Inferenza statistica - Verifica di ipotesi

Fulvio De Santis

Dipartimento di Scienze Statistiche
Sapienza Università di Roma

Teoria dei test: elementi del problema

- **modello statistico**

$$\{\mathcal{X}^n, f_n(\mathbf{x}_n;\theta), \theta \in \Theta\}$$

- **partizione spazio parametrico**

$$\Theta = \{\Theta_0, \Theta_1\} \quad \text{tale che} \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \qquad \text{e} \qquad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

- **due ipotesi**

$$H_0 : \ \theta \in \Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \ \theta \in \Theta_1$$

  - H_0: ipotesi nulla
  - H_1: ipotesi alternativa

- **Obiettivo**
  scegliere tra H_0 e H_1 usando i dati osservati $\mathbf{x}_n$

Tipologie di ipotesi

- **ipotesi semplice**:
  - $\Theta_i = \theta_i$ (punto di Θ_i)
  - $H_i : \theta = \theta_i$
- **ipotesi composta**
  - $\Theta_i \subset \Theta$ (non puntuale)
  - **Esempi**
    - $\Theta_i = \{\theta : \theta \leq \theta_t\}$ ipotesi unilaterale (one-sided)
    - $\Theta_i = \{\theta : \theta \geq \theta_t\}$ ipotesi unilaterale (one-sided)
    - $\Theta_i = \{\theta : \theta \neq \theta_t\}$ ipotesi bilaterale (two-sided)
    - $\Theta_i = \{\theta : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ ipotesi intervallare

Sistemi di ipotesi

1. **Sistema di ipotesi semplici**

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta = \theta_1.$$

2. **Sistemi di ipotesi unilaterali (one-sided)**

$$H_0 : \ \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta > \theta_0.$$

oppure

$$H_0 : \ \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta < \theta_0.$$

3. **Sistemi con H_0 puntuale e H_1 unilaterale (one-sided)**

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta > \theta_0$$

oppure

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta < \theta_0$$

4. **Sistemi con H_0 semplice e H_1 bilaterale**

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$$

5. **Sistemi con ipotesi intervallari**

$$H_0: \ \theta \in [\theta_0, \theta_1] \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \notin [\theta_0, \theta_1]$$

Osservazioni

- i valori θ_0, θ_1, ... sono dei numeri fissati (valori noti)
- Il tipo (1) trattazione separata
- Tipi (2) e (3) trattazione comune
- Tipo (4) caso limite di tipo (5)

Come procedere?

Non possiamo scegliere in base a

- $\mathbb{P}[\theta \in \Theta_i]$ (θ non è una v.a.)
- $L(\Theta_i; \mathbf{x}_n)$ (fdv è funzione di punto e non di insieme)

... usare **logica frequentista**

Logica frequentista

- scegliere una **statistica test** $W(\mathbf{X}_n)$
  - funzione di $\mathbf{X}_n$, di θ_0, θ_1, ... (noti) ma non di θ
  - $W: \mathcal{X}^n \longrightarrow \mathcal{W}$
- determinare due regioni A_W ed R_W di $\mathcal{W}$ tali che, osservato $\mathbf{x}_n$,
  - se $W(\mathbf{x}_n) \in A_W$ accetto H_0 $\quad\rightsquigarrow\quad$ **regione di accettazione** (di H_0)
  - se $W(\mathbf{x}_n) \in R_W$ rifiuto H_0 $\quad\rightsquigarrow\quad$ **regione di rifiuto** (di H_0)
  - $A_W \cup R_W = \mathcal{W}$ $\qquad$ e $\qquad$ $A_W \cap R_W = \emptyset$
- $W(\mathbf{X}_n)$ v.a. con **buone proprietà frequentiste**

Statistica test

Definizione

Una statistica $W : \mathcal{X}^n \to \mathcal{W}$ è una **statistica test** se esiste una **partizione** $\{A_W, R_W\}$ di $\mathcal{W}$[1] per la quale si ha che

$$W(\mathbf{x}_n) \in A_W \Rightarrow \text{ accetto } H_0$$

e

$$W(\mathbf{x}_n) \in R_W \Rightarrow \text{ rifiuto } H_0.$$

A_W e R_W sono, rispettivamente, la **regione di accettazione** e la **regione di rifiuto del test** W

[1] ovvero tale che $A_W \cup R_W = \mathcal{W}$ e $A_W \cap R_W = \emptyset$

Osservazione

Spesso si usa indicare la regione di accettazione e di rifiuto di un test con riferimento allo spazio dei campioni $\mathcal{X}^n$, ovvero si considera una **partizione dello spazio dei campioni**, $\{A, R\}$, con

$$A \cup R = \mathcal{X}^n, \quad \text{e} \quad A \cap R = \emptyset$$

dove

$$A = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \text{ accetto } H_0\}$$

è denominata **regione di accettazione** (del test o di H_0) e

$$R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \text{ rifiuto } H_0\}$$

è denominata **regione di rifiuto** o *regione critica* (del test o di H_0); Ovviamente

$$\mathbf{x}_n \in A \quad \Longleftrightarrow \quad W(\mathbf{x}_n) \in A_W$$

e

$$\mathbf{x}_n \in R \quad \Longleftrightarrow \quad W(\mathbf{x}_n) \in R_W.$$

Test frequentista: definizione ed implementazione

Definizione

Un test è una **regola decisionale** per scelgliere tra H_0 e H_1

La regola decisionale si basa su una **statistica test** $W(\mathbf{X}_n)$

Implementazione

- Scegliere $W(\mathbf{X}_n)$
- Determinare A_W e R_W tenendo conto delle proprietà frequentiste di $W(\mathbf{X}_n)$
- estrarre il campione $\mathbf{x}_n$ e
  - se $W(\mathbf{x}_n) \in A_W$ accetto H_0 $\quad\rightsquigarrow\quad$ **regione di accettazione** (di H_0)
  - se $W(\mathbf{x}_n) \in R_W$ rifiuto H_0 $\quad\rightsquigarrow\quad$ **regione di rifiuto** (di H_0)

2 aspetti

- scelta di $W(\mathbf{X}_n)$ (esiste più di una statistica test)

- determinazione di A_W e R_W (partizione ottimale)

Entrambi questi aspetti si affrontano tenendo conto delle **probabilità di errore** associate a $W(\mathbf{X}_n)$

Errori associati a un test

Scelta tra **due alternative** $\Longrightarrow$ **due tipi di errore**

- **errore di I tipo**
  rifiutare H_0 quando $\theta \in \Theta_0$, ovvero quando H_0 è l'ipotesi vera

- **errore di II tipo**
  rifiutare H_1 quando $\theta \in \Theta_1$, ovvero quando H_1 è l'ipotesi vera

	si accetta H_0	si rifiuta H_0
H_0 vera	ok	errore I tipo
H_1 vera	errore II tipo	ok

Probabilità degli errori associati a un test

In generale, dati $W(\mathbf{X}_n)$, A_W e R_W

- **funzione di probabilità di errore di I tipo**

$$\alpha(\theta) = \mathbb{P}_\theta[W(\mathbf{X}_n) \in R_W | \theta \in \Theta_0] = \mathbb{P}_\theta(R_W; H_0) = \mathbb{P}_\theta(R; H_0)$$

(probabilità di **rifiutare** H_0 quando questa è **vera**)

- **funzione di probabilità di errore di II tipo**

$$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta[W(\mathbf{X}_n) \in A_W | \theta \in \Theta_1] = \mathbb{P}_\theta(A_W; H_1) = \mathbb{P}_\theta(A; H_1)$$

(probabilità di **accettare** H_0 quando questa è **falsa**)

Ipotesi semplici

- **sistema di ipotesi**

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

- **probabilità di errore di I tipo** (o di I specie)

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathbf{X}_n \in R) = \alpha(\theta_0)$$

- **probabilità di errore di II tipo** (o di II specie)

$$\beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(A) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\mathbf{X}_n \in A) = \beta(\theta_1)$$

- **potenza del test**

$$\eta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R) = 1 - \beta = 1 - \beta(\theta_1)$$

Osservazioni

- Ideale: α e β entrambe basse (minime)
- problema: α e β non sono svincolate l'una dall'altra
- causa del problema : $\mathcal{X}^n = A \cup R$ e quindi

$$\alpha \textbf{ bassa} \Leftrightarrow R \textbf{ piccola} \Leftrightarrow A \textbf{ grande} \Leftrightarrow \beta \textbf{ alta}$$

- idea: **fissare** α e **minimizzare** $\beta \leftrightarrow$ **massimizzare** $\eta = 1 - \beta$
- un test con $\mathbb{P}_{\theta_0}(R)$ si dice **test di ampiezza** α

Obiettivo

Trovare il test W^* (con A^* e R^*) tale che, fissato il valore α

- abbia probabilità di errore di I specie uguale ad α:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R^*) = \alpha$$

- minimizzi la probabilità di errore di II specie β (ovvero: massimizzi la potenza η):

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(A^*) = \beta^* \textbf{ minima}$$

  per tutti i test con probabilità di errore di I specie uguale (o minore) di α

Implementazione di un test (ipotesi semplici)

4 passi

1. trovare $W^*(\mathbf{X}_n)$
2. individuare le *generiche* regioni A^* e R^*
3. individuare le *specifiche* regioni A^* e R^*
   - fissare $\alpha \in (0, 1)$
   - imporre che il test abbia $\mathbb{P}_{\theta_0}(R^*) = \alpha$
4. estrarre il campione $\mathbf{x}_n$
   - se $W(\mathbf{x}_n) \in A^*$ si accetta H_0
   - se $W(\mathbf{x}_n) \in R^*$ si rifiuta H_0

Test del rapporto delle verosimiglianze (RV)

Per il sistema di ipotesi

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta = \theta_1$$

1. **statistica test**:
   $$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\theta_0; \mathbf{x}_n)}{L(\theta_1; \mathbf{x}_n)},$$
   $L(\cdot; \mathbf{x}_n)$ è la fdv di θ positiva;
2. **regioni generiche** A ed R:
   $$A = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \lambda_{01}(\mathbf{x}_n) > k\} \quad \text{e} \quad R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \lambda_{01}(\mathbf{x}_n) \leq k\}$$
   dove $k > 0$
3. **regioni specifiche**: fissato un valore di α in $(0, 1)$, si determina $k = k_\alpha$ tale
   $$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \alpha$$

Osservazioni

- λ_{01}: stessa statistica test dell'impostazione basata su fdv
  - logica frequentista: pre-sperimentale
  - logica verosimiglianza: post-sperimentale
- logiche diversa $\Longrightarrow$ soglie diverse
  - logica frequentista: k_α dipende da α
  - logica verosimiglianza: soglia non dipende da spazio campionario
- soglia k_α: si trova imponendo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}[\lambda_{01}(\mathbf{X}_n) \leq k_\alpha] = \alpha$$

- $\lambda_{01}(\mathbf{X}_n)$ funzione di
  - $T(\mathbf{X}_n)$, statistica sufficiente
  - $\widehat{\theta}_{mv}$, stimatore di massima verosimiglianza

Esempio (N1): $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 noto

Determinazione delle generiche A e R

- supponiamo $\theta_0 < \theta_1$
- $L(\theta; \mathbf{x}_n) \propto \exp\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \overline{x}_n)^2\}$
- $\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\theta_0;\mathbf{x}_n)}{L(\theta_1;\mathbf{x}_n)} = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left[(\theta_0 - \overline{x}_n)^2 - (\theta_1 - \overline{x}_n)^2\right]\right\}$
- $A = \left\{\mathbf{x}_n : \ \lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left[(\theta_0 - \overline{x}_n)^2 - (\theta_1 - \overline{x}_n)^2\right]\right\} > k\right\}$
- $A = \{\mathbf{x}_n : \ \overline{x}_n < k''\}$

Infatti $\lambda_{01}(\mathbf{x}_n)$ è **funzione monotona decrescente** di $\overline{x}_n$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) > k \quad &\iff \quad \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}[2\overline{x}_n(\theta_1 - \theta_0) + (\theta_0^2 - \theta_1^2)]\right\} > k \\
&\iff \quad \exp\left\{-\frac{n}{\sigma^2}\overline{x}_n(\theta_1 - \theta_0)\right\} > k' \\
&\iff \quad \overline{x}_n < k''
\end{aligned}$$

Esempio (N1): $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 noto

Determinazione delle specifiche A e R test ampiezza α

Imponiamo che il test abbia ampiezza α ovvero che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \alpha$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \alpha \quad &\iff \quad \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\lambda_{01}(\mathbf{X}_n) \leq k\right) = \alpha \\
&\iff \quad \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\overline{X}_n \geq k''\right) = \alpha \\
&\iff \quad \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\mathbf{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{n}(k'' - \theta_0)}{\sigma}\right) = \alpha \\
&\iff \quad \frac{\sqrt{n}(k'' - \theta_0)}{\sigma} = z_{1-\alpha} \\
&\iff \quad k'' = \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \overline{x}_n < \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \right\} && (1) \\
&= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} < z_{1-\alpha} \right\} && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R &= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \overline{x}_n \geq \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \right\} && (3) \\
&= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} \geq z_{1-\alpha} \right\} && (4)
\end{aligned}
$$

Esempio numerico per (N1)

- **modello**: $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 15^2)$
- **ipotesi**: $\theta_0 = 368$
- **dati**: $\overline{x}_n = 372$, $n = 25$
- **probabilità di errore di I tipo**: $\alpha = 0.05$
- **valore soglia in (2)**: $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = \texttt{qnorm}(0.95) = 1.645$
- **regione di accettazione** (del test di ampiezza α):

$$A = \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{25}(372 - 368)}{15} \leq 1.645 \right\}.$$

- **decisione**:

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} = \frac{\sqrt{25}(372 - 368)}{15} = 1.33 < 1.645 = z_{1-\alpha}$$

e quindi accettiamo H_0.

Osservazioni

- In (1) A ed R sono espresse in funzione di $\widehat{\theta}_{mv}$ di θ
  - soglia critica: $\theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$
- In (2) A ed R espresse in funzione di $Q(\mathbf{X}_n, \theta_0)$
  - soglia critica: $z_{1-\alpha}$
- Soglie critiche dipendono da α
- Infatti sotto H_0 (ovvero se ipotizzo che $\theta = \theta_0$)
  - $\overline{X}_n \sim \mathrm{N}(\theta_0, \sigma^2/n)$
  - $Q(\mathbf{X}_n, \theta_0) \sim \mathrm{N}(0, 1)$

Figura 1. Probabilità di errore di primo e di secondo tipo in un semplice test d'ipotesi a una coda.
Figure 1. Probability of type I and type II error in a simple one-sided hypothesis test.

