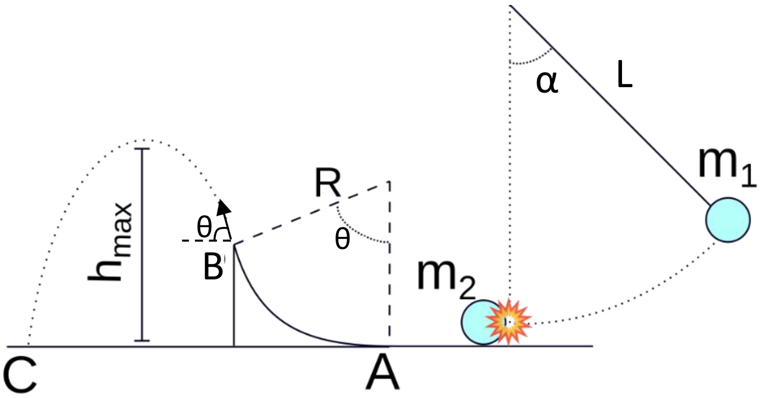
Esonero di Meccanica del corso di Fisica per Scienze biologiche
Proff. M. De Luca, R. Maoli, L. Monacelli, M. Raggi – 30 Aprile 2025

Esercizio 1

Una massa m_1 = 0.440 kg è appesa a una corda lunga L = 1.40 m e viene lasciata cadere da un'altezza corrispondente a un angolo α = 45° rispetto alla verticale. Quando passa per la posizione verticale, la corda si spezza e m_1 urta un corpo di massa m_2 = 180 g inizialmente ferma, rimanendo incollata (urto perfettamente anelastico). Determinare:

a) la velocità delle due masse subito dopo l'urto;
b) la tensione massima T della fune immediatamente prima che si rompa.



Successivamente, le due masse incollate salgono senza attrito su una rampa circolare di raggio R = 28.0 cm che spazza un angolo θ = 60° (AB), e vengono lanciate in aria come in figura. Determinare:

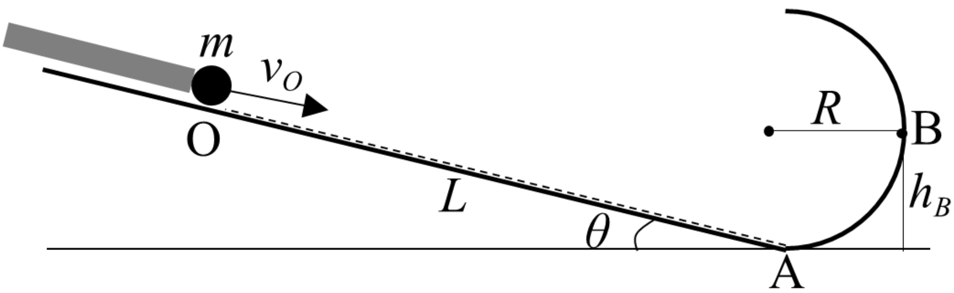
c) l'altezza massima h_{max} raggiunta dalle masse quando sono attaccate;
d) il modulo della velocità delle masse immediatamente prima di arrivare nel punto di caduta C.

Esercizio 2

Un corpo di massa m = 1.20 kg viene messo in moto da una stecca da biliardo che gli trasferisce una quantità di moto iniziale P = 5.64 Ns. Il corpo percorre il tratto OA di lunghezza L = 2.80 m su un piano inclinato di un angolo θ = 30° con coefficiente d'attrito μ_d e risale lungo una guida semicircolare liscia di raggio R = 1.80 m fino alla posizione B, a un'altezza $h_B = R$.

Calcolare:

a) il coefficiente d'attrito dinamico μ_d;
b) la reazione vincolare della guida nella posizione B;
c) la posizione finale del corpo, quando si ferma definitivamente (considerare $\mu_s > \text{tg}\,\theta$);
d) il lavoro totale della forza d'attrito.



