Cognome .... **Nome** .... **N. matr.** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 19–20 gennaio; ◯ 21–23 gennaio; ◯ 27–30 gennaio; ◯ 4–6 febbraio; ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito solo l'uso di uno dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = e^{-2x}\,\sqrt[3]{x-3}\,,$$

studiarne: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

---

2. a) Risolvere l'equazione

$$2z - z^2 + 1 = z\overline{z}\,;$$

b) posto

$$w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i}\,,$$

calcolare w^{2026}.

---

3. Calcolare l'integrale

$$\int \log(-2x^2 + x + 1)\,dx\,.$$

Successivamente, calcolare l'area dell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le \log(-2x^2 + x + 1)\right\}.$$

---

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x\right) \quad (a,b,c \in \mathbb{R})\,, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sinh x)^2 - \sinh(x^2)}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)\,.$$

---

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x\,\sinh x}{1 - \cos x}\,,$$

dire se è estendibile nei punti in cui non è definita in modo che sia ivi continua e/o derivabile.

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 6 punti; **3:** 8 (6+2) punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 16 punti.

Cognome .... **Nome** .... **N. matr.** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 19–20 gennaio; ◯ 21–23 gennaio; ◯ 27–30 gennaio; ◯ 4–6 febbraio; ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito solo l'uso di uno dei libri di testo consigliati.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Data la funzione

$$f(x) = e^{2x}\ \sqrt[3]{x+4}\,,$$

studiarne: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

---

2. a) Risolvere l'equazione

$$2iz + z^2 = |z|^2 - 1\,;$$

b) posto

$$w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\,,$$

calcolare w^{2026}.

---

3. Calcolare l'integrale

$$\int \log(-3x^2+2x+1)\,dx\,.$$

Successivamente, calcolare l'area dell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le \log(-3x^2+2x+1)\right\}.$$

---

4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)} - x\right) \quad (a,b,c \in \mathbb{R})\,, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^2) - (\sin x)^2}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)\,.$$

---

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sinh(x^2)}{1-\cos x}\,,$$

dire se è estendibile nei punti in cui non è definita in modo che sia ivi continua e/o derivabile.

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 6 punti; **3:** 8 (6+2) punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 16 punti.

Svolgimento sintetico - fila $\diamondsuit$

Esercizio $\diamondsuit$ 1

Dominio, simmetrie e continuità

Il dominio è $D = \mathbb{R}$. La funzione non presenta simmetrie evidenti, ed è continua in $\mathbb{R}$. Inoltre f ha il segno di $x - 3$.

Limiti significativi e asintoti

- **Limite a $+\infty$:**
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{e^{2x}} = 0$$
per la gerarchia degli infiniti. La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

- **Limite a $-\infty$:**
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\sqrt[3]{x-3} = [+\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$$
Poiché
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}\sqrt[3]{x-3}}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{2t}\sqrt[3]{t+3}}{t} = +\infty$$
(dove abbiamo posto $t = -x$) non esiste asintoto obliquo a $-\infty$.

Derivata prima e monotonia

La funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, e si ha

$$f'(x) = e^{-2x}\big[-2(x-3)^{1/3} + \tfrac{1}{3}(x-3)^{-2/3}\big] = \frac{e^{-2x}(19-6x)}{3(x-3)^{2/3}}.$$

In $x = 3$, verifichiamo il limite della derivata:

$$\lim_{x\to 3} f'(x) = \lim_{x\to 3} \frac{e^{-6}}{0^+} = +\infty$$

Poiché il limite è $+\infty$ sia da destra che da sinistra, in $x = 3$ il grafico di f ha un punto a tangente verticale. f non è derivabile in $x = 3$.

Segno di $f'(x)$:

- $f'(x) = 0 \iff 19 - 6x = 0 \iff x = \frac{19}{6}$,
- $f'(x) > 0 \iff 19 - 6x > 0 \iff x < \frac{19}{6}$ (con $x \neq 3$),
- $f'(x) < 0 \iff x > \frac{19}{6}$

La funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 19/6]$, strettamente decrescente in $[19/6, +\infty)$. Si ha un punto di massimo assoluto in $x = \frac{19}{6}$.