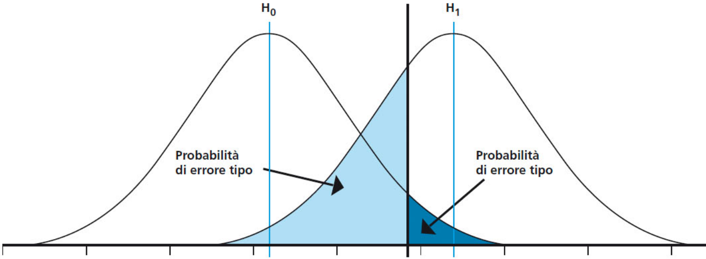

Figura: *Grafico densità di* $\overline{X}_n|\theta_0$ *(sotto* H_0*) a sinistra; Grafico densità di* $\overline{X}_n|\theta_1$ *(sotto* H_1*) a destra*

Esempio (N1) (cont.): potenza del test

$X_i|\theta \sim \mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$ (σ^2 nota)

- $\theta_0 < \theta_1$
- $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R)$
- $R = \{\overline{x}_n : \overline{X}_n > \theta_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$

Abbiamo allora che

$$\begin{aligned}
1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R_\lambda) &= \mathbb{P}_{\theta_1}\left\{\overline{X}_n > \theta_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_1)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Esempio (N1) (cont.)

Calcolo del valore numerico della potenza del test $\eta = 1 - \beta$

- $\theta_0 = 368$
- $\theta_1 = 374$
- $n = 25$
- $\sigma = 15$
- $\overline{x}_n = 372$
- $\alpha = 0.05 \Longrightarrow z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.645$

Si ottiene

$$\eta = 1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R) = 1 - \mathtt{pnorm}(-\frac{\sqrt{25}(374 - 368)}{15} + 1.645) = 0.64$$

Osservazioni

Si osservi che la potenza $1 - \beta$ è

- funzione crescente (tendente al limite a 1) della dimensione campionaria *n*, per valori fissati di α, σ e $(\theta_1 - \theta_0)$;
- funzione crescente (tendente al limite a 1) di α, per valori fissati di *n*, σ e $(\theta_1 - \theta_0)$;
- funzione crescente (tendente al limite a 1) di $(\theta_1 - \theta_0)$, per valori fissati di α, σ e *n*;
- funzione decrescente (tendente al limite ad α) di σ, per valori fissati di *n*, α e $(\theta_1 - \theta_0)$.

Osservazioni (continua)

- se consideriamo $\theta_0 > \theta_1$ allora

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} > -z_{1-\alpha} = z_\alpha \right\} \\ &= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \overline{x}_n > \theta_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} \leq -z_{1-\alpha} = z_\alpha \right\} \\ &= \left\{ \overline{x}_n \in \mathbb{R} : \ \overline{x}_n \leq \theta_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

- **Potenza del test**

$$\eta = 1 - \beta = \Phi \left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1)}{\sigma} + z_\alpha \right)$$

Schema riassuntivo (N1)

Confronto tra ipotesi semplici, modello $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$

Caso	$W(\mathbf{X}_n)$	Rifiuto H_0	Potenza
$\theta_0 < \theta_1$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$W(\mathbf{x}_n) > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)$
$\theta_0 > \theta_1$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$W(\mathbf{x}_n) < z_{\alpha}$	$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1)}{\sigma} + z_{\alpha}\right)$

Osservazione

$W(\mathbf{X}_n) = Q(\mathbf{X}_n, \theta_0) \sim \mathrm{N}(0, 1)$ sotto H_0

Test del RV e statistiche sufficienti

Dal criterio di fattorizzazione discende che

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\theta_0; \mathbf{x}_n)}{L(\theta_1; \mathbf{x}_n)} = \frac{h(\mathbf{x}_n)}{h(\mathbf{x}_n)} \frac{g(T(\mathbf{x}_n), \theta_0)}{g(T(\mathbf{x}_n), \theta_1)} = \frac{g(T(\mathbf{x}_n), \theta_0)}{g(T(\mathbf{x}_n), \theta_1)}.$$

Sia

$$\varphi[T(\mathbf{x}_n)] = \frac{g(T(\mathbf{x}_n), \theta_0)}{g(T(\mathbf{x}_n), \theta_1)}.$$

Si ha allora che

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) > k \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi[T(\mathbf{x}_n)] > k.$$

- Se φ è **monotona crescente**:

$$\varphi[T(\mathbf{x}_n)] > k \qquad \Leftrightarrow \qquad T(\mathbf{x}_n) > \varphi^{-1}(k) = k'$$

- Se φ è **monotona decrescente**:

$$\varphi[T(\mathbf{x}_n)] > k \qquad \Leftrightarrow \qquad T(\mathbf{x}_n) < \varphi^{-1}(k) = k'$$

Conseguenza

Intuitivo se formulo il tutto in funzione degli stimatori di massima verosimiglianza

Infatti, se

$$T(\mathbf{x}_n) = \widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$$

- $\theta_1 < \theta_0 \quad \Longrightarrow \quad$ rifiuto H_0 se $\quad \widehat{\theta}_{mv} < k$
- $\theta_1 > \theta_0 \quad \Longrightarrow \quad$ rifiuto H_0 se $\quad \widehat{\theta}_{mv} > k$

Esempio (EN): modello esponenziale negativo

$X_i|\theta \sim \mathrm{EN}(\theta)$

$L(\theta; \mathbf{x}_n) = \theta^n e^{-\theta n \overline{x}_n}$. Quindi

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 n \overline{x}_n}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 n \overline{x}_n}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{-(\theta_0 - \theta_1) n \overline{x}_n}.$$

I caso: $\theta_0 < \theta_1$
$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n)$ funzione crescente di $\overline{x}_n$. Pertanto

$$A = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \overline{x}_n > k'\} = \left\{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \frac{1}{\overline{x}_n} < k''\right\},$$

Osservazione

- $1/\overline{x}_n = \widehat{\theta}_{mv}$ di θ.

- Sensato accettare H_0 se $\widehat{\theta}_{mv} = 1/\overline{x}_n < k$ quando $\theta_0 < \theta_1$

Stesso risultato svolgendo tutti i calcoli, senza cioè riconoscere che λ_{01} è funzione monotona crescente di $\overline{x}_n$. Infatti

$$\begin{aligned}
\lambda_{01}(\overline{x}_n) > k \quad & \Leftrightarrow \quad e^{-(\theta_0-\theta_1)n\overline{x}_n} > \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k = k_1 \\
& \Leftrightarrow \quad -(\theta_0-\theta_1)n\overline{x}_n > \ln k_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \overline{x}_n > \frac{\ln k_1}{n(\theta_1-\theta_0)} = k_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > k_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\overline{x}_n} < k_4
\end{aligned}$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene che (k arbitrario)

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}.$$

Per fissare il valore k imponiamo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \alpha \in (0,1)$$

Ricordiamo che: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Ga}(n, \theta)$. Pertanto,

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k \right) = \alpha \Leftrightarrow k = q_\alpha(n, \theta_0)$$

dove $q_\alpha(n, \theta_0)$ indica il percentile[2] di livello α di una v.a. $\mathrm{Ga}(n, \theta_0)$.

[2] Con `R`: $\mathrm{qgamma}(\alpha, \mathrm{shape} = n, \mathrm{scale} = 1/\theta_0)$.

II caso: $\theta_0 > \theta_1$

Ora $\lambda_{01}(\mathbf{x}_n)$ funzione decrescente di $\overline{x}_n$ e quindi di $\sum_{i=1}^n x_i$. Pertanto

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq k \right\}.$$

Il test di ampiezza α si ottiene imponendo la condizione di ampiezza uguale ad α:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k \right) = \alpha \Longrightarrow k = q_{1-\alpha}(n, \theta_0)$$

Quindi (test di ampiezza α)

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq q_{1-\alpha}(n, \theta_0) \right\}.$$

Esempio (Ber): modello bernoulliano

$X_i|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{\theta_0^{y_n}}{\theta_1^{y_n}} \frac{(1-\theta_0)^{n-y_n}}{(1-\theta_1)^{n-y_n}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{y_n} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-y_n} .$$

dove $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

- **I caso**: $\theta_0 > \theta_1$. La precedente espressione è il prodotto di due funzioni non decrescenti di y_n e quindi

$$A = \left\{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; y_n > k'\right\}.$$

  Il test di ampiezza α si ottiene imponendo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R_{\overline{x}_n}) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(Y_n \leq k'\right) = \alpha \Leftrightarrow k' = q_\alpha(n, \theta_0)$$

  dove $q_\alpha(n, \theta_0)$ è il percentile di livello α di una v.a. $\text{Bin}(n, \theta_0)$.

- **II caso**: $\theta_0 < \theta_1$. La precedente espressione è il prodotto di due funzioni non crescenti di y_n e quindi

$$A = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; y_n < k' \right\}.$$

Il test di ampiezza α si ottiene imponendo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R_{\overline{x}_n}) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(Y_n \geq k'\right) = \alpha \Leftrightarrow k' = q_{1-\alpha}(n, \theta_0)$$

dove $q_{1-\alpha}(n, \theta_0)$ è il percentile di livello $1 - \alpha$ di una v.a. $\mathrm{Bin}(n, \theta_0)$.

Osservazione

La v.a. Y_n una $\mathrm{Bin}(n, \theta_0)$ (discreta), il valore di α non può essere un qualsiasi valore in $(0, 1)$, come avviene invece nel caso di statistiche test che sono v.a. assolutamente continue.

Ottimalità: : test più potente di ampiezza fissata

Definizione

Dato un modello statistico e un sistema di ipotesi semplici, si chiama **test più potente di ampiezza** α un test (A^*, R^*) tale che

(1) $\mathbb{P}_{\theta_0}(R^*) = \alpha$

(con probabilità di errore di primo tipo pari a α)

(2) $1 - \beta^* = \mathbb{P}_{\theta_1}(R^*) \geq \mathbb{P}_{\theta_1}(R') = 1 - \beta'$.

(più potente di ogni altro test (A', R') con probabilità di errore di I tipo pari a $\alpha' \leq \alpha$)

Lemma di Neyman e Pearson

Dato il sistema di ipotesi semplici

$$H_0 : \; \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \; \theta = \theta_1$$

il test λ_{01} di ampiezza α e potenza $1 - \beta$, basato sulla regione R

$$R^* = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; \lambda_{01}(\mathbf{x}_n) \leq k\}, \tag{5}$$

(dove k è un opportuno valore positivo) è tale che, per ogni altro test (A', R') di ampiezza $\alpha' \leq \alpha$ e potenza $1 - \beta'$, si ha

$$1 - \beta \geq 1 - \beta'.$$

Dimostrazione

Consideriamo un qualsiasi qualsiasi altro test con

- ampiezza $\alpha' \leq \alpha$
- regione di rifiuto R'
- probabilità errore II specie β'

Dobbiamo dimostrare che

$$1 - \beta = \int_{R_\lambda} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_1) d\mathbf{x}_n \geq \int_{R'} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_1) d\mathbf{x}_n = 1 - \beta'.$$

A tal fine consideriamo l'integrale

$$J = \int_{\mathcal{X}^n} \left(1_{R_\lambda}(\mathbf{x}_n) - 1_{R'}(\mathbf{x}_n)\right) \left(f_n(\mathbf{x}_n; \theta_1) - \frac{1}{k} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_0) \right) d\mathbf{x}_n.$$

Osservando quanto segue:

$$R_\lambda = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; f_n(\mathbf{x}_n; \theta_1) - \frac{1}{k} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_0) \geq 0 \right\}$$

si verifica facilmente che

- se $\mathbf{x}_n \in R_\lambda$, i due fattori delle funzione integranda in J sono entrambi non negativi;

- se $\mathbf{x}_n \notin R_\lambda$, i due fattori delle funzione integranda in J sono entrambi non positivi.

Pertanto $J \geq 0$ in corrispondenza di qualunque campione in $\mathcal{X}^n$.

Svolgendo il prodotto interno all'integrale si ottiene che

$$\begin{aligned} J &= \int_{R_\lambda} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_1) d\mathbf{x}_n - \int_{R'} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_1) d\mathbf{x}_n + \\ &\quad -\frac{1}{k}\left(\int_{R_\lambda} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_0) d\mathbf{x}_n - \int_{R'} f_n(\mathbf{x}_n; \theta_0) d\mathbf{x}_n\right) \\ &= (1-\beta) - (1-\beta') - \frac{1}{k}(\alpha - \alpha') \geq 0 \end{aligned}$$

Pertanto, avendo assunto che $\alpha' \leq \alpha$, si ha che $(\alpha - \alpha')/k \geq 0$ e quindi che

$$(1-\beta) \geq (1-\beta').$$

Implementazione del test ottimo (ipotesi semplici)

4 passi

1. Definire A ed R in funzione di $\lambda_{01}(\mathbf{X}_n)$
2. esprimere le *generiche* regioni A^* e R^* in funzione di $W^*(\mathbf{X}_n)$
3. individuare le *specifiche* regioni A^* e R^*
   - fissare $\alpha \in (0, 1)$
   - imporre che il test abbia $\mathbb{P}_{\theta_0}(R^*) = \alpha$
4. estrarre il campione $\mathbf{x}_n$
   - se $W^*(\mathbf{x}_n) \in A^*$ si accetta H_0
   - se $W^*(\mathbf{x}_n) \in R^*$ si rifiuta H_0

Esempio (N1): schema riassuntivo

Confronto tra ipotesi semplici, modello $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$

Caso	$W(\mathbf{X}_n)$	Rifiuto H_0	Potenza
$\theta_0 < \theta_1$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$W(\mathbf{X}_n) > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)$
$\theta_0 > \theta_1$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$W(\mathbf{X}_n) < z_{\alpha}$	$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1)}{\sigma} + z_{\alpha}\right)$

Osservazione

$W(\mathbf{X}_n) = Q(\mathbf{X}_n, \theta_0) \sim \mathrm{N}(0, 1)$ sotto H_0

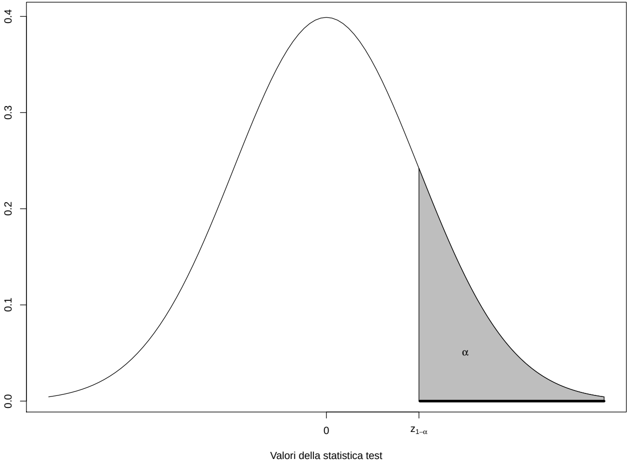

Figura: Caso $\theta_0 < \theta_1$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

