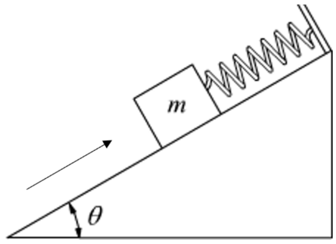
Esame scritto di Fisica - Scienze Biologiche

Naurang Saini, Marta De Luca, Roberto Maoli, Lorenzo Monacelli

17 Giugno 2026

Esercizio 1



Una molla ideale di lunghezza a riposo pari a 50.0 cm, caratterizzata da una costante elastica $k = 300$ N/m, è posizionata su un piano inclinato privo d'attrito con un angolo di 45° rispetto all'orizzontale ed è fissata alla parte superiore del piano inclinato. All'estremità opposta della molla, situata sul piano inclinato, è collegata una massa $m = 3.00$ kg. Si chiede di determinare:

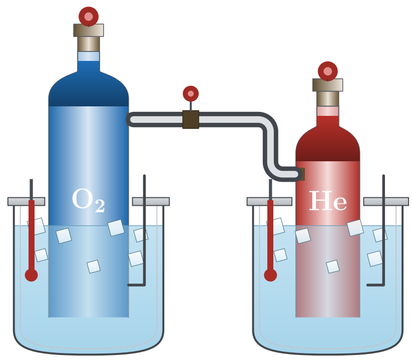
1. l'allungamento della molla nella posizione di equilibrio.

A un certo istante, una forza di 3.00 kN viene impressa sul blocco verso l'alto come la freccia in figura per $\Delta t = 5.00$ ms. Trascurando lo spazio percorso da m durante Δt, si chiede di determinare:

2. l'energia totale del sistema blocco–molla subito dopo la spinta e la posizione in cui il blocco inverte la direzione del moto;

3. il coefficiente d'attrito dinamico nel caso in cui la compressione massima della molla, rispetto alla posizione di equilibrio, raggiunga i 45.0 cm.

Esercizio 2



Una bombola da 20.0 L di ossigeno e una da 10.0 L di elio sono sigillate rispettivamente a 150 atm e 100 atm. Le pareti sono adiabatiche, eccetto le basi, che scambiano calore con due calorimetri di acqua e ghiaccio. Le bombole sono collegate da un tubicino di volume trascurabile.

1. Quanto vale la massa dei gas in ciascuna bombola? (masse atomiche: O 16.0, He 4.00)

Le valvole vengono poi aperte per un istante, lasciando passare $\Delta n = 0.120$ mol di ossigeno nella bombola di elio in una rapida trasformazione irreversibile.

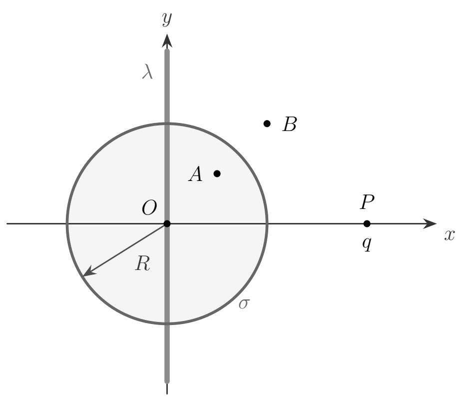
2. Qual è il lavoro svolto dall'ossigeno nel passaggio all'altra bombola? Si consideri, in prima approssimazione, la pressione costante nella bombola di elio durante tutto il processo.

3. Qual è la massa del ghiaccio che si forma o si scioglie in ciascun calorimetro? Specificare in quale si forma e in quale si scioglie (calore latente di fusione $\lambda_f = 333.5\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$)

Si apre infine del tutto la valvola, lasciando fluire e mescolare tutto il gas tra le due bombole.