Derivata seconda, convessità e concavità

Per $x \neq 3$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big(e^{-2x}\big[-2(x-3)^{1/3} + \tfrac{1}{3}(x-3)^{-2/3}\big]\Big)' = e^{-2x}\big[4(x-3)^{1/3} - \tfrac{4}{3}(x-3)^{-2/3} - \tfrac{2}{9}(x-3)^{-5/3}\big] \\ &= \frac{2e^{-2x}}{9(x-3)^{5/3}}\big[18(x-3)^2 - 6(x-3) - 1\big]. \end{aligned}$$

Quindi:

- $f''(x) = 0 \iff x - 3 = \frac{3 \pm \sqrt{27}}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{6} \iff x = \frac{19 \pm \sqrt{3}}{6}$,
- $f''(x) > 0 \iff \left(\frac{19-\sqrt{3}}{6} < x < 3\right) \vee \left(x > \frac{19+\sqrt{3}}{6}\right)$,
- $f''(x) < 0 \iff \left(x < \frac{19-\sqrt{3}}{6}\right) \vee \left(3 < x < \frac{19+\sqrt{3}}{6}\right)$.

Pertanto

- f è strettamente convessa in ciascuno degli intervalli $\left[\frac{19-\sqrt{3}}{6}, 3\right]$ e $\left[\frac{19+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right)$,
- f è strettamente concava in ciascuno degli intervalli $\left(-\infty, \frac{19-\sqrt{3}}{6}\right]$ e $\left[3, \frac{19+\sqrt{3}}{6}\right]$,
- f ha dei punti di flesso in $x = 3$ (flesso a tangente verticale) e in $x = \frac{19 \pm \sqrt{3}}{6}$.

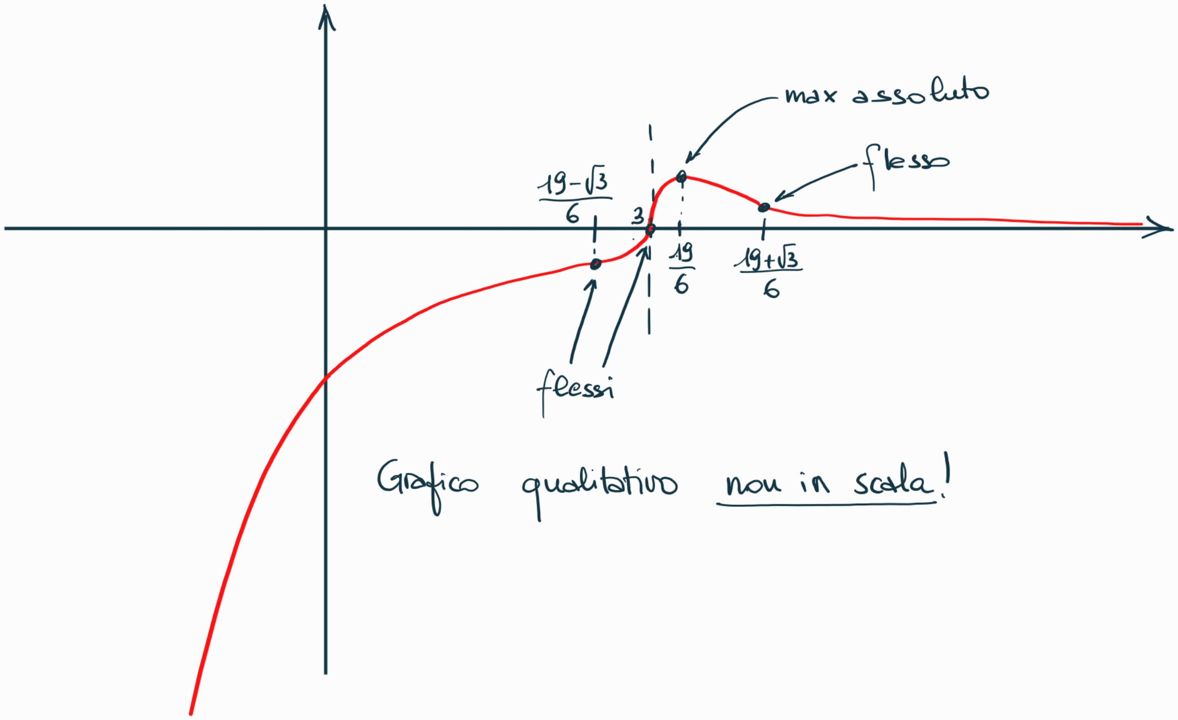


Grafico qualitativo <u>non in scala</u>!

