

Cognome, nome e n. di matricola: _____

Si corregge solo quanto riportato in questi fogli

Parte A – Quesiti [rispondere a 9 quesiti a scelta su 10; indicare il quesito che si salta: ...]

1. Sia $X \sim \text{Unif}[0, 1]$. Determinare l'espressione della funzione di densità $g_s(x; \sigma)$ per il generico membro della corrispondente famiglia scala, con parametro $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

Risp.

$g_s(x; \sigma) = \frac{1}{\sigma} \mathbb{I}_{[0, \sigma]}(x)$ e quindi si ottiene la densità della v.a. uniforme in $[0, \sigma]$.

2. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) da una popolazione $\text{Ga}(\theta_1, \text{scale} = \theta_2)$. Determinare lo stimatore dei momenti $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ per il parametro vettoriale (θ_1, θ_2) .

Risp.

Il sistema dei momenti è

$$\begin{cases} \bar{X}_n = \theta_1 \theta_2 \\ \hat{\sigma}_n^2 = \theta_1 \theta_2^2 \end{cases}$$

da cui si ottiene il vettore a due componenti dello stimatore dei momenti: $\hat{\theta}_m = \left(\frac{\bar{X}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2}, \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\bar{X}_n} \right)$

3. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) con ciascuna $X_i \sim \chi_\theta^2$. Determinare lo stimatore dei momenti $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$ per il parametro θ (gradi di libertà).

Risp.

Dal fatto che $\mathbb{E}_\theta[X] = \theta$ discende che $\hat{\theta}_m = \bar{X}_n$.

4. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) con ciascuna $X_i \sim \chi_\theta^2$. Determinare la funzione MSE per lo stimatore \bar{X}_n di θ (gradi di libertà) e verificare che è non distorto e consistente per θ .

Risp.

$\mathbb{E}_\theta[\bar{X}_n] = \theta$; $\mathbb{V}_\theta[\bar{X}_n] = \frac{2\theta}{n}$; $\text{MSE}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{2\theta}{n} \rightarrow 0$ per ogni $\theta > 0$ al crescere di n . Lo stimatore è quindi non distorto e consistente in senso forte e debole.

5. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) da una popolazione $N(\mu, \sigma^2)$. Siano inoltre $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $Y_i = Z_i^2$ e $V_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Determinare $\mathbb{E}[Y_i]$, $\mathbb{V}[Y_i]$, $\mathbb{E}[V_n]$ e $\mathbb{V}[V_n]$. Dire inoltre qual è la distribuzione **esatta** della v.a. V_n .

Risp.

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Z_i \sim N(0, 1) \implies Y_i \sim \chi_1^2 \implies V_n \sim \chi_n^2$. Quindi: $\mathbb{E}[Y_i] = 1$, $\mathbb{V}[Y_i] = 2$, $\mathbb{E}[V_n] = n$, $\mathbb{V}[V_n] = 2n$.

6. Con riferimento al precedente esercizio, applicando il teorema del limite centrale alle successione delle v.a. V_n e $\bar{V}_n = \frac{V_n}{n}$, determinarne le distribuzioni asintotiche.

Risp.

$\frac{V_n - n}{\sqrt{2n}} \overset{d}{\sim} N(0, 1) \implies V_n \overset{d}{\sim} N(n, 2n)$ e $\bar{V}_n \overset{d}{\sim} N(1, 2/n)$.

7. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) da una popolazione $\text{Pois}(\theta)$, con $\mathbb{E}_\theta[X] = \mathbb{V}_\theta[X] = \theta$. Determinare l'espressione di $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta[X^2]$ e della sua stima di massima verosimiglianza.

Risp.

$$g(\theta) = \mathbb{V}_\theta[X] + \mathbb{E}_\theta[X]^2 = \theta + \theta^2 \text{ e quindi, poich\`e } \hat{\theta}_{mv} = \bar{X}_n, \text{ si ha } \hat{g}_{mv}(\theta) = g(\hat{\theta}_{mv}) = \bar{X}_n(1 + \bar{X}_n).$$

8. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) da una popolazione $\text{Unif}[\theta, 1]$, con $0 \leq \theta < 1$. Determinare: (a) $L(\theta; \mathbf{x}_n)$, funzione di verosimiglianza di θ e il suo grafico; (b) una statistica sufficiente minimale; (c) $\hat{\theta}_{mv}$, stima di massima verosimiglianza di θ .

Risp.

(a) $L(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^n} \mathbb{I}_{[0, x_{(1)}]}(\theta)$. Il grafico \u00e8 banale. Notare per\u00f2 che $L(\theta) \Big|_{\theta=0} = 1$.

(b)-(c) $T(\mathbf{x}_n) = \hat{\theta}_{mv} = x_{(1)}$.

9. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale (iid) da una popolazione $\text{N}(\theta, \theta)$, $\theta > 0$. Determinare le funzioni MSE degli stimatori \bar{X}_n e S_n^2 per θ .

Risp.

Entrambi gli stimatori sono non distorti e quindi la loro funzione MSE concide con la loro varianza. In particolare:

$$\text{MSE}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{\theta}{n} \text{ e } \text{MSE}_\theta(S_n^2) = \frac{2\theta^2}{n-1}.$$

10. Con riferimento al precedente esercizio, determinare i valori di $\theta > 0$ per i quali lo stimatore S_n^2 ha funzione MSE inferiore a quella dello stimatore \bar{X}_n .