4. Qual è lo stato finale della miscela all'equilibrio e la variazione di energia interna nella trasformazione?

Esercizio 3



Si consideri la distribuzione di cariche costituita da un filo infinito con densità di carica $\lambda = 5.00 \times 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$ e un guscio sferico di raggio $R = 20.0$ cm con densità di carica superficiale $\sigma = 3.00 \times 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$; il filo è posto sull'asse y, il guscio ha centro in O.

1. Si calcoli il campo elettrico nei punti $A = (R/2,\, R/2)$ e $B = (R,\, R)$.

Una carica puntiforme di massa $m = 2.00 \times 10^{-4}$ kg e carica $q = -4.00 \times 10^{-9}$ C è posta nel punto $P = (2R, 0)$.

2. Supponendo la carica inizialmente ferma, calcolarne la velocità quando raggiunge il guscio sferico.

3. Supponendo invece la carica in moto con velocità iniziale v_P, calcolare modulo e direzione di tale velocità affinché descriva un moto circolare uniforme attorno a O.

   Considerare la forza gravitazionale sempre trascurabile.

Soluzione — Esercizio 1

Dati: $k = 300\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $\theta = 45°$, $m = 3.0\,\mathrm{kg}$, $v_0 = 5.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\Delta t = 5\,\mathrm{ms}$. **Costante:** $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1) Allungamento all'equilibrio

All'equilibrio la forza elastica bilancia la componente del peso lungo il piano, $k\,x_{eq} = mg\sin\theta$:

$$\boxed{x_{eq} = \frac{mg\sin\theta}{k}} \qquad \Rightarrow \qquad x_{eq} \approx 6.94\,\mathrm{cm}.$$

2) Energia meccanica e punto di inversione

Poiché il periodo di oscillazione del moto armonico $T = 2\pi\sqrt{m/k} \approx 0.63\,\mathrm{s}$ è molto maggiore (di oltre cento volte) della durata della spinta Δt, possiamo trascurare il moto armonico e calcolare direttamente la velocità finale del corpo dopo la spinta impulsiva usando il teorema dell'impulso:

$$mv_0 = F\Delta t \qquad v_0 = \frac{F\Delta t}{m} = 5.00\,\mathrm{m/s}$$

L'energia totale del sistema dipende dalla scelta della posizione in cui le energie potenziali elastica e gravitazionale sono nulle. Scegliendo questa posizione coincidente con la posizione di riposo della molla si hanno i seguenti contributi:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = 37.5\ \mathrm{J}$$

$$U_{e,i} = \frac{1}{2}kx_{eq}^2 = 0.722\ \mathrm{J}$$

$$U_{g,i} = -mgx_{eq}\sin 45 = -1.444\ \mathrm{J}$$

L'energia totale sarà

$$\boxed{E_{tot} = K_i + U_{e,i} + U_{g,i}} \qquad \Rightarrow \qquad E_{tot} = 36.778\,\mathrm{J}.$$

Nel punto di inversione $v = 0$ e tutta l'energia è potenziale:

$$K_i = 0$$

$$U_{e,i} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = 150\ x_{max}^2$$

$$U_{g,i} = mgx_{max}\sin 45° = 20.81\ x_{max}$$

dove con x_{max} abbiamo indicato la posizione di inversione del moto rispetto alla posizione di riposo della molla calcolata lungo il piano inclinato. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2}kx_{max}^2 + mgx_{max}\sin 45° = E_{tot} \qquad \Rightarrow \qquad 150x_{max}^2 + 20.81x_{max} - 36.778 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si trova una soluzione negativa ($-56.94\,\mathrm{cm}$), che va scartata perché l'impulso ha messo in moto il corpo verso l'alto, e una soluzione positiva:

$$\boxed{x_{max} = 50.0\,\mathrm{cm}}$$

Il punto di inversione della velocità si trova a $43.06\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio.

