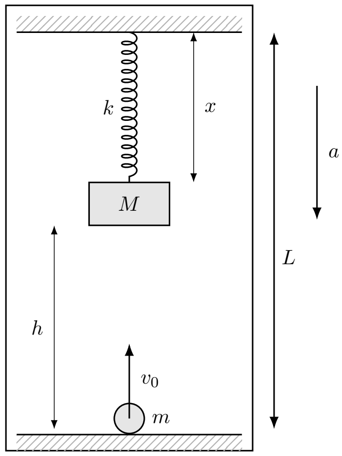
Esame scritto del corso di Fisica per Scienze Biologiche

Naurang Saini, Marta De Luca, Roberto Maoli, Lorenzo Monacelli

Compito A – 7 maggio 2026

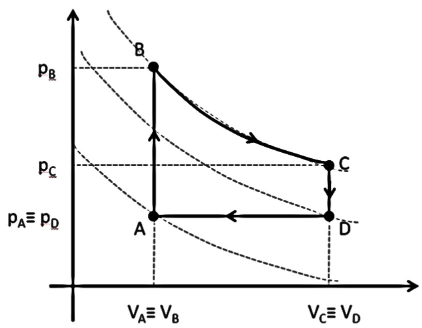
Esercizio 1



Un ascensore, di altezza totale $L = 2.20\,\mathrm{m}$ inizialmente fermo, ha all'interno una massa M, sospesa ad un'altezza dal suolo $h = 1.80\,\mathrm{m}$ mediante una molla ideale fissata al soffitto, caratterizzata dalla costante elastica $k = 230\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ e da una lunghezza a riposo di $x_0 = 30.0\,\mathrm{cm}$. Il sistema è in equilibrio statico. Un secondo corpo, di massa $m = 240\,\mathrm{g}$, viene lanciato dal pavimento dell'ascensore verso l'alto con velocità $v_0 = 10.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e impatta in modo perfettamente anelastico con il corpo M. Si trascuri l'attrito se non diversamente specificato. Determinare:

1. il valore della massa M;
2. la velocità del sistema immediatamente dopo l'impatto;
3. periodo e la lunghezza minima raggiunta dalla molla durante le oscillazioni;
4. Improvvisamente, l'ascensore inizia a scendere con accelerazione costante $a = 3.60\,\mathrm{m/s^2}$; assumendo la presenza di piccole forze dissipative all'interno dell'ascensore, determinare la lunghezza x della molla quando il sistema raggiunge nuovamente l'equilibrio.

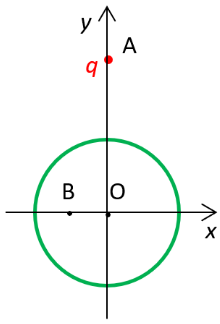
Esercizio 2



Si consideri un cilindro ideale chiuso da un pistone anch'esso ideale, contenente due moli di N_2 (volume iniziale $V_A = 72.0\,\mathrm{dm^3}$ e temperatura iniziale $T_A = 433\,\mathrm{K}$). Il gas compie un ciclo ABCDA composto da quattro trasformazioni reversibili (nell'ordine: isocora, isoterma, isocora, isobara), come mostrato in figura.
Sapendo che $p_C = 1.30 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ e che $T_D = 550\,\mathrm{K}$, calcolare:

1. la pressione nello stato A e la temperatura nello stato C;
2. il lavoro fatto in ciascuna trasformazione specificando se si tratta di un lavoro compiuto o subito;
3. la variazione di energia interna per la trasformazione da D a B e per l'intero ciclo;
4. la quantità di calore scambiato nella trasformazione da D ad A e nell'intero ciclo (specificando se assorbito o ceduto).

Esercizio 3



Un guscio sferico isolante di raggio $R = 30.0\,\mathrm{cm}$ è uniformemente carico con densità superficiale incognita σ. Nel punto A, posto sull'asse y a distanza $3R$ dal centro O come in figura, viene misurato un campo elettrico diretto lungo il verso positivo dell'asse y di modulo $E_A = 5.0 \times 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

1. Commentare il segno di σ e determinarne il valore.
2. Determinare il campo elettrico nei punti O, B e C, dove B è un punto interno al guscio, come in figura, mentre C ha coordinate $(+R, 0)$ e si trova appena all'esterno del guscio.