Esercizio $\diamondsuit$ 2

Svolgimento parte a)

Poniamo $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$):

$$2x + 2iy - x^2 + y^2 - 2ixy + 1 = x^2 + y^2$$

Passando alle uguaglianze delle parti reali e delle parti immaginarie, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2y(1-x) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione fornisce $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. A questo punto la seconda equazione implica $y = 0$. Le soluzioni dell'equazione data sono quindi:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,, \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,.$$

Svolgimento parte b)

$$w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Pertanto

$$w^{2026} = e^{-i\frac{2026\pi}{6}} = e^{-i\frac{1013\pi}{3}}.$$

Poiché $\frac{1013}{3}\pi = 336\pi + \frac{5}{3}\pi$,

$$w^{2026} = e^{-i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Esercizio $\diamondsuit$ 3

Parte 1: calcolo dell'integrale indefinito

Integrando per parti,

$$\int \log(-2x^2+x+1)\,dx = x\log(-2x^2+x+1) - \int \frac{4x^2-x}{2x^2-x-1}\,dx.$$

Osservato che $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$, per l'ultimo integrale facciamo la scomposizione in fratti semplici:

$$\int \frac{4x^2-x}{2x^2-x-1}\,dx = \int\left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx = 2x+\log|x-1|-\frac{1}{2}\log|2x+1|+c\,.$$

Pertanto l'integrale indefinito richiesto vale

$$x\log(-2x^2+x+1)-2x-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log|2x+1|+c.$$

L'integrale poteva essere svolto più rapidamente osservando che la funzione integranda è definita per $x\in(-\frac{1}{2},1)$, e che quindi

$$\int \log(-2x^2+x+1)\,dx = \int \log\big((1-x)(2x+1)\big)\,dx = \int \log(1-x)\,dx + \int \log(2x+1)\,dx\,.$$

I due integrali si ottengono immediatamente considerando che (integrando per parti)

$$\int \log t\,dt = t(\log t-1)+c.$$

Parte 2: calcolo dell'area dell'insieme E

Per trovare l'intervallo in cui varia x, bisogna imporre

$$\log(-2x^2+x+1)\ge 0 \iff -2x^2+x+1\ge 1 \iff 0\le x\le\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$E=\left\{(x,y):0\le x\le\frac{1}{2},\ -\log(-2x^2+x+1)\le y\le \log(-2x^2+x+1)\right\},$$

e, alla luce di quanto visto nella prima parte, la sua area vale

$$2\int_0^{1/2}\log(-2x^2+x+1)\,dx = 2\Big[x\log(-2x^2+x+1)-2x-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log|2x+1|\Big]_0^{1/2} = 3\log 2-2.$$

Esercizio $\diamondsuit$ 4

Limite 1

Si ha
$$\left(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right)=x\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)\left(1+\frac{c}{x}\right)}-1\right]$$
Osserviamo ora che l'argomento dell'ultima radice cubica tende a 1, e che $\sqrt[3]{1+t}-1\sim\frac{t}{3}$ per $t\to 0$. Pertanto, per $x\to+\infty$
$$\begin{aligned}x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)\left(1+\frac{c}{x}\right)}-1\right)&\sim\frac{x}{3}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)\left(1+\frac{c}{x}\right)-1\right]\\&=\frac{x}{3}\left[\frac{a+b+c}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\right]\to\frac{a+b+c}{3}\,.\end{aligned}$$

Limite 2

Usando lo sviluppo di Maclaurin di $\sinh x$, si ottiene
$$\begin{aligned}(\sinh x)^2-\sinh(x^2)&=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2-x^2+o(x^4)\\&=x^2+\frac{x^4}{3}-x^2+o(x^4)=\frac{x^4}{3}+o(x^4)\sim\frac{x^4}{3}\quad\text{per } x\to 0^+.\end{aligned}$$
Pertanto
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sinh x)^2-\sinh(x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{3x^\alpha}=\begin{cases}0 & \text{se } 0<\alpha<4\\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha=4\\ +\infty & \text{se } \alpha>4.\end{cases}$$

Esercizio $\diamondsuit$ 5

Analisi dei punti $x_k = 2k\pi$ **con** $k \neq 0$

Se $k \neq 0$, il numeratore $x \sinh x$, per $\to x_k$, tende a $2k\pi \sinh(2k\pi) > 0$. Il denominatore tende a 0^+. Pertanto:

$$\lim_{x \to 2k\pi} f(x) = \lim_{x \to 2k\pi} \frac{x \sinh x}{1 - \cos x} = \left(\frac{2k\pi \sinh(2k\pi)}{0^+} \right) = +\infty.$$

Quindi f non è estendibile con continuità nei punti $x_k = 2k\pi$ per $k \neq 0$.