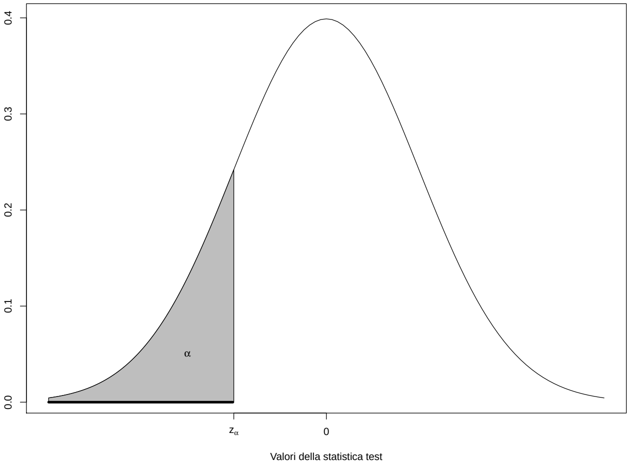

Figura: Caso $\theta_0 > \theta_1$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

Potenza del test: caratteristiche

Esempio (N1): $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 nota

Caso 1: $\theta_0 < \theta_1$

$$1 - \beta = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)$$

- studiamo la potenza $1 - \beta$ al variare di θ_1

- effetto di

- $\theta_1 - \theta_0$
- n (dimensione del campione)
- α (probabilità di errore di I specie)
- σ^2 (varianza delle singole v.a. X_i)

Esempio (EN): modello esponenziale negativo

$X_i|\theta \sim \text{EN}(\theta)$

$L(\theta; \mathbf{x}_n) = \theta^n e^{-\theta n \overline{x}_n}$. Quindi

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 n \overline{x}_n}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 n \overline{x}_n}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{-(\theta_0 - \theta_1) n \overline{x}_n}.$$

I caso: $\theta_0 < \theta_1$
$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n)$ funzione crescente di $\overline{x}_n$. Pertanto

$$A = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; \overline{x}_n > k'\} = \left\{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; \frac{1}{\overline{x}_n} < k''\right\},$$

Osservazione

- $1/\overline{x}_n = \widehat{\theta}_{mv}$ di θ.

- Sensato accettare H_0 se $\widehat{\theta}_{mv} = 1/\overline{x}_n < k$ quando $\theta_0 < \theta_1$

Stesso risultato svolgendo tutti i calcoli, senza cioè riconoscere che λ_{01} è funzione monotona crescente di $\overline{x}_n$. Infatti

$$\begin{aligned}
\lambda_{01}(\overline{x}_n) > k \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-(\theta_0-\theta_1)n\overline{x}_n} > \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k = k_1 \\
&\Leftrightarrow \quad -(\theta_0-\theta_1)n\overline{x}_n > \ln k_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{x}_n > \frac{\ln k_1}{n(\theta_1-\theta_0)} = k_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > k_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\overline{x}_n} < k_4
\end{aligned}$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene che (k arbitrario)

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \right\}.$$

Per fissare il valore k imponiamo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \alpha \in (0, 1)$$

Ricordiamo che: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Ga}(n, \theta)$. Pertanto,

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k\right) = \alpha \Leftrightarrow k = q_\alpha(n, \theta_0)$$

dove $q_\alpha(n, \theta_0)$ indica il percentile[3] di livello α di una v.a. $\mathrm{Ga}(n, \theta_0)$.

[3] Con R: $\mathrm{qgamma}(\alpha, \mathrm{shape} = n, \mathrm{scale} = 1/\theta_0)$.

Potenza del test

$$\begin{aligned} 1-\beta &= \mathbb{P}_{\theta_1}(R) = \mathbb{P}_{\theta_1}[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq q_\alpha(n,\theta_0)] \\ &= \mathsf{F}_{\mathsf{Ga}}[q_\alpha(n,\theta_0)|H_1] \\ &= \texttt{pgamma}(q_\alpha(n,\theta_0), \texttt{shape} = n, \texttt{scale} = 1/\theta_1) \end{aligned}$$

in quanto, sotto H_1

$$\sum_{i=1}^{n} X_i|\theta_1 \sim \mathsf{Ga}(\texttt{shape} = n, \texttt{scale} = 1/\theta_1)$$

II caso: $\theta_0 > \theta_1$

Ora $\lambda_{01}(\mathbf{x}_n)$ funzione decrescente di $\overline{x}_n$ e quindi di $\sum_{i=1}^n x_i$. Pertanto

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq k \right\}.$$

Il test di ampiezza α si ottiene imponendo la condizione di ampiezza uguale ad α:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k \right) = \alpha \Longrightarrow k = q_{1-\alpha}(n, \theta_0)$$

Quindi (test di ampiezza α)

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq q_{1-\alpha}(n, \theta_0) \right\}.$$

Esempio (EN) (applicazione numerica)

Esercizio 9 pag. 53 dispense esercizi; problema inverso

- $\theta_0 = 1$ vs. $\theta_1 = 2$ $\qquad$ ($\Rightarrow$ I caso)
- $n = 36$ e $k = 30$
- $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k) = F_{Ga}[k|H_0] = \mathrm{pgamma}(30, \mathrm{shape} = 36, \mathrm{scale} = 1) = 0.15$
- $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k) = F_{Ga}[k|H_1] = \mathrm{pgamma}(30, \mathrm{shape} = 36, \mathrm{scale} = 1/2) = 0.99$

Esempio (Ber): modello bernoulliano

$X_i|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$

$$\lambda_{01}(\mathbf{x}_n) = \frac{\theta_0^{y_n}}{\theta_1^{y_n}} \frac{(1-\theta_0)^{n-y_n}}{(1-\theta_1)^{n-y_n}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{y_n} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-y_n} .$$

dove $y_n = \sum_{i=1}^n x_i$

- **I caso**: $\theta_0 > \theta_1$. La precedente espressione è il prodotto di due funzioni non decrescenti di y_n e quindi

$$A = \left\{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; y_n > k'\right\}.$$

Il test di ampiezza α si ottiene imponendo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R_{\overline{x}_n}) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(Y_n \leq k'\right) = \alpha \Leftrightarrow k' = q_\alpha(n, \theta_0)$$

dove $q_\alpha(n, \theta_0)$ è il percentile di livello α di una v.a. $\text{Bin}(n, \theta_0)$.

- **II caso**: $\theta_0 < \theta_1$. La precedente espressione è il prodotto di due funzioni non crescenti di y_n e quindi

$$A = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ y_n < k' \right\}.$$

Il test di ampiezza α si ottiene imponendo che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R_{\overline{x}_n}) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(Y_n \geq k'\right) = \alpha \Leftrightarrow k' = q_{1-\alpha}(n, \theta_0)$$

dove $q_{1-\alpha}(n, \theta_0)$ è il percentile di livello $1-\alpha$ di una v.a. $\mathrm{Bin}(n, \theta_0)$.

Osservazione
La v.a. Y_n una $\mathrm{Bin}(n, \theta_0)$ (discreta), il valore di α non può essere un qualsiasi valore in $(0, 1)$, come avviene invece nel caso di statistiche test che sono v.a. assolutamente continue.

Esempio (Ber) (cont.)

Problema inverso

- $H_0: \theta = 0.2$ vs. $H_1: \theta = 0.4$ $(\Rightarrow$ caso II)
- $R = \{\mathbf{x}_n : \sum_{i=1}^n x_i \geq k\}$
- Determinare α, β e $1-\beta$ per $n = 4$ e $k = 2$
- $\sum_{i=1}^n X_i|\theta_0 \sim \text{Binom}(n, \theta_0)$ $\sum_{i=1}^n X_i|\theta_1 \sim \text{Binom}(n, \theta_1)$
- $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^4 X_i \geq 2) = 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^4 X_i < 2) =$ $1 -$ `sum(dbinom(0:1,size=4,prob=0.2))` $=$ `sum(dbinom(2:4,size=4,prob=0.2))` $= 0.18$
- $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R) =$ `sum(dbinom(2:4,size=4,prob=0.4))` $= 0.52$
- $\beta = 0.48$

Esempio (Ber) (cont.)

Uso approssimazione asintotica

I caso: $\theta_0 > \theta_1$

Abbiamo visto che

$$R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k\} = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \overline{X}_n \leq k \}$$

Possiamo usare la distribuzione asintotica di $\sum_{i=1}^{n} X_i$ o di $\overline{X}_n$ sotto H_0 e H_1 per ottenere un test asintotico:

$$\left.\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\right| H_0 \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad \left.\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_1)}{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}\right| H_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$$

1 - Determinazione di $\widetilde{k}_\alpha$: vogliamo k tale che

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\overline{X}_n \le k) = \alpha$$

Ma

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\overline{X}_n \le k) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}} \le \frac{\sqrt{n}(k - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\right)$$

Ora[4],

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\right) = \alpha \iff \frac{\sqrt{n}(k - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}} = z_\alpha$$

ovvero se

$$k = \theta_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}} = \widetilde{k}_\alpha$$

Quindi

$$\widetilde{R} = \left\{\mathbf{x}_n :\ \overline{x}_n \le \widetilde{k}_\alpha\right\}$$

[4] Ricorda che se $F(\cdot)$ è una funzione di ripartizione, allora $F(x) = \epsilon \Leftrightarrow x = q_\epsilon$.

2 - Determinazione della potenza del test (approssimata)

$$1-\beta = \mathbb{P}_{\theta_1}(R) \simeq \mathbb{P}_{\theta_1}\left(\overline{X}_n \leq \widetilde{k}_\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\widetilde{k}_\alpha - \theta_1)}{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}\right) = 1-\widetilde{\beta}$$

II caso: $\theta_0 < \theta_1$

Si svolge in modo analogo

Ipotesi composte

- **modello statistico**

$$\{\mathcal{X}^n, f_n(\mathbf{x}_n;\theta), \theta \in \Theta\}$$

- **partizione spazio parametrico**

$$\Theta = \{\Theta_0, \Theta_1\} \quad \text{tale che} \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \qquad \text{e} \qquad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

- **due ipotesi**

$$H_0:\ \theta \in \Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1:\ \theta \in \Theta_1$$

  - H_0: ipotesi nulla
  - H_1: ipotesi alternativa

- **Obiettivo**
  scegliere tra H_0 e H_1 usando i dati osservati $\mathbf{x}_n$

Sistemi di ipotesi

- **Sistemi di ipotesi unilaterali (one-sided)**

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \qquad (A1)$$

oppure

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \qquad (B1)$$

- **Sistemi con H_0 puntuale e H_1 unilaterale (one-sided)**

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \qquad (A2)$$

oppure

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \qquad (B2)$$

- **Sistemi con H_0 semplice e H_1 bilaterale**

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0 \qquad\qquad (C)$$

- **Sistemi con ipotesi intervallari**

$$H_0: \ \theta \in [\theta_0, \theta_1] \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \notin [\theta_0, \theta_1]$$

Osservazioni

Sostanzialmente possiamo dividerli in base a H_1, come segue:

- A$=$ A1 $+$ A2 $\quad \rightsquigarrow \ H_1 : \theta > \theta_0$
- B$=$ B1 $+$ B2 $\quad \rightsquigarrow \ H_1 : \theta < \theta_0$
- C $\quad \rightsquigarrow \ H_1 : \theta \neq \theta_0$

Probabilità degli errori associati a un test

In generale, dati $W(\mathbf{X}_n)$, A_W e R_W

- **funzione di probabilità di errore di I tipo**

$$\alpha(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R; H_0) = \int_R f_n(\mathbf{x}_n; \theta) d\mathbf{x}_n, \quad \theta \in \Theta_0$$

(probabilità di **rifiutare** H_0 quando questa è **vera**)

- **funzione di probabilità di errore di II tipo**

$$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(A; H_1) = \int_A f_n(\mathbf{x}_n; \theta) d\mathbf{x}_n, \quad \theta \in \Theta_1$$

(probabilità di **accettare** H_0 quando questa è **falsa**)

Funzione di potenza del test

Definizione

Dato il sistema di ipotesi

$$H_0: \ \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \in \Theta_1$$

e il campione $\mathbf{X}_n$, si chiama **funzione di potenza** del test (A, R) la funzione

$$\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta(\mathbf{X}_n \in R) = \begin{cases} \alpha(\theta) & \theta \in \Theta_0 \\ 1 - \beta(\theta) & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

Osservazioni

- $\eta(\theta)$, $\alpha(\theta)$ e $\beta(\theta)$ sono funzioni di θ

- si calcolano con la distribuzione campionaria di $\mathbf{X}_n$ (o di $W(\mathbf{X}_n)$) e quindi funzioni di θ

- Nel caso in cui le X_I sono assolutamente continue

$$\eta(\theta) = \int_R f_n(\mathbf{x}_n; \theta) d\mathbf{x}_n, \qquad \theta \in \Theta$$

$$\alpha(\theta) = \int_R f_n(\mathbf{x}_n; \theta) d\mathbf{x}_n, \qquad \theta \in \Theta_0$$

$$\beta(\theta) = \int_A f_n(\mathbf{x}_n; \theta) d\mathbf{x}_n, \qquad \theta \in \Theta_1$$

Osservazioni

Nel caso di ipotesi semplici

$$\eta(\theta) = \begin{cases} \alpha & \theta = \theta_0 \\ 1-\beta & \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Nota bene: nel caso di ipotesi semplici si chiama potenza del test la quantità $1-\beta$

Funzione di potenza del **test ideale**:

$$\eta_{id}(\theta) = 1_{\Theta_1}(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \in \Theta_0 \\ 1 & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

Ampiezza e livello di un test

Fissato $\alpha \in (0,1)$, un test (A, R) con funzione di potenza $\eta(\cdot)$
- è di **ampiezza** α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \eta(\theta) = \sup \alpha(\theta) = \alpha.$$

- è di **livello** α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \eta(\theta) = \sup \alpha(\theta) \leq \alpha.$$

Osservazioni

- ampiezza del test: massimo valore della probabilità di errore di **I** tipo
- v.a. assolutamente continue: test di ampiezza esiste $\forall \alpha \in (0, 1)$
- v.a. discrete: non è possibile garantire ampiezza $\forall \alpha \in (0, 1)$

$\Rightarrow$ si garantisce il **livello** di un test.

