

Esame Scritto di Fisica - Scienze Biologiche

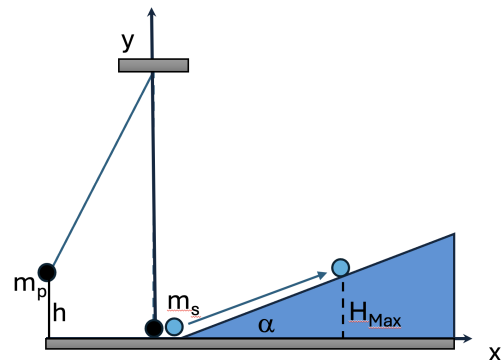
Mauro Raggi, Marta De Luca, Roberto Maoli, Lorenzo Monacelli

19 Settembre 2025

Esercizio 1

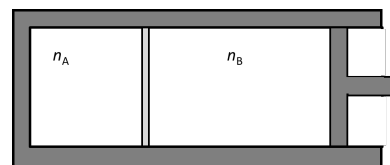
Una massa $m_p=0.500$ kg appesa a un filo inestensibile di lunghezza $L = 1.00$ m viene lasciata libera di oscillare da un'altezza iniziale $h=10.0$ cm rispetto alla sua posizione più bassa. La massa urta centralmente una sfera di massa $m_s=0.500$ Kg che è inizialmente ferma alla base di un piano inclinato di angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il piano ha un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d=0.200$. Dopo l'urto perfettamente elastico il pendolo resta fermo, e la sfera sale verso l'alto sul piano inclinato fino a raggiungere il punto di massima altezza H_{Max} .

1. Calcolare l'altezza massima H_{Max} raggiunta dalla sfera sul piano inclinato;
2. Se il coefficiente di attrito statico vale $\mu_S = 0.600$ che cosa succede dopo che la sfera ha raggiunto il punto di massima altezza H_{Max} ? (giustificare il motivo della risposta)
3. Se la sfera scende lungo il piano inclinato fino a urtare in maniera completamente anelastica il pendolo, che altezza H_2 raggiungerà questa volta il pendolo?



Esercizio 2

Un contenitore adiabatico di volume $V_{TOT} = 40$ litri è chiuso a un'estremità da un pistone ideale, anch'esso adiabatico. Il contenitore è diviso in due parti, A e B, da un setto fisso di materiale conduttore termico con $V_B = 3V_A$. In A ci sono $n_A = 2$ moli di un gas ideale monoatomico e in B ci sono n_B moli di un gas ideale biatomico. Allo stato iniziale di equilibrio $T_B = 300$ K.



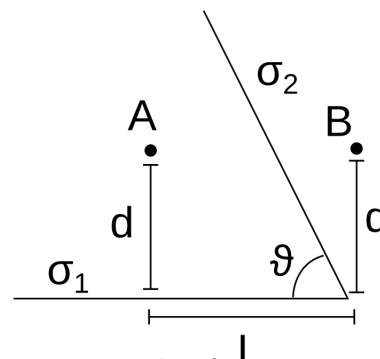
1. Considerando che all'esterno la pressione è $p_{ext} = 1.00$ atm, calcolare p_A e n_B .

A un certo istante una forza esterna comprime il pistone e sul gas in B viene compiuto un lavoro pari a 4020 J. Una volta raggiunto il nuovo equilibrio per entrambi i gas calcolare:

2. le temperature T_A e T_B dei due gas;
3. il calore scambiato attraverso il setto, specificando quale gas cede calore e quale lo acquista.

Esercizio 3

Due lamine infinitamente estese e uniformemente cariche, con densità superficiali $\sigma_1 = 3.54$ nC/m² e $\sigma_2 = -2.43$ nC/m², si intersecano formando un angolo $\vartheta = 60^\circ$. A una distanza $d = 7.5$ cm dalla lamina con carica σ_1 si trovano due punti, A e B. Il punto B è situato verticalmente sopra l'intersezione delle due lamine, mentre il punto A è disposto in modo tale che la distanza tra A e B sia $L = 12.0$ cm (come mostrato in figura).



1. Determinare il vettore campo elettrico nei punti A e B, prendendo un sistema di riferimento con origine nell'intersezione degli assi e l'asse x parallelo alla lamina σ_1 .
2. Calcolare la differenza di potenziale elettrostatico tra A e B.