Soluzione Esonero 30 Aprile 2025

Soluzione Esercizio 1

a) L'altezza iniziale della prima massa è $h_1 = L(1 - \cos\alpha)$da cui ricaviamo la velocità con cui urta la seconda massa (usando la conservazione dell'energia meccanica)

$$v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = 2.84 \text{ m/s}$$

Usando la conservazione della quantità di moto per l'urto anelastico possiamo scrivere:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_A$$

Otteniamo:

$$v_A = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = 2.01 \text{ m/s}$$

b) Per trovare la tensione della fune abbiamo che la risultante di tutte le forze deve essere pari alla massa m_1 per l'accelerazione centripeta

$$T - m_1 g = m_1 m a_{cp} \quad \text{con } a_{cp} = \frac{v_1^2}{L}$$

Quindi $T = m_1 g + m_1 \frac{v_1^2}{L} = 6.84$ N.

c) Dopo il punto B, il moto diventa un moto del proiettile. Calcoliamo la velocità nel punto B e scomponiamola nelle componenti orizzontale e verticale. La velocità in B si trova con la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_B^2 + (m_1 + m_2) g R (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_A^2$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR(1-\cos\theta)} = 1.14 \text{ m/s}$$

Scomponiamola nelle componenti orizzontale e verticale:

$$v_{Bx} = v_B \cos\theta = 0.571 \text{ m/s} \qquad v_{By} = v_B \sin\theta = 0.987 \text{ m/s}$$

Per trovare h_{max} si può usare la componente verticale v_{By} come se il corpo si muovesse solo sulla verticale con velocità iniziale v_{By} e quota iniziale $h_B = R(1 - \cos\theta)$ allora:

$$h_M = \frac{v_{By}^2}{2g} + h_B = \frac{v_{By}^2}{2g} + R(1 - \cos\theta) = 14 + 5 = 19 \text{ cm}$$

Se si volesse risolvere il problema con l'energia bisogna ricordare che in h_M l'energia cinetica non è zero perché il corpo ha ancora una componente di velocità orizzontale v_{Bx}.

d) Essendo il sistema guida + moto parabolico caratterizzato da sole forze conservative, forza di gravità e guida liscia senza attrito, l'energia cinetica nel punto C è identica all'energia cinetica nel punto A essendo essi sulla stessa quota verticale. Per tale ragione si ha:

$$v_C = v_A = 2.01 \text{ m/s}$$

Soluzione Esercizio 2

a) Per calcolare il coefficiente d'attrito dinamico si può si può utilizzare un approccio energetico tra la posizione iniziale del corpo (O) e la posizione a metà della guida semicircolare. Per il lavoro delle forze non conservative si ha:

$$W_{OB}(F_A) = E_B - E_O$$

$$-\mu_d mg \cos\theta\, L = mgh_B - mg(L\sin\theta) - \frac{1}{2}mv_O^2$$

Esplicitando in funzione di μ_d e utilizzando $v_O = \frac{P}{m} = \frac{5.64}{1.2} = 4.70$ m/s e $h_B = R$ si ha:

$$\mu_d = \frac{v_O^2 + 2g(L\sin\theta - R)}{2g\cos\theta\, L} = \frac{4.7^2 + 2\cdot 9.8\cdot(1.4 - 1.8)}{2\cdot 9.8\cdot 0.866\cdot 2.8} = 0.300$$

b) Nella posizione B la reazione vincolare è diretta verso il centro della guida ed essendo l'unica forza radiale (la forza peso è diretta verso il basso) è pari alla "risultante centripeta". Tuttavia in B il corpo è fermo e quindi la risultante centripeta è nulla:

$$V = m\frac{v_B^2}{R} = 0$$

c) Il corpo, dopo essere arrivato in B, riscende, ripassa per A e risale lungo il piano inclinato fermandosi a una distanza Δs da A. Essendo $\mu_s > \tan\theta$, il corpo non riparte verso il basso.
Per calcolare Δs si può considerare il teorema dell'energia cinetica tra B e la posizione finale del corpo. Considerando che in entrambe le posizioni l'energia cinetica è nulla, si ha:

$$K_{fin} - K_B = 0 = W_{Bf}(mg) + W_{Bf}(F_A) = mg(h_B - \Delta s\sin\theta) - \mu_d mg\cos\theta\,\Delta s$$

Esplicitando in funzione di Δs si ha:

$$\Delta s = \frac{mgh_B}{mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)} = \frac{1.8}{\sin 30 + 0.300\cos 30} = 2.37 \text{ m}$$

d) Il lavoro totale della forza di attrito è dato dal lavoro relativo allo spostamento da O ad A e dal lavoro relativo allo spostamento da A alla posizione finale. Considerando che i entrambi i casi la forza di attrito è $F_A = \mu_d mg\cos\theta$diretta in direzione opposta allo spostamento, si ha:

$$W_{tot}(F_A) = -\mu_d mg\cos\theta(L + \Delta s) = -0.300\cdot 1.2\cdot 9.8\cdot\cos 30\,(2.8 + 2.37) = 15.8 \text{ J}$$