Laboratorio di Inferenza statistica - Prova finale 1 - 29 maggio 2025

Nome, cognome e matricola: ______________________________

1. $X \sim \text{Ga}(4, \texttt{scale} = 5)$. Determinare: (a) $\mathbb{P}(5 < X < 30)$; (b) il quantile di livello 0.7 di X.

```
rm(list=ls())
al=4
be=5
# (a)
pgamma(30,al,scale=be)-pgamma(5,al,scale=be)
# RIS 0.83
# (b)
qgamma(0.7,al,scale=be)
# RIS 23.8
```

2. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{N}(\theta, \sigma^2)$ iid. Si consideri il campione osservato $\mathbf{x}_n = (3.09, 3.47, 2.91, 1.51, 2.45, 2.35, 3.24, 1.87)$. Calcolare: (a) l'intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.8$, supponendo che $\sigma^2 = 1$; (b) una stima di σ^2.

```
rm(list=ls())
dati=c(3.09, 3.47, 2.91, 1.51, 2.45, 2.35, 3.24, 1.87)
n=length(dati)
xmed=mean(dati)
xmed
sig2=1
sig=sqrt(sig2)
# (a) IC
alpha=0.2
z=qnorm(1-alpha/2)
L=xmed-z*sig/sqrt(n)
U=xmed+z*sig/sqrt(n)
c(L,U)
# RIS    2.16 3.06
# (b) stima di sig2
var(dati)
# RIS.  0.47
```

3. Con riferimento ai dati del precedente esercizio, supporre che la varianza del modello sia incognita. Calcolare: stima puntuale di θ, intervallo di confidenza di livello $1-\alpha = 0.95$, p-value per il sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 2$ vs. $H_1 : \theta \neq 2$ e stabilire se H_0 si accetta o meno per un test di ampiezza α. [**Sugg.**: usare la funzione `t.test` che fornisce direttamente i valori richiesti].

```
rm(list=ls())
dati=c(3.09, 3.47, 2.91, 1.51, 2.45, 2.35, 3.24, 1.87)
t.test(dati,mu=2, alternative = "two.sided", conf.level = 0.95)
# RIS
# stima puntuale 2.61125 , IC  2.036564 3.185936
# p-value = 0.0401 < 0.05 --> si rifiuta H0
```

4. (MC) Supporre che $X \sim \text{Beta}(\theta, 1)$. Calcolare con MC il valore atteso di $Y = -\ln X$ supponendo $\theta = 3$. [Per controllare il risultato, ricordare che, in questo caso, $Y = -\ln X \sim \text{EN}(\theta)$].

```
rm(list=ls())
theta=3
M=10000
x.mc=rbeta(M,shape1=3,shape2=1)
y.mc=-log(x.mc)
E.mc=mean(y.mc)
E.mc
# RIS   0.33
```

5. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\theta)$ iid. Determinare: (a) $\mathbb{E}_\theta[X_{(1)}]$ e (b) $\mathbb{V}_\theta[X_{(1)}]$ (porre $n = 10$ e $\theta = 3$).

```
rm(list=ls())
theta=3
n=10
M=100000
x.mc=rgamma(M*n,1,scale = theta)
x.mc=matrix(x.mc,M,n)
x.min=apply(x.mc,1,min)
# per E e V
mean(x.min)
# RIS 0.29
var(x.min)
# RIS 0.09
```

6. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Unif}[0, \theta]$, $\theta > 0$ iid. Calcolare la probabilità di copertura frequentista dell'intervallo $[2\overline{X}_n - 1, 2\overline{X}_n + 1]$, assumendo $\theta = 3$ e $n = 15$.

```
rm(list=ls())
theta=3
n=15
M=100000
x.mc=runif(M*n,0,theta)
x.mc=matrix(x.mc,M,n)
vett.mc=apply(x.mc,1,mean)
L=2*vett.mc-1
U=2*vett.mc+1
copertura=mean(L<=theta&U>=theta)
copertura
# RIS   0.97
```

7. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$ iid. Sia $\mathbb{M}(\mathbf{X}_n)$ la mediana campionaria di $\mathbf{X}_n$. Calcolare la probabilità $\mathbb{P}_\theta[\mathbb{M}(\mathbf{X}_n) > 4]$ se $n = 15$ e $\theta = 5$.

```
rm(list=ls())
n=15
theta=5
M=10000
x.mc=rpois(M*n,theta)
x.mc=matrix(x.mc,M,n)
mediane.mc=apply(x.mc,1,median)
prob.mc=mean(mediane.mc>4)
prob.mc
# RIS   0.68
```

8. (MC) $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(2, \theta)$, iid. Considerare il test delle ipotesi $H_0 : \theta = 3$ vs. $H_1 : \theta = 1.3$ e assumere, $n = 20$. Calcolare la probabilità $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}[R]$ di errore di primo tipo e la potenza $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}[R]$ del test basato sulla regione di rifiuto $R = \{\mathbf{z}_n : S_n^2 < k = 1.5\}$, dove S_n^2 indica la varianza campionaria corretta.

```
rm(list=ls())
th0=3
th1=1.3
n=20
#k=10*th0/n
k=1.5
M=100000
# sotto H0
x.mc.H0=rnorm(n*M,mean=2,sd=sqrt(th0))
x.mc.H0=matrix(x.mc.H0,M,n)
S2.H0=apply(x.mc.H0,1,var)
prob.err.tipo1=mean(S2.H0<k)
prob.err.tipo1    # alpha
# RIS  alpha=0.03
# sotto H1
x.mc.H1=rnorm(n*M,mean=2,sd=sqrt(th1))
x.mc.H1=matrix(x.mc.H1,M,n)
S2.H1=apply(x.mc.H1,1,var)
prob.err.tipo2=mean(S2.H1>k)
prob.err.tipo2   # beta
potenza=1-prob.err.tipo2
potenza   # 1-beta
# RIS   beta=0.29     1-beta=0.71
```