**Laboratorio di Inferenza statistica** - Prova finale 3 - 1 luglio 2024

**Nome, cognome e matricola:** ______________________________

1. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ iid. Si consideri il campione osservato

$$\mathbf{x}_n = (1.09, 0.04, 0.75, 0.60, 1.19, 1.52, 1.19, 0.06, 0.65, 1.21)$$

Calcolare l'intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.8$.

| Risultato: |
|---|

**Codice**

2. Con riferimento ai dati del precedente esercizio, supporre ora che la varianza del modello sia incognita. Calcolare: stima puntuale di $\theta$, intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.90$ e stabilire se si accetta l'ipotesi nulla del sistema di ipotesi $H_0 : \theta = 1.5$ vs. $H_1 : \theta \neq 1.5$ (per un test di ampiezza $\alpha$). [**Sugg.**: usare la funzione `R` che fornisce direttamente i valori richiesti].

| Risultato: |
|---|

**Codice**

3. $X \sim \text{Ga}(4, \texttt{rate} = 3)$. Determinare: (a) $\mathbb{P}(0.5 < X < 1.5)$; (b) la mediana di $X$.

(a):

(b):

**Codice**

4. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}\left(\texttt{scale} = \frac{\theta-1}{2}\right)$ iid. Determinare il valore atteso dello stimatore per $\widehat{\theta} = 2\overline{X}_n + 1$ (porre $n = 10$ e $\theta = 4$).

Risultato:

**Codice**

5. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Unif}[0, \theta]$, $\theta > 0$ iid. Considerare l'intervallo $[a + X_{(n)}, b + X_{(n)}]$. Determinare il valore atteso del rapporto tra estremo superiore $U(\mathbf{X}_n)$ e estremo inferiore $L(\mathbf{X}_n)$ dell'intervallo, assumendo $\theta = 3$, $a = 0.1$, $b = 2$, $n = 8$.

Risultato:

**Codice**

6. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$ iid. Sia $\mathbb{M}(\mathbf{X}_n)$ la mediana campionaria di $\mathbf{X}_n$. Calcolare la probabilità di copertura dell'intervallo $C = \left[\mathbb{M}(\mathbf{X}_n) - 3\sqrt{\frac{\mathbb{M}(\mathbf{X}_n)}{n}}, \mathbb{M}(\mathbf{X}_n) + 3\sqrt{\frac{\mathbb{M}(\mathbf{X}_n)}{n}}\right]$, per $n = 10$ e $\theta = 3$.

**Codice**

7. (MC) $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(0, \theta)$, iid. Considerare il test delle ipotesi $H_0 : \theta = 5$ vs. $H_1 : \theta = 4$ assumendo, $n = 20$. Calcolare la probabilità $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}[R]$ di errore di primo tipo e la potenza $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}[R]$ del test basato sulla regione di rifiuto $R = \{\mathbf{z}_n : S_n^2 < k = 3.8\}$, dove $S_n^2$ indica la varianza campionaria corretta.

   $\alpha$:

   $1 - \beta$:

   **Codice**

8. (MC) Supporre che $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ (parametrizzazione `scale`). Calcolare il valore atteso di $Y = X - \mathbb{M}(\mathbf{X}_n)$, dove $\mathbb{M}(\mathbf{X}_n)$ indica la mediana della v.a. $X$ (NB: non è la mediana campionaria). Assumere $\theta = 2$.

   Risultato:

   **Codice**