

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\forall f, g \in C^1(I)$$

Integrazione per parti per integrali indefiniti.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Formula di integrazione per parti per integrali definiti

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx = \dots = 1$$

Si poteva fare anche calcolando prima l'integrale indefinito (la primitiva) di $x e^x$.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c$$

$$= \underbrace{e^x (x-1)} + c$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$\int_0^1 x e^x dx = e^x (x-1) \Big|_0^1 = 1$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 e^x (x-1) + c$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$\int_1^e \log x dx = \int_1^e 1 \cdot \log x dx = x \log x \Big|_1^e - \int_1^e \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx =$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x \quad = e - (e-1) = 1$$

$$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int \log(x-3) dx = \int 1 \cdot \log(x-3) dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x-3 \\ g(x) = \log(x-3) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x-3} \end{array} \right]$$

conviene questa invece di x

$$= (x-3) \log(x-3) - \int \cancel{(x-3)} \frac{1}{\cancel{(x-3)}} dx$$

$$= (x-3) \log(x-3) - (x-3) + c$$

$$= (x-3) (\log(x-3) - 1) + c$$

oppure

$$\int 1 \cdot \log(x-3) dx =$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

$$g(x) = \log(x-3) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$\begin{aligned}
&= x \log(x-3) - \int \frac{x-3+3}{x-3} dx = \\
&= x \log(x-3) - x - 3 \int \frac{dx}{x-3} = \\
&= x \log(x-3) - x - 3 \log(x-3) + c \\
&= (x-3) \log(x-3) - x + c
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx =$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$$

$$g(x) = \cos(3x) \Rightarrow g'(x) = -3 \sin(3x)$$

$$= e^x \cos(3x) \Big|_0^{\pi} + 3 \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx =$$

di nuovo per parti: $f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$

$$g(x) = \sin(3x) \Rightarrow g'(x) = 3 \cos(3x)$$

$$= -e^{\pi} - 1 + 3 \left[\cancel{(e^x \sin 3x)} \Big|_0^{\pi} - 3 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx \right]$$

$$= -e^{\pi} - 1 - 9 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx = -(e^{\pi} + 1) - 9 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx$$


 1° membro

$$10 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx = - (e^{\pi} + 1)$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx = - \frac{e^{\pi} + 1}{10}$$

$$\int \sin(3x) \cos x dx = \text{[per parti]}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \sin(3x) \Rightarrow g'(x) = 3 \cos(3x)$$

$$= \sin x \sin(3x) - 3 \int \sin x \cos(3x) dx =$$

[di nuovo per parti: $f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$
 $g(x) = \cos(3x) \Rightarrow g'(x) = -3 \sin(3x)$]

$$= \sin x \sin(3x) - 3 \left[-\cos x \cos(3x) - 3 \int \cos x \sin(3x) dx \right]$$

$$= \sin x \sin(3x) + 3 \cos x \cos(3x) + 9 \int \cos x \sin(3x) dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{è 1° membro.}}$

$$\Rightarrow (1-9) \int \cos x \sin(3x) dx = \sin x \sin(3x) + 3 \cos x \cos(3x) + c$$

$$\Rightarrow \int \cos x \sin(3x) dx = -\frac{1}{8} (\sin x \sin(3x) + 3 \cos x \cos(3x)) + c_1$$

In alternativa:

$$\int \sin(3x) \cos x dx$$

Usiamo le formule di Werner:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\int \sin(3x) \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(4x) + \sin(2x)] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + C.$$

Si può verificare che le due primitive trovate in modi diversi differiscono per una costante

$$\int \cos^2 x \, dx$$

1° modo (già visto): formule di bisezione

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C$$

2° modo: per parti

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx =$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$$

$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

$$1 - \cos^2 x$$

$$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \quad \text{d 1° membro.}$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + C_1$$

è la stessa trovata prima.

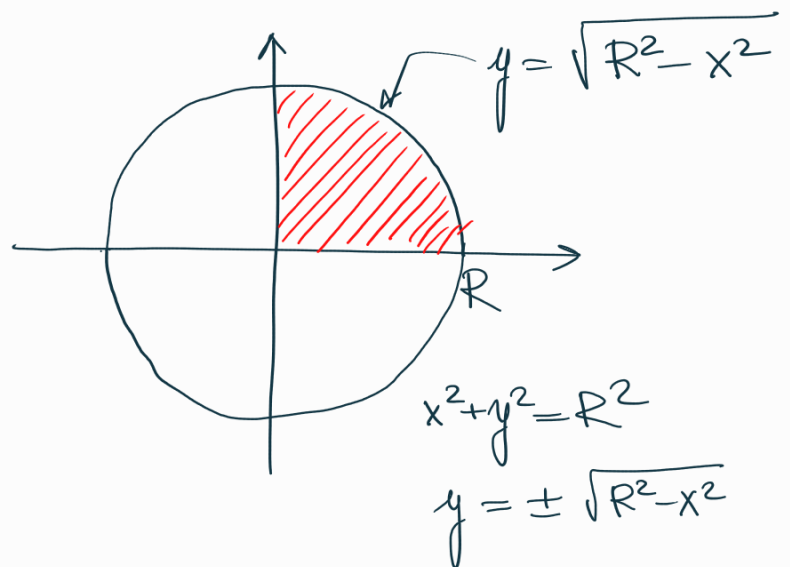
$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x \\ g(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right]$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