Analisi del punto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 2.$$

Quindi, definendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x \sinh x}{1 - \cos x} & \text{se } x \neq 2k\pi \\ 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$\tilde{f}$ risulta continua in $x = 0$. Per verificare se tale estensione $\tilde{f}(x)$ è derivabile in $x = 0$, calcoliamo il limite del rapporto incrementale, usando gli sviluppi di Maclaurin:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \sinh h}{1 - \cos h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sinh h - 2(1 - \cos h)}{h(1 - \cos h)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + o(h^2)) - 2(\frac{h^2}{2} + o(h^3))}{\frac{h^3}{2} + o(h^3)} = \lim_{h \to 0} \frac{o(h^3)}{\frac{h^3}{2} + o(h^3)} = 0.$$

Quindi l'estensione $\tilde{f}(x)$ è derivabile in $x = 0$ e $\tilde{f}'(0) = 0$.

Svolgimento sintetico - fila ♣

Esercizio ♣ 1

Dominio, simmetrie e continuità

Il dominio è $D = \mathbb{R}$. La funzione non presenta simmetrie evidenti, ed è continua in $\mathbb{R}$. Inoltre f ha il segno di $x + 4$.

Limiti significativi e asintoti

- **Limite a $+\infty$:**
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\sqrt[3]{x+4} = +\infty.$$
Poiché, per la gerarchia degli infiniti,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\sqrt[3]{x+4}}{x} = +\infty,$$
non esiste asintoto obliquo a $+\infty$.

- **Limite a $-\infty$:**
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}\sqrt[3]{x+4} = \lim_{t\to+\infty} e^{-2t}\sqrt[3]{-t+4} = 0,$$
dove abbiamo posto $t = -x$. La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

Derivata prima e monotonia

La funzione è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, e si ha
$$f'(x) = e^{2x}\left[2(x+4)^{1/3} + \tfrac{1}{3}(x+4)^{-2/3}\right] = \frac{e^{2x}(6x+25)}{3(x+4)^{2/3}}\,.$$
In $x = -4$, verifichiamo il limite della derivata:
$$\lim_{x\to-4} f'(x) = \lim_{x\to-4} \frac{e^{-8}}{0^+} = +\infty.$$
Poiché il limite è $+\infty$ sia da destra che da sinistra, in $x = -4$ il grafico di f ha un punto a tangente verticale. f non è derivabile in $x = -4$.

Segno di $f'(x)$:

- $f'(x) = 0 \iff 6x + 25 = 0 \iff x = -\frac{25}{6}$,
- $f'(x) > 0 \iff 6x + 25 > 0 \iff x > -\frac{25}{6}$ (con $x \neq -4$),
- $f'(x) < 0 \iff x < -\frac{25}{6}$

f è strettamente crescente in $[-\frac{25}{6}, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-\infty, -\frac{25}{6}]$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -\frac{25}{6}$.

