Laboratorio di Inferenza statistica - Prova finale 1 - 30 maggio 2024

Nome, cognome e matricola: ____________________

1. $X \sim \mathrm{Ga}(3, \texttt{rate} = 4)$. Determinare: (a) $\mathbb{P}(0.5 < X < 1.5)$; (b) la mediana di X.

   (a):

   (b):

   Codice

2. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ iid. Si consideri il campione osservato $\mathbf{x}_n = (1.88, 1.72, 3.79, 4.66, 4.12, 2.86, 3.14, 3.34, 2.02, 3.74)$. Calcolare: (a) l'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.8$; (b) l'intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.9$.

   (a):

   (b):

   Codice

3. Con riferimento ai dati del precedente esercizio, supporre ora che la varianza del modello sia incognita. Calcolare: stima puntuale di θ, intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.95$ e stabilire se si accetta l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = 2.5$ vs. $H_1 : \theta \neq 2.5$ (per un test di ampiezza α). [**Sugg.**: usare la funzione `R` che fornisce direttamente i valori richiesti].

   Risultato:

   Codice

4. (MC) Supporre che $X \sim \text{Exp}(\theta)$ (parametrizzazione `scale`). Calcolare il valore di $\overline{\mu}_3(\theta) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^3)$, momento centrale di ordine 3 di X, assumendo $\theta = 3$.

   Risultato:

   Codice

5. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}\left(\texttt{scale} = \frac{\theta-1}{2}\right)$ iid. Determinare $\text{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ per $\widehat{\theta} = 2\overline{X}_n + 1$ (porre $n = 7$ e $\theta = 3$).

Risultato:

Codice

6. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Unif}[0, \theta]$, $\theta > 0$ iid. Calcolare la probabilità di copertura frequentista dell'intervallo $[aX_{(n)}, bX_{(n)}]$, assumendo $\theta = 3$, $a = 1$, $b = 1.2$, $n = 8$.

Risultato:

Codice

7. (MC) $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$ iid. Sia $\mathbb{M}(\mathbf{X}_n)$ la mediana campionaria di $\mathbf{X}_n$. Calcolare la probabilità di copertura dell'intervallo $C = \left[\mathbb{M}(\mathbf{X}_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}, \mathbb{M}(\mathbf{X}_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, per $n = 15$ e $\theta = 5$.

Codice

8. (MC) $X_i|\theta \sim \text{N}(0, \theta)$, iid. Considerare il test delle ipotesi $H_0 : \theta = 3.5$ vs. $H_1 : \theta = 2.5$ assumendo, $n = 9$. Calcolare la probabilità $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}[R]$ di errore di primo tipo e la potenza $1 - \beta = \mathbb{P}_{\theta_1}[R]$ del test basato sulla regione di rifiuto $R = \{\mathbf{z}_n : S_n^2 < k = 2\}$, dove S_n^2 indica la varianza campionaria corretta.

α:

$1 - \beta$:

Codice