3) Coefficiente di attrito dinamico

Se il piano è scabro, una parte dell'energia meccanica iniziale viene dissipata come lavoro della forza di attrito. Considerando come posizione iniziale quella con $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ e come posizione finale quella corrispondente alla massima compressione, possiamo scrivere:

$$E_{tot,f} - E_{tot,i} = W_a = -\mu_d mg\cos 45°(x_{eq} + x'_{max})$$

dove con x'_{max} indichiamo la posizione di massima compressione rispetto alla posizione di riposo della molla (positiva perché abbiamo preso l'asse x in salita); in questo modo si ha $x_{eq} + x'_{max} = 45.0\,\mathrm{cm}$. Esplicitando $E_{tot,f}$ si ha:

$$mgx'_{max}\sin 45° + \frac{1}{2}kx'^2_{max} - E_{tot,i} = -\mu_d mg\cos 45°(x_{eq} + x'_{max})$$

Esplicitando per μ_d si trova il coefficiente di attrito dinamico:

$$\boxed{\mu_d = \frac{E_{tot,i} - mgx'_{max}\sin 45° - \frac{1}{2}kx'^2_{max}}{mg\cos 45°(x_{eq} + x'_{max})}} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_d = \frac{36.778 - 3\cdot 9.81\cdot 0.3806\sin 45° - 150\cdot 0.3806^2}{3\cdot 9.81\cdot 0.45\cos 45°} = 0.761$$

Soluzione — Esercizio 2

Dati: $V_{O_2} = 20\,\mathrm{L}$, $V_{He} = 10\,\mathrm{L}$, $P_{O_2} = 150\,\mathrm{atm}$, $P_{He} = 100\,\mathrm{atm}$, $M_{O_2} = 32.0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, $M_{He} = 4.00\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, $\Delta n = 0.120\,\mathrm{mol}$.
Costanti: $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$, $1\,\mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\lambda_f = 333.5\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.
Le bombole sono in equilibrio termico con il bagno acqua–ghiaccio, quindi $T = 0\,°\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$.

1) Massa del gas in ciascuna bombola (gas perfetto $PV = nRT$, $m = nM$)

$$\boxed{m = \frac{PV}{RT}M} \qquad \Rightarrow \qquad m_{O_2} = 4.28\,\mathrm{kg}, \qquad m_{He} = 0.179\,\mathrm{kg}.$$

2) Lavoro svolto dall'ossigeno

L'ossigeno spinge Δn moli nella bombola di elio (pressione costante), espandendosi del volume da esse occupato $\Delta V = \Delta n\, RT/P_{He}$, sicché P_{He} si semplifica:

$$\boxed{W_{O_2} = P_{He}\,\Delta V = \Delta n\, RT} \qquad \Rightarrow \qquad W_{O_2} = 272\,\mathrm{J} \quad \text{(compiuto dal gas)}.$$

3) Ghiaccio formato/sciolto nei due calorimetri

La trasformazione è isoterma (T fissata dal bagno), quindi $\Delta U = 0$ per ciascun gas: il calore scambiato con ogni calorimetro è pari al lavoro e vale quindi $|Q| = \Delta n\, RT$ e la massa di ghiaccio è $m = |Q|/\lambda_f$:

$$\boxed{m_{\text{ghiaccio}} = \frac{\Delta n\, RT}{\lambda_f}} \qquad \Rightarrow \qquad m_{\text{ghiaccio}} = 0.82\,\mathrm{g}.$$

Nella bombola dell'ossigeno il gas *assorbe* calore ($Q = +\Delta nRT$): si *formano* $0.82\,\mathrm{g}$ di ghiaccio. Nella bombola dell'elio il gas *cede* calore ($Q = -\Delta nRT$): si *sciolgono* $0.82\,\mathrm{g}$ di ghiaccio.