Una carica puntiforme $q = 2.0\,\mathrm{nC}$ e massa m viene posta ferma in A.

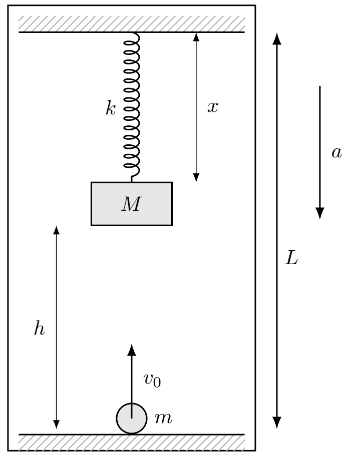
3. Imponendo che essa sia in equilibrio sotto l'azione combinata di campo elettrico e forza peso, determinare il valore della massa m.
4. Ora si assuma di aver impresso alla carica in A una velocità iniziale. Calcolare modulo, direzione e verso di tale velocità affinché la carica arrivi con velocità nulla in O. Non si trascuri la forza peso.

Esame scritto del corso di Fisica per Scienze Biologiche

Naurang Saini, Marta De Luca, Roberto Maoli, Lorenzo Monacelli

Compito B – 7 maggio 2026

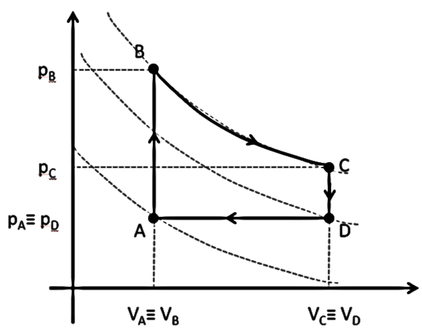
Esercizio 1



Un ascensore, di altezza totale $L = 2.00\,\mathrm{m}$ inizialmente fermo, ha all'interno una massa M, sospesa ad un'altezza dal suolo $h = 1.60\,\mathrm{m}$ mediante una molla ideale fissata al soffitto, caratterizzata dalla costante elastica $k = 320\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ e da una lunghezza a riposo di $x_0 = 25.0\,\mathrm{cm}$. Il sistema è in equilibrio statico. Un secondo corpo, di massa $m = 400\,\mathrm{g}$, viene lanciato dal pavimento dell'ascensore verso l'alto con velocità $v_0 = 8.00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e impatta in modo perfettamente anelastico con il corpo M. Si trascuri l'attrito se non diversamente specificato. Determinare:

1. il valore della massa M;
2. la velocità del sistema immediatamente dopo l'impatto;
3. periodo e la lunghezza minima raggiunta dalla molla durante le oscillazioni;
4. Improvvisamente, l'ascensore inizia a scendere con accelerazione costante $a = 5.20\,\mathrm{m/s^2}$; assumendo la presenza di piccole forze dissipative all'interno dell'ascensore, determinare la lunghezza x della molla quando il sistema raggiunge nuovamente l'equilibrio.

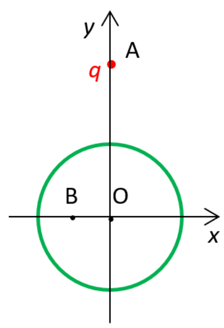
Esercizio 2



Si consideri un cilindro ideale chiuso da un pistone anch'esso ideale, contenente due moli di N_2 (volume iniziale $V_A = 60.0\,\mathrm{dm^3}$ e temperatura iniziale $T_A = 433\,\mathrm{K}$). Il gas compie un ciclo ABCDA composto da quattro trasformazioni reversibili (nell'ordine: isocora, isoterma, isocora, isobara), come mostrato in figura.
Sapendo che $p_C = 1.30 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ e che $T_D = 450\,\mathrm{K}$, calcolare:

1. la pressione nello stato A e la temperatura nello stato C;
2. il lavoro fatto in ciascuna trasformazione specificando se si tratta di un lavoro compiuto o subito;
3. la variazione di energia interna per la trasformazione da D a B e per l'intero ciclo;
4. la quantità di calore scambiato nella trasformazione da D ad A e nell'intero ciclo (specificando se assorbito o ceduto).