Derivata seconda, convessità e concavità

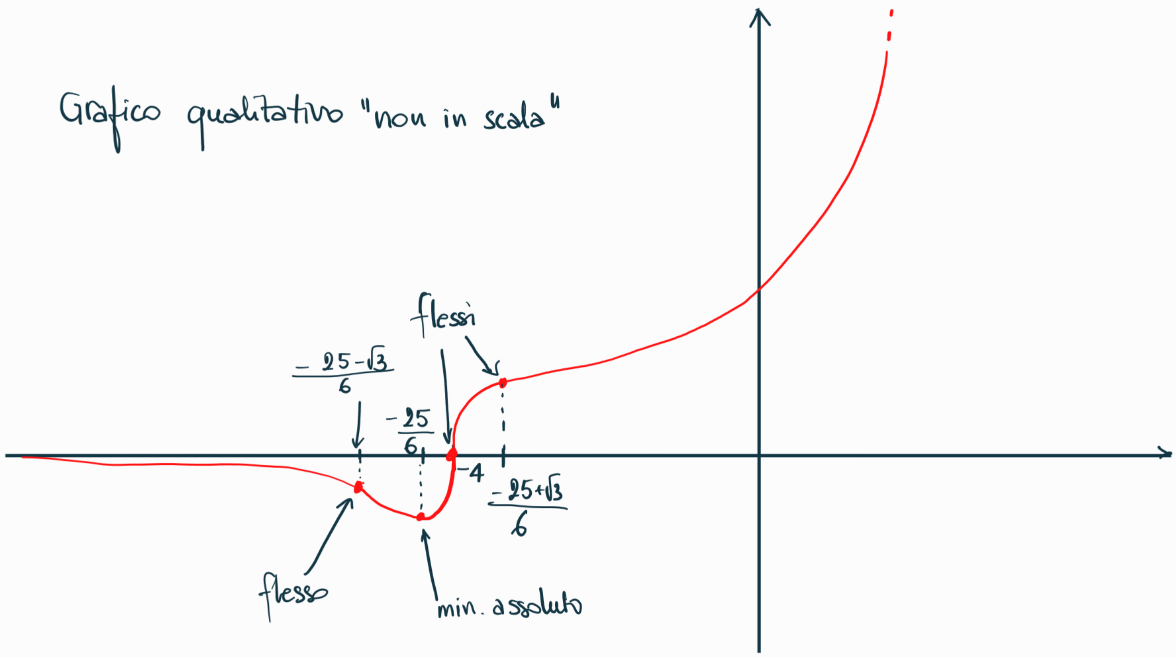
Per $x \neq -4$ si ha
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{2x}\left[2(x+4)^{1/3} + \tfrac{1}{3}(x+4)^{-2/3}\right]\right)' = e^{2x}\left[4(x+4)^{1/3} + \tfrac{4}{3}(x+4)^{-2/3} - \tfrac{2}{9}(x+4)^{-5/3}\right] \\ &= \frac{2e^{2x}}{9(x+4)^{5/3}}\left[18(x+4)^2 + 6(x+4) - 1\right]. \end{aligned}$$
Quindi:

- $f''(x) = 0 \iff x + 4 = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{18} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{6} \iff x = \frac{-25 \pm \sqrt{3}}{6}$,
- $f''(x) > 0 \iff \left(\frac{-25-\sqrt{3}}{6} < x < -4\right) \vee \left(x > \frac{-25+\sqrt{3}}{6}\right)$,
- $f''(x) < 0 \iff \left(x < \frac{-25-\sqrt{3}}{6}\right) \vee \left(-4 < x < \frac{-25+\sqrt{3}}{6}\right)$.

Pertanto

- f è strettamente convessa in ciascuno degli intervalli $\left[\frac{-25-\sqrt{3}}{6}, -4\right]$ e $\left[\frac{-25+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right)$,
- f è strettamente concava in ciascuno degli intervalli $\left(-\infty, \frac{-25-\sqrt{3}}{6}\right]$ e $\left[-4, \frac{-25+\sqrt{3}}{6}\right]$,
- f ha dei punti di flesso in $x = -4$ (flesso a tangente verticale) e in $x = \frac{-25 \pm \sqrt{3}}{6}$.

Grafico qualitativo "non in scala"



Esercizio ♣ 2

Svolgimento parte a)

Poniamo $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$):

$$2ix - 2y + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1$$

Passando alle uguaglianze delle parti reali e delle parti immaginarie, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2y^2 + 2y - 1 = 0 \\ 2x(1 + y) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione fornisce $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. A questo punto la seconda equazione fornisce $x = 0$.
Le soluzioni dell'equazione data sono quindi:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\, i, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\, i.$$

Svolgimento parte b)

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2i} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Pertanto

$$w^{2026} = e^{i\frac{2026\pi}{6}} = e^{i\frac{1013\pi}{3}}.$$

Poiché $\frac{1013}{3}\pi = 336\pi + \frac{5}{3}\pi$,

$$w^{2026} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio ♣ 3

Parte 1: calcolo dell'integrale indefinito

Integrando per parti,

$$\int \log(-3x^2+2x+1)\,dx = x\log(-3x^2+2x+1) - \int \frac{6x^2-2x}{3x^2-2x-1}\,dx.$$

Osservato che $3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$, per l'ultimo integrale facciamo la scomposizione in fratti semplici:

$$\int \frac{6x^2-2x}{3x^2-2x-1}\,dx = \int \left(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3x+1}\right)dx = 2x+\log|x-1|-\frac{1}{3}\log|3x+1|+c\,.$$