4) Stato finale e variazione di energia interna

Aprendo la valvola i due gas si mescolano nel volume totale $V_{O_2} + V_{He}$ alla temperatura T fissata dai bagni. Il numero totale di moli si conserva, $n = n_1 + n_2$, con $n_1 = \dfrac{P_{O_2}V_{O_2}}{RT}$ ed $n_2 = \dfrac{P_{He}V_{He}}{RT}$; applicando la legge dei gas perfetti alla miscela:

$$\boxed{P_f = \frac{n\,RT}{V_{O_2} + V_{He}} = \frac{(n_1 + n_2)RT}{V_{O_2} + V_{He}}} \qquad \Rightarrow \qquad P_f \approx 133\,\mathrm{atm}$$

(stato finale: miscela in $V_{O_2} + V_{He} = 30\,\mathrm{L}$ a $T = 273\,\mathrm{K}$; pressioni parziali $100\,\mathrm{atm}$ di O_2 e $33.3\,\mathrm{atm}$ di He).
La trasformazione è isoterma e i gas sono ideali, quindi

$$\boxed{\Delta U = 0}.$$

Soluzione — Esercizio 3

Dati: $\lambda = 5.00 \times 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, $R = 20.0\,\mathrm{cm} = 0.200\,\mathrm{m}$, $\sigma = 3.00 \times 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$, $m = 2.00 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$, $q = -4.00 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$.

Costanti: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Carica totale del guscio: $Q = \sigma\, 4\pi R^2 = 1.51 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$.

a) Campo elettrico in A e B

Il filo genera un campo radiale rispetto all'asse y, $E_{\text{filo}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, d}$ (con d distanza dall'asse y); il guscio dà $E = kQ/r^2$ all'esterno e 0 all'interno.

$A = (R/2, R/2)$: poiché $r_A = R/\sqrt{2} < R$ il punto è *interno* e il guscio non contribuisce:

$$\boxed{\vec{E}_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,(R/2)}\,\hat{x}} \qquad \Rightarrow \qquad E_A \approx 8.99 \times 10^{4}\,\mathrm{V\,m^{-1}} \quad (\text{lungo } +x).$$

$B = (R, R)$: poiché $r_B = R\sqrt{2} > R$ il punto è *esterno*; si sommano il filo (lungo x) e il guscio (radiale da O, $r_B^2 = 2R^2$):

$$\boxed{\vec{E}_B = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, R} + \dfrac{kQ}{2R^2}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{kQ}{2R^2}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \;\Rightarrow\; \vec{E}_B \approx \begin{pmatrix} 5.69 \times 10^{4} \\ 1.20 \times 10^{4} \end{pmatrix} \mathrm{V\,m^{-1}},$$

$$|\vec{E}_B| \approx 5.82 \times 10^{4}\,\mathrm{V\,m^{-1}}, \qquad \theta \approx 11.9^\circ \text{ sopra l'asse } x.$$

b) Velocità sul guscio partendo da ferma

Sull'asse x la forza sulla carica ($q < 0$) è diretta verso O: essa va da $P = (2R, 0)$ al guscio in $(R, 0)$. Per la conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv^2 = |q|\,(V_R - V_P)$, con $V_R - V_P = 2k\lambda \ln 2 + \dfrac{kQ}{2R}$:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2|q|}{m}\left(2k\lambda \ln 2 + \frac{kQ}{2R}\right)}} \qquad \Rightarrow \qquad v \approx 0.620\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

c) Velocità per il moto circolare uniforme attorno a O

In P il campo totale è radiale rispetto a O (lungo x): $E_P = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2R)} + \dfrac{kQ}{(2R)^2} \approx 3.09 \times 10^{4}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, e la forza $|q|E_P$ è centripeta. Imponendo $|q|E_P = \dfrac{mv_P^2}{2R}$:

$$\boxed{v_P = \sqrt{\frac{2R\,|q|\,E_P}{m}}} \qquad \Rightarrow \qquad v_P \approx 0.498\,\mathrm{m\,s^{-1}},$$

diretta perpendicolarmente a OP e anche al filo, cioè uscente o entrante nel foglio (perpendicolare sia a x che a y)