Laboratorio di Inferenza statistica - Prova finale 2 - 5 giugno 2024

Nome, cognome e matricola: ______________________________

1. $X \sim \text{Beta}(3, 4)$. Determinare: (a) $\mathbb{P}(0.5 < X < 0.8)$; (b) il primo quartile di X (ovvero quello di livello 0.25).

   (a):

   (b):

   Codice

2. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{N}(\theta, 2)$ iid. Si consideri il campione osservato $\mathbf{x}_n = (1.88, 1.72, 3.79, 4.66, 4.12, 2.86, 3.14, 3.34, 2.02, 3.74)$. Calcolare l'intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.8$.

   Risultato:

   Codice

3. Con riferimento ai dati del precedente esercizio, supporre ora che la varianza del modello sia incognita. Calcolare: stima puntuale di θ, intervallo di confidenza di livello $1-\alpha=0.85$ e stabilire se si accetta l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = 2.7$ vs. $H_1 : \theta \neq 2.7$ (per un test di ampiezza α). [**Sugg.**: usare la funzione `R` che fornisce direttamente i valori richiesti].

   - stima puntuale:
   - intervallo di confidenza:
   - accettazione/rifiuto di H_0:

   Codice

4. (MC) Supporre che $X \sim \text{Exp}(\theta)$ (parametrizzazione `scale`). Calcolare il valore di $m_3(X) = \mathbb{E}[X^3]$ assumendo $\theta = 2$.

   Risultato:

   Codice

5. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}\,(3, \texttt{scale} = \theta)$ iid. Determinare la varianza di $\widehat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{3}$ (porre $n = 7$ e $\theta = 2$).

Risultato:

Codice

6. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}\,(3, \texttt{scale} = \theta)$ iid. Sia $\widehat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{3}$ Calcolare la probabilità di copertura frequentista dell'intervallo $\widetilde{C} = \left[\widehat{\theta} - \frac{2\widehat{\theta}}{\sqrt{3n}}, \widehat{\theta} + \frac{2\widehat{\theta}}{\sqrt{3n}}\right]$, assumendo $\theta = 5$, $n = 10$.

Risultato:

Codice

7. (MC) Con riferimento al precedente esercizio, calcolare a lunghezza attesa di $\widetilde{C}$.

Risultato:

Codice

8. (MC) $X_i|\theta \sim \mathrm{N}(\mu_0, \theta)$, iid. Considerare il test delle ipotesi $H_0 : \theta = 3.5$ vs. $H_1 : \theta = 2.5$ assumendo $n = 30$ e $\mu_0 = 0$. Calcolare la probabilità $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}[R]$ di errore di primo tipo e la potenza $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}[R]$ del test basato sulla regione di rifiuto $R = \{\mathbf{z}_n : S_0^2 < k = 2\}$, dove $S_0^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2/n$.

α:

$1 - \beta$:

Codice