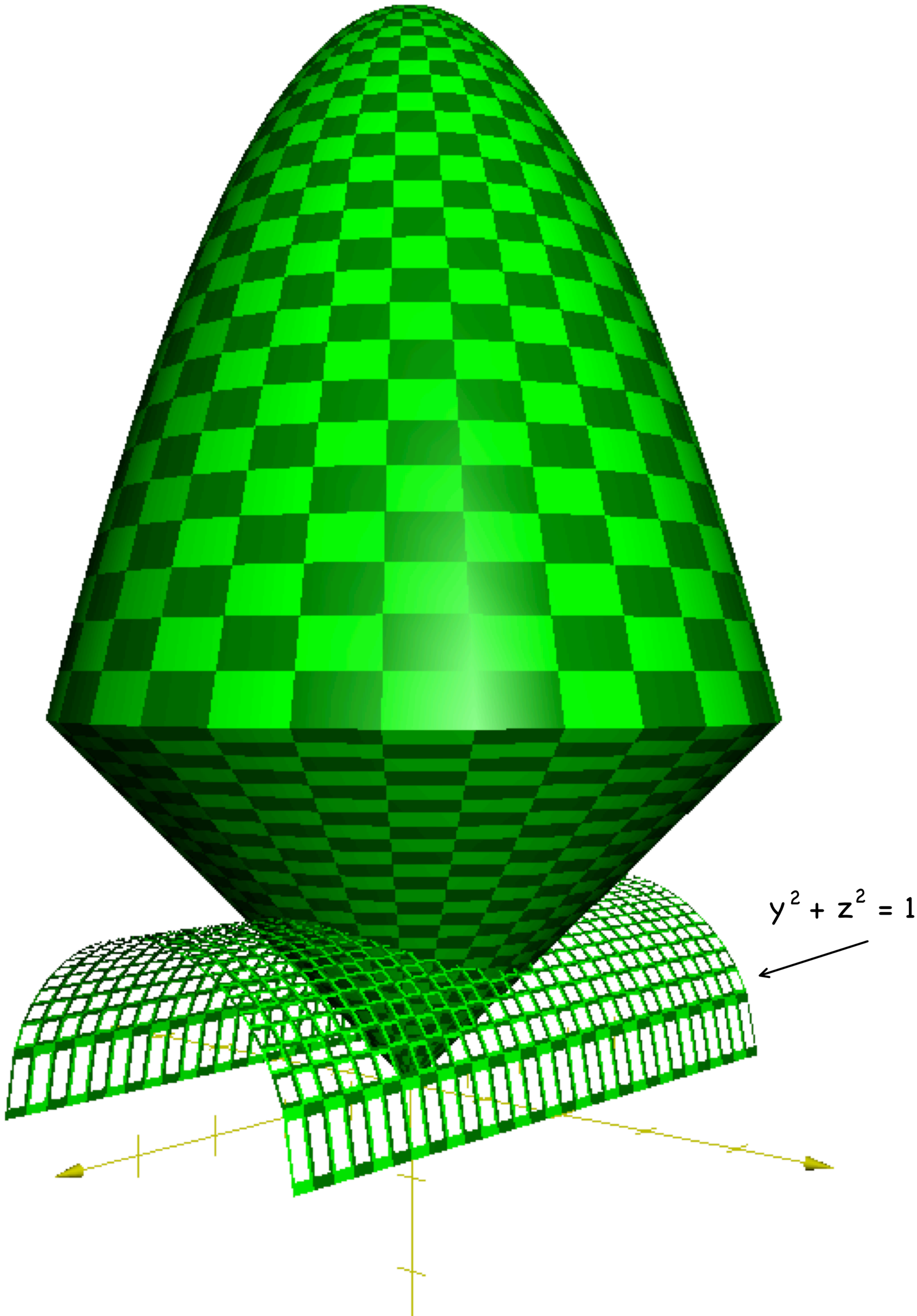


Figura 4