Esercizio 3



Un guscio sferico isolante di raggio $R = 30.0\,\mathrm{cm}$ è uniformemente carico con densità superficiale incognita σ. Nel punto A, posto sull'asse y a distanza $3R$ dal centro O come in figura, viene misurato un campo elettrico diretto lungo il verso positivo dell'asse y di modulo $E_A = 2.5 \times 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

1. Commentare il segno di σ e determinarne il valore.
2. Determinare il campo elettrico nei punti O, B e C, dove B è un punto interno al guscio, come in figura, mentre C ha coordinate $(+R, 0)$ e si trova appena all'esterno del guscio.

Una carica puntiforme $q = 2.0\,\mathrm{nC}$ e massa m viene posta ferma in A.

3. Imponendo che essa sia in equilibrio sotto l'azione combinata di campo elettrico e forza peso, determinare il valore della massa m.
4. Ora si assuma di aver impresso alla carica in A una velocità iniziale. Calcolare modulo, direzione e verso di tale velocità affinché la carica arrivi con velocità nulla in O. Non si trascuri la forza peso.

Soluzioni

1 Esercizio 1

Massa M

All'equilibrio statico la forza peso Mg e la forza elastica $k\Delta x$ si bilanciano. La molla ha lunghezza $L - h = 0.40\,\mathrm{m}$ e riposo $x_0 = 0.30\,\mathrm{m}$, quindi l'allungamento è $\Delta x = 0.10\,\mathrm{m}$:

$$k\,\Delta x = Mg$$

$$\boxed{M = \frac{k\,\Delta x}{g} = 2.34\,\mathrm{kg}}$$

Compito B: $L - h = 0.40\,\mathrm{m}$, $\Delta x = 0.15\,\mathrm{m}$

$$\boxed{M_B = \frac{k\,\Delta x}{g} = 4.89\,\mathrm{kg}}$$

Velocità dopo l'urto

Il corpo m parte dal pavimento ($h = 0$) con $v_0 = 10.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e, prima di urtare M che si trova a quota $h = 1.80\,\mathrm{m}$, perde velocità per la gravità. Velocità di impatto per conservazione dell'energia di m:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{in}}^2 + mgh \qquad \Longrightarrow \qquad v_{\mathrm{in}} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 8.04\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Urto perfettamente anelastico con M (fermo). Conservazione della quantità di moto:

$$mv_{\mathrm{in}} = (M+m)v$$

$$\boxed{v = \frac{mv_{\mathrm{in}}}{M+m} = 0.748\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

(verso l'alto).

Compito B:

$$v_{\mathrm{in},B} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 5.71\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad \boxed{v_B = \frac{mv_{\mathrm{in}}}{M+m} = 0.432\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Periodo e lunghezza minima della molla

Il sistema $(M + m)$ oscilla armonicamente. Pulsazione e periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = 9.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0.666\,\mathrm{s}}$$

Compito B:

$$\boxed{T_B = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0.808\,\mathrm{s}}$$

Per trovare la lunghezza minima x_f della molla durante l'oscillazione si usa la conservazione dell'energia meccanica. Sia $\delta = x - x_0$ l'allungamento e si ponga a zero l'energia potenziale gravitazionale per $\delta = 0$ (molla a riposo). L'energia meccanica iniziale (subito dopo l'urto, con $\delta = 0.100\,\mathrm{m}$ e $v = 0.748\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) vale:

$$E_i = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}k\,\delta^2 - (M+m)g\,\delta \simeq -0.665\,\mathrm{J}$$