Importante

nel seguito consideriamo sempre test di **ampiezza** α

Implementazione di un test (ipotesi composte)

4 passi

1. trovare $W(\mathbf{X}_n)$
2. individuare le *generiche* regioni A e R
3. individuare le *specifiche* regioni A e R
   - fissare $\alpha \in (0, 1)$
   - imporre che il test abbia **ampiezza** α, ovvero:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \eta(\theta) = \alpha$$

4. estrarre il campione $\mathbf{x}_n$
   - se $W(\mathbf{x}_n) \in A$ si accetta H_0
   - se $W(\mathbf{x}_n) \in R$ si rifiuta H_0

Test del rapporto delle verosimiglianze massimizzate

Definizione. Dato il sistema di ipotesi

$$H_0 : \ \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta \in \Theta_1$$

- il **test rvm** si basa sulle regioni

  $$A = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) \geq k\} \qquad R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) < k\}$$

  dove

  $$\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x}_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}_n)},$$

  $L(\theta; \mathbf{x}_n)$ è la fdv di θ associata al campione $\mathbf{x}_n$ e $k \in [0, 1]$.

- Il valore k_α per il test rvm di **ampiezza** α si ottiene imponendo

  $$\sup_{\theta \in \Theta_0} \eta(\theta) = \alpha,$$

Osservazioni

- Generalizzazione intuitiva del test del RV per ipotesi semplici
- $\lambda_{01}^{m}(\mathbf{x}_n) \in [0,1], \qquad \lambda_{01}(\mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{+}$
- Porta ad A e R definite attraverso $T(\mathbf{x}_n)$ sufficienti e/o $\widehat{\theta}_{mv}$
- proprietà ottimali (come vedremo, a seconda della tipologia di test)
- analiticamente semplice per il caso C:

$$\lambda_{01}^{m}(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\theta_0; \mathbf{x}_n)}{L(\widehat{\theta}_{mv}; \mathbf{x}_n)}$$

- meno semplici analiticamente i casi A e B

Esempio (N1): modello normale, sistema tipo A

$X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 noto

Consideriamo il sistema di ipotesi unilaterale [5]

$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

- $\widehat{\theta}_{mv} = \overline{x}_n$
- $L(\theta; \mathbf{x}_n) \propto \exp\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \overline{x}_n)^2\}$
- $\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x}_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}_n)} = \frac{\sup_{\theta \leq \theta_0} L(\theta; \mathbf{x}_n)}{L(\widehat{\theta}_{mv}; \mathbf{x}_n)} = \frac{\sup_{\theta \leq \theta_0} L(\theta; \mathbf{x}_n)}{1}.$
- si verifica che (vedi p. 196)

$$\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) < k \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_n > k'$$

[5] **Importante**: risultati uguali se si considera $H_0 : \theta = \theta_0, \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0.$

- $R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \overline{x}_n > k'\}$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta(\overline{X}_n > k') = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k'-\theta)}{\sigma}\right).$
- $\eta(\theta)$ crescente in $\theta \implies \sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0).$
- $\sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k'-\theta_0)}{\sigma}\right) = \alpha$
- $\eta(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k'-\theta_0)}{\sigma}\right) = \alpha \iff \frac{\sqrt{n}(k'-\theta_0)}{\sigma} = z_{1-\alpha}$
- $k'_\alpha = \theta_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $R = \left\{\mathbf{x}_n : \overline{x}_n > \theta_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$
- $R = \left\{\mathbf{x}_n : W(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} > z_{1-\alpha}\right\}$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right)$

Regione di rifiuto test Tipo A

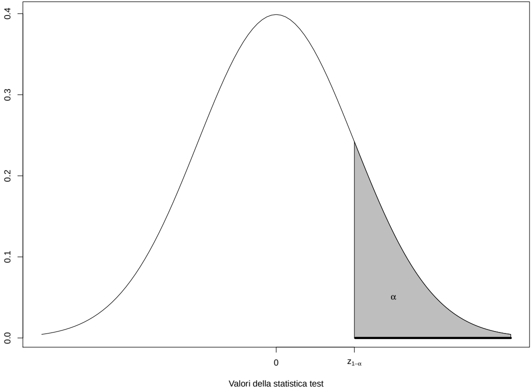

Figura: Caso A $H_1 : \theta \geq \theta_0$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

Esempio (N1): modello normale, sistema tipo B

$X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 noto

Consideriamo il sistema di ipotesi unilaterale [6]

$$H_0 : \theta \geq \theta_0, \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta < \theta_0.$$

In modo del tutto analogo

- $R = \left\{ \mathbf{x}_n : \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} < z_\alpha \right\}$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma} \right)$
- $W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$

[6] **Importante**: risultati uguali se si considera $H_0 : \theta = \theta_0, \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0$.

Regione di rifiuto test Tipo B

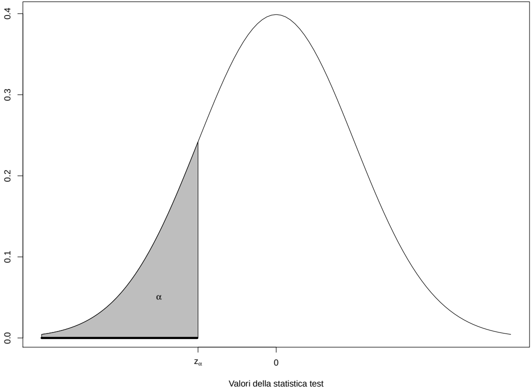

Figura: Caso B. $H_1 : \theta < \theta_0$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

... qualche dettaglio ...

- $\lambda_{01}^{m}(\mathbf{x}_n) < k \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_n < k'$
- $R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \overline{x}_n < k'\}$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta\,(R) = \mathbb{P}_\theta(\overline{X}_n < k') = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k'-\theta)}{\sigma}\right)$
- $\eta(\theta)$ decrescente in $\theta \implies \sup_{\theta>\theta_0}\eta(\theta) = \eta(\theta_0)$
- $\sup_{\theta>\theta_0}\eta(\theta) = \eta(\theta_0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k'-\theta_0)}{\sigma}\right) = \alpha$
- $\eta(\theta_0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k'-\theta_0)}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{n}(k'-\theta_0)}{\sigma} = z_\alpha$
- $k'_\alpha = \theta_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $R = \left\{\mathbf{x}_n : \overline{x}_n < \theta_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\mathbf{x}_n : W(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)}{\sigma} < z_\alpha\right\}$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta)}{\sigma}\right)$

Esempio (N1): modello normale, sistema tipo C

$X_i|\theta \sim \mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 noto

Consideriamo il sistema di ipotesi bilaterale

$$H_0 : \ \theta = \theta_0, \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta \neq \theta_0.$$

In questo caso

$$\lambda_{01}^m = \frac{L(\theta_0; \mathbf{x}_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}_n)} = \overline{L}(\theta_0; \mathbf{x}_n) = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta_0 - \overline{x}_n)^2\right\}$$

Quindi

$$\lambda_{01}^m \geq k \quad \Leftrightarrow \quad \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x}_n - \theta_0)^2\right\} \geq k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(\overline{x}_n - \theta_0)^2}{\sigma^2} \leq k'$$

Ma

$$\frac{n(\overline{x}_n - \theta_0)^2}{\sigma^2} \leq k' \;\Leftrightarrow\; -k'' \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} \leq k'' \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{n}|\overline{x}_n - \theta_0|}{\sigma} < k''$$

Quindi

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; -k'' \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} \leq k'' \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; |W(\mathbf{x}_n)| < k'' \right\}, \end{aligned}$$

dove

$$W(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}.$$

Determinazione di k_α

Per avere il test di ampiezza α devo determinare k_α tale che

$$\eta(\theta_0) = \alpha$$

Osserva che, per k generico,

$$\eta(\theta_0) = \mathbb{P}_{\theta_0}[R] = 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}[A] = 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}\left[-k < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \theta_0) < k.\right]$$

Ricordando che, sotto H_0,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \theta_0) = Z \sim \mathrm{N}(0,1),$$

dobbiamo quindi determinare il k_α tale che

$$1 - \mathbb{P}_{\theta_0}\left[-k_\alpha < Z < k_\alpha\right] = \alpha$$

e questo è necessariamente

$$k_\alpha = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Regione di rifiuto test Tipo C

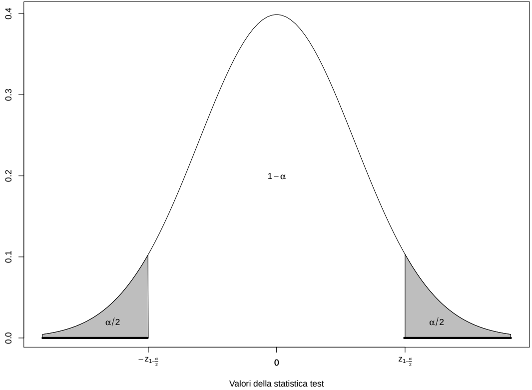

Figura: Caso C. $H_1 : \theta \neq \theta_0$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

Esempio (N1): schema riassuntivo

Confronto tra ipotesi composte, modello N(θ, σ^2), σ^2 nota

Tipo	H_0	H_1	condiz. di rif. di H_0
A	$\theta \leq (=)\, \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$W(\mathbf{x}_n) > z_{1-\alpha}$
B	$\theta \geq (=)\, \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$W(\mathbf{x}_n) < z_{\alpha}$
C	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$\lvert W(\mathbf{x}_n)\rvert > \lvert z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rvert$

$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$

Osservazioni

- La statistica test è sempre $W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$
- A ed R cambiano a seconda del sistema di ipotesi
- Struttura di R coerente con H_1
- Regioni A ed R dei sistemi di ipotesi A e B coincidono con quelle del caso delle ipotesi puntuali (I caso e II caso)
  - ipotesi semplici $\theta_0 < \theta_1 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \ \theta > \theta_0$ (one-sided tipo A)
  - ipotesi semplici $\theta_0 > \theta_1 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \ \theta < \theta_0$ (one-sided tipo B)
- A ed R definite attraverso (funzioni di) statistiche sufficienti / smv

Regione di rifiuto test Tipo A

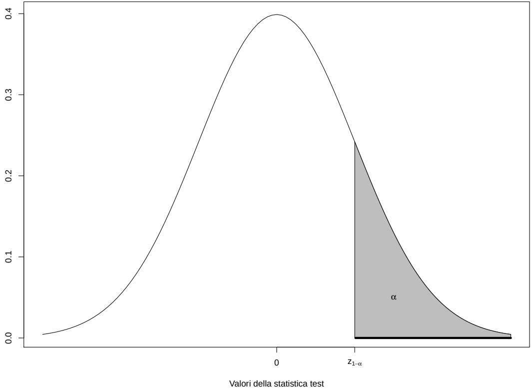

Figura: Caso A $H_1 : \theta > \theta_0$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

Regione di rifiuto test Tipo B

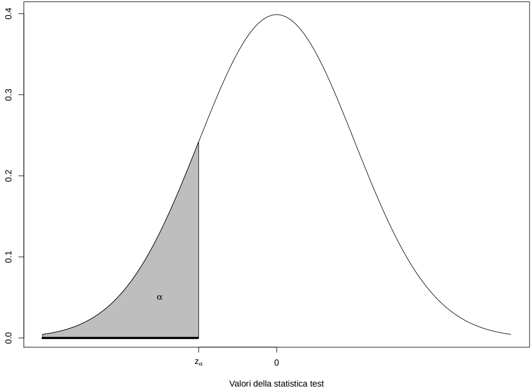

Figura: Caso B. $H_1 : \theta < \theta_0$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

Regione di rifiuto test Tipo C

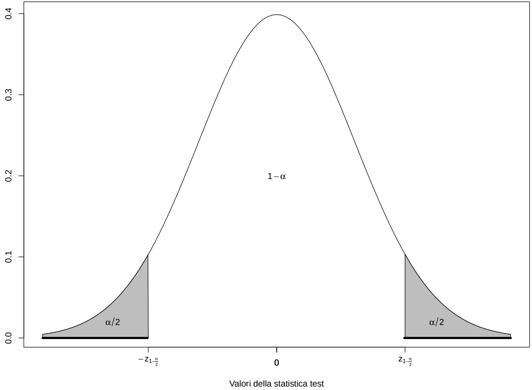

Figura: Caso C. $H_1 : \theta \neq \theta_0$ - Grafico della funzione di densità di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto H_0. In neretto (in ascissa) è evidenziata la regione di rifiuto R del test

Funzioni di potenza nei 3 casi (N1)

per i test di ampiezza α

Sistema ipotesi A

$$\eta(\theta) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma}\right)$$

Sistema ipotesi B

$$\eta(\theta) = \Phi\left(z_{\alpha} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma}\right)$$

Sistema ipotesi C

$$\eta(\theta) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]$$

Valore-p

p-value / livello di significatività osservato – caso H_0 semplice

- Il test classico (di Neyman-Pearson) non prevede una quantificazione della **misura dell'evidenza** a favore/contro H_0 basata sul campione osservato $\mathbf{x}_n$
- Accettazione/rifiuto: regola dicotomica
- Valore numerico della statistica test

$$W(\mathbf{x}_n) = w.oss$$

  dà della **forza** di accettazione rifiuto, ma la scala di misurazione dipende dal tipo di ipotesi
- **Idea**: definire una probabilità $p(\mathbf{x}_n)$ (dipendente da $\mathbf{x}_n$) tale che
  - $p(\mathbf{x}_n)$ piccola $\Longrightarrow$ evidenza contro H_0
  - $p(\mathbf{x}_n)$ grande $\Longrightarrow$ evidenza a favore H_0
- **Vantaggi**: (a) $p(\mathbf{x}_n)$ dipende da $\mathbf{x}_n$; (b) $p(\mathbf{x}_n) \in [0, 1]$

Esempio (N1): modello normale, sistema ipotesi A

Consideriamo il sistema di ipotesi

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \ \theta > \theta_0$$

In questo caso, per un campione osservato $\mathbf{x}_n$, si rifiuta H_0 se

$$W(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} > z_{1-\alpha}$$

Se indico con $w.oss = W(\mathbf{x}_n)$, abbiamo che

$$\begin{array}{lclcl} w.oss & > & z_{1-\alpha} & \Longrightarrow & \text{rifiuto } H_0 \\ w.oss & < & z_{1-\alpha} & \Longrightarrow & \text{accetto } H_0 \end{array}$$

Idea: quanto più a **destra** di $z_{1-\alpha}$ si trova $w.oss$, tanto più fortemente possiamo **rifiutare** H_0: vedi grafici in R

Possiamo allora misurare la forza con cui rifiutiamo H_0 con il campione $\mathbf{x}_n$ con la probabilità della semiretta a destra di $w.oss$:

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(W(\mathbf{X}_n) > w.oss\right)$$

Con riferimento alle regioni A ed R del test di ampiezza α

$$\begin{aligned} w.oss \in A \qquad &\Longleftrightarrow \qquad p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) > \alpha \\ w.oss \in R \qquad &\Longleftrightarrow \qquad p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha \end{aligned}$$

Quindi, effettivamente

$$\begin{aligned} p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) \ \text{grande} \qquad &\Longrightarrow \qquad \text{accetto} \ \ H_0 \\ p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) \ \text{piccolo} \qquad &\Longrightarrow \qquad \text{rifiuto} \ \ H_0 \end{aligned}$$

Ricordando che

$$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}\Bigg| H_0 \sim \mathrm{N}(0,1)$$

abbiamo allora che, per il sistema di ipotesi di tipo A,

$$\begin{aligned} p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(W(\mathbf{X}_n) > w.oss\right) \\ &= 1 - \Phi(w.oss) \end{aligned}$$

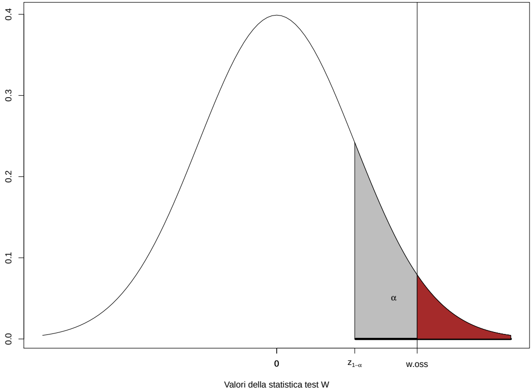

Figura: P-value per test one-sided - Caso A: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_0 : \theta > \theta_0$. In grigio chiaro l'ampiezza del test, pari ad α, in marrone il p-value. In questo caso si rifiuta l'ipotesi nulla poichè $p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha$.