Risp.

$$\text{MSE}_\theta(S_n^2) = \frac{2\theta^2}{n-1} < \frac{\theta}{n} = \text{MSE}_\theta(\bar{X}_n) \iff \theta < \frac{n-1}{2n}.$$

Parte B – Problema [rispondere a 9 quesiti a scelta su 10; indicare il quesito che si salta: ...]

Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale (iid) da una popolazione X con funzione di densità di base

$$f_X(x; \theta) = \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad \theta > 0.$$

Per la v.a. X sappiamo che $\mathbb{E}_\theta[X] = 3\theta$ e $\mathbb{V}_\theta[X] = 3\theta^2$.

• • •

1. Verificare che θ è un parametro di scala per la densità di base $f_X(x; \theta)$ [Sugg.: usare la definizione di $g_s(\cdot; \theta)$, generica funzione di densità per una famiglia scala].

Risp.

Per $\theta = 1$ si ha che $f_X(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x)$ e quindi $g_s(x; \theta) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{x}{\theta}\right)$ coincide con la funzione del testo.

2. Scrivere la generica funzione di densità di una v.a. $\text{Ga}(\alpha, \text{scale} = \beta)$ e verificare che la v.a. X di base ha distribuzione appartenente a tale famiglia e stabilire per quali valori di α e β ciò risulta vero. coincide con $f_X(x; \theta)$.

Risp.

Si verifica che X ha densità gamma con $\alpha = 2$ e $\beta = \theta$ nella parametrizzazione scale.

3. Determinare la moda (ovvero il punto di massimo) x^* della densità $f_X(x; \theta)$.

Risp.

Si verifica facilmente che $\frac{d}{dx} \ln f_X(x; \theta) = 0 \iff x = 2\theta$. Inoltre la derivata seconda è minore di zero per ogni $x \geq 0$. Si ha quindi che $x^* = 2\theta$ è punto di massimo della funzione considerata, ovvero moda per la densità in esame.

4. Determinare l'espressione dello stimatore dei momenti $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$ del parametro θ e calcolarne valore atteso, varianza e MSE. Discutere quindi distorsione e consistenza (forte e debole) dello stimatore.

Risp.

Da $\mathbb{E}_\theta[X] = 3\theta$ si ha che $\hat{\theta}_m = \frac{\bar{X}_n}{3}$. Inoltre $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_m] = \theta$ e $\text{MSE}_\theta[\hat{\theta}_m] = \mathbb{V}_\theta[\hat{\theta}_m] = \frac{\theta^2}{3n} \rightarrow 0$ per ogni $\theta > 0$ al crescere di n . Lo stimatore è quindi non distorto per θ e consistente in senso forte e debole per lo stesso parametro.

5. Determinare una statistica sufficiente minimale per il modello e verificare che $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$, stimatore di massima verosimiglianza di θ , coincide con $\hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$L(\theta) = \text{cost} \cdot \theta^{3n} e^{-t_n/\theta}$ con $t_n = \sum_{i=1}^n x_i$, che è quindi statistica sufficiente minimale e completa (per il criterio di fattorizzazione). Dall'analisi della verosimiglianza si ottiene facilmente che $\hat{\theta}_{mv} = \frac{\bar{X}_n}{3} = \frac{t_n}{3n}$.

6. Sfruttando le proprietà delle v.a. gamma, determinare la distribuzione **esatta** di $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n)$.

Risp.

$X_i \sim \text{Ga}^s(3, \theta)$ e quindi, per le proprietà della v.a. gamma nella parametrizzazione scale si ha che $\frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\theta}_{mv} \sim \text{Ga}^s\left(3n, \frac{\theta}{3n}\right)$.

7. Dimostrare che $\hat{\theta}_{mv}(\mathbf{X}_n) = \hat{\theta}_m(\mathbf{X}_n)$ coincide con lo stimatore UMVUE di θ .

Risp.

$\hat{\theta}_{mv} \in \mathcal{D}_S \cap \mathcal{D}_U$ ovvero risulta essere:

- (a) funzione di statistica sufficiente e completa (il modello è famiglia esponenziale);
- (b) stimatore non distorto di θ .

Per i teoremi di RB-LS si tratta quindi di UMVUE di θ .

NB: si può anche usare il limite inferiore di CR ma la procedura è più lunga.

8. Calcolare l'espressione di $I_1(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_X(X; \theta) \right]$ (informazione attesa di Fisher associata a una singola osservazione).

Risp.

Si verifica facilmente che $I_1(\theta) = \frac{3}{\theta}$.

9. Sia $S_1(X; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(X; \theta)$ la funzione score associata alla v.a. X . Verificare con il modello di base in esame che $\mathbb{E}_\theta[S_1(X; \theta)] = 0$.

Risp.

Si verifica facilmente che $S_1(X; \theta) = -\frac{3}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}$ e quindi che $\mathbb{E}_\theta[S_1(X; \theta)] = 0$.

10. Con riferimento ai precedenti esercizi, verificare che $\mathbb{V}[S_1(X; \theta)] = I_1(\theta)$.

Risp.

$\mathbb{V}_\theta[S_1(X; \theta)] = \mathbb{V}_\theta \left[-\frac{3}{\theta} + \frac{X}{\theta^2} \right] = \frac{\mathbb{V}_\theta[X]}{\theta^4} = \frac{3}{\theta^2} = I_1(\theta)$.