All'estremo superiore dell'oscillazione la velocità è nulla e l'allungamento della molla vale $\delta_f = x - x_0$, per cui:

$$\frac{1}{2}k\,\delta_f^2 - (M+m)g\,\delta_f = E_i$$

$$\frac{1}{2}k\,\delta_f^2-(M+m)g\,\delta_f-E_i=0$$

La radice minore di questa equazione di secondo grado dà l'allungamento minimo:

$$\delta_f=\frac{(M+m)g-\sqrt{(M+m)^2g^2+2kE_i}}{k}$$

La corrispondente lunghezza della molla è:

$$\boxed{x_f=x_0+\delta_f=0.330\,\mathrm{m}=33.0\,\mathrm{cm}}$$

Compito B:

$$\boxed{x_{f,B}=0.355\,\mathrm{m}=35.5\,\mathrm{cm}}$$

Nuovo equilibrio in ascensore accelerato

Raggiunto l'equilibrio statico, l'ascensore scende con accelerazione $a=3.60\,\mathrm{m/s^2}$. Nel sistema non inerziale agisce una forza fittizia $(M+m)a$ verso l'alto, che riduce l'accelerazione di gravità effettiva a $g-a$:

$$k(x_{\mathrm{eq}}-x_0)=(M+m)(g-a)$$

$$\boxed{x_{\mathrm{eq}}=x_0+\frac{(M+m)(g-a)}{k}=0.370\,\mathrm{m}=37.0\,\mathrm{cm}}$$

Compito B:

$$\boxed{x_{\mathrm{eq},B}=x_0+\frac{(M+m)(g-a)}{k}=0.326\,\mathrm{m}=32.6\,\mathrm{cm}}$$

2 Esercizio 2

Pressione in A e temperatura in C

$$p_A=\frac{nRT_A}{V_A}=1.00\times10^5\,\mathrm{Pa}$$

Poiché $D\to A$ è un'isobara, $p_D=p_A$; la trasformazione $C\to D$ è isocora, quindi

$$T_C=\frac{p_CT_D}{p_D}=\frac{p_CT_D}{p_A}=715\,\mathrm{K}$$

Compito B ($V_A=60.0\,\mathrm{dm^3}$, $T_D=450\,\mathrm{K}$):

$$p_{A,B}=\frac{nRT_A}{V_A}=1.20\times10^5\,\mathrm{Pa},\qquad T_{C,B}=\frac{p_CT_D}{p_A}=488\,\mathrm{K}$$

Lavoro in ciascuna trasformazione

Il lavoro da A a B e da C a D è nullo perché si tratta di trasformazioni isocore ($L_{AB}=L_{CD}=0$).

Per l'isobara $D\to A$ occorre prima trovare V_D (notando che $V_D=V_C$):

$$V_D=V_C=\frac{nRT_C}{p_C}=0.091\,\mathrm{m^3}$$

$$L_{DA}=p_A(V_A-V_D)=-1.90\times10^3\,\mathrm{J}$$

(negativo, quindi subito, ovvero fatto dall'ambiente sul sistema, come atteso nel caso di compressione).

Per l'isoterma $B\to C$ ($T_B=T_C$, $V_B=V_A$):

$$L_{BC}=nRT_B\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)=2.78\times10^3\,\mathrm{J}$$

(positivo, quindi compiuto, come atteso nel caso di espansione isoterma).

Compito B:

$$V_{D,B}=V_A\frac{T_D}{T_A}=62.4\,\mathrm{L},\qquad L_{DA,B}=p_A(V_A-V_C)=-283\,\mathrm{J}$$

$$L_{BC,B}=nRT_C\ln\left(\frac{V_{D,B}}{V_A}\right)=312\,\mathrm{J}$$

Variazione di energia interna

Per l'intero ciclo $\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$.