Suggerimento: La distanza δ tra un punto P di coordinate x_0, y_0 e una retta di equazione $y = mx$ vale

$$\delta = \frac{|mx_0 - y_0|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1

1. La massa giunta nella posizione più bassa, ha velocità

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Poiché l'urto è perfettamente elastico, le masse sono uguali ($m_p = m_s$) e l'urto è frontale:

$$v_s(0) = v_0 \approx 1.401 \text{ m s}^{-1}$$

Se S è la distanza percorsa lungo il piano, la corrispondente variazione di altezza è $H_{Max} = S \sin \alpha$. Usando la conservazione dell'energia meccanica in presenza di attrito:

$$\frac{1}{2}m_s v_0^2 = m_s g H_{Max} + \mu_d m_s g \cos \alpha S$$

Poiché $S = H_{Max} / \sin \alpha$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gH + \mu_d g \cos \alpha \frac{H}{\sin \alpha} = gH \left(1 + \mu_d \cot \alpha\right).$$

Da cui

$$H_{Max} = \frac{\frac{1}{2}v_0^2}{g(1 + \mu_d \cot \alpha)}.$$

Usando $v_0^2 = 2gh$ si ha:

$$H_{Max} = \frac{h}{1 + \mu_d \cot \alpha} = 7.43 \text{ cm}$$

2. Se $\mu_s = 0.6$, cosa succede dopo che la sfera ha raggiunto H_{Max} ?

Nel punto di massima altezza H_{Max} la sfera è istantaneamente ferma. Per valutare se rimane bloccata dall'attrito statico o se ricomincia a scendere, confrontiamo la della forza peso lungo il piano inclinato con la massima forza di attrito statico:

$$m_s g \sin \alpha \leq \mu_s m_s g \cos \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tan \alpha \leq \mu_s \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{0.57735 < 0.6}$$

Poiché $0.57735 < 0.6$ la sfera rimane ferma sul piano inclinato.

3. La velocità della sfera appena prima dell'urto si ottiene dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m_s v_{\downarrow}^2 = m_s g H_{Max} - \mu_d m_s g \cos \alpha \cdot S$$

Poiché $S = H_{Max} / \sin \alpha$, otteniamo

$$\frac{1}{2}v_{\downarrow}^2 = gH_{Max} \left(1 - \mu_d \cot \alpha\right).$$

Quindi

$$v_{\downarrow} = \sqrt{2gH_{Max}(1 - \mu_d \cot \alpha)} = 0.9759.$$

L'urto alla base è completamente anelastico quindi la velocità del sistema subito dopo l'urto è:

$$v_{\text{com}} = \frac{m_s}{m_s + m_p} v_{\downarrow} = 0.5 v_{\downarrow} = 0.48796 \text{ m s}^{-1}$$

Da cui per la conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2}(m_s + m_p)v_{\text{com}}^2 = (m_s + m_p)gH_2.$$

$$H_2 = \frac{v_{\text{com}}^2}{2g} = 0.01214 \text{ m} \approx \boxed{1.21 \text{ cm}}.$$

Soluzione Esercizio 2

1. Essendo il pistone in equilibrio, la pressione p_B è uguale alla pressione esterna ed essendo i due gas in equilibrio termico, $T_A = T_B$.

Il volume di A è $V_A = V_{TOT}/4 = 10.0$ litri, e quindi $V_B = 30.0$ litri.

Dall'equazione dei gas perfetti si ha:

$$p_A = \frac{n_A R T_A}{V_A} = 4.92 \text{ atm}$$

$$n_B = \frac{p_B V_B}{R T_B} = 1.22 \text{ moli}$$

2. Applicando il primo principio della termodinamica al sistema termodinamico A+B, considerando che i due gas saranno alla stessa temperatura e che non c'è scambio di calore con l'esterno, si ha:

$$(n_{ACV,A} + n_{BCV,B})(T'_{A,B} - T_{A,B}) = -W_B$$

da cui si ricava

$$T'_{A,B} = T_{A,B} - \frac{W_B}{(n_{ACV,A} + n_{BCV,B})} = 380 \text{ K}$$

dove si è considerato che il calore specifico a volume costante per i due gas è rispettivamente $c_{V,A} = \frac{3}{2}R$ e $c_{V,B} = \frac{5}{2}R$ e che il lavoro subito dal sistema è negativo.

3. Il gas in B cede una parte dell'energia acquisita tramite il lavoro W_B al gas A sotto forma di calore. Sfruttando il fatto che per il sistema termodinamico in A il lavoro è nullo si ha:

$$Q_A = -Q_B = \Delta U_A = n_{ACV,A}(T'_A - T_A) = 2000 \text{ J}$$

.

