

Cognome, nome, matricola: _____

1. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $N(2, \theta)$, $\theta > 0$.

Per il parametro incognito θ , considerare lo stimatore

$$\hat{\theta} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{2}$$

Fissare $n = 10$, $M=10000$. Utilizzare il metodo di Monte Carlo per calcolare le seguenti quantità, ipotizzando che $\theta^* = 3$:

- (a) $\mathbb{E}[\hat{\theta}] =$
- (b) $\mathbb{P}[\hat{\theta} > 2.5] =$
- (c) $\text{MSE}(\hat{\theta}_A) =$
- (d) Scrivere il codice R utilizzato per rispondere ai quesiti.

2. Con riferimento al modello e alle condizioni del precedente esercizio, si consideri il seguente intervallo di confidenza

$$\left(\frac{\hat{\theta}}{q_2}, \frac{\hat{\theta}}{q_1} \right),$$

dove $q_1 = 0.6$ e $q_2 = 1.2$. Calcolare la probabilità di copertura dell'intervallo proposto.

- (a) Copertura =
- (b) Scrivere il codice R per rispondere al quesito.

3. Con riferimento al modello e alle condizioni dei precedenti esercizi, si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = \theta_0 = 1 \quad H_1 : \theta = \theta_1 = 2.$$

Si consideri la regione di rifiuto del test

$$R = \{\mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : W(\mathbf{x}_n) > 2.2\},$$

dove

$$W(\mathbf{X}_n) = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0}.$$

- (a) Calcolare la probabilità di errore di I tipo.
- (b) Calcolare la potenza del test.
- (c) Scrivere il codice R per rispondere ai quesiti.

4. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $N(\theta, \sigma^2 = 2)$ (varianza INCOGNITA). Si consideri il seguente campione di dati osservati:

$$\mathbf{x}_n = (4.85, 1.04, 4.80, 3.26, 4.06, 3.84, 1.61, 2.61, 1.77, 4.02).$$

Rispondere alle seguenti domande usando la funzione `t.test()`.

- (a) Fornire l'intervallo di confidenza di livello 0.85 per θ .
- (b) Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = 2.30 \quad H_1 : \theta \neq 2.30.$$

Sottoporre a verifica l'ipotesi in un test di ampiezza $\alpha = 0.06$ e dire se H_0 viene accettata o meno, indicando e commentando il **p-value** che si ottiene

- (c) Per il test precedente, fornire il valore della statistica test t e dei gradi di libertà della distribuzione della statistica sotto ipotesi nulla (i valori richiesti SONO forniti dalla funzione `t.test`).
- (d) Indicare il valore delle soglie che definiscono le regioni di accettazione/rifiuto del test se si usa la statistica test t e concludere se si accetta o rifiuta H_0 (i valori delle soglie NON SONO forniti dalla funzione `t.test`).