Per la trasformazione $D \to B$ (che passa per A e C; $D \to A$ isobara, $A \to B$ isocora, $B \to C$ isoterma, si può calcolare direttamente come differenza tra stato B e D):

$$\Delta U_{DB} = nc_v(T_B - T_D)$$

con $c_v = \dfrac{5}{2}R$ per gas biatomici e $T_B = T_C = 715\,\mathrm{K}$:

$$\boxed{\Delta U_{DB} = nc_v(T_B - T_D) = 6.86 \times 10^3\,\mathrm{J}}$$

Compito B ($T_B = T_C = 488\,\mathrm{K}$):

$$\boxed{\Delta U_{DB,B} = nc_v(T_B - T_D) = 1.56 \times 10^3\,\mathrm{J}}$$

Calore scambiato

Lungo $D \to A$ (isobara, $c_p = \dfrac{7}{2}R$):

$$Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = -6.81 \times 10^3\,\mathrm{J}$$

(ceduto).

Per l'intero ciclo, $\Delta U = 0$, quindi $Q_{\text{tot}} = L_{\text{tot}}$:

$$L_{\text{tot}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 8.80 \times 10^2\,\mathrm{J}$$

Poiché $Q_{\text{tot}} > 0$, il calore è assorbito (ciclo percorso in senso orario, lavoro totale positivo).

Compito B:

$$Q_{DA,B} = nc_p(T_A - T_D) = -989\,\mathrm{J}$$

(ceduto).

Per l'intero ciclo:

$$\boxed{L_{\text{tot},B} = 29.5\,\mathrm{J}}, \qquad \boxed{Q_{\text{tot},B} = L_{\text{tot},B} = 29.5\,\mathrm{J}}$$

Poiché $Q_{\text{tot}} > 0$, il calore è assorbito (ciclo percorso in senso orario, lavoro totale positivo).

3 Esercizio 3

Segno e valore di σ

Poiché il campo elettrico in A è diretto lungo il verso positivo dell'asse y (cioè uscente dal guscio), la carica sul guscio è positiva:

$$\sigma > 0$$

Per $r > R$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad Q = 4\pi R^2\sigma$$

Nel punto A ($r = 3R$):

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{(3R)^2} = \frac{\sigma}{9\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\sigma = 9\varepsilon_0 E_A = 3.98 \times 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-2}}}$$

Compito B ($E_A = 2.5 \times 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$):

$$\boxed{\sigma_B = 9\varepsilon_0 E_A = 1.99 \times 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-2}}}$$

Campo elettrico in O, B, C

Per un guscio sferico:

$$E = 0 \quad (r < R), \qquad E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Quindi:

$$\boxed{E_O = 0}, \qquad \boxed{E_B = 0}, \qquad \boxed{E_C = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx 4.5 \times 10^5\,\mathrm{N\,C^{-1}}}$$

diretto radialmente uscente.

Compito B:

$$\boxed{E_{O,B} = 0}, \qquad \boxed{E_{B,B} = 0}, \qquad \boxed{E_{C,B} = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_0} \approx 2.25 \times 10^5\,\mathrm{N\,C^{-1}}}$$

Massa m in equilibrio

Imponendo l'equilibrio delle forze lungo y:

$$qE_A = mg$$

$$\boxed{m = \frac{qE_A}{g} = 1.02 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg}}$$

Compito B:

$$\boxed{m_B = \frac{qE_A}{g} = 5.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}}$$

Velocità iniziale per arrivare ferma in O

Conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U_A = U_O \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = U_O - U_A$$

Contributo elettrostatico:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3R}, \quad V_O = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R}$$

$$V_A - V_O = -\frac{2R\sigma}{3\varepsilon_0}$$

$$\Delta U_e = q(V_O - V_A) = q\,\frac{2R\sigma}{3\varepsilon_0}$$

Contributo gravitazionale:

$$\Delta U_g = mg(0 - 3R) = -3mgR$$

In totale:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q\,\frac{2R\sigma}{3\varepsilon_0} - 3mgR$$

Valori numerici:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 9.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

$$\boxed{v_0 \approx 4.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Per raggiungere O, la velocità deve opporsi al campo elettrico ($+y$), quindi:

$$\boxed{\vec{v}_0 \text{ diretta lungo } -y}$$

Compito B (la stessa relazione $v_0 = \sqrt{6gR}$ dà lo stesso risultato):

$$\boxed{v_{0,B} \approx 4.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}, \qquad \boxed{\vec{v}_{0,B} \text{ diretta lungo } -y}$$