Pertanto l'integrale indefinito richiesto vale

$$x\log(-3x^2+2x+1)-2x-\log|x-1|+\frac{1}{3}\log|3x+1|+c.$$

L'integrale poteva essere svolto più rapidamente osservando che la funzione integranda è definita per $x\in(-\frac{1}{3},1)$, e che quindi

$$\int \log(-2x^2+x+1)\,dx = \int \log\big((1-x)(3x+1)\big)\,dx = \int \log(1-x)\,dx + \int \log(3x+1)\,dx\,.$$

I due integrali si ottengono immediatamente considerando che (integrando per parti)

$$\int \log t\,dt = t(\log t-1)+c.$$

Parte 2: Calcolo dell'area dell'insieme E

Per trovare l'intervallo in cui varia x, bisogna imporre

$$\log(-3x^2+2x+1)\geq 0 \iff -3x^2+2x+1\geq 1 \iff 0\leq x\leq \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$E=\left\{(x,y): 0\leq x\leq \frac{2}{3},\ -\log(-3x^2+2x+1)\leq y\leq \log(-3x^2+2x+1)\right\},$$

e, alla luce di quanto visto nella prima parte, la sua area vale

$$2\int_0^{1/3}\log(-3x^2+2x+1)\,dx = 2\Big[x\log(-3x^2+2x+1)-2x-\log|x-1|+\frac{1}{3}\log|3x+1|\Big]_0^{2/3} = \frac{8}{3}(\log 3-1).$$

Esercizio ♣ 4

Limite 1

Si ha

$$\left(\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}-x\right)=x\left[\sqrt[3]{\Big(1-\frac{a}{x}\Big)\Big(1-\frac{b}{x}\Big)\Big(1-\frac{c}{x}\Big)}-1\right]$$

Osserviamo ora che l'argomento dell'ultima radice cubica tende a 1, e che $\sqrt[3]{1+t}-1\sim\frac{t}{3}$ per $t\to 0$. Pertanto, per $x\to+\infty$

$$\begin{aligned}x\left[\sqrt[3]{\Big(1-\frac{a}{x}\Big)\Big(1-\frac{b}{x}\Big)\Big(1-\frac{c}{x}\Big)}-1\right]&\sim\frac{x}{3}\left[\Big(1-\frac{a}{x}\Big)\Big(1-\frac{b}{x}\Big)\Big(1-\frac{c}{x}\Big)-1\right]\\&=\frac{x}{3}\left[-\frac{a+b+c}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\right]\to-\frac{a+b+c}{3}\,.\end{aligned}$$

Limite 2

Usando lo sviluppo di Maclaurin di $\sin x$, si ottiene

$$\begin{aligned}\sinh(x^2)-(\sin x)^2&=x^2+o(x^4)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2\\&=x^2-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)=\frac{x^4}{3}+o(x^4)\sim\frac{x^4}{3}\quad\text{per } x\to 0^+.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^2)-(\sin x)^2}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{3x^\alpha}=\begin{cases}0 & \text{se } 0<\alpha<4\\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha=4\\ +\infty & \text{se } \alpha>4.\end{cases}$$

Esercizio ♣ 5

Il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Analisi dei punti $x_k = 2k\pi$ con $k \neq 0$

Se $k \neq 0$, il numeratore $\sinh(x)^2$, per $\to x_k$, tende a $\sinh(4k\pi^2) > 0$. Il denominatore tende a 0^+. Pertanto:

$$\lim_{x \to 2k\pi} f(x) = \lim_{x \to 2k\pi} \frac{\sinh(x^2)}{1 - \cos x} = \left(\frac{\sinh(4k\pi^2)}{0^+} \right) = +\infty.$$

Quindi f non è estendibile con continuità nei punti $x_k = 2k\pi$ per $k \neq 0$.

Analisi del punto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 2.$$

Quindi, definendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x^2)}{1 - \cos x} & \text{se } x \in D \\[2ex] 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$\tilde{f}$ risulta continua in $x = 0$. Per verificare se tale estensione $\tilde{f}(x)$ è derivabile in $x = 0$, calcoliamo il limite del rapporto incrementale, usando gli sviluppi di Maclaurin:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sinh(h^2)}{1 - \cos h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sinh(h^2) - 2(1 - \cos h)}{h(1 - \cos h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + o(h^3) - 2(\frac{h^2}{2} + o(h^3))}{\frac{h^3}{2} + o(h^3)} = \lim_{h \to 0} \frac{o(h^3)}{\frac{h^3}{2} + o(h^3)} = 0. \end{aligned}$$

Quindi l'estensione $\tilde{f}(x)$ è derivabile in $x = 0$ e $\tilde{f}'(0) = 0$.