

Nome, cognome, matricola: _____

IMP.: per tutti gli esercizi riportare risposte numeriche e codice R

1. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\text{Exp}(\theta) = \text{Ga}(1, \text{scale} = \theta)$. Si consideri il seguente campione di dati osservati:

$$\mathbf{x}_n = (3.08, 0.86, 2.49, 0.39, 1.05, 0.38, 1.54).$$

Calcolare il valore della stima di massima verosimiglianza di θ e della verosimiglianza **relativa** in $\theta_0 = 0.9$.

2. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $N(\theta, \sigma^2 = 2)$. Si consideri il seguente campione di dati osservati:

$$\mathbf{x}_n = (4.85, 1.04, 4.80, 3.26, 4.06, 3.84, 1.61, 2.61, 1.77, 4.02).$$

Determinare l'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.8$ e la sua lunghezza.

3. Si considerino i dati dell'esercizio precedente ma si supponga ora **incognito** il valore di σ^2 .

- (a) Fornire stima puntuale e intervallo di confidenza di livello 0.90 per θ .
(b) Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta \leq 2.30 \quad H_1 : \theta > 2.30.$$

Sottoporre a verifica l'ipotesi in un test di ampiezza $\alpha = 0.04$ e dire se H_0 viene accettata o meno, indicando e commentando il **p-value** che si ottiene

- (c) Per il test precedente, fornire il valore della statistica test e dei gradi di libertà della distribuzione della statistica sotto ipotesi nulla.

4. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $N(\mu, \sigma^2)$ (entrambi incogniti). Si consideri l'intervallo di confidenza per σ^2 definito da:

$$C = [aS_n^2, bS_n^2], \quad a = \frac{1}{2}, b = 2.$$

Calcolare con Monte Carlo la probabilità di copertura di C assumendo $n = 15$, $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$ (fissare $M = 10000$).

5. Sia $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ un campione i.i.d. da $\text{Beta}(\theta, 1)$. Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = 4 \quad H_1 : \theta = 3.$$

Si consideri la regione di rifiuto del test

$$R = \left\{ \mathbf{x}_n \in \mathcal{X}^n : \hat{\theta}_M < 3.5 \right\}, \quad \hat{\theta}_M = \frac{\bar{X}_n}{1 - \bar{X}_n}.$$

Supponendo che $n = 10$, calcolare con Monte Carlo ($M=10000$):

- (a) probabilità di errore di I tipo;
- (b) probabilità di errore di II tipo;
- (c) potenza.