Esempio (N1): modello normale, sistema ipotesi B

Consideriamo il sistema di ipotesi

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \ \theta < \theta_0$$

In questo caso, per un campione osservato $\mathbf{x}_n$, si rifiuta H_0 se

$$W(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma} < z_\alpha$$

Se indico con $w.oss = W(\mathbf{x}_n)$, abbiamo che

$$\begin{array}{lllll} w.oss & < & z_\alpha & \Longrightarrow & \text{rifiuto } H_0 \\ w.oss & > & z_\alpha & \Longrightarrow & \text{accetto } H_0 \end{array}$$

Idea: quanto più a **sinistra** di z_α si trova $w.oss$, tanto più fortemente possiamo **rifiutare** H_0: vedi grafici in `R`

In questo caso

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}(W(\mathbf{X}_n) < w.oss)$$

e quindi, ricordando che

$$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma}\Bigg| H_0 \sim \mathrm{N}(0,1)$$

abbiamo allora che, per il sistema di ipotesi di tipo B,

$$\begin{aligned} p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(W(\mathbf{X}_n) < w.oss\right) \\ &= \Phi(w.oss) \end{aligned}$$

Anche in questo caso
Con riferimento alle regioni A ed R del test di ampiezza α

$$w.oss \in A \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) > \alpha$$
$$w.oss \in R \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha$$

Quindi, effettivamente

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) \text{ grande} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{accetto } H_0$$
$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) \text{ piccolo} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{rifiuto } H_0$$

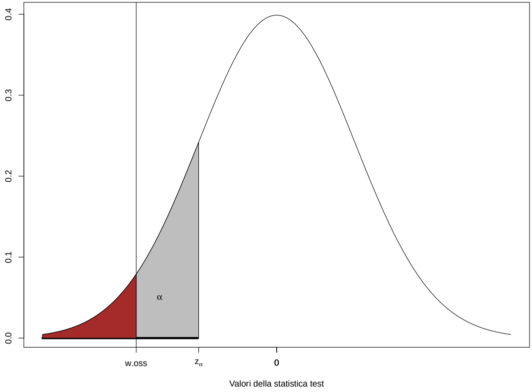

Figura: P-value per test one-sided - Caso B: $H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_0: \theta < \theta_0$. In grigio chiaro l'ampiezza del test, pari ad α, in marrone il p-value. In questo caso si rifiuta l'ipotesi nulla poichè $p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha$.

Esempio (N1): modello normale, sistema ipotesi C

Consideriamo il sistema di ipotesi con H_1 bilaterale

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \ \theta \neq \theta_0$$

In questo caso, per un campione osservato $\mathbf{x}_n$, si rifiuta H_0 se

$$|W(\mathbf{x}_n)| = \frac{\sqrt{n}|\overline{x}_n - \theta_0|}{\sigma} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Se indico con $w.oss = W(\mathbf{x}_n)$, abbiamo che

$$\begin{array}{lclcl} |w.oss| & > & z_{1-\frac{\alpha}{2}} & \Longrightarrow & \text{rifiuto } H_0 \\ |w.oss| & < & z_{1-\frac{\alpha}{2}} & \Longrightarrow & \text{accetto } H_0 \end{array}$$

Idea: quanto più a **sinistra** di $-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o a **destra** di $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ si trova $w.oss$, tanto più fortemente possiamo **rifiutare** H_0: vedi grafici in `R`

In questo caso

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}(|W(\mathbf{X}_n)| > |w.oss|)$$

e quindi, ricordando che

$$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}\Big| H_0 \sim \mathrm{N}(0,1)$$

abbiamo allora che, per il sistema di ipotesi di tipo C,

$$\begin{aligned}
p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(|W(\mathbf{X}_n)| > |w.oss|\right)\\
&= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(W(\mathbf{X}_n) < -|w.oss|\right) + \mathbb{P}_{\theta_0}\left(W(\mathbf{X}_n) > |w.oss|\right)\\
&= 2[1 - \Phi(|w.oss|)]\\
&= 2\Phi(-|w.oss|)
\end{aligned}$$

In questo caso il p-value è somma delle probabilità delle code

Come per i casi A e B, con riferimento alle regioni A ed R del test di ampiezza α

$$\begin{array}{ccc} w.oss \in A & \iff & p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) > \alpha \\ w.oss \in R & \iff & p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha \end{array}$$

Quindi, effettivamente

$$\begin{array}{ccc} p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n)\ \text{grande} & \Longrightarrow & \text{accetto}\ \ H_0 \\ p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n)\ \text{piccolo} & \Longrightarrow & \text{rifiuto}\ \ H_0 \end{array}$$

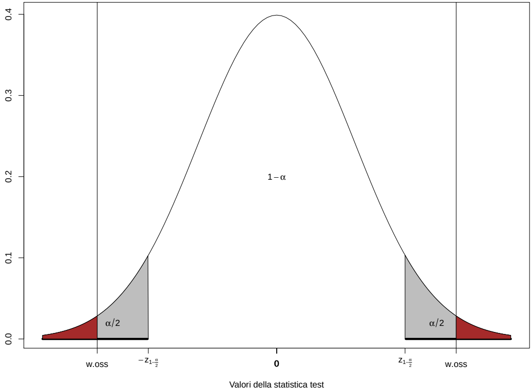

Figura: P-value per test two-sided - Caso C: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_0 : \theta \neq \theta_0$. In grigio chiaro l'ampiezza del test, pari ad α, in marrone il p-value. In questo caso si rifiuta l'ipotesi nulla poichè $p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha$.

Esempio (N1): schema riassuntivo

p-value H_0 semplice modello $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 nota

Tipo	H_0	H_1	rifiuto H_0	p-value
A	$\theta = \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$w.oss > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi(w.oss)$
B	$\theta = \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$w.oss < z_{\alpha}$	$\Phi(w.oss)$
C	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$\lvert w.oss \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2\Phi(-\lvert w.oss \rvert)$

$$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \qquad w.oss = W(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$$

Generalizzazione

In generale, se F_{θ_0} la funzione di ripartizione di $W(\mathbf{X}_n)$ sotto $H_0 : \theta = \theta_0$ e $W(\mathbf{x}_n) = w.oss$

1. Ipotesi tipo A con $R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; w.oss > \xi\}$, allora

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}[W(\mathbf{X}_n) > w.oss] = 1 - F_{\theta_0}(w.oss)$$

2. Ipotesi tipo B con $R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; w.oss < \xi\}$, allora

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}[W(\mathbf{X}_n) < w.oss] = F_{\theta_0}(w.oss)$$

3. Ipotesi tipo C con $R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; W(\mathbf{x}_n) < -\xi \text{ oppure } w.oss > \xi\}$, allora

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}[|W(\mathbf{X}_n)| > |w.oss] = 2F_{\theta_0}(-|w.oss|)$$

Schema riassuntivo

$$W(\mathbf{X}_n)\Big|\theta_0 \sim F_{\theta_0} \qquad w.oss = W(\mathbf{x}_n)$$

Tipo	H_0	H_1	rifiuto H_0	p-value
A	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$w.oss > q_{1-\alpha}$	$1 - F_{\theta_0}(w.oss)$
B	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$w.oss < q_{\alpha}$	$F_{\theta_0}(w.oss)$
C	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$\lvert w.oss\rvert > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2F_{\theta_0}(-\lvert w.oss\rvert)$

P-value per ipotesi nulla composta

Se $H_0 : \theta \in \Theta_0$,

$$p(\mathbf{x}_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(\mathbf{x}_n)$$

Il valore-p è quindi la massima evidenza (al variare di θ che varia in Θ_0) che il campione dà a favore di H_0.

Osservazione

Nel caso del modello $N(0, 1)$ si verifica[7] per i sistemi A e B che

$$p(\mathbf{x}_n) \quad = \quad \sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(\mathbf{x}_n) = p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n)$$

[7] Vedi Es. 6.27, pag. 202-3

Uso pratico del p-value

In generale: non serve determinare il test di ampiezza α per usare il p-value

Idea:

- $p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n)$ **piccolo** $\Longrightarrow$ rifiuto H_0
- $p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n)$ grande $\Longrightarrow$ accetto H_0

Cosa vuol dire grande e piccolo $\rightsquigarrow$ convenzionale

In pratica, si confronta $p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n)$ con i valori α standard:

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) < \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x}_n \in R_\alpha$$

e

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) \geq \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x}_n \in A_\alpha$$

Ottimalità: test uniformemente più potenti

UMP: Uniformly Most Powerful

Generalizzazione concetto di ottimalità visto per ipotesi semplici.
Ricorda: $\eta(\theta)$ funzione di θ

Definizione. Dato il sistema di ipotesi composte

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

il test W^*, con funzione di potenza η_{W^*}, si dice **uniformemente più potente** (UMP) di ampiezza α se

(a) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \eta_{W^*}(\theta) = \alpha$

(b) $\eta_{W^*}(\theta) \geq \eta_W(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1$

per ogni test W di ampiezza $\alpha' \leq \alpha$ con funzione di potenza η_W.

Osservazioni

- $\eta_{W^*}(\theta)$ deve avere valori più alti di $\eta_W(\theta)$ massima nella **regione di rifiuto** di H_0 (in Θ_1)
- In Θ_0 W^* può essere anche peggiore di un altro test, purchè $\eta_{W^*}(\theta) \leq \alpha \ \forall\theta \in \Theta_0$
- Esistenza: assicurata (abbastanza in generale) per test one-sided (sistemi A e B)
- Esistenza: assicurata per per test one-sided (sistemi A e B) nel caso di **famiglie esponenziali uniparamatriche**

Rapporto delle verosimiglianze monotono

Definizione

Il modello statistico $\{\mathcal{X}^n, f_n(\mathbf{x}_n;\theta), \theta \in \Theta\}$ (con $\Theta \subseteq \mathbb{R}^1$) ha **rapporto delle verosimiglianze monotono** se esiste una statistica T con valori in $\mathbb{R}^1$ tale che, comunque fissati $\theta_1 < \theta_2$, si ha:

$$\frac{L(\theta_2\ \mathbf{x}_n)}{L(\theta_1;\mathbf{x}_n)} = \frac{f_n(\mathbf{x}_n;\theta_2)}{f_n(\mathbf{x}_n;\theta_1)} = \varphi\left[T(\mathbf{x}_n)\right],$$

dove $\varphi(\cdot)$ è una funzione **monotona non decrescente**.

Osservazione

In genere: $T(\mathbf{x}_n)$ è una statistica sufficiente del modello

Teorema di Karlin-Rubin

Se il modello statistico $\{\mathcal{X}^n, f_n(\mathbf{x}_n; \theta), \theta \in \Theta\}$ (con $\Theta \subseteq \mathbb{R}^1$) ha il rapporto delle verosimiglianze monotono rispetto a una statistica sufficiente T, allora
(a) la classe dei test per il confronto delle ipotesi unilaterali (**tipo A**)

$$H_0: \ \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta > \theta_0$$

basati sulla regione di rifiuto

$$R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ T(\mathbf{x}_n) \geq c\}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

è costituita da test **uniformemente più potenti** (di ampiezza dipendente dal valore c);

(b) la classe dei test per il confronto delle ipotesi unilaterali (**tipo B**)

$$H_0 : \ \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \ \theta < \theta_0$$

basati sulla regione di rifiuto

$$R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ T(\mathbf{x}_n) \leq c\}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

è costituita da test **uniformemente più potenti** (di ampiezza dipendente dal valore c).

Osservazioni

- I test trovati con λ_{01}^m per il modello normale (sistemi ipotesi A e B) sono di questo tipo
- Se so che un modello ha rapporto delle verosimiglianze monotono, non serve passare attraverso λ_{01}^m

Famiglie esponenziali e rv monotono

Teorema

Un modello statistico uniparametrico che sia famiglia esponenziale con

$$f_X(x;\theta) = h(x)\exp\{\omega(\theta)T(x) - B(\theta)\}$$

ha il rapporto delle verosimiglianze monotono rispetto alla statistica sufficiente $T_n(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ se $w(\cdot)$ è una funzione non decrescente positiva.

Dimostrazione

Nel caso di una campione casuale si ha che

$$f_n(\mathbf{x}_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) = h_n(\mathbf{x}_n)\exp\{\omega(\theta)T_n(\mathbf{x}_n) - B_n(\theta)\},$$

dove

$$h_n(\mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i) \quad T_n(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \quad B_n(\theta) = nB(\theta)$$

Per ogni coppia di valori θ_1, θ_2 tale che $\theta_1 < \theta_2$ si ha quindi che

$$\frac{f_n(\mathbf{x}_n;\theta_2)}{f_n(\mathbf{x}_n;\theta_1)} = \exp\{T_n(\mathbf{x}_n)[\omega(\theta_2) - \omega(\theta_1)] - B_n(\theta_2) + B_n(\theta_1)\}$$

che è funzione non decrescente di T_n se $\omega(\cdot)$ è crescente e positiva.