" $\log(1+x^2)$

Area del cerchio:



$$\text{Area} = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = 4 \frac{\pi R^2}{4} = \pi R^2$$

$$\int_0^R 1 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \, dx =$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

$$g(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= \cancel{x \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R} + \int_0^R \frac{x^2 - \cancel{R^2} + \cancel{R^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= \underbrace{-\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx}_{\Delta 1^\circ \text{ membro}} + R^2 \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2}{2} \int_0^R \frac{dx}{R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}$$

$$= \frac{R^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{R} \right) \Big|_0^R = \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{R^2 \pi}{4}$$

$$D \left(\arcsin \left(\frac{x}{R} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x \, dx =$$

$$\begin{array}{l|l} f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x & f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x \\ g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 & g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cancel{x^3} \sin x - 3 \left[-x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \right] \\
 &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \left[x \sin x - \underbrace{\int \sin x \, dx}_{\cos x} \right] = \\
 &\quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x \\
 &\quad g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1 \\
 &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C
 \end{aligned}$$

Questo suggerisce di cercare una formula iterativa per.

$$I_n(x) = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx = (*)$$

$$(*) = x^n \sin x - n \left[-x^{n-1} \cos x + (n-1) \underbrace{\int x^{n-2} \cos x \, dx}_{I_{n-2}(x)} \right]$$

Applicazione

$$= x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20 I_3(x) =$$

Esercizio per casa: Trovare una formula iterativa per

$$J_n(x) = \int x^n \sin x \, dx$$

Trovare una formula iterativa per

$$I_n(x) = \int \cos^n x \, dx$$

$$I_n(x) = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx =$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos^{n-1} x \Rightarrow g'(x) = (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x)$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx$$

" $\int \cos^{n-2} x - \int \cos^n x \, dx$

" $1 - \cos^2 x$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}(x) - (n-1) I_n(x)$$

2 1° membro

$$\Rightarrow \underbrace{(1+(n-1))}_n I_n(x) = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow I_n(x) = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$$

Trovare una formula di iterazione per

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx = \quad n \geq 2$$

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$g(x) = \sin^{n-1} x \Rightarrow g'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$$

$$= -\cancel{\sin^{n-1} x \cos x} \Big|_0^{\pi} + (n-1) \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

Integrazione per sostituzione

Partiamo dalla formula di derivata di funz. composte.

Siano I, J due intervalli:

$\varphi: I \rightarrow J$ di classe $C^1(I)$ (derivabile con derivata continua)

$f: J \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia F una primitiva di f in J (cioè $F'(x) = f(x) \, \forall x \in J$)

Considero la funzione composta

$$F \circ \varphi(t) = F(\varphi(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Qual è la sua derivata

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Riassumiamo in termini di primitive:

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in J , allora

$F \circ \varphi(t)$ è una primitiva di $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ in I

Quindi: per calcolare una primitiva di $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, basta calcolare una primitiva di f , e calcolarla in $\varphi(t)$ in formule:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \left[\int f(x) dx \right]_{x=\varphi(t)}$$

Formula di integr. per sost. per integrali indefiniti.

Esempio

$$\begin{aligned} \int \sin^2 t \cos t dt &= \int f(\sin t) \cdot (\sin t)' dt = \\ &\quad \text{dove } f(x) = x^2, \varphi(t) = \sin t \\ &= \left(\int f(x) dx \right)_{x=\sin t} = \left(\int x^2 dx \right)_{x=\sin t} = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + c \right)_{x=\sin t} = \frac{1}{3} \sin^3 t + c \end{aligned}$$

Attenzione: nella sostituzione si pone $\varphi(t) = x$
 $\varphi'(t) dt = dx$

per ricordarselo (le prime volte)

$$\varphi'(t) \rightarrow \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{\sqrt{\log t}}{t} dt = \int \sqrt{\log t} (\log t)' dt =$$

Pongo $\log t = x \Rightarrow \frac{1}{t} dt = dx$

$$= \left(\int \sqrt{x} dx \right)_{x=\log t} = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_{x=\log t} = \frac{2}{3} (\log t)^{3/2} + C$$

$$\int \sin(x^3) x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sin(x^3) \underbrace{3x^2 dx}_{\substack{x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \int \sin t dt \right)_{t=x^3} = -\frac{1}{3} \cos x^3 + C$$

$$\int \cos(3x-5) dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\cos(3x-5)}_{\cos t} \underbrace{3 dx}_{dt} = \frac{1}{3} \int \cos t dt =$$

$$\boxed{3x-5=t} \quad 3 dx = dt$$

$$= \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin(3x-5) + C.$$

$$\int e^{3-4x} dx = -\frac{1}{4} e^{3-4x} + C$$

||

$$\frac{1}{-4} \int \underbrace{e^{3-4x}}_{e^t} (-4) dx = -\frac{1}{4} \int e^t dt = -\frac{1}{4} e^t + C$$

$$3-4x=t \quad -4 dx = dt$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int \underbrace{f(ax+b)}_{f(t)} \underbrace{a dx}_{dt} = \frac{1}{a} \left(\int f(t) dt \right)_{t=ax+b}$$

$ax+b=t \Rightarrow dt = a \cdot dx$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + c$$

$$\int \frac{x+1}{2x^2+4x+7} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+4}{2x^2+4x+7} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} =$$

$$t = 2x^2+4x+7$$

$$dt = (4x+4)dx$$

$$= \frac{1}{4} \log |2x^2+4x+7| + c \quad \text{oss } \text{il polinomio } \text{è sempre } > 0$$

$$= \frac{1}{4} \log (2x^2+4x+7) + c$$