Laboratorio di inferenza statistica (2024-2025)

Lab. 10 – Intervalli di confidenza; test per confronto tra ipotesi semplici
15 maggio 2025

1. (IC asintotico - modello bernoulliano). Calcolare la probabilità di copertura dell'intervallo asintotico $C(\mathbf{X}) = \overline{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}$. Assumere: $\theta = 0.3$, $n = 20$, $M = 10000$, $\alpha = 0.05$.

2. (IC - modello bernoulliano). Con riferimento al precedente esercizio, tracciare il grafico della probabilità di copertura di C al variare di θ in $[0, 1]$.

3. (IC asintotico per $e^{-\theta}$ - modello Poisson). Determinare con MC la probabilità di copertura di $C(\mathbf{X}) = e^{-\overline{X}_n} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\overline{X}_n} \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}$, intervallo di confidenza asintotico per $g(\theta) = e^{-\theta}$ (modello Poisson di parametro θ), assumendo $n = 10$, $\theta = 2$. Considerare $M = 10000$ per la procedura di Monte Carlo. Ripetere per $n = 50$.

4. (Confronto ipotesi semplici modello N1: esempio azioni) [1]. $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, i.i.d. - Si consideri il campione osservato (numero di azioni scambiate in unità di tempo):

   $$\mathbf{x}_n = (63, 65, 94, 37, 83, 95, 70, 96, 47, 29, 52, 38, 47, 79, 66, 25, 48, 80, 52, 49).$$

   Effettuare il test delle ipotesi

   $$H_0 : \theta = 54 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \theta = 58$$

   sapendo che $\sigma = 22$ e assumendo che $\alpha = 0.05$. Calcolare la potenza del test.

5. (Confronto ipotesi semplici modello N1: esempio cereali). $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, i.i.d. - Si consideri il campione osservato in cui (peso cereali inscatolati in grammi): $\overline{x}_n = 372$, $n = 25$. Effettuare il test delle ipotesi

   $$H_0 : \theta = 368 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \theta = 374$$

   sapendo che $\sigma = 15$ e assumendo che $\alpha = 0.05$. Calcolare la potenza del test.

6. (Esempio N1: simulazione per calcolo di α, β e $1 - \beta$ usando media campionaria). $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$, i.i.d. - Considerare il test delle ipotesi

   $$H_0 : \theta = 1 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \theta = 2$$

   assumendo, $n = 10$, $k = 1.52$. Calcolare α, β e $1 - \beta$ attraverso simulazione usando la statistica test $\overline{X}_n$.

7. (Esempio N1: simulazione per calcolo di α, β e $1 - \beta$ usando mediana campionaria). $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$, i.i.d. - Considerare il test delle ipotesi

   $$H_0 : \theta = 1 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \theta = 2$$

   assumendo, $n = 10$, $k = 1.61$. Calcolare α, β e $1 - \beta$ attraverso simulazione usando la statistica test $\mathrm{Med}(\mathbf{X}_n)$.

[1] Confronto tra ipotesi semplici modello N1

Caso	$W(\mathbf{X})$	Rifiuto H_0	Potenza
$\theta_0 < \theta_1$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$W(\mathbf{x}_n) > z_{1-\alpha}$	$1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma} + z_{1-\alpha}\right)$
$\theta_0 > \theta_1$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - \theta_0)}{\sigma}$	$W(\mathbf{x}_n) < z_{\alpha}$	$\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma} + z_{\alpha}\right)$