Esempio normale (N1) - A e B

In questo caso:

- si verifica facilmente che il modello (indipendentemente dalle ipotesi) ha rapporto delle verosimiglianze monotono in $\overline{X}_n$;
- di conseguenza le regioni di accettazione e di rifiuto generiche per i sistemi A e B coincidono con quelle trovate con il test λ_{01}^m (che è quindi un test UMP);
- l'imposizione dell'ampiezza α porta a regioni di accettazione e di rifiuto specifiche per i sistemi A e B che coincidono con quelle trovate con il test λ_{01}^m si ampiezza α (che è quindi UMP di ampiezza α).

Test UMPU (uniformly most powerful unbiased)

- Teorema K-R: solo per ipotesi one-sided
- si verifica che per il modello $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ non esiste test UMP per il sistema

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- esiste però test UMP in una sotto classe di test

Definizione

Dato un generico sistema di ipotesi composte
$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$, un test W di ampiezza α si dice **non distorto** se

$$\eta_W(\theta) \geq \alpha, \qquad \theta \in \Theta_1 \tag{6}$$

(ovvero: la $\mathbb{P}_\theta(R|H_1)$ mai inferiore a $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(R|H_0)$).

Test UMPU e famiglie esponenziali

Si può dimostrare che

- $\Theta \subseteq \mathbb{R}^1$
- $f_X(\cdot;\theta)$ famiglia esponenziale uniparametrica (con rv $\uparrow$ in T_n)
- $T_n(\mathbf{x}_n)$ statistica sufficiente (criterio fattorizzazione)

allora, presi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (con $c_1 < c_2$), la classe di test con

$$\begin{aligned} A &= \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; c_1 < T_n(\mathbf{x}_n) < c_2\} \\ R &= \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \; T_n(\mathbf{x}_n) \leq c_1 \quad \text{oppure} \quad T(\mathbf{x}_n) \geq c_2\} \end{aligned}$$

è costituita da test **uniformemente più potenti non distorti**, con ampiezza del test determinata dai valori scelti per c_1 e c_2.

Non distorsione nel caso di H_1 bilaterale

Nel caso del sistema di ipotesi

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$$

un test non distorto deve quindi avere un punto di minimo in $\theta = \theta_0$.

Se $\eta(\theta)$ continua, la condizione necessaria perchè $\eta_W(\theta)$ abbia minimo in θ_0

$$\frac{d}{d\theta}\eta_W(\theta) = 0 \quad \text{per } \theta = \theta_0.$$

Osservazione. Le costanti c_1 e c_2 per test di ampiezza α si determinano imponendo:

1. $\eta(\theta_0) = \alpha$
2. $\frac{d}{d\theta}\eta_W(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$

Esempio normale (N1) - C: test UMPU

$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$

Si ottiene il test di tipo C trovato con il rapporto delle verosimiglianze massimizzate, basato su

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n : \ \frac{\sqrt{n}|\overline{x}_n - \theta_0|}{\sigma} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

che è quindi UMPU$_\alpha$

Esempi

Vediamo alcuni esempi notevoli per i sistemi di ipotesi A, B e C.

- Per i sistemi di tipo A e B facciamo uso del teorema di KR.

- Per i ssitemi di tipo C facciamo uso del test λ_{01}^{m}.

Gli esempi che consideriamo sono i seguenti:

- N3 - A, B, C
- N4 - A, B, C (per analogia al caso N3)
- EN - A

Il caso N1 è stato considerato sopra.

Per altri casi si vedano le dispense (teoria ed esercizi) e gli esercizi d'esame.

Esempio (N3): $X_i|\theta \sim \mathsf{N}(\mu_0, \theta)$, μ_0 nota

Teorema di K-R e test λ_{01}^m

Abbiamo

- $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$
- $\frac{nS_0^2}{\theta} \sim \chi_n^2$
- $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{2\theta}\right\}$
- $L(\theta) \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2\theta}\right\}$
- $\frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right\}$
- $\theta_2 > \theta_1 \implies \frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)}$ crescente in S_0^2

Esempio (N3): sistema di ipotesi A

$H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$

- Teorema K-R $\implies$ $R = \{\mathbf{x}_n : \; S_0^2 > k\}, \quad k > 0$
- Condizione di ampiezza α: $\sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \alpha$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta(S_0^2 > k) = \mathbb{P}_\theta\left(\frac{nS_0^2}{\theta} > \frac{nk}{\theta}\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\chi_n^2 > \frac{nk}{\theta}\right) = 1 - F_{\chi_n^2}\left(\frac{nk}{\theta}\right)$
- $\eta(\theta) \uparrow$ con $\theta \implies \sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0)$
- $\sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0) = \alpha \iff \frac{nk}{\theta_0} = \chi^2_{n;1-\alpha} \iff k = \frac{\theta_0}{n}\chi^2_{n;1-\alpha}$
- Quindi

$$
\begin{aligned}
R_\alpha &= \left\{\mathbf{x}_n : \; S_0^2 > \frac{\theta_0}{n}\chi^2_{n;1-\alpha}\right\} \\
&= \left\{\mathbf{x}_n : \; \frac{nS_0^2}{\theta_0} > \chi^2_{n;1-\alpha}\right\}
\end{aligned}
$$

Esempio (N3): sistema di ipotesi A (cont.)

$H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$

Nota bene

- $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) = S_0^2$
- $W(\mathbf{X}_n) = \frac{nS_0^2}{\theta_0} = Q(\mathbf{X}_n, \theta_0)$
- test a coda destra (regione critica a destra)

P-value

Test a coda destra $\implies$

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\chi_n^2 > w.oss\right) = 1 - \texttt{pchisq (w.oss,df=n)}$$

dove $w.oss = W(\mathbf{x}_n) = Q(\mathbf{x}_n, \theta_0) = \frac{ns_0^2}{\theta_0}$

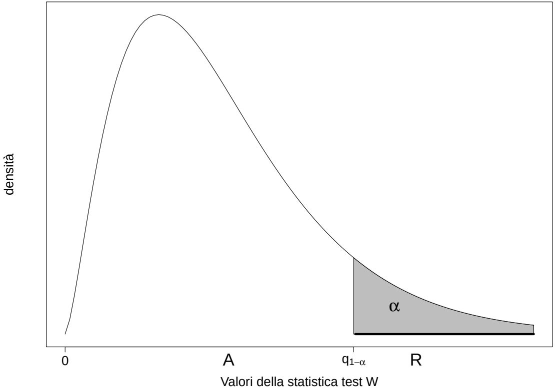

Figura: Test one-sided per varianza - Caso A: $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs. $H_0: \theta > \theta_0$.

Esempio (N3): sistema di ipotesi B

$H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$

- Teorema K-R $\implies$ $R = \{\mathbf{x}_n : \ S_0^2 < k\}, \quad k > 0$
- Condizione di ampiezza α: $\sup_{\theta \geq \theta_0} \eta(\theta) = \alpha$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta(S_0^2 < k) = \mathbb{P}_\theta\left(\frac{nS_0^2}{\theta} < \frac{nk}{\theta}\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\chi_n^2 < \frac{nk}{\theta}\right) = F_{\chi_n^2}\left(\frac{nk}{\theta}\right)$
- $\eta(\theta) \downarrow$ con $\theta \implies \sup_{\theta \geq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0)$
- $\sup_{\theta \geq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0) = \alpha \iff \frac{nk}{\theta_0} = \chi^2_{n;\alpha} \iff k = \frac{\theta_0}{n}\chi^2_{n;\alpha}$
- Quindi

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \left\{\mathbf{x}_n : \ S_0^2 < \frac{\theta_0}{n}\chi^2_{n;\alpha}\right\} \\ &= \left\{\mathbf{x}_n : \ \frac{nS_0^2}{\theta_0} < \chi^2_{n;\alpha}\right\} \end{aligned}$$

Esempio (N3): sistema di ipotesi B (cont.)

$H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$

Nota bene

- $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) = S_0^2$
- $W(\mathbf{X}_n) = \frac{nS_0^2}{\theta_0} = Q(\mathbf{X}_n, \theta_0)$
- test a coda sinistra (regione critica a sinistra)

P-value

Test a coda sinistra $\Longrightarrow$

$$p_{\theta_0}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{P}_\theta\left(\chi_n^2 < w.oss\right) = \texttt{pchisq (w.oss,df=n)}$$

dove $w.oss = W(\mathbf{x}_n) = Q(\mathbf{x}_n, \theta_0) = \frac{ns_0^2}{\theta_0}$

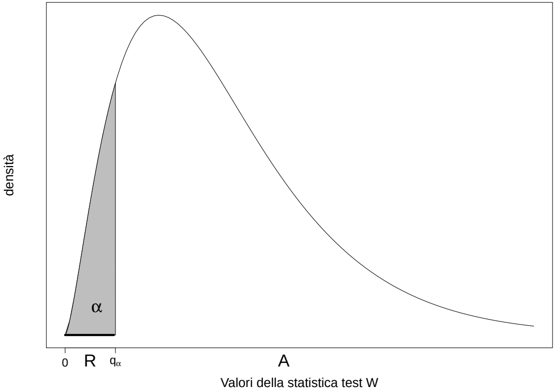

Figura: Test one-sided per varianza - Caso B: $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs. $H_0: \theta < \theta_0$.

Esempio (N3): sistema ipotesi C (bilaterale)

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$

- NO teorema di K-R; possiamo usare test del RVM
- $R = \{\mathbf{x}_n : \ \lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) < k\}, \quad k \in [0,1]$
- $L(\theta) \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2\theta}\right\}$
- $\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\theta_0)}{L(\widehat{\theta}_{mv})} = \left(\frac{\widehat{\theta}_{mv}}{\theta_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\widehat{\theta}_{mv}}\right)\right\}$
- $\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) = \left(\frac{S_0^2}{\theta_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2\theta_0} + \frac{n}{2}\right\}$
- $\lambda_{01}^m(S_0^2) = \left(\frac{1}{\theta_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\{\frac{n}{2}\}(S_0^2)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{nS_0^2}{2\theta_0}\right\}$

Esempio (N3): sistema ipotesi C (cont.)

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$

- Se pongo $y = S_0^2$, la funzione $\lambda_{01}^m(y)$ si comporta come $f(y) = ay^b e^{-cy}$ con $a, b, c > 0$
- Per $y > 0$, la funzione $f(y)$ assume valore zero in $y = 0$ e per y che tende a infinito; ha inoltre un punto di massimo $y^\star > 0$ [studiare la funzione]
- Ne consegue che $f(y) < k \iff y < k'$ oppure $y > k''$
- Tornando a $\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) < k$ abbiamo quindi che

$$A = \{\mathbf{x}_n : \; k' < S_0^2 < k''\} \quad \text{e} \quad R = \{\mathbf{x}_n : \; S_0^2 < k' \; \vee \; S_0^2 > k''\}$$

Esempio (N3): sistema ipotesi C (cont.)

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$

- condizione di ampiezza α: $\eta(\theta_0) = \alpha$
- funzione di potenza:

$$\begin{aligned}\eta(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(R) = 1 - \mathbb{P}_\theta(A) = 1 - \mathbb{P}_\theta(k' < S_0^2 < k'') \\ &= 1 - \mathbb{P}_\theta\left(k' < \frac{nS_0^2}{\theta} < k''\right)\end{aligned}$$

- $\eta(\theta_0) = \alpha \implies k' = \chi^2_{\alpha/2}, \quad k'' = \chi^2_{1-\alpha/2}$
- $A_\alpha = \{\mathbf{x}_n : \ \chi^2_{n;\alpha/2} < S_0^2 < \chi^2_{n;1-\alpha/2}\}$
- $R_\alpha = \{\mathbf{x}_n : \ S_0^2 < \chi^2_{n;\alpha/2} \ \vee \ S_0^2 > \chi^2_{n;1-\alpha/2}\}$
- P-value: definizione non pacifica per test a due code con W a distribuzione non simmetrica sotto H_0

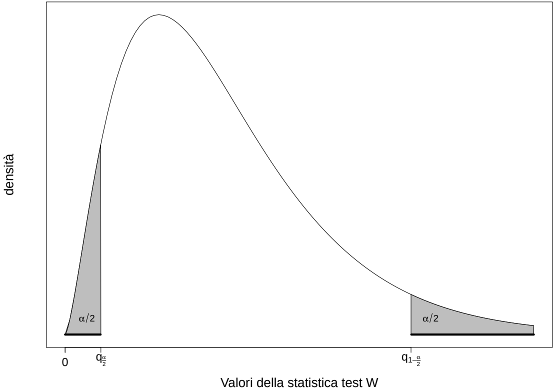

Figura: Test two-sided per varianza - Caso C: $H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_0: \theta \neq \theta_0$.

Esempio (N3): schema riassuntivo

valore atteso noto

$$W(\mathbf{X}_n) = Q(\mathbf{X}_n; \theta_0) = \frac{nS_0^2}{\theta_0} \Bigg| H_0 \sim \chi^2_n \qquad w.oss = W(\mathbf{x}_n)$$

Tipo	H_0	H_1	rifiuto H_0	p-value
A	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$w.oss > \chi^2_{n;1-\alpha}$	$1 - F_{\chi^2_n}(w.oss)$
B	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$w.oss < \chi^2_{n;\alpha}$	$F_{\chi^2_n}(w.oss)$
C	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$w.oss < \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$ oppure $w.oss > \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$	$\dots$

Esempio (N4): schema riassuntivo

valore atteso incognito

Per analogia al caso N3 si ha:

$$W(\mathbf{X}_n) = Q(\mathbf{X}_n; \theta_0) = \frac{(n-1)S_n^2}{\theta_0} \Bigg| H_0 \sim \chi^2_{n-1} \qquad w.oss = W(\mathbf{x}_n)$$

Tipo	H_0	H_1	rifiuto H_0	p-value
A	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$w.oss > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$	$1 - F_{\chi^2_{n-1}}(w.oss)$
B	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$w.oss < \chi^2_{n-1;\alpha}$	$F_{\chi^2_{n-1}}(w.oss)$
C	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$w.oss < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ oppure $w.oss > \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$	...