Soluzione Esercizio 3

1. Il campo elettrico generato dalla lamina σ_1 è rivolto verso l'alto sia in A che in B, e vale di modulo

$$E_{1;A/B} = \frac{|\sigma_1|}{2\epsilon_0} = 200 \text{ V/m} \quad \vec{E}_1(A) = \vec{E}_1(B) = \begin{pmatrix} 0 \text{ V/m} \\ 200 \text{ V/m} \end{pmatrix}$$

Il campo elettrico generato dalla lamina 2, invece, è differente nei due punti. Nel punto A è diretto verso destra e verso l'alto, perchè la lamina ha densità di carica negativa. L'angolo del campo elettrico con l'asse delle x si può trovare con semplici ragionamenti geometrici, ed è pari a $\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Da cui ricaviamo

$$\vec{E}_2(A) = \frac{|\sigma_2|}{2\epsilon_0} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{|\sigma_2|}{2\epsilon_0} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \text{ V/m} \\ 68 \text{ V/m} \end{pmatrix}$$

Il punto B si trova dall'altro lato della lamina, per cui il campo generato dalla lamina 2 è rivolto nella stessa direzione (e stesso modulo) ma verso opposto:

$$\vec{E}_2(B) = -\vec{E}_2(A) = \begin{pmatrix} -119 \text{ V/m} \\ -68 \text{ V/m} \end{pmatrix}$$

Da cui possiamo ricavare il campo totale in A e B:

$$\boxed{\vec{E}(A) = \begin{pmatrix} 119 \text{ V/m} \\ 268 \text{ V/m} \end{pmatrix} \quad \vec{E}(B) = \begin{pmatrix} -119 \text{ V/m} \\ 131 \text{ V/m} \end{pmatrix}} \quad (1)$$

2. Per calcolare la differenza di potenziale, si può notare che la lamina 1 non influisce: infatti la distanza dalla lamina 1 di A e B è la stessa, e quindi il potenziale elettrostatico di A e B rispetto alla lamina 1 è uguale. La lamina 2 è un po' più complicata. Si può o calcolare la distanza di A e B dalla lamina 2, oppure sfruttare la definizione di differenza di potenziale

$$\Delta V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2)$$

In questo caso, prendiamo uno spostamento orizzontale che congiunge A e B .

$$\Delta V_{AB} = - \int_{x_A}^{x_B} E_x(x) dx \quad (3)$$

La componente x del campo elettrico cambia segno nel punto C in cui la lamina 2 incrocia il percorso

$$\Delta V_{AB} = - \int_{x_A}^{x_C} |E_x| dx + \int_{x_C}^{x_B} |E_x| dx = -|E_x|(x_C - x_A) + |E_x|(x_B - x_C) = |E_x|(x_A + x_B - 2x_C) \quad (4)$$

Nel nostro sistema di riferimento abbiamo

$$x_A = -L \quad x_B = 0 \quad x_C = -\frac{d}{\tan \vartheta} \quad |E_x| = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

Da cui otteniamo

$$\boxed{\Delta V_{AB} = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} \left(\frac{2d}{\tan \vartheta} - L \right) \sin \vartheta = -3.97 \text{ V}} \quad (5)$$

In alternativa, possiamo calcolare le distanze dei punti A e B dalla lamina usando la formula della distanza tra punto e retta nel piano cartesiano. Siano le coordinate dei punti A e B

$$A(-L; d) \quad B(0; d)$$

e sia la retta che identifica la lamina 2 una retta che passa per l'origine con coefficiente angolare pari alla tangente dell'angolo

$$y = -\tan \vartheta x$$

Otteniamo le distanze dei due punti pari a

$$\delta_A = \frac{|L \tan \vartheta - d|}{\sqrt{\tan^2 \vartheta + 1}} = \frac{L \tan \vartheta - d}{\sqrt{\tan^2 \vartheta + 1}} \quad \delta_B = \frac{d}{\sqrt{\tan^2 \vartheta + 1}}$$

Scriviamo quindi la differenza di potenziale come

$$\Delta V_{AB} = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} (\delta_B - \delta_A) = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} \frac{2d - L \tan \vartheta}{\sqrt{\tan^2 \vartheta + 1}}$$

Notando che $\tan^2 \vartheta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$, con un po' di trigonometria, si può mostrare che le due formule conducono allo stesso risultato

$$\Delta V_{AB} = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} \frac{2d - L \tan \vartheta}{\frac{1}{\cos \vartheta}} = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} (2d - L \tan \vartheta) \cos \vartheta = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} \left(\frac{2d}{\tan \vartheta} - L \right) \sin \vartheta$$