Esempio (EN): $X_i|\theta \sim \mathrm{EN}(\theta)$

- $f_X(x;\theta) = \theta\, e^{-\theta x}, \quad x \geq 0, \theta > 0$
- $L(\theta) = \theta^n e^{-\theta n \overline{x}_n}$
- $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{\overline{x}_n}$
- $\frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{-n\overline{x}_n(\theta_2 - \theta_1)\right\}$
- $\theta_2 > \theta_1 \implies \frac{L(\theta_2)}{L(\theta_1)} \downarrow$ in $\overline{x}_n$ e quindi $\uparrow$ in $\frac{1}{\overline{x}_n} = \widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{x}_n)$

Esempio (EN): sistema di ipotesi A

$H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$

- Teorema K-R $\implies$

$$R = \left\{\mathbf{x}_n :\ \frac{1}{\overline{x}_n} > k\right\} = \{\mathbf{x}_n :\ \overline{x}_n < k\} = \{\mathbf{x}_n :\ \sum_{i=1}^{n} x_i < k\}, \quad k > 0$$

- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta(\sum_{i=1}^n X_i < k) = \mathbb{P}_\theta\left(\overline{X}_n < k\right)$
- $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Ga}(n, \texttt{rate} = \theta)$ e $\theta \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Ga}(n, 1)$
- $\eta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\sum_{i=1}^n X_i < k) = \mathbb{P}_\theta[\text{Ga}(n,1) < k\theta] = F_{\text{Ga}(n,1)}[k\theta]$
- $\eta(\theta) \uparrow$ con $\theta \implies \sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0)$
- $\sup_{\theta \leq \theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0) = \alpha \iff k\theta_0 = q_\alpha \iff k = \frac{q_\alpha}{\theta_0}$
- $R_\alpha = \left\{\mathbf{x}_n :\ \sum_{i=1}^n X_i < \frac{q_\alpha}{\theta_0}\right\}$

Esempio (EN): osservazioni

- sistemi A e B: si procede in modo analogo
- caso A e a coda sinistra e caso B a coda destra
- dipende da monotonia di T sufficiente
- p-value: in funzione della funzione di ripartizione della v.a. Gamma$(n, 1)$
- distribuzione della statistica test sotto H_0 asimmetrica
- Per recuperare i "versi" usuali delle disuguaglianze bisogna formulare il problema in termini di gamma inversa

Test con parametri di disturbo (test del RVM)

Ad esempio test per θ nel modello $\mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$ con σ^2 incognito

considero $\boldsymbol{\theta}$ vettore di dimensione $k = r + s$:

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_r, \boldsymbol{\theta}_s),$$

dove

$$(\boldsymbol{\theta}_r, \boldsymbol{\theta}_s) = (\theta_1, \ldots, \theta_r, \theta_{r+1}, \ldots, \theta_{r+s}).$$

Consideriamo il sistema di ipotesi

$$H_0 : \ \boldsymbol{\theta}_r = \boldsymbol{\theta}_{r0} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \ H_1 : \ \boldsymbol{\theta}_r \neq \boldsymbol{\theta}_{r0}$$

ovvero

$$H_0 : \ \theta_1 = \theta_{10}, \ldots, \theta_r = \theta_{r0}, \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \ \theta_1 \neq \theta_{10}, \ldots, \theta_r \neq \theta_{r0}$$

($\boldsymbol{\theta}_s$ libero sotto H_0 e H_1)

Indichiamo con

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_r, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_s)$$

il vettore delle stime di mv di θ e con

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}_s$$

la stima di mv del parametro di disturbo sotto H_0.
Il rapporto delle verosimiglianze diventa in questo caso

$$\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}_{r0}, \widehat{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}_s; \mathbf{x}_n)}{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_r, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_s; \mathbf{x}_n)}$$

La regione di rifiuto del test di ampiezza α è, al solito

$$R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ \lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) < k_\alpha\},$$

con k_α tale che la probabilità di R calcolata sotto ipotesi nulla è pari ad α:

$$\mathbb{P}(R; H_0) = \mathbb{P}(\lambda_{01}(\mathbf{X}_n) < k_\alpha) = \alpha.$$

Esempio (N2): modello normale - caso C

$X_i|\boldsymbol{\theta} \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ (σ^2 incognito)

- $H_0: \ \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \ \theta \neq \theta_0$.
- θ: parametro di interesse (incognito)
- σ^2: parametro di disturbo (incognito, ma non di interesse)
- $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \sigma^2)$
- $r = 1$
- $\lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) = \frac{L(\theta_0, S_0^2)}{L(\overline{x}_n, \widehat{\sigma}_n^2)}$
- sotto H_0: in $L(\theta, \sigma^2)$ inserisco (θ_0, S_0^2)
- sotto H_1: in $L(\theta, \sigma^2)$ inserisco $(\overline{X}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$
- $L(\theta, \sigma^2) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right\}$

Osservando che

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm \overline{x}_n - \theta_0)^2 = \widehat{\sigma}_n^2 + (\overline{x}_n - \theta_0)^2,$$

il rvm diventa

$$\begin{aligned} \lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) &= \frac{L(\theta_0, S_0^2)}{L(\overline{x}_n, \widehat{\sigma}_n^2)} = \left(\frac{\widehat{\sigma}_n^2}{S_0^2}\right)^{n/2} \frac{\exp\{-\frac{1}{2} n S_0^2 / S_0^2\}}{\exp\{-\frac{1}{2} n \widehat{\sigma}_n^2 / \widehat{\sigma}_n^2\}} \\ &= \left(\frac{\widehat{\sigma}_n^2}{\widehat{\sigma}_n^2 + (\overline{x}_n - \theta_0)^2}\right)^{n/2} \\ &= \frac{1}{\left[1 + \frac{T(\mathbf{x}_n)^2}{n-1}\right]^{n/2}} \end{aligned}$$

dove

$$T(\mathbf{x}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{S_n}$$

e dove S_n^2 è la varianza campionaria corretta

λ_{01}^m è una funzione monotona decrescente di T^2. La regione di accettazione del test è quindi (per k arbitrario)

$$A = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ T(\mathbf{x}_n)^2 \leq k\} = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ -\sqrt{k} \leq T(\mathbf{x}_n) \leq \sqrt{k}\}.$$

Il test di ampiezza α si ottiene determinando il valore di k tale che $\mathbb{P}_{\theta_0}(R) = \alpha$. ovvero che $\mathbb{P}_{\theta_0}(A) = 1 - \alpha$. Osservando che, sotto ipotesi nulla,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{S_n} \sim t_{n-1}$$

abbiamo che (ponendo $k' = \sqrt{k}$)

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(A) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(-k' \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{S_n} \leq k'\right) = 1 - \alpha$$

per $k' = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$, dove $t_{n-1;\epsilon}$ indica il percentile di livello ϵ di una v.a. t di Student con $n-1$ gradi di libertà, le regioni di accettazione e rifiuto del test di ampiezza α sono quindi:

$$A = \left\{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{S_n} \leq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

e

Esempio (N2): tabella riassuntiva

Se σ^2 incognita, per i test su θ

$$W(\mathbf{X}_n) = Q(\mathbf{X}_n; \theta_0) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{S_n}$$

Sotto H_0

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{S_n} \sim t_{n-1}$$

Tipo	H_0	H_1	condiz. di rif. di H_0
A	$\theta \leq (=)\, \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$W(\mathbf{x}_n) > t_{n-1;1-\alpha}$
B	$\theta \geq (=)\, \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$W(\mathbf{x}_n) < t_{n-1;\alpha}$
C	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$\lvert W(\mathbf{x}_n) \rvert > \lvert t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \rvert$

Test di Wilks

Sotto le condizioni di regolarità che garantiscono le proprietà asintotiche degli stimatori di massima verosimiglianza, si ha che

$$-2\ln\lambda_{01}^{m}(\mathbf{X}_n)\dot{\sim}\chi_r^2 \tag{7}$$

Il test (asintotico) ha quindi regione di rifiuto

$$\begin{aligned} R &= \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n :\ \lambda_{01}^{m}(\mathbf{x}_n) < k\} \\ &= \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n :\ -2\ln\lambda_{01}^{m}(\mathbf{x}_n) > k\}, \qquad k > 0. \end{aligned}$$

Test di ampiezza α: determinare k tale che

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(-2 \ln \lambda_{01}^m(\mathbf{X}_n) > k) = \alpha$$

ovvero ponendo

$$k = k_\alpha = \chi^2_{r;1-\alpha}$$

dove $\chi^2_{r;1-\alpha}$ è il percentile di livello $1-\alpha$ della v.a. χ^2_r.

Nel caso in cui si ha un unico parametro incognito,

$$-2 \ln \lambda_{01}^m(\mathbf{X}_n) \dot{\sim} \chi^2_1$$

Esempio (Pois): modello di Poisson

$X_i|\theta \sim \text{Pois}(\theta)$; tratto da Casella-Berger (2002, p. 489)

Sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Si ha

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda_{01}^m(\mathbf{x}_n) &= -2 \ln \left(\frac{e^{-n\theta_0} \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-n\widehat{\theta}_{mv}} \widehat{\theta}_{mv}^{\sum_{i=1}^n x_i}} \right) \\ &= 2n \left[(\theta_0 - \widehat{\theta}_{mv}) - \widehat{\theta}_{mv} \ln(\theta_0 / \widehat{\theta}_{mv}) \right] \end{aligned}$$

con $\widehat{\theta}_{mv} = \overline{x}_n$.

Rifiutiamo H_0 se $-2 \ln \lambda_{01}^m > \chi^2_{1,1-\alpha}$.

Test asintotici

L'implementazione di un test richiede che sia nota

$$f_W(\cdot;\theta)$$

- per determinare la funzione di potenza del test, $\eta_W(\theta)$
- per determinare A_α ed R_α (test di ampiezza α prefissata)

Possiamo usare approssimazioni asintotiche di $f_W(\cdot;\theta)$ quando

- distribuzione di W non è nota
- v.a. discrete (più semplice)

nota bene: i test asintotici hanno ampiezza **effettiva** solo approssimativamente uguale al livello **nominale** α.

Test di Wald

Si basa su stimatori asintoticamente normali di θ

Sia quindi

- $(\widehat{\theta}_n,\ n \in \mathbb{N})$: successione di stimatori asintoticamente normali di θ
- $\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)}$: successione di stimatori delle varianze di $\widehat{\theta}_n$
- la successione

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)}}} \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0,1), \quad \forall \theta \in \Theta$$

- per n grande

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)}}} \dot{\sim} \mathsf{N}(0,1), \quad \forall \theta \in \Theta$$

Allora, $\forall \theta \in \Theta$

$$\widetilde{Q}(\mathbf{X}_n, \theta) = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)}}}$$

è una quantità pivotale **asintotica** per θ e

$$\widetilde{W}(\mathbf{X}_n) = \widetilde{Q}(\mathbf{X}_n, \theta_0) = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)}}}$$

è una statistica test **asintotica**.

Infatti

$$\widetilde{W}(\mathbf{X}_n)|H_0 \dot{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

Osservazioni

- Struttura di $\widetilde{W}(\mathbf{X}_n)$ identica a quella di $W(\mathbf{X}_n)$ per i test su θ del modello $\mathsf{N}(\theta, \sigma^2)$ (σ^2 noto):

$$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\overline{X}_n - \theta_0}{\sqrt{\mathbb{V}_\theta(\overline{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma}$$

- Osserva che:

$$W(\mathbf{X}_n)\Big|H_0 \sim \mathsf{N}(0,1) \qquad\qquad \widetilde{W}(\mathbf{X}_n)\Big|H_0 \,\dot{\sim}\, \mathsf{N}(0,1)$$

- per ogni n finito: $W(\mathbf{X}_n)$ ha ampiezza esattamente uguale a α
- per n finito ma grande: $\widetilde{W}$ ha ampiezza $\widetilde{\alpha}_n \simeq \alpha$
- per $n \to \infty$, $\widetilde{\alpha}_n \to \alpha$
- α: ampiezza **nominale**; $\widetilde{\alpha}$: ampiezza **effettiva** di $\widetilde{W}$

Versione alternativa: $\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n)$

Una versione alternativa del test di Wald [più semplice ma equivalente per n grande] si basa sulla statistica test

$$\widetilde{W}_0(\mathbf{x}_n) = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)|_{\theta=\theta_0}}} = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta_0}{\mathtt{sd}(\theta_0)}$$

dove $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)|_{\theta=\theta_0}$ indica la varianza di $\widehat{\theta}_n$ calcolata in $\theta = \theta_0$.

Come sopra

$$\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n) = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta_0}{\mathtt{sd}(\theta_0)}\bigg| H_0 \dot{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

Con questa versione riusciamo ad ottenere facilmente una approssimazione per la funzione di potenza del test, $\eta_{\widetilde{W}_0}$.

Se, ad esempio, consideriamo il sistema di ipotesi

$$H_0: \ \theta = \theta_0, \qquad \text{vs.} \qquad H_1: \ \theta \neq \theta_0,$$

e

$$R_{\widetilde{W}_0} = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \ |\widetilde{W}_0(\mathbf{x}_n)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\},$$

abbiamo che

$$\widetilde{\alpha}_n = \mathbb{P}_{\theta_0}(R_{\widetilde{W}_0(\mathbf{x}_n)}) = \mathbb{P}_{\theta_0}(|\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \longrightarrow \mathbb{P}(|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha.$$

La funzione di potenza per questo test è

$$\eta_{\widetilde{W}_0}(\theta) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\mathrm{sd}(\theta)} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\mathrm{sd}(\theta_0)}{\mathrm{sd}(\theta)}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\mathrm{sd}(\theta)} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\mathrm{sd}(\theta_0)}{\mathrm{sd}(\theta)}\right).$$

In modo analogo si trovano le funzioni di potenza per $\widetilde{W}_0$ per i test di tipo A e B.
Per i dettagli si vedano le dispense (cap. 6).

Esempio (Ber): modello bernoulliano

$X_i|\theta \sim \mathrm{Ber}(\theta)$

- $\widehat{\theta}_n = \overline{X}_n$
- $\overline{X}_n|\theta \,\dot{\sim}\, \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$
- $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$
- $\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)} = \frac{\overline{x}_n(1-\overline{x}_n)}{n}$
- $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)\Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}$
- $\widetilde{W}(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\Big| H_0 \,\dot{\sim}\, \mathrm{N}(0,1)$
- $\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}}\Big| H_0 \,\dot{\sim}\, \mathrm{N}(0,1)$

Esempio (Pois): modello Poisson

$X_i|\theta \sim \mathrm{Pois}(\theta)$

- $\widehat{\theta}_n = \overline{X}_n$
- $\overline{X}_n|\theta \mathrel{\dot{\sim}} \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\theta}{n}\right)$
- $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n) = \frac{\theta}{n}$
- $\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)} = \frac{\overline{x}_n}{n}$
- $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)\Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{\theta_0}{n}$
- $\widetilde{W}(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sqrt{\overline{X}_n}}\Big| H_0 \mathrel{\dot{\sim}} \mathrm{N}(0,1)$
- $\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sqrt{\theta_0}}\Big| H_0 \mathrel{\dot{\sim}} \mathrm{N}(0,1)$

Esempio (Unif): modello uniforme

$X_i|\theta \sim \text{Unif}[0,\theta]$

- $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_{\text{mom}} = 2\overline{X}_n$
- $2\overline{X}_n|\theta \dot{\sim} \text{N}\left(\theta, \frac{\theta^2}{3n}\right)$
- $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{3n}$
- $\widehat{\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)} = \frac{4\overline{x}_n{}^2}{3n}$
- $\mathbb{V}_\theta(\widehat{\theta}_n)\Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{\theta_0^2}{3n}$
- $\widetilde{W}(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{3n}(2\overline{X}_n - \theta_0)}{2\overline{X}_n}\Big| H_0 \dot{\sim} \text{N}(0,1)$
- $\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{3n}(2\overline{X}_n - \theta_0)}{\theta_0}\Big| H_0 \dot{\sim} \text{N}(0,1)$

Test di Wald e stimatori di MV

Caso più importante: con stimatori di massima verosimiglianza

$$\widetilde{W}(\mathbf{X}_n) = \frac{\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) - \theta_0}{\sqrt{\widehat{I_n(\theta)}^{-1}}}$$

e

$$\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n) = \frac{\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) - \theta_0}{\sqrt{I_n(\theta_0)^{-1}}}$$

Esempio (Beta): modello Beta

$X_i|\theta \sim \text{Beta}(\theta, 1)$

- $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$ $\qquad I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$
- $I_n(\theta)^{-1} = \frac{\theta^2}{n}$
- $\widehat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) \dot{\sim} \text{N}\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$
- $\widehat{I_n(\theta)}^{-1} = \frac{\widehat{\theta}^2_{mv}}{n}$
- $I_n(\theta)^{-1}|_{\theta=\theta_0} = \frac{\theta_0^2}{n}$
- $\widetilde{W}(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{mv} - \theta_0)}{\widehat{\theta}_{mv}}\Bigg| H_0 \dot{\sim} \text{N}(0, 1)$
- $\widetilde{W}_0(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{mv} - \theta_0)}{\theta_0}\Bigg| H_0 \dot{\sim} \text{N}(0, 1)$

Test di Wald per $\psi = g(\theta)$

Dal metodo Delta

$$\widetilde{W}_g(\mathbf{X}_n) = \frac{g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta_0)}{\sqrt{g'(\widehat{\theta}_n)^2 \widehat{I_n(\theta)}^{-1}}}$$

e

$$\widetilde{W}_{g,0}(\mathbf{X}_n) = \frac{g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta_0)}{\sqrt{g'(\theta_0)^2 I_n(\theta_0)^{-1}}}$$

Esempio (Pois): modello di Poisson, $g(\theta) = e^{-\theta}$

$X_i|\theta \sim \text{Pois}(\theta)$

Sappiamo che

$$g(\widehat{\theta}_n) = e^{-\overline{X}_n} \,\dot{\sim}\, \text{N}\left(e^{-\theta}, e^{-2\theta}\frac{\theta}{n}\right).$$

Quindi la statistica test di Wald è in questo caso

$$\widetilde{W}_g(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}\left(e^{-\overline{X}_n} - e^{-\theta_0}\right)}{\sqrt{e^{-2\overline{X}_n}\overline{X}_n}}$$

$$\widetilde{W}_{g,0}(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{n}\left(e^{-\overline{X}_n} - e^{-\theta_0}\right)}{\sqrt{e^{-2\theta_0}\theta_0}}$$

Test per problemi con due campioni

Two-samples problem

Consideriamo

$$X_i^a \sim \mathrm{N}(\mu_a, \sigma_a^2) \qquad \text{e} \qquad X_j^b \sim \mathrm{N}(\mu_b, \sigma_b^2)$$

e due campioni osservati (i.i.d.)

$$\boldsymbol{x}_{n_a} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{x}_{n_b}$$

costituiti rispettivamente da n_a e n_b osservazioni

Vogliamo effettuare test su

$$\mu = \mu_a - \mu_b \qquad \text{e su} \qquad \psi = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}$$

Test per confronto tra medie

varianze note

Consideriamo

$$H_0:\ \mu = \delta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1:\ \mu \neq \delta_0$$

Per risultati noti relativi a v.a. normali, si ha che

$$\overline{X}_{n_a} - \overline{X}_{n_b} \sim \mathrm{N}\left(\mu_a - \mu_b, \frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}\right)$$

La **quantità pivotale** per $\mu = \mu_a - \mu_b$

$$Q(\boldsymbol{X}_{n_a}, \boldsymbol{X}_{n_b}, \mu) = \frac{(\overline{X}_{n_a} - \overline{X}_{n_b}) - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}}}$$

e quindi la **statistica test**

$$W(\boldsymbol{X}_{n_a}, \boldsymbol{X}_{n_b}) = \frac{(\overline{X}_{n_a} - \overline{X}_{n_b}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}}}$$

Schema riassuntivo

confronto tra valori attesi, varianze note

H_0	H_1	condiz. di rif. di H_0
$\mu \leq (=)\, \delta_0$	$\mu > \delta_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) > z_{1-\alpha}$
$\mu \geq (=)\, \delta_0$	$\mu < \delta_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) < z_{\alpha}$
$\mu = \delta_0$	$\mu \neq \delta_0$	$\lvert W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b})\rvert > \lvert z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rvert$

Test per confronto tra medie

varianze incognite e uguali

In questo caso

- **Quantità pivotale**
  $Q(\boldsymbol{X}_{n_a}, \boldsymbol{X}_{n_b}, \mu) = \frac{(\overline{X}_{n_a} - \overline{X}_{n_b}) - \mu}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}}$,
- **Statistica test**
  $W(\boldsymbol{X}_{n_a}, \boldsymbol{X}_{n_b}) = Q(\boldsymbol{X}_{n_a}, \boldsymbol{X}_{n_b}, \delta_0) = \frac{(\overline{X}_{n_a} - \overline{X}_{n_b}) - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}}$,
- **Stimatore** di σ^2:
  $S_p^2 = \frac{(n_a - 1) S_{n_a}^2 + (n_b - 1) S_{n_b}^2}{n_a + n_b - 2}$.
- $W(\boldsymbol{X}_{n_a}, \boldsymbol{X}_{n_b}) \Big|_{\delta = \delta_0} \sim t_{n_a + n_b - 2}$.
- $t_{n_a + n_b - 2; \epsilon}$: percentile di livello ϵ della v.a. t con $n_a + n_b - 2$ gradi di libertà.

Schema riassuntivo

confronto tra valori attesi, varianze incognite ma uguali

H_0	H_1	condiz. di rif. di H_0
$\mu \leq (=)\, \delta_0$	$\mu > \delta_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) > t_{n_a+n_b-2;1-\alpha}$
$\mu \geq (=)\, \delta_0$	$\mu < \delta_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) < t_{n_a+n_b-2;\alpha}$
$\mu = \delta_0$	$\mu \neq \delta_0$	$\lvert W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b})\rvert > \lvert t_{n_a+n_b-2;1-\frac{\alpha}{2}}\rvert$

Test per confronto tra varianze

valori attesi noti

Consideriamo ora il parametro

$$\psi = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}$$

Ricordiamo che

$$\frac{S_{0_a}^2}{S_{0_b}^2} \Big/ \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \sim F_{n_a,n_b}$$

dove

$$S_{0_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_j^i - \mu_i)^2}{n_i}, \; i = a, b$$

(vedi pag. 171)

Infatti, se consideriamo

$$S_{0_a}^2 = \frac{1}{n_a}\sum_{i=1}^{n_a}(X_i^a - \mu_a)^2 \qquad \text{e} \qquad S_{0_b}^2 = \frac{1}{n_b}\sum_{i=1}^{n_b}(X_i^b - \mu_b)^2.$$

abbiamo che

$$U = \frac{n_a S_{0_a}^2}{\sigma_a^2} \sim \chi^2_{n_a} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{n_b S_{0_b}^2}{\sigma_b^2} \sim \chi^2_{n_b}$$

e quindi (costruzione di una v.a. F di Fisher)

$$\frac{U/n_a}{V/n_b} = \frac{\frac{n_a S_{0_a}^2}{\sigma_a^2}\frac{1}{n_a}}{\frac{n_b S_{0_b}^2}{\sigma_b^2}\frac{1}{n_b}} = \frac{S_{0_a}^2}{S_{0_b}^2}\Big/\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \sim F_{n_a,n_b}.$$

La funzione

$$Q(\mathbf{X}_n, \psi) = \frac{S_{0_a}^2}{S_{0_b}^2}\Big/\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}$$

è una q. pivotale per ψ.

Se consideriamo test su ψ e ψ_0 è il valore fissato dalle ipotesi, allora

$$W(\mathbf{X}_{n_a}, \mathbf{X}_{n_b}) = Q(\mathbf{X}_{n_a}, \mathbf{X}_{n_b}, \psi_0) = \left. \frac{S^2_{0_a}}{S^2_{0_b}} \middle/ \psi_0 \right.$$

e

$$\left. \frac{S^2_{0_a}}{S^2_{0_b}} \middle/ \psi_0 \right| H_0 \sim F_{n_a, n_b}$$

Schema riassuntivo

confronto tra varianze, valori attesi noti

H_0	H_1	condiz. di rif. di H_0
$\psi \leq (=)\, \psi_0$	$\psi > \psi_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) > F_{n_a, n_b; 1-\alpha}$
$\psi \geq (=)\, \psi_0$	$\psi < \psi_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) < F_{n_a, n_b; \alpha}$
$\psi = \psi_0$	$\psi \neq \psi_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) > F_{n_a, n_b; 1-\frac{\alpha}{2}}$ oppure $W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) < F_{n_a, n_b; \frac{\alpha}{2}}$

Schema riassuntivo

confronto tra varianze, valori attesi incogniti

La statistica test utilizzata per verificare ipotesi su ψ è

$$W(\mathbf{X}_{n_a}, \mathbf{X}_{n_b}) = \frac{S^2_{n_a}}{S^2_{n_b}} \Big/ \psi_0$$

dove

$$S^2_{n_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X^i_j - \overline{X}_{n_i})^2}{n_i - 1}, \quad i = a, b$$

Sotto l'ipotesi che $\psi = \psi_0$,

$$W(\mathbf{X}_{n_a}, \mathbf{X}_{n_b}) \sim F_{n_a-1, n_b-1}$$

Schema riassuntivo

confronto tra varianze, valori attesi incogniti

H_0	H_1	condiz. di rif. di H_0
$\psi \leq (=)\, \psi_0$	$\psi > \psi_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) > F_{n_a-1, n_b-1; 1-\alpha}$
$\psi \geq (=)\, \psi_0$	$\psi < \psi_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) < F_{n_a-1, n_b-1; \alpha}$
$\psi = \psi_0$	$\psi \neq \psi_0$	$W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) > F_{n_a-1, n_b-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ oppure $W(\boldsymbol{x}_{n_a}, \boldsymbol{x}_{n_b}) < F_{n_a-1, n_b-1; \frac{\alpha}{2}}$

Relazione tra test intervalli di confidenza

Esiste una relazione formale tra

$$C_{1-\alpha}(\mathbf{x}_n) \qquad \text{e} \qquad A_\alpha(\theta_0)$$

A parole: dato un campione $\mathbf{x}_n$

$$\mathbf{x}_n \in A_\alpha(\theta_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta_0 \in C_{1-\alpha}(\mathbf{x}_n)$$

Idea: un intervallo di confidenza $C_{1-\alpha}$ di livello $1-\alpha$ si può ottenere dall'inversione della regione di accettazione $A_\alpha(\theta_0)$ di un test di ampiezza α

Inversione della regione di accettazione di un test

Esempio (N1): modello normale varianza nota

Considero

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Abbiamo

$$A_\alpha(\theta_0) = \left\{ \mathbf{x}_n : \frac{\sqrt{n}|\overline{x}_n - \theta_0|}{\sigma} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$\iff$

$$\frac{\sqrt{n}|\overline{x}_n - \theta_0|}{\sigma} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \iff \quad \overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \theta_0 \leq \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ovvero L'ipotesi nulla viene quindi accetta se e solo se

$$\theta_0 \in C_{1-\alpha}(\mathbf{x}_n) = \overline{x}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Quindi:

- $C_{1-\alpha}(\mathbf{x}_n)$ è formato da tutti quei valori θ_0 che, usati nell'ipotesi nulla del test, vengono accettati quando il campione osservato è $\mathbf{x}_n$
- Dato un test con $A_\alpha(\theta_0)$ posso trovare un $\mathrm{IC}_{1-\alpha}$
- Le proprietà ottimali del test conferiscono proprietà ottimali al corrispondente $\mathrm{IC}_{1-\alpha}$

Scelta di n con funzione di potenza

Idea: voglio il minimo n tale che

$$\eta(\theta_d) > \gamma, \qquad \gamma \in [0,1]$$

dove θ_d è un valore di $\theta \in \Theta_1$ rilevante

Considero, ad esempio, test tipo A (normale, varianza nota)

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad H_1 : \theta > \theta_0$$

In questo caso

$$\eta(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)$$

Voglio

$$n^* = \min\{n : \ \eta(\theta_d) > \gamma\}$$

dove

$$\eta(\theta_d) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_d)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\eta(\theta_d) = \gamma \qquad & \iff \qquad \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_d)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right) = 1 - \gamma \\
& \iff \quad \frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_d)}{\sigma} + z_{1-\alpha} = z_{1-\gamma} \\
& \iff \quad n = \frac{(z_{1-\gamma} - z_{1-\alpha})^2}{\delta_n^2}
\end{aligned}$$

dove

$$\delta_n = \frac{\theta_0 - \theta_d}{\sigma} \qquad \texttt{effect size}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
n^* &= \left\lceil \frac{(z_{1-\gamma} - z_{1-\alpha})^2}{\delta_n^2} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{(z_\gamma + z_\alpha)^2}{\delta_n^2} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\sigma^2 (z_\gamma + z_\alpha)^2}{(\theta_0 - \theta_d)^2} \right\rceil
\end{aligned}
$$

n^* dipende da

- α e γ
- δ_n, ovvero da θ_0